MATHEMATIK B

SKRIPTUM ZUR VORLESUNG

Sommersemester 1999

Dr. Peter Wagner

Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik
Universität Innsbruck Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck Tel. 0512/507- 6811 Fax 2941

INHALTSVERZEICHNIS

13 Übungsblätter; Zusatzübungsblatt; 3 Klausuren; 6 Prüfungen; Übungen zu höherer Analysis (WS 2002/03)

Version 5: 17. Jänner 2012

KAPITEL V: DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

§18: Parametrisierte Kurven

18.1 TANGENTIALVEKTOR, BOGENLÄNGE

Beispiel 1 (Kreis) Nach 2.1, Bsp. 3, p. 10, besteht der Einheitskreis aus zwei Funktionen: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$. In $x = \pm 1$ sind f und g nicht differenzierbar. (Die Tangente ist senkrecht.) Dennoch ist die Kreiskurve in den Äquatorpunkten (1,0), (-1,0) nicht "schlechter" als anderswo. Wenn wir den Kreis durch $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, beschreiben, so sind sowohl x als auch y **abhängige** Variable einer neuen unabhängigen Variablen t (genannt "Parameter") und alle Kreispunkte werden gleich behandelt.

Def.:

1) Eine parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion

$$\vec{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist und "stetig" bedeutet, daß $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ stetig sind.

2) Falls alle x_i in t_0 (bzw. schlechthin) differenzierbar sind, so heißt $\vec{x}$ differenzierbar in t_0 (bzw. schlechthin).

$\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t_0) \end{pmatrix}$ heißt Tangentialvektor zum Parameter t_0.

Bemerkungen:

1) Falls t die Zeit bedeutet, heißt $\dot{\vec{x}}(t_0)$ Geschwindigkeitsvektor (und analog $\ddot{\vec{x}}(t_0)$ Beschleunigungsvektor) zur Zeit t_0.

2) $\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0} \\ \vdots \end{pmatrix} = \lim\limits_{t \to t_0} \begin{pmatrix} \dfrac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0} \\ \vdots \end{pmatrix} =$

$\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\text{Sekantenvektor}}{t - t_0}$ ist tangential an die Kurve.

(Die letzten Limites sind dabei wie in 16.2, p. 134 definiert.)

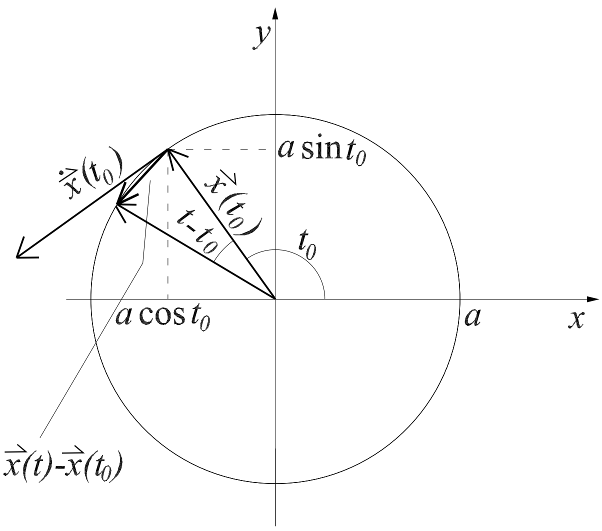
3) Bei 2 bzw. 3 Variablen schreibt man gewöhnlich $x, y, (z)$ statt $x_1, x_2, (x_3)$.

Bsp. 1 (Kreis) $\vec{x} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix}$ liefert eine "Parametrisierung" des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$. Der Parameter $t \in [0, 2\pi]$ ist hier gleich dem Winkel zur x-Achse. Wenn t als Zeit aufgefaßt wird, läuft der "Ortsvektor" $\vec{x}(t)$ in ≈ 6.28 sec um den Kreis.

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix} = -\vec{x}(t),$

$m\ddot{\vec{x}} =$ Kraft, mit der man den Massenpunkt beim Umlauf halten muß =

= "Zentripetalkraft" $= -m\vec{x}$



Beachte: Für die graphische Darstellung eines Vektors kann der Anfangspunkt beliebig gewählt werden. $\vec{x}(t)$ wird i.a. von $\vec{0}$ aus gezeichnet, $\dot{\vec{x}}(t)$ von $\vec{x}(t)$ aus.

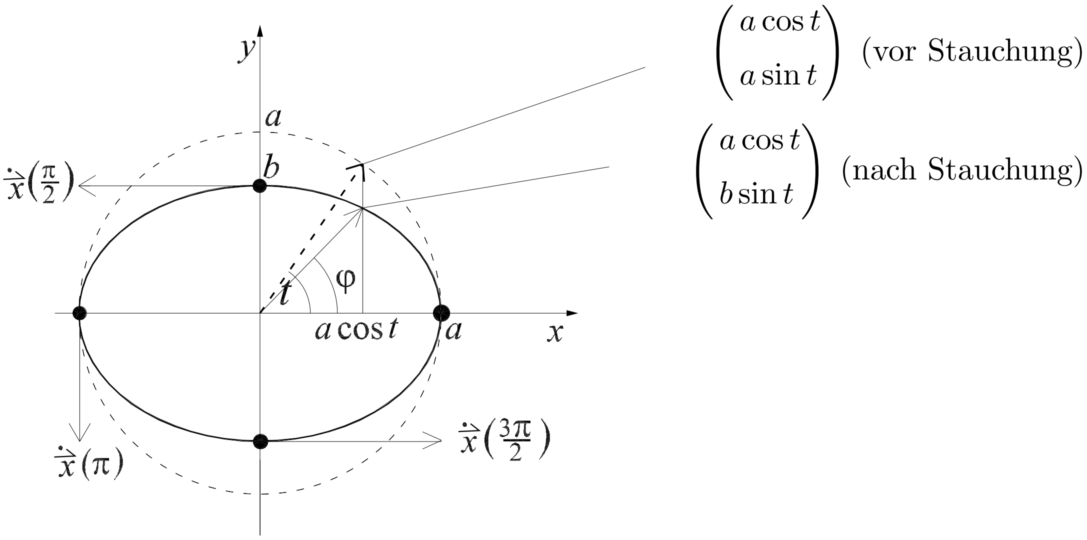
Bsp. 2 (Ellipse) Wenn wir in y-Richtung um den Faktor $\frac{b}{a}$ verzerren $\left(\frac{b}{a} < 1 :\right.$ stauchen, $\left.\frac{b}{a} > 1 : \text{strecken}\right)$, so wird der Kreis zu einer Ellipse:

$$\vec{x} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}.$$

Gleichung der Ellipse:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Nun ist $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$ für verschiedene t verschieden lang. Beachte auch, daß t nun nicht mehr der Winkel zwischen x-Achse und Ortsvektor auf der Ellipse ist. Für $0 < t < \frac{\pi}{2}$ wäre dieser Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{b\sin t}{a\cos t}\right) \neq t$.



Wir vergleichen nun die parametrisierte Darstellung $x(t)$, $y(t)$ einer ebenen Kurve mit der Funktionsdarstellung $y(x)$.

Beachte, daß y hier 3 verschiedene Dinge bezeichnet:

a) die abhängige Variable

b) die Funktion $t \longmapsto y(t)$

c) die Funktion $x \longmapsto y(x)$

(Beim Kreis wäre b): $y(t) = a\sin t$

c): $y(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$)

Eine korrekte, aber mühsame Bezeichnungsweise wäre:

$$x = f(t),\ y = g(t),\ t = f^{-1}(x) \Longrightarrow y = g\big(f^{-1}(x)\big) = (\underbrace{g \circ f^{-1}}_{h})(x), \text{ also } y = h(x).$$

<u>Satz 1</u>

1) Wenn $\vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ in t_0 differenzierbar und $\underline{\dot{x}(t_0) \neq 0}$, so läßt sich y bei $x(t_0)$ als Funktion von x ausdrücken und es gilt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}} \quad \text{bzw. kurz} \quad \boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

2) Wenn $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto \vec{x}(t)$ eine differenzierbare Kurve ist, so ist ihre Bogenlänge

$$\boxed{L = \int_a^b \big\|\dot{\vec{x}}(t)\big\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \cdots + \dot{x}_n(t)^2}\,\mathrm{d}t}$$

<u>Bezeichnung</u> $\mathrm{d}s = \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t$ wird als <u>Bogenelement</u> bezeichnet. $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s(t, \mathrm{d}t)$ ist eine Funktion der 2 Variablen t und $\mathrm{d}t$, vgl. 11.3, p. 91.

<u>1. Beweis</u> (rechnerisch)

1) $\dot{x}(t_0) \neq 0 \Longrightarrow$ (8.2, Satz 4, p. 67) x ist bei t_0 monoton steigend oder fallend $\Longrightarrow$ (p. 18) $x(t)$ ist umkehrbar $\Longrightarrow y = y\big(t(x)\big)$ läßt sich als Funktion von x schreiben $\Longrightarrow$ mit $x_0 = x(t_0)$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\big(\underbrace{t(x_0)}_{=t_0}\big)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(x_0) \underset{\S 7,\ \text{Satz 3, p. 59}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}(t_0)$$

2) Für $n = 2 : \vec{x}(t), \alpha < t < \beta$, sei ein Kurvenstück mit Länge L_1, wo z.B. $\dot{x}(t) > 0 \Longrightarrow x(\alpha) < x(\beta)$ und nach 13.3, p. 109:

$$L_1 = \int\limits_{x(\alpha)}^{x(\beta)} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \qquad \left\| \begin{aligned} x &= x(t) \\ \mathrm{d}x &= \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \\ x &= x(\alpha) \Longrightarrow t = \alpha \\ x &= x(\beta) \Longrightarrow t = \beta \end{aligned} \right.$$

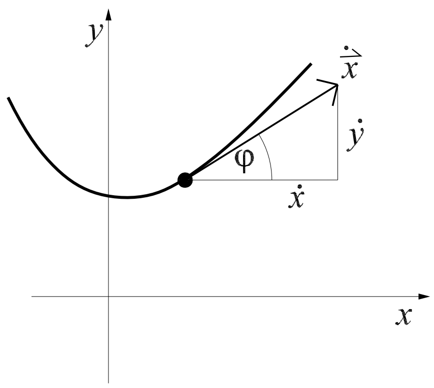
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}}\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Analog wenn $\dot{x}(t) < 0$ oder wenn $\dot{y}(t) \neq 0$ (dann wird x als Funktion von y ausgedrückt). Wenn auf einem Teilintervall $\alpha < t < \beta$ sowohl $\dot{x} = \dot{y} = 0$, so bleibt der Kurvenpunkt stehen und es kommt keine Länge dazu.

<u>2. Beweis</u> (geometrisch)

1) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Tangente $\Longrightarrow y' = \tan\varphi =$

$$= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$



(Analog für $\dot{x} < 0 \vee \dot{y} < 0$)

2) Im $\mathbb{R}^n : Z = \{t_0, \cdots, t_k\}$ sei eine Zerlegung von $[a, b]$;

$$L = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \left\| \vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1}) \right\|;$$

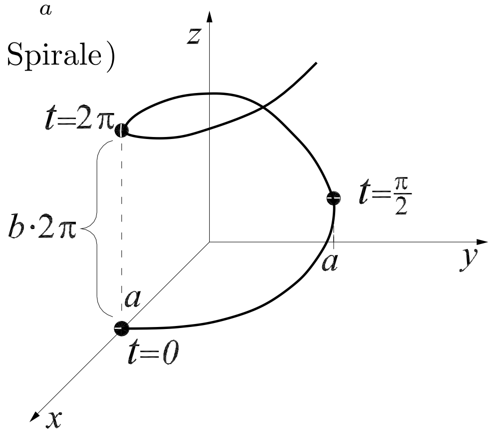
$$\vec{x}(t_i) = \begin{pmatrix} x_1(t_i) \\ \vdots \\ x_n(t_i) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_1(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\dot{x}_1(t_{i-1}) \\ \vdots \\ x_n(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\dot{x}_n(t_{i-1}) \end{pmatrix} = \vec{x}(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\dot{\vec{x}}(t_{i-1})$$

$$L = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \left\| \dot{\vec{x}}(t_{i-1}) \right\| = \int_a^b \left\| \dot{\vec{x}}(t) \right\| \mathrm{d}t \qquad \square$$

Bsp. 3 (Schraubenlinie, Helix, $\check{\varepsilon}\lambda\iota\xi$ = Spirale)

$$\vec{x} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}$$



Die Länge s des Kurvenstückes, das für $\tau = 0 \cdots t$ entsteht, ist

$$s = \int_0^t \left\| \dot{\vec{x}}(\tau) \right\| \mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \tau + a^2 \cos^2 \tau + b^2}\, \mathrm{d}\tau = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wenn wir s als neuen Parameter einführen, so ist also

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und } \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} a\cos\left(s/\sqrt{a^2 + b^2}\right) \\ a\sin\left(s/\sqrt{a^2 + b^2}\right) \\ bs/\sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}.$$

Die Helix wird nun mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen, denn

Satz 2 + Def. $[\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n : s \longmapsto \vec{x}(s)$ sei eine parametrisierte Kurve. Dann sind äquivalent:

(A) $\forall s : \left\| \dot{\vec{x}}(s) \right\| = 1$, d.h. der Tangentialvektor hat Länge 1;

(B) die Bogenlänge des Kurvenstückes, das für $\sigma = \alpha \cdots s$ entsteht, ist $s - \alpha$.

Wenn (A) und (B) gelten, so heißt die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert (und man bezeichnet den Parameter, so wie hier, gewöhnlich mit s).

Beweis: "$A \Longrightarrow B$":

$$A \Longrightarrow \forall \sigma : \left\| \dot{\vec{x}}(\sigma) \right\| = 1 \Longrightarrow \int_\alpha^s \left\| \dot{\vec{x}}(\sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^s 1\, \mathrm{d}\sigma = s - \alpha \Longrightarrow B;$$

"$B \Longrightarrow A$": $B \Longrightarrow \forall s : \displaystyle\int_\alpha^s \left\| \dot{\vec{x}}(\sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma = s - \alpha \qquad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Longrightarrow$

$$1 = \frac{\mathrm{d}(s-\alpha)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int\limits_{\alpha}^{s} \left\|\dot{\vec{x}}(\sigma)\right\| \mathrm{d}\sigma\right) \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \left\|\dot{\vec{x}}(s)\right\| \Longrightarrow A \qquad \square$$

Zurück zu Bsp. 3 B gilt nach Konstruktion;

Kontrolle von A :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(s/\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(s/\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\right\| = \sqrt{\tfrac{a^2}{a^2+b^2}(\sin^2+\cos^2) + \tfrac{b^2}{a^2+b^2}} = 1\checkmark$$

In der neuen Parametrisierung $s \longmapsto \vec{x}(s)$ wird die Helix also mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen (A) und in der Zeit $\sigma = 0 \cdots s$ wird die Länge s zurückgelegt (B).

Bemerkung: In der Theorie läßt sich auf einer differenzierbaren Kurve immer die Bogenlänge als Parameter einführen und zur Herleitung schwieriger Sätze wird das auch oft getan. In der Praxis kann man oft $s = \int\limits_a^t \left\|\dot{\vec{x}}(\tau)\right\| \mathrm{d}\tau$ nicht explizit bestimmen (z.B. schon bei der Ellipse, Bsp. 2).

18.2 KRÜMMUNG EBENER PARAMETRISIERTER KURVEN

Satz 3 $\vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine 2-mal differenzierbare Kurve. Dann gilt für die Krümmung κ und den Krümmungsmittelpunkt M :

$$\kappa = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad M = \vec{x} + \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{pmatrix}$$

(falls die Nenner $\neq 0$ sind. Beachte, daß $\|M-\vec{x}\| = \varrho = \frac{1}{\kappa}$.)

Beweis: $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ nach Satz 1 $\Longrightarrow$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}_{1/\dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \Longrightarrow$$

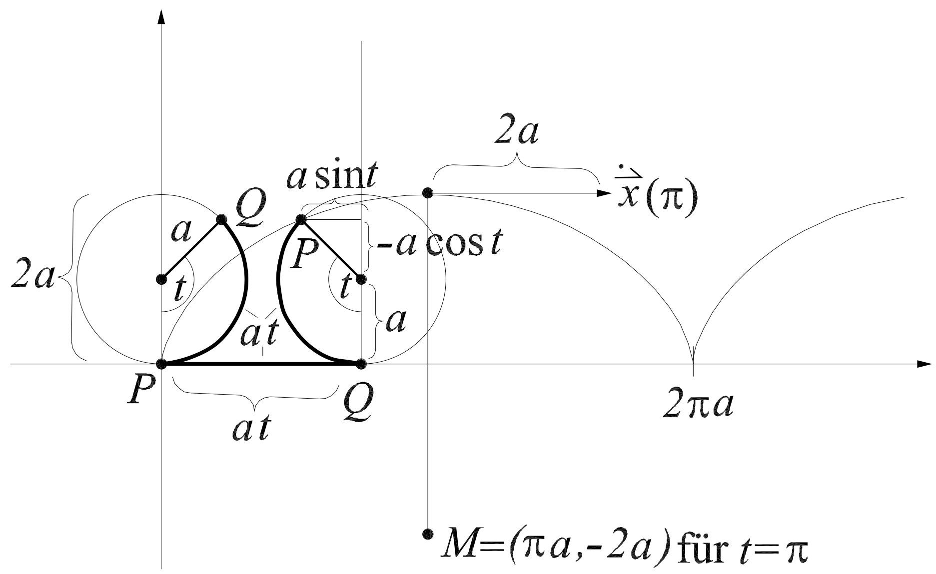
$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{x}|^3\cdot\left(1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Ebenso für M. $\square$

Bemerkung: Vektoriell geschrieben ist $\kappa = \dfrac{|\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} = \dfrac{\|\ddot{\vec{x}}\|\sin\angle(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})}{\|\dot{\vec{x}}\|^2} =$

$= \dfrac{\text{Normalbeschleunigung}}{\text{Geschwindigkeit}^2}\,[\mathrm{m}^{-1}]$ und das letzte gilt auch für $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Bsp. 4 (Zykloide, $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma$ = Kreis) Ein Rad mit Radius a rollt auf der x-Achse (mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 1, d.h. 1 rad/sec). Welche Bahn beschreibt dabei der ursprünglich im Nullpunkt liegende Punkt P des Rades (wenn er z.B. farbig markiert ist und man filmt)?



Zur Zeit t ist P im Punkt $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

(Mechanisch: $\vec{x} = \vec{x}_{(1)} + \vec{x}_{(2)}$, wobei $\vec{x}_{(1)} = a\binom{t}{1}$ = Bahn des Mittelpunktes, $\vec{x}_{(2)} = -a\binom{\sin t}{\cos t}$ = im Uhrzeigersinn parametrisierter Kreis mit $\vec{x}_{(2)}(0) = -a\binom{0}{1}$.)

$$\dot{\vec{x}} = a\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \; \|\dot{\vec{x}}\| = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}} =$$

$$= a\sqrt{\underbrace{2(1-\cos t)}_{}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

$$4\sin^2\frac{t}{2} \;\Longleftarrow\; \left\| \begin{aligned} 1 &= \cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2} \\ \cos t &= \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} \end{aligned} \right.$$

Die Maximalgeschwindigkeit wird also für $t = \pi$ erreicht: $\left\|\dot{\vec{x}}(\pi)\right\| = 2a$.

$$s = \int_0^t \left\|\dot{\vec{x}}(\tau)\right\| \mathrm{d}\tau = 2a\int_0^t \left|\sin\frac{\tau}{2}\right| \mathrm{d}\tau \overset{\text{für } t \le 2\pi}{=}$$

$$= 2a\int_0^t \sin\frac{\tau}{2}\,\mathrm{d}\tau = 2a\left(-\frac{\cos\frac{\tau}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{t} = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

Speziell: Zykloidenlänge nach einem Umlauf = (s für $t = 2\pi$) $= 4a(1 - \cos\pi) = 8a$;

$$\kappa = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} = \frac{|a\cos t\cdot a(1-\cos t) - a\sin t\cdot a\sin t|}{8a^3|\sin(t/2)|^3} =$$

$$= \frac{a^2|\overbrace{\cos t - 1}^{-2\sin^2(t/2)}|}{8a^3|\sin(t/2)|^3} = \frac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|}$$

Speziell: Krümmung $=\infty$ bei $t=0,2\pi,\ldots$; dort hat die Zykloide Spitzen. Krümmung minimal bei $t=\pi,3\pi,\ldots$; dort ist $\varrho = 4a$, $M=(ta,-2a)$.

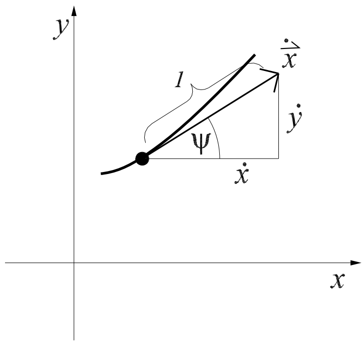
Für den Winkel zwischen Tangente und x-Achse (vgl. 13.4, p. 110) schreiben wir ab nun ψ, da φ für Polarkoordinaten reserviert wird. Dann gilt also $\arg\vec{x} = \varphi + 2k\pi$ **und** $\arg\dot{\vec{x}} = \psi + 2k\pi$.

Bsp. 5 (Klothoide, $\kappa\lambda\acute{\omega}\theta\omega$ = ich spinne) Diese Kurve ist dadurch charakterisiert, daß die Krümmung linear mit der Bogenlänge zunimmt (z.B. Autobahnausfahrt). Somit:

$$\kappa \overset{(13.4,\ \text{p. } 110)}{=} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = as \Longrightarrow \psi = \frac{as^2}{2} + C;$$

es sei $C=0$, d.h. $\psi=0$ für $s=0$, d.h. die Tangente waagrecht für $s=0$. Wenn die Klothoide nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so ist $\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$ und $y' = \tan\psi = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} \Longrightarrow \dot{x} = \cos\psi,\ \dot{y} = \sin\psi$. Also:

$$\dot{\vec{x}}(s) = \begin{pmatrix} \cos\frac{as^2}{2} \\ \sin\frac{as^2}{2} \end{pmatrix}.$$



Wenn $\vec{x}(0)=\vec{0}$ (d.h. die Kurve startet im Ursprung), so folgt $x(s) = \int\limits_0^s \dot{x}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^s \cos\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$ und $y(s) = \int\limits_0^s \sin\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$.

Leider lassen sich diese Integrale nicht durch elementar transzendente Funktionen ausdrücken.

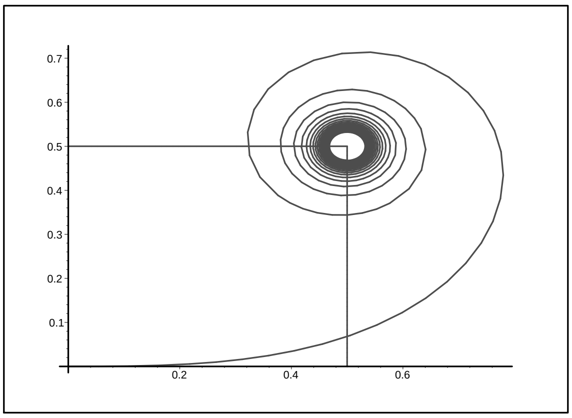
Man definiert die "Fresnel'schen Integrale" durch

$$\begin{Bmatrix} C(t) \\ S(t) \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\tau^2)\,\mathrm{d}\tau.$$

Mit der Substitution $\sigma = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\tau$ folgt dann $\vec{x}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \begin{pmatrix} C\left(\sqrt{\frac{a}{2}}s\right) \\ S\left(\sqrt{\frac{a}{2}}s\right) \end{pmatrix}$.

Bild:

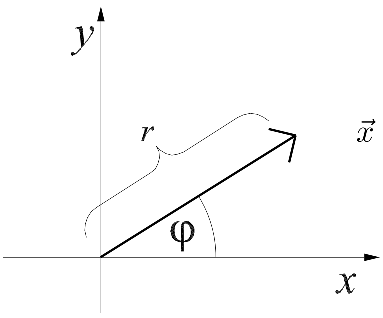
$$S(\infty) = \frac{1}{2}$$



$$C(\infty) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(\tau^2)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}$$

18.3 EBENE KURVEN IN POLARKOORDINATEN

Wiederhole 16.2:



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} z = x + \mathrm{i}y$$

$$r, \varphi \text{ gegeben} \Longrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \vec{x} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$x, y \text{ gegeben} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \arctan \dfrac{y}{x} & : \text{I,IV} \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & : \text{II,III} \end{array} \right\} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Def. 1) (r, φ) heißen Polarkoordinaten von (x, y). (Dabei ist φ durch x, y nur auf Vielfache von 2π bestimmt und für $r = 0$ unbestimmt.)

2) Eine in Polarkoordinaten dargestellte Kurve ist eine stetige Funktion $r = f(\varphi)$. (Wieder schlampig: $r = r(\varphi)$.)

Bemerkung:

Das liefert in x, y eine parametrisierte Kurve:

$$x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi;$$

φ spielt hier die Rolle des Parameters t.

<u>Satz 4</u> Für eine Kurve in Polarkoordinaten gilt:

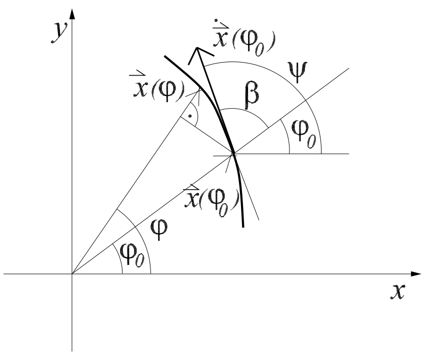
1) Der Winkel β zwischen $\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ erfüllt $\tan\beta = \dfrac{r}{\dot{r}}$.

2) Die Bogenlänge s von φ_0 bis φ_1 erfüllt $s = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$.

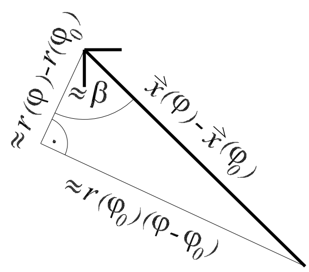
3) Die Krümmung κ erfüllt $\kappa = \dfrac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - \ddot{r}r|}{(r^2+\dot{r}^2)^{3/2}}$.

<u>Beweis:</u> Es sei $\dot{r} > 0$. Der Fall $\dot{r} < 0$ ist ähnlich.

Bild:



Ausschnitt:



(Beachte: Den Winkel $\beta \in [0,\pi]$ zwischen $\vec{x}(\varphi_0)$, $\dot{\vec{x}}(\varphi_0)$ erhält man, indem man beide Vektoren im selben Punkt ansetzt.)

1) $\tan\beta = \lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \tan\angle\big(\vec{x}(\varphi) - \vec{x}(\varphi_0), \vec{x}(\varphi_0)\big) = \lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \dfrac{r(\varphi_0)(\varphi-\varphi_0)}{r(\varphi) - r(\varphi_0)} = \dfrac{r}{\dot{r}}(\varphi_0)$

$$2)\ \ \big\|\dot{\vec{x}}(\varphi_0)\big\| = \lim_{\varphi\to\varphi_0} \left\| \frac{\vec{x}(\varphi) - \vec{x}(\varphi_0)}{\varphi - \varphi_0} \right\| = \lim_{\varphi\to\varphi_0} \frac{\sqrt{\big(r(\varphi) - r(\varphi_0)\big)^2 + r(\varphi_0)^2(\varphi-\varphi_0)^2}}{|\varphi-\varphi_0|} =$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} \sqrt{\left(\frac{r(\varphi)-r(\varphi_0)}{\varphi-\varphi_0}\right)^2 + r(\varphi_0)^2} = \sqrt{\dot{r}(\varphi_0)^2 + r(\varphi_0)^2} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \big\|\dot{\vec{x}}(\varphi)\big\|\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

$$3)\ \kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}(\varphi+\beta)}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\arctan(r/\dot{r})}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| =$$

$$= \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| \cdot \left|1 + \frac{1}{1+(r/\dot{r})^2}\cdot\frac{\dot{r}\dot{r} - \ddot{r}r}{\dot{r}^2}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right|}\cdot\left|1 + \frac{\dot{r}^2 - \ddot{r}r}{r^2+\dot{r}^2}\right| \overset{2)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2+\dot{r}^2}}\cdot\frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - \ddot{r}r|}{r^2+\dot{r}^2} = \frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - \ddot{r}r|}{(r^2+\dot{r}^2)^{3/2}} \qquad \square$$

<u>Bsp. 6</u> (Archimedische Spirale)

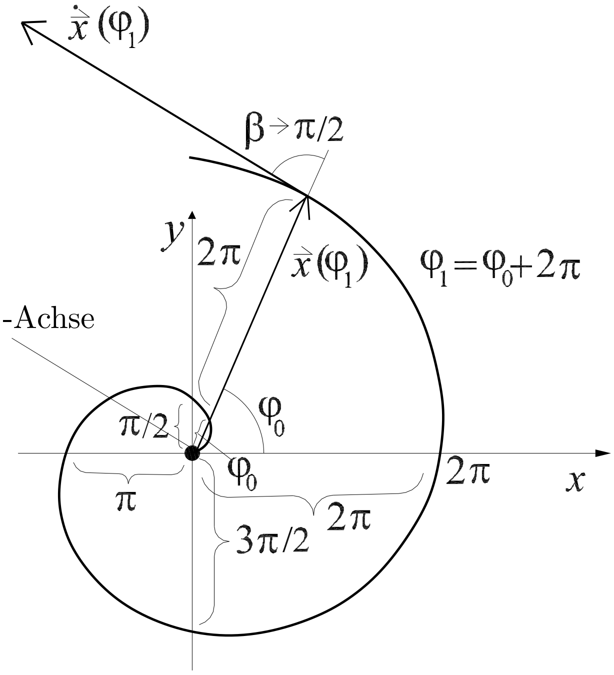
$r(\varphi) = a \cdot \varphi, \quad \varphi \in [0, \infty[\quad (a > 0)$

$\tan\beta = \dfrac{r}{\dot r} = \dfrac{a\varphi}{a} = \varphi$

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \dot r^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Bild für $a = 1$

$$\kappa = \frac{a^2\varphi^2 + 2a^2}{a^3(\varphi^2+1)^{3/2}}$$



Speziell: $\varphi = 0 \Longrightarrow \beta = 0,\ \kappa = \dfrac{2}{a}$

$\varphi \to \infty \Longrightarrow \tan\beta \to \infty \Longrightarrow \beta \to \dfrac{\pi}{2}, \qquad \kappa \to 0$

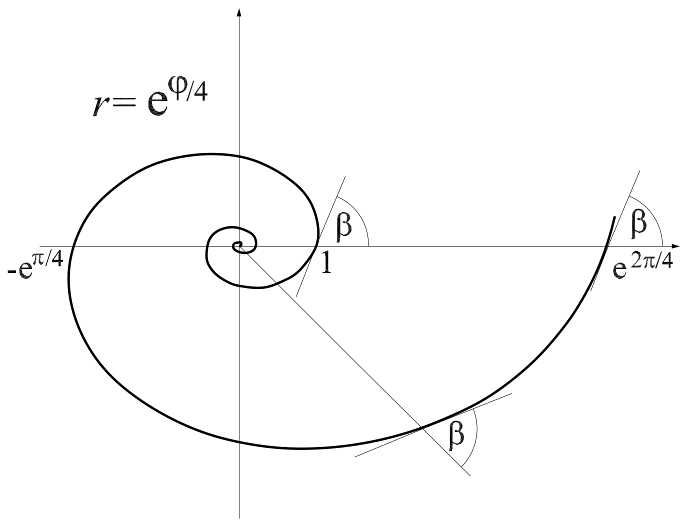
<u>Bsp. 7</u> (Logarithmische Spirale)

$r(\varphi) = a \cdot \mathrm{e}^{b\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R} \qquad (a > 0,\ b > 0)$

$\tan\beta = \dfrac{r}{\dot r} = \dfrac{a\mathrm{e}^{b\varphi}}{ab\mathrm{e}^{b\varphi}} = \dfrac{1}{b} = \text{konstant}$

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2\dot r^2 - r\ddot r|}{(r^2+\dot r^2)^{3/2}} = \frac{|a^2 + 2a^2b^2 - a^2b^2|\mathrm{e}^{2b\varphi}}{(a^2+a^2b^2)^{3/2}\,\mathrm{e}^{3b\varphi}} = \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b\varphi}}$$

Bild für $a = 1,\ b = \dfrac{1}{4}$, d.h. $r = \mathrm{e}^{\varphi/4},\ \tan\beta = 4,\ \beta \approx 1.3258 \approx 76°$



§19: Funktionen von mehreren Variablen

19.1 PARTIELLE ABLEITUNGEN

Def.: 1) Eine (reellwertige) Funktion f von n Variablen ist eine Vorschrift, die jedem Element $\vec{x}$ einer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl $f(\vec{x})$ zuordnet.

Schreibweise: $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = u$

2) Die Menge $\{(\vec{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : u = f(\vec{x})\}$ heißt Graph von f.

Bsp. 1 Die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, d.h. genauer $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ besteht aus den Graphen zweier Funktionen:

$$z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{und} \quad z = g(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

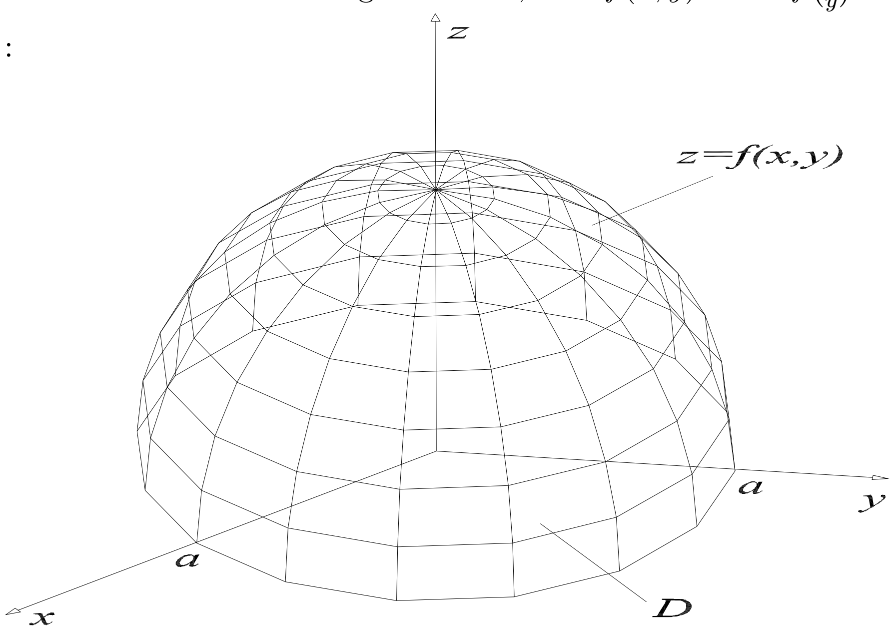
(In 19.4 fassen wir K als "Niveaufläche" der Funktion $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ von drei Variablen auf. f, g hier sind Funktionen von zwei Variablen. Nicht verwechseln!)

Hier ist also $n = 2$, $x_1 = x, x_2 = y, u = z$, $\vec{x} = \binom{x}{y}$, und

$D = \left\{\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$

Beachte: In f wird $\vec{x}$ als Zeilenvektor geschrieben, d.h. $f(x, y)$ statt $f\binom{x}{y}$.

Graph von f :



Def. 1) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \alpha \iff$

$$\boxed{\forall \epsilon > 0} : \boxed{\boxed{\exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta}} : \boxed{\left|f(\vec{x}) - \alpha\right| < \epsilon}$$

d.h. $\boxed{f(\vec{x}) \text{ kommt } \alpha \text{ beliebig nahe}}$

$$\boxed{\boxed{\text{wenn der Abstand von } \vec{x} \text{ und } \vec{x}_0 \text{ genügend klein ist}}}$$

Analog für $\alpha = \pm\infty$. ($\lim\limits_{\vec{x}\searrow\vec{x}_0}$ hat aber keinen Sinn!)

2) f heißt in $\vec{x}_0$ stetig $\iff \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

3) $f(x,y)$ heißt in $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ partiell differenzierbar

$$\begin{aligned} \iff \quad & \text{(a)} \quad x \longmapsto f(x, y_0) \text{ ist in } x_0 \text{ differenzierbar} \\ \wedge \quad & \text{(b)} \quad y \longmapsto f(x_0, y) \text{ ist in } y_0 \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Analog für $f(x,y,z)$ und allgemein $f(\vec{x})$.

Bezeichnung: Die Ableitungen in (a), (b) nennt man partielle Ableitungen und man schreibt dafür $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (oder $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$).

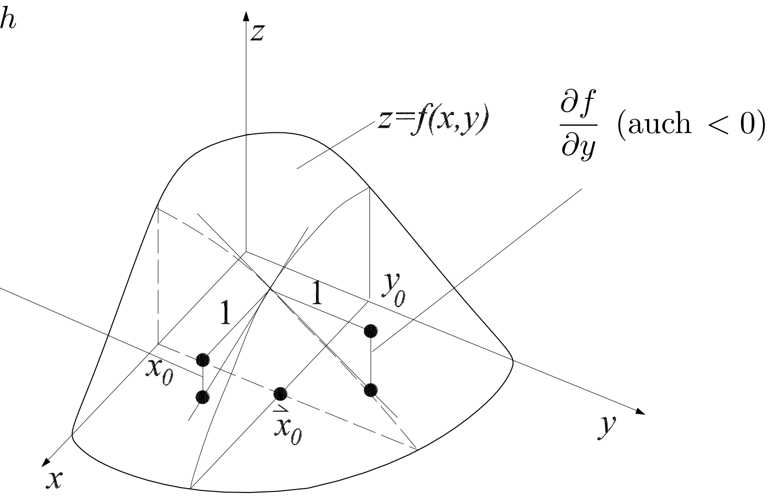
$$\begin{aligned} \text{Somit: } \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x, y \text{ als konstant betrachtet})\big] \\ &= \text{Steigung der Funktion } x \mapsto f(x,y) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big[f(x \text{ als konstant betrachtet}, y)\big] \\ &= \text{Steigung der Funktion } y \longmapsto f(x,y) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{aligned}$$

Bild:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$

(hier < 0, d.h. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -$ gezeichnete Länge)



Bsp. 1 $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (obere Halbkugel)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a^2 - \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{konstant}}} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\underbrace{a^2 - x^2}_{\text{konstant}} - y^2} = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Am Rand von D werden beide partiellen Ableitungen ∞. Dort ist f nicht partiell differenzierbar.

Bsp. 2 $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} : \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 \qquad : \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0,$$

da $f(x,0) = \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(0,y)$.

Also: f ist in $\vec{0}$ partiell differenzierbar.

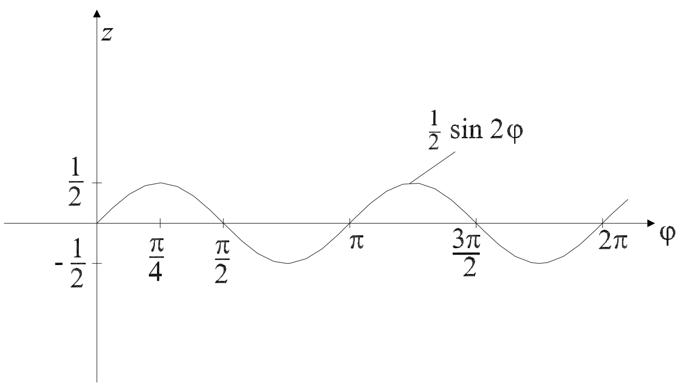
ABER: f ist in $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unstetig, denn für $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, ist

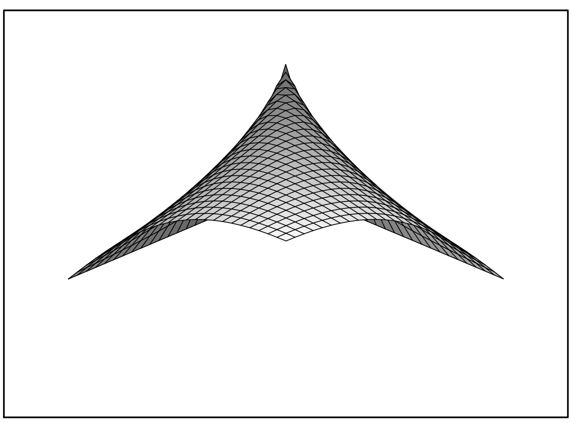
$f(\vec{x}) = \dfrac{a\cdot a}{a^2+a^2} = \dfrac{1}{2}$ und $\|\vec{x}-\vec{0}\| < \delta$, d.h. $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}|a| < \delta$ liefert nicht

$\left|f(\vec{x}) - f(\vec{0})\right| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| < \epsilon$ falls $\epsilon = \frac{1}{4}$.

Bild: In Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ist $z = \dfrac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} =$

$\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$. z ist also für festes φ konstant.





19.2 DIFFERENZIERBARKEIT, TANGENTIALEBENE

Eine differenzierbare Funktion sollte eigentlich stetig sein, vgl. §6, Satz 1, p. 54. Wir müssen also für die Differenzierbarkeit mehr als in 19.1 verlangen.

Beachte: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \dfrac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{\vec{x} - \vec{x}_0}$ ist sinnlos, da man durch den Vektor $\vec{x} - \vec{x}_0$ nicht dividieren kann (außer wenn $n = 2$ und $\vec{x} - \vec{x}_0$ als komplexe Zahl $z - z_0$ aufgefaßt wird. Das führt zur Definition der "komplexen Differenzierbarkeit".)

Man definiert "differenzierbar" daher geometrisch: $\big(\vec{x}, f(\vec{x})\big)$ auf dem Graph kommt einer Tangentialebene an f in $\big(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0)\big)$ "sehr nahe" für $\vec{x} \to \vec{x}_0$, d.h. der Rest ist vom Typ $o\big(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|\big)$.

Def. $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{x}_0 \in D$, $\vec{x}_0$ nicht am Rand von D.

f heißt in $\vec{x}_0$ differenzierbar $\Longleftrightarrow \exists\, A, B \in \mathbb{R}$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + \varrho(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

wobei $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{\varrho(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, d.h. daß ϱ "vom Typ $o\big(\|\vec{h}\|\big)$" ist. (Analog für $D \subset \mathbb{R}^n$.)

Satz 1 f sei in $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Dann gilt:

1) f ist in $\vec{x}_0$ stetig und partiell differenzierbar;

2) $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$.

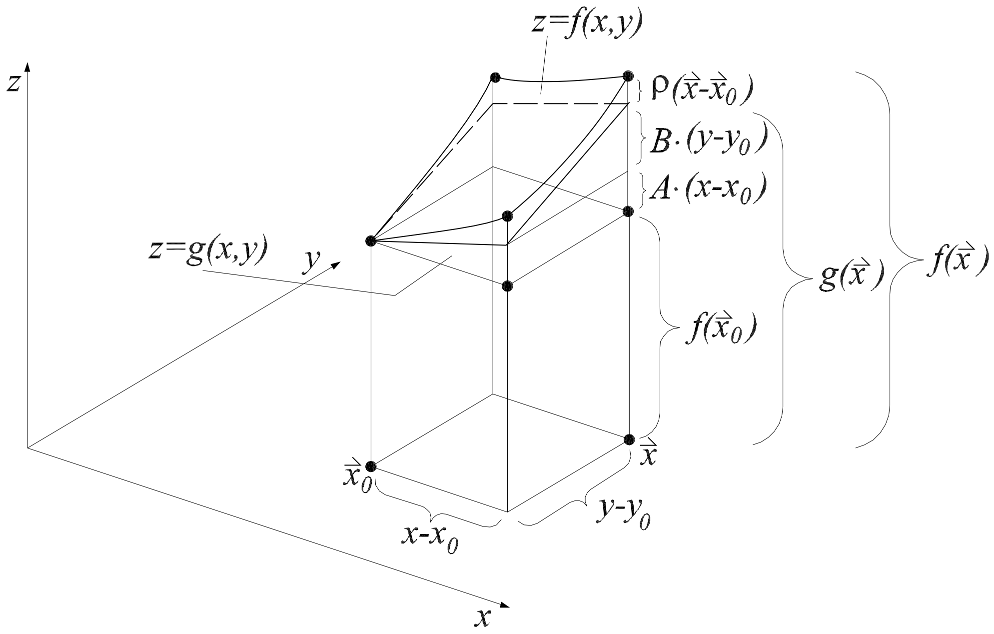
Bezeichnung: Die Ebene

$$\boxed{z = g(x, y) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)}$$

heißt Tangentialebene (vgl. Tangente, §6, p. 52).

(Lt. Def. ist dann $f(\vec{x}) - g(\vec{x})$ vom Typ $o\big(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|\big)$, d.h. $f(\vec{x}) \approx g(\vec{x})$ für $\vec{x} \to \vec{x}_0$).

Bild:



Beweis: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[f(\vec{x}_0) + \underbrace{A(x-x_0)}_{\to 0} + \underbrace{B(y-y_0)}_{\to 0} + \underbrace{\varrho(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\to 0} \right] = f(\vec{x}_0) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f$ ist in $\vec{x}_0$ stetig;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{A(x-x_0) + B(y_0-y_0) + \varrho(x-x_0, y_0-y_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{A(x-x_0) + \varrho(x-x_0,0)}{x-x_0} = A + \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{\varrho(\overbrace{x-x_0,0}^{=\vec{h}})}{\underbrace{x-x_0}_{\pm\|\vec{h}\|}}}_{0} = A
\end{aligned}$$

Analog für B. □

Bemerkung: Wie im 1-dimensionalen gilt, daß Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten (wo der Nenner $\neq 0$), Zusammensetzungen von differenzierbaren Funktionen differenzierbar sind. Daher muß man in der Praxis fast nie auf die Definition zurückgehen.

Bsp. 3 (Rotationsellipsoid)

Es sei $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1, \quad z = f(x,y) = +\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow f(\vec{x}_0) = \frac{2}{3},$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = \frac{-x/2}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}(\vec{x}_0) = \frac{-1/3}{2\cdot 2/3} = -\frac{1}{4},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}(\vec{x}_0) = \frac{-4/3}{2\cdot 2/3} = -1,$$

Tangentialebene: $z = g(x,y) = f(\vec{x}_0) + A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) =$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) - 1\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right) = -\frac{x}{4} - y + \frac{3}{2}.$$

Verallgemeinerung: $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n,\ \vec{x}_0 \in D.$ f in $\vec{x}_0$ differenzierbar $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f$ in $\vec{x}_0$ partiell differenzierbar $\wedge$

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)\cdot(x_1-x_{0,1}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\cdot(x_n-x_{0,n})}_{g(\vec{x})} + \underbrace{\varrho(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\text{vom Typ } o}$$

$u = g(\vec{x})$ heißt Gleichung der Tangentialhyperebene an f in $\vec{x}_0$; g heißt Linearisierung von f bei $\vec{x}_0$.

Schreibweise: Für $x_1 - x_{0,1}$ etc. schreibt man oft $\mathrm{d}x_1$ etc. Dann ist

$$g(\vec{x}) = g(\vec{x}_0 + \mathrm{d}\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x_n}_{\underline{\text{Def}}\ \mathrm{d}f\ (\text{“Differential von } f\text{”})}$$

und $f(\vec{x}) \approx g(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \mathrm{d}f$ für $\vec{x}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. $\mathrm{d}\vec{x}$ klein. $\mathrm{d}f$ ist also eine Funktion der $2n$ Variablen $\vec{x}_0$, $\mathrm{d}\vec{x}$.

In $\vec{x}$ statt $\vec{x}_0$ geschrieben: $f(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x}) \approx g(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x}) = f(\vec{x}) + \mathrm{d}f(\vec{x}, \mathrm{d}\vec{x})$.

Bsp. 3.5 Auf wieviel % kann man die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks angeben, wenn man die Katheten x, y auf 2% genau messen kann?

Lösung: $A(x,y) = \frac{1}{2}xy,\ \mathrm{d}x \le 0.02\,x,\ \mathrm{d}y \le 0.02\,y$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}A = \frac{\partial A}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \frac{y}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{2}\,\mathrm{d}y \le 0.02\,xy = 0.04\,A$$

$\Longrightarrow A$ kann auf 4% genau angegeben werden.

19.3 DIE KETTENREGEL

Gegeben: a) eine Kurve $\vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$;

b) eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$.

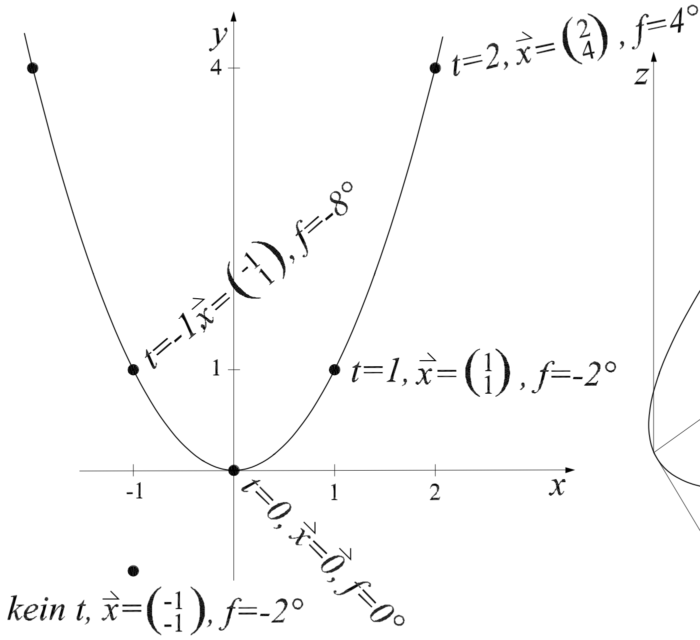
Das Bild der Kurve liege in D. Dann läßt sich $f \circ \vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f\big(\vec{x}(t)\big)$ bilden.

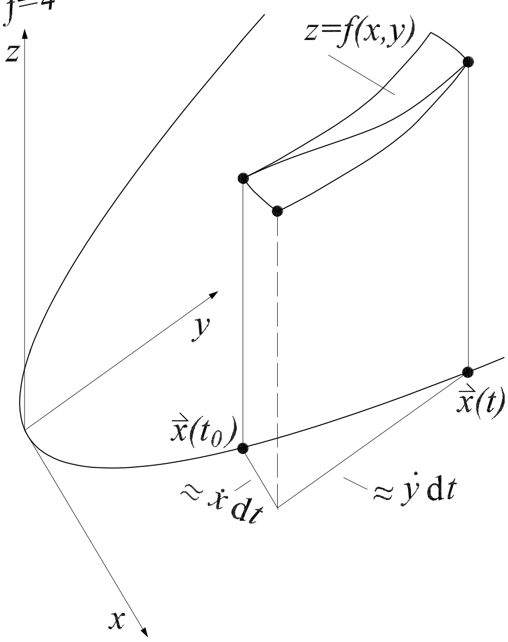
Bsp. 4 Es sei $n = 2$. Wir stellen uns $f(x, y)$ als Temperatur in der xy-Ebene vor. $f \circ \vec{x}(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ ist dann die Temperatur auf der Kurve zur Zeit t.

Problem: Wie verändert sich $f \circ \vec{x}(t)$, d.h. wie ist die Temperaturzu-/abnahme $\dfrac{\mathrm{d}(f \circ \vec{x})}{\mathrm{d}t}$ auf der Kurve?

Z.B. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ (nach x parametrisierte Standardparabel),

$f(x, y) = 3xy - 5x^2 \Longrightarrow f \circ \vec{x}(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = f(t, t^2) = 3t^3 - 5t^2$





Nach dem rechten Bild ist wegen 19.2 $f\big(\vec{x}(t)\big) \approx f\big(\vec{x}(t_0)\big) + A \cdot \dot{x}(t_0)\,\mathrm{d}t + B \cdot \dot{y}(t_0)\,\mathrm{d}t$ mit $\mathrm{d}t = t - t_0$. Das führt zu

Satz 2 (Kettenregel)

$\vec{x}$ sei differenzierbar in t_0, f sei differenzierbar in $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\, f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

In t statt t_0 : $\boxed{f\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{x}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{x}_n}$

Beweis: Z.B. für $n = 2$

$$\frac{\mathrm{d}\, f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f\big(\vec{x}(t)\big) - f\big(\vec{x}(t_0)\big)}{t - t_0};$$

$f\big(\vec{x}(t)\big) = f\big(x(t), y(t)\big) = $ (weil f in $\vec{x}_0$ differenzierbar)

$$= f(\vec{x}_0) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)}^{A} \cdot \big(x(t) - x_0\big) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)}^{B} \cdot \big(y(t) - y_0\big) + \varrho\big(\vec{x}(t) - \vec{x}_0\big)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\, f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f\big(\vec{x}(t)\big) - f(\vec{x}_0)}{t - t_0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot \underbrace{\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}}_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) = \dot{x}(t_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot \underbrace{\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y_0}{t - t_0}}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)} + \underbrace{\lim_{t \to t_0} \frac{\varrho\big(\vec{x}(t) - \vec{x}_0\big)}{t - t_0}}_{=0},$$

denn $$\frac{\varrho\big(\vec{x}(t) - \vec{x}_0\big)}{t - t_0} = \underbrace{\frac{\varrho\big(\vec{x}(t) - \vec{x}_0\big)}{\|\vec{x}(t) - \vec{x}_0\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|\vec{x}(t) - \vec{x}_0\|}{t - t_0}}_{\to \pm\|\dot{\vec{x}}(t_0)\|} \longrightarrow 0, \text{ da}$$

$$\frac{\big\|\vec{x}(t) - \vec{x}_0\big\|}{t - t_0} = \pm\sqrt{\frac{\big(x(t) - x_0\big)^2}{(t - t_0)^2} + \frac{\big(y(t) - y_0\big)^2}{(t - t_0)^2}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \pm\sqrt{\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2} \text{ für } \left\{\begin{matrix} t \searrow t_0 \\ t \nearrow t_0 \end{matrix}\right\}. \qquad \square$$

<u>Zurück zu Bsp. 4</u> $f(x, y) = 3xy - 5x^2$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big) = 3t^3 - 5t^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot} = 9t^2 - 10t.$

Mit der Kettenregel: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y - 10x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x$, $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2t$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{y} = \big(3y(t) - 10x(t)\big) \cdot 1 + 3x(t) \cdot 2t = 3t^2 - 10t + 3t \cdot 2t = 9t^2 - 10t$$

Anschauliche Bedeutung von $f\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot}$: Z.B. zur Zeit $t = 2$ steigt die Temperatur auf der Kurve um $16°/\mathrm{sec}$.

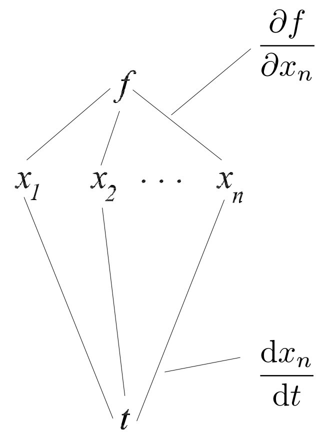
<u>Bemerkungen:</u>

1) In konkreten Fällen ist man mit der Kettenregel langsamer als beim direkten Ausrechnen von $f\big(\vec{x}(t)\big)$ (s. Bsp. 4). Man benötigt die Kettenregel aber gewöhnlich in allgemeinen Situationen, wo $f\big(\vec{x}(t)\big)$ nicht durch Einsetzen berechnet werden kann.

2) Für $n = 1$ gibt Satz 2 gerade die übliche Kettenregel

$$f\big(x(t)\big)^{\cdot} = \underbrace{f'\big(x(t)\big)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_{\text{innere Ableitung}} \qquad \text{(s. §7, p. 58)}$$

Für größere n stellen wir uns die Abhängigkeiten baumartig vor:



Die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\, f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

ergibt sich, wenn wir alle Wege von f nach t gehen, multiplizieren entlang der Wege und dann addieren.

3) Wenn $\vec{x}$ von 2 Variablen u, v abhängt, so hängt auch

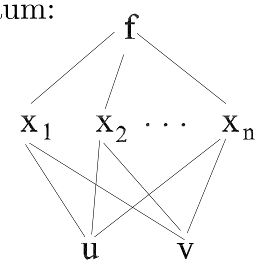
$f \circ \vec{x} = f\big(x_1(u,v), x_2(u,v), \ldots, x_n(u,v)\big)$ von u und v ab.

Bei $\dfrac{\partial\, f \circ \vec{x}}{\partial u}$ wird v festgehalten und u spielt die Rolle von t in Satz 2.

Daher gilt $\dfrac{\partial f \circ \vec{x}}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_n}{\partial u}$

und analog $\dfrac{\partial f \circ \vec{x}}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial v} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_n}{\partial v}$

Baum:



$\dfrac{\partial\, f \circ \vec{x}}{\partial u}$: alle Wege von f nach u

$\dfrac{\partial\, f \circ \vec{x}}{\partial v}$: alle Wege von f nach v

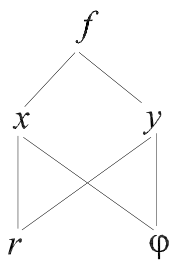
<u>Bsp. 5</u> (Ableitungen in Polarkoordinaten)

a) $z = f(x,y)$ gegeben, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

Wie ändert sich f bei Änderung von r, φ?

Hier ist also $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u = r$, $v = \varphi$;

Baum:



$\tilde{f} = f \circ \vec{x} = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

<u>Schreibweise:</u> Statt $\tilde{f}(r,\varphi)$ schreibt man einfach $f(r,\varphi)$.

Die Kettenregel gibt:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\varphi)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\cos\varphi)$$

<u>Schreibweise:</u> Partielle Ableitungen werden auch manchmal als Index geschrieben, d.h.

$$f_x \ \text{ für } \ \frac{\partial f}{\partial x},\ f_y \ \text{ für } \ \frac{\partial f}{\partial y} \ \text{ etc.}$$

Die Kettenregel sieht dann oben so aus:

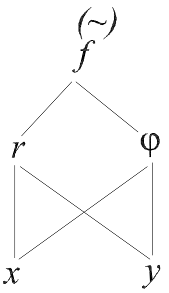
$$f_\varphi = f_x\cdot x_\varphi + f_y\cdot y_\varphi \ \text{ etc.}$$

b) Umgekehrt: $z=\tilde{f}(r,\varphi)$ gegeben, wieder geschrieben als $f(r,\varphi)$.

Wie drücken sich $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ durch $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ aus?

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi=\arctan\frac{y}{x}(+\pi)$



$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{y}{r^2} \ \text{ etc.}$$

<u>Bemerkung:</u> Die eigentlich falsche Schreibweise, wieder f statt $\tilde{f}$ zu schreiben, führt <u>dann</u> zu Fehlern, wenn einige Koordinaten unverändert bleiben:

Z.B. $f(x,y)=x+2y,\ u=x+y,\ v=y$ (unverändert!)

$$\Longrightarrow \tilde{f}(u,v)=\tilde{f}(u,y)=u+y.$$

Wenn man hier $f(u,y)$ statt $\tilde{f}(u,y)$ schreibt, so entsteht ein Fehler, denn

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}=1 \ \text{ aber } \ \frac{\partial f}{\partial y}=2.$$

Mehr dazu in § 21 unter “Koordinatenwechsel”.

19.4 GRADIENT UND RICHTUNGSABLEITUNG

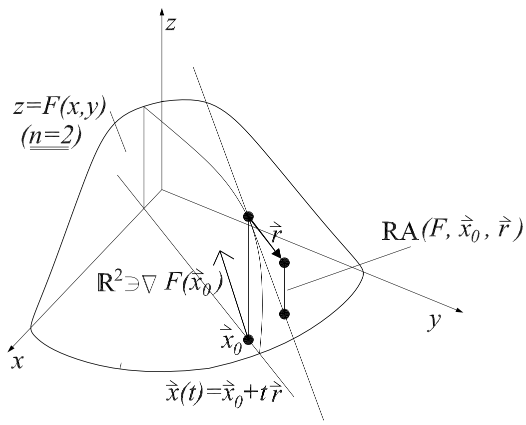
Da wir f noch anderweitig brauchen, schreibe ich hier F für die Funktion. In 19.1 wurden die Steigungen der Kurven betrachtet, die sich ergeben, wenn wir von $\vec{x}_0$ aus parallel zur x bzw. $y-$Achse gehen. Allgemeiner wollen wir nun in eine beliebige Richtung, dargestellt durch einen Einheitsvektor $\vec{r}$, gehen. Wir suchen also die Änderungsgeschwindigkeit von F, wenn von $\vec{x}_0$ aus mit Geschwindigkeit 1 in Richtung $\vec{r}$ gegangen wird.

Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{r}$ (parametrisierte Gerade) $\Longrightarrow$

(Kettenregel) $F\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot}(0) =$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \cdot \underbrace{\dot{x}_1(0)}_{r_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \cdot \underbrace{\dot{x}_n(0)}_{r_n}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}, \vec{r} \right\rangle$$



Def. F differenzierbar in $\vec{x}_0$, $\|\vec{r}\| = 1$, $c \in \mathbb{R}$

1) Der Vektor $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$ heißt Gradient von F in $\vec{x}_0$.

Schreibweisen: grad $F(\vec{x}_0)$, $\nabla F(\vec{x}_0)$ (letzteres sprich "nabla ef von iks null")

2) $\big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r} \big\rangle$ heißt Richtungsableitung von F in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{r}$.

Schreibweise: RA $(F, \vec{x}_0, \vec{r})$

Interpretation: $\big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r} \big\rangle =$ Änderungsgeschwindigkeit von F von $\vec{x}_0$ aus in Richtung $\vec{r}$, vgl. oben.

3) Die Menge $M_c = \big\{\vec{x} \in D : F(\vec{x}) = c\big\}$ heißt Niveaufläche (für $n = 2$ Niveaulinie) von F zum Niveau c.

Interpretation: Wenn z.B. $F =$Temperatur, so ist $M_c =$Menge aller Punkte mit Temperatur c. Beachte, daß sich verschiedene M_c nicht schneiden.

Bsp. 3 $\boxed{n = 3}$ $w = F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

(Um $w = F(x, y, z)$ zu zeichnen, bräuchten wir den $\mathbb{R}^4$.)

a) $\vec{r} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\|\vec{r}\| = 1$;

$$\nabla F = \begin{pmatrix} x/2 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \ \nabla F(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{RA}\,(F, \vec{x}_0, \vec{r}) =$$

$= \big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r} \big\rangle = \left\langle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{2}{9}$, d.h. die Temperatur F fällt von $\vec{x}_0$ aus in Richtung $\vec{r}$ mit Geschwindigkeit $\frac{2}{9}$, d.h. genauer

$$F(\vec{x}_0 + \epsilon \vec{r}) = \underbrace{F(\vec{x}_0)}_{1} - \frac{2}{9}\epsilon + \varrho(\epsilon), \quad \frac{\varrho(\epsilon)}{\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ für } \epsilon \longrightarrow 0.$$

Zahlenbsp.: $\epsilon = 0.01 \Longrightarrow \vec{x}_0 + \epsilon \vec{r} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2.02 \\ 2.01 \\ 1.98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.67\dot{3} \\ 0.67 \\ 0.66 \end{pmatrix}$,

$F(\vec{x}_0 + \epsilon \vec{r}) = \dfrac{0.67\dot{3}^2}{4} + 0.67^2 + 0.66^2 = 0.9978\dot{4}$,

$F(\vec{x}_0) - \frac{2}{9}\epsilon = 1 - \frac{2}{9} \cdot 0.01 = 0.99\dot{7}$, der Unterschied ist das $\varrho(\epsilon)$.

b) Die Niveauflächen sind

$$M_c = \begin{cases} \{\} & : c < 0 \\ \{\vec{0}\} & : c = 0 \\ \text{Ellipsoid } \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = c & : c > 0 \end{cases}$$

Speziell: $\vec{x}_0 \in M_c \Longleftrightarrow c = F(\vec{x}_0) = F\big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\big) = 1$

Problem: In welchen Richtungen steigt/fällt F am schnellsten, in welchen Richtungen ist keine Änderung?

Satz 3 $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $c = F(\vec{x}_0)$. Dann gilt:

1) $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r}) = \big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| \cdot \cos\angle\big(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r}\big)$

   Speziell: a) $\mathrm{RA} = 0$, wenn $\vec{r} \perp \nabla F(\vec{x}_0)$

   b) $\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| =$ maximale RA; diese wird erreicht, wenn $\vec{r}$ in Richtung $\nabla F(\vec{x}_0)$ geht, d.h. wenn $\vec{r} = \dfrac{\nabla F(\vec{x}_0)}{\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\|}$.

   In Worten: Der Vektor $\nabla F(\vec{x}_0)$ weist in die Richtung der stärksten Zunahme von F und seine Länge ist gleich der maximalen Richtungsableitung.

2) Wenn $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \neq 0$ und $c = F(\vec{x}_0)$, so läßt sich die ($\vec{x}_0$ enthaltende) Niveaufläche M_c bei $\vec{x}_0$ als Graph einer Funktion $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ schreiben. Man sagt: “$F(\vec{x}) = c$ definiert f implizit.”

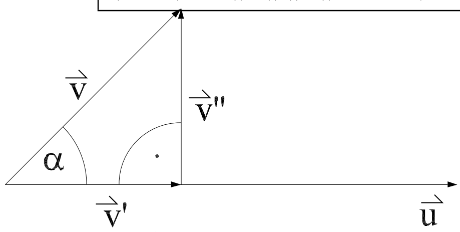
3) Die Tangential(hyper)ebene an M_c in $\vec{x}_0$ ist dann $\big\langle \vec{x}-\vec{x}_0,\, \nabla F(\vec{x}_0)\big\rangle = 0$

Somit: $\boxed{\nabla F(\vec{x}_0) \text{ steht senkrecht auf die Niveaufläche durch } \vec{x}_0}$

Beweis: Wiederholung zu linearer Algebra:

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \boxed{\langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\angle(\vec{u}, \vec{v}\,)}$$

(Vorstellung dazu:



$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}\,''$, $\vec{v}\,' \parallel \vec{u}$,

$\vec{v}\,'' \perp \vec{u} \Longrightarrow \|\vec{v}\,'\| = \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha$, $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

$$\Longrightarrow \vec{v}\,' = \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\Longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\,'\rangle + \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{v}\,''\rangle}_{0}$$

$$= \left\langle \vec{u}, \frac{\|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha}{\|\vec{u}\,\|} \cdot \vec{u} \right\rangle = \frac{\|\vec{v}\|\cos\alpha}{\|\vec{u}\|} \cdot \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}_{\|\vec{u}\|^2} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha)$$

1) $\mathrm{RA}\,(F, \vec{x}_0, \vec{r}) = \big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r}\,\big\rangle =$

$$= \big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| \cdot \underbrace{\|\vec{r}\|}_{=1} \cdot \cos\angle\big(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r}\big) =$$

$$= \begin{cases} \text{maximal} : \angle = 0, \text{ d.h.} & \vec{r} = \dfrac{\nabla F(\vec{x}_0)}{\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\|} \\[2ex] \text{minimal} : \angle = \pi, \text{ d.h.} & \vec{r} = -\dfrac{\nabla F(\vec{x}_0)}{\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\|} \\[2ex] 0 \qquad : \angle = \dfrac{\pi}{2}, \text{ d.h.} & \vec{r} \perp \nabla F(\vec{x}_0) \end{cases}$$

2) Beweisskizze: Betrachte $\begin{array}{ccc} x_n & \longmapsto & \underbrace{F(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} \\ \| & & \\ t & \longmapsto & u(t) \end{array}$ für feste $x_1, \ldots, x_{n-1}$;

$\dot{u} = \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0 \Longrightarrow t = x_n$ läßt sich für feste $x_1, \ldots, x_{n-1}$ als Funktion von $u(t) = F$ ausdrücken (vgl. 18.1, Satz 1, 1. Beweis, 1) $\Longrightarrow M_c =$
$= \big\{\vec{x} : F(\vec{x}) = c\big\} = \big\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) : x_n = \underbrace{\text{Funktion von } c \text{ und } x_1, \ldots, x_{n-1}}_{=f(x_1, \ldots, x_{n-1})}\big\}$

(Ganz genaugenommen braucht man hier als Voraussetzung, daß $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}$ in $\vec{x}_0$ stetig ist.)

3) $\vec{x}(t)$ sei eine Kurve in der Niveaufläche M_c mit $\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \Longrightarrow$

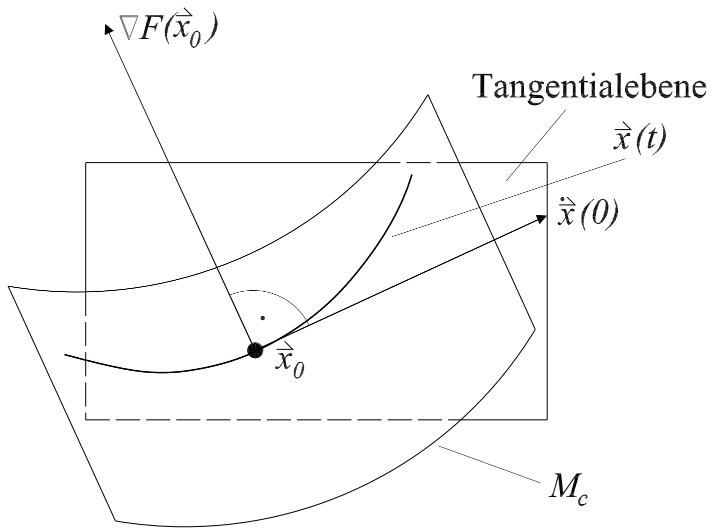
$$\Longrightarrow \forall t : F\big(\vec{x}(t)\big) = c \qquad \Bigg| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$\Longrightarrow \big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \dot{\vec{x}}(0) \big\rangle = 0 \Longrightarrow \nabla F(\vec{x}_0) \perp \dot{\vec{x}}(0) \Longrightarrow \nabla F(\vec{x}_0) \perp$ alle Richtungsvektoren in der Tangentialebene an $M_c \Longrightarrow \nabla F(\vec{x}_0) =$ Normalvektor der Tangentialebene.

Also: $\vec{x} \in$ Tangentialebene $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 \perp \nabla F(\vec{x}_0) \Longleftrightarrow \big\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \nabla F(\vec{x}_0) \big\rangle = 0 \qquad \square$$

Bild:



Zurück zu Bsp. 3 $F = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2,\ \vec{x}_0 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \nabla F(\vec{x}_0) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) Maximale RA für $\vec{r} \parallel \nabla F(\vec{x}_0)$, d.h. $\vec{r} = \dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\mathrm{RA} = \big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| = \dfrac{1}{3}\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{\sqrt{33}}{3} \approx 1.915$

$\mathrm{RA} = 0 \Longleftrightarrow \vec{r} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) $c = F(\vec{x}_0) = 1,\ M_1 = \left\{ \vec{x} : \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 \right\}$;

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(\vec{x}_0) = \dfrac{4}{3} \neq 0 \stackrel{\text{Satz 3,2)}}{\Longrightarrow}$ bei $\vec{x}_0$ ist $z = f(x,y)$; in unserem Fall können wir f ausrechnen, $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$.

3) Tangentialebene: $\big\langle \vec{x}-\vec{x}_0, \nabla F(\vec{x}_0)\big\rangle = 0$, d.h. $\left\langle \vec{x}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}+4\left(y-\frac{2}{3}\right)+4\left(z-\frac{2}{3}\right)\right) = 0 \Longleftrightarrow x+4y+4z=6,$$

$$z = g(x,y) = -\frac{x}{4}-y+\frac{3}{2}, \text{ vgl. } 19.2.$$

Zusammenfassung zu 3): Wir können die Tangentialebene auf zwei Weisen berechnen, nämlich, z.B. für $n=2$ bei f, d.h. $n=3$ bei F :

(a) Bei expliziter Angabe der Funktion $z=f(x,y)$,

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \text{ durch } g : z = f(\vec{x}_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)$$

(b) Bei impliziter Angabe von f mittels $F(x,y,z)=c$,

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} \text{ durch } \Big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{x}-\vec{x}_0\Big\rangle = 0$$

§20: Zweite Ableitungen

20.1 DER SATZ VON SCHWARZ

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei differenzierbar. f heißt (in $\vec{x}_0$) zweimal differenzierbar $\Longleftrightarrow$ alle Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, sind (in $\vec{x}_0$) differenzierbar.

Schreibweisen: 1) Man faßt $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ oft als "Operator" auf, der einer Funktion f die Funktion $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ zuordnet. Daher schreibt man $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f$ für $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

2) Für $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$ schreibt man $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

3) Für $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man oft f_{x_i} und für

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(f_{x_j}) = (f_{x_j})_{x_i}$ schreibt man daher $f_{x_j x_i}$.

Beachte die **verschiedene Reihenfolge** von x_i und x_j in den zwei Schreibweisen!

Bsp. 1 $f(x, y, z) = x^2 y^3 + x \cos z \Longrightarrow$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = 2xy^3 + \cos z,\ f_y = 3x^2 y^2,\ f_z = -x \sin z,$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = 2y^3,$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(3x^2 y^2)}{\partial x} = 6xy^2,$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(2xy^3 + \cos z)}{\partial y} = 6xy^2,$$

$$f_{yy} = 6x^2 y,\ f_{zz} = -x \cos z,\ f_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial(2xy^3 + \cos z)}{\partial z} = -\sin z,$$

$$f_{zx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial(-x \sin z)}{\partial x} = -\sin z,\ f_{yz} = 0 = f_{zy}.$$

Daß f_{xy} und f_{yx} etc. jeweils dasselbe ergeben, ist zum Glück kein Zufall:

Satz 1 (H.A. Schwarz, 1843–1921) Wenn f in $\vec{x}_0$ 2–mal differenzierbar ist, so gilt:

$$\forall i, j : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0)$$

Beweis: Zur Vereinfachung nehmen wir $n = 2$ an und daß f_{yx} in der Nähe von $\vec{x}_0$ definiert und in $\vec{x}_0$ stetig ist; $f_x(x_0, y) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}$,

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(\vec{x}_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0} \\
&= \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0} - \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}}{y-y_0} \\
&= \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)}}_{A}
\end{aligned}
$$

Es sei $g(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y) \Longrightarrow A = \dfrac{g(x,y)-g(x,y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)} \overset{\text{(MWS, 8.2, Satz 3)}}{=}$

$= \dfrac{1}{x-x_0}\cdot g_y(x,y_1) = \dfrac{f_y(x,y_1)-f_y(x_0,y_1)}{x-x_0} \overset{\text{(MWS)}}{=} f_{yx}(x_1,y_1)$ wobei x_1 zwischen x_0 und x liegt, und y_1 zwischen y_0 und y; f_{yx} stetig in $\vec{x}_0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f_{xy}(\vec{x}_0) = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} A = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f_{yx}(x_1,y_1) = f_{yx}(x_0,y_0) = f_{yx}(\vec{x}_0)$ $\square$

Bemerkung: Ebenso gilt für höhere Ableitungen, daß es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Also z.B. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}$

(wenn f 3-mal stetig differenzierbar ist).

20.2 DER LAPLACE-OPERATOR

Bsp. 2 $f : \left\{\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} \neq \vec{0}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto \ln\|\vec{x}\|$.

Also $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.
(Man nennt f "logarithmisches Potential".)

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{0\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Nach Satz 1 ist $f_{yx} = f_{xy}$;

$$f_y = \frac{y}{x^2+y^2},\ f_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ (aus Symmetrie)}$$

Beachte: $f_{xx} + f_{yy} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$

Also $\underbrace{\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{\Delta} f = 0$

<u>Def.:</u> $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, sei zweimal differenzierbar.

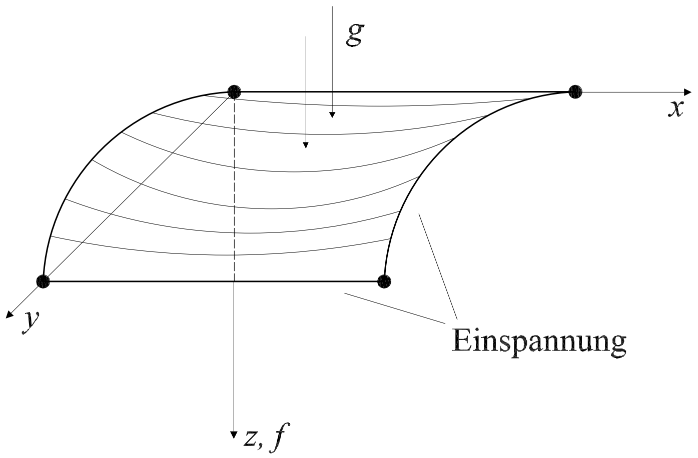
1) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ (sprich "laplaß ef")

Δ heißt <u>Laplace-Operator</u> (nach P.-S. de Laplace, 1749–1827).

2) Wenn $\Delta f = 0$, so sagt man, f ist <u>harmonisch</u> bzw. f <u>erfüllt</u> die <u>Laplacegleichung</u> (oder <u>Potentialgleichung</u>).

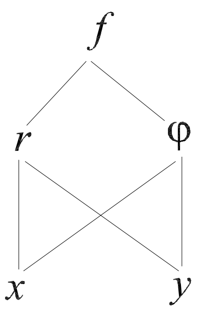
<u>Physikalische Bedeutung:</u> Wenn $D \subset \mathbb{R}^2$ und eine Membran am Rand von D (nicht unbedingt eben) eingespannt ist und unter der Last $g(x,y)$ [N/m^2] steht, so erfüllt ihre Durchbiegung $z = f(x,y)$ die (partielle Differential-)Gleichung $\tau\Delta f = -g$, wobei $\tau =$Membranspannung [N/m].

Speziell: $\Delta f = 0$ heißt Last $= 0$, z.B. Seifenhaut.



20.3 <u>Δ IN POLARKOORDINATEN</u>

Wie berechnet man Δf, wenn f in Polarkoordinaten gegeben ist?
(Etwa in Bsp. 2 wäre $f(r,\varphi) = \ln r$.)



Kettenregel: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial r}}_{u} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial r}{\partial x}}_{v} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$

Zweimal Produktregel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{v} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}}_{v'} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad (*)$$

Noch einmal Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}_{g}\Bigg) = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\partial r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

und ebenso $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}$

Einsetzen in $(*)$ gibt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\partial r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}_{\|} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$
$$+ \overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial \varphi}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

<u>Vorsicht:</u> $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$ und $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ sind etwas Verschiedenes!

Analog für y (ersetze x durch y) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

<u>Zusammen:</u>

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\partial r}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial f}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]$$

(a) $r = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = 1$$

(b) $\varphi = \arctan\frac{y}{x}(+\pi) \Longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \overbrace{=}^{\cdot x^2} -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2},$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \overbrace{=}^{\cdot x^2} \frac{x}{r^2} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r}\cdot\left(-\frac{y}{r^2}\right) + \frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r^2} = 0$$

(c) $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{r^4} + \frac{x^2}{r^4} = \frac{x^2+y^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$

(d) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3} \Longrightarrow \Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2+y^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

(e) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{0 - y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{r^4} \Longrightarrow \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Ergebnis: $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot 1 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\cdot 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{1}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot 0$$

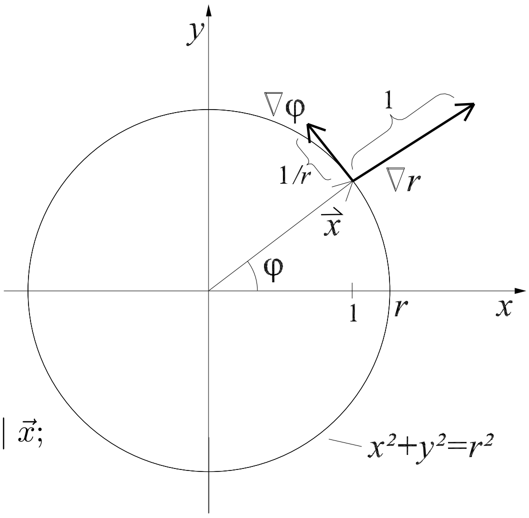
$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}}$$

<u>Zurück zu Bsp. 2</u> $f(r,\varphi) = \ln r \Longrightarrow$

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\ln r)}_{-\frac{1}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\ln r)}_{0} + \frac{1}{r}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(\ln r)}_{\frac{1}{r}} = 0$$

<u>Bemerkung:</u> Anschauliches Verständnis von (a), (b), (c) oben:

Die Rechnung ergab:



α) $$\nabla r = \begin{pmatrix}\partial r/\partial x\\ \partial r/\partial y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r\end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{r}$$

β) $$\nabla\varphi = \begin{pmatrix}\partial \varphi/\partial x\\ \partial \varphi/\partial y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y/r^2 \\ x/r^2\end{pmatrix} = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x\end{pmatrix}$$

<u>Geometrisch:</u>

α) $\nabla r \perp r =$ konstant (§19, Satz 3, 1) $\Longrightarrow \nabla r \parallel \vec{x}$;

$\|\nabla r\| =$ (RA von r in Richtung ∇r) $= 1$

$\downarrow$

(§19, Satz 3, 1)

Also: $\nabla r = \dfrac{\vec{x}}{r}$

β) $\nabla\varphi \perp \varphi =$ konstant $\Longrightarrow \nabla\varphi \parallel \begin{pmatrix} -y \\ x\end{pmatrix}$

$\|\nabla\varphi\| =$ (RA von φ in Richtung $\nabla\varphi$) $= \dfrac{1}{r}$

Also: $\nabla\varphi = \dfrac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x\end{pmatrix}$

[Wenn man die Größen der RAen geometrisch nicht erkennt, müßte man nach 19.4 rechnerisch so vorgehen:

α) $F = r, \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\dfrac{\vec{x}_0}{r}$ (Dann ist $\vec{x}(0) = \vec{x}_0,\ \left\|\dot{\vec{x}}(0)\right\| = 1,\ \dot{\vec{x}}(0) \parallel \nabla r$)

$$F\big(\vec{x}(t)\big) = \underbrace{\|\vec{x}_0\|}_{r}\left(1 + \frac{t}{r}\right) = r + t,\ \text{RA} = F\big(\vec{x}(t)\big)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = 1$$

β) $F = \varphi, \vec{x}(t) = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi + t/r)\\ \sin(\varphi + t/r)\end{pmatrix}$ (Dann ist $\vec{x}(0) = \vec{x}_0,\ \left\|\dot{\vec{x}}(0)\right\| = 1,\ \dot{\vec{x}}(0) \parallel \nabla\varphi$)

$$F\big(\vec{x}(t)\big) = \varphi + t/r,\ F\big(\vec{x}(t)\big)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = \frac{1}{r}\ ]$$

(a), (b), (c) folgen aus α), β), denn sie bedeuten

$$\|\nabla r\|^2 = 1,\ \big\langle \nabla r, \nabla\varphi\big\rangle = 0,\ \|\nabla\varphi\|^2 = \frac{1}{r^2}.$$

(d), (e) und die Endformel $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}$ sind anschaulich schwerer zu verstehen.

20.4 EXTREMA

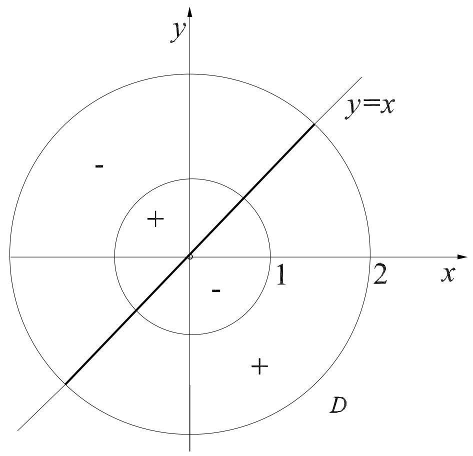
Def.: (vgl. 8.2) $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ \vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$.

1) f hat in $\vec{x}_0$ ein globales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in D : \left\{\begin{matrix} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})\\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})\end{matrix}\right\}$.

2) f hat in $\vec{x}_0$ ein lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ ein Extremum $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \exists\,\delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \left\{\begin{matrix} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})\\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})\end{matrix}\right\}.$$

Bsp. 3 $f : \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| \leq 2\big\} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$



$\pm =$ Vorzeichen von f

Wie in §8 müssen Randpunkte separat betrachtet werden.

<u>Def.:</u> Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

1) $\vec{x}_0 \in D$ heißt <u>innerer Punkt</u> von $D \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \vec{x} \in D$$

(In Worten: D enthält einen (kleinen) Kreis um $\vec{x}_0$. δ kann dabei für jedes innere $\vec{x}_0$ ein anderes sein.)

2) $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Randpunkt</u> von $D \Longleftrightarrow$

(i) $\vec{x}_0$ ist kein innerer Punkt von D

(ii) D enthält $\vec{x}_0$ oder Punkte beliebig nahe bei $\vec{x}_0$.

3) D heißt <u>abgeschlossen</u> $\Longleftrightarrow$ D enthält alle seine Randpunkte.

4) D heißt <u>beschränkt</u> $\Longleftrightarrow \exists R > 0 : \forall \vec{x} \in D : \|\vec{x}\| \le R$.

(In Worten: Es gibt ein R, sodaß D in einer Kugel (= Kreis für $n = 2$) mit Radius R um $\vec{0}$ liegt.)

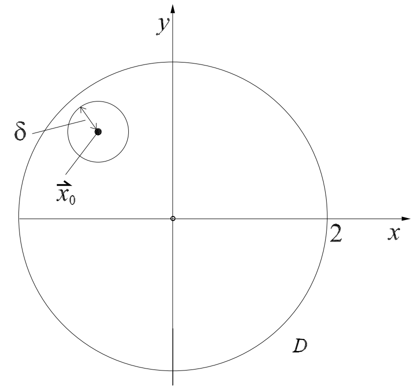
<u>Bsp. 3</u> a) $D = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| \le 2\}$

ist abgeschlossen und beschränkt.

Die inneren Punkte sind

$\vec{x}_0$ mit $\|\vec{x}_0\| < 2$ (vgl. das Bild),

die Randpunkte sind $\vec{x}_0$ mit $\|\vec{x}_0\| = 2$



b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x + y > 5\}$ ist nicht abgeschlossen und nicht beschränkt.

<u>Satz 2</u> (Weierstraß) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, D abgeschlossen und beschränkt $\Longrightarrow f$ hat (zumindest) ein globales Maximum und ein globales Minimum in D.

Es gilt auch das Análogon zu Satz 1, 8.2:

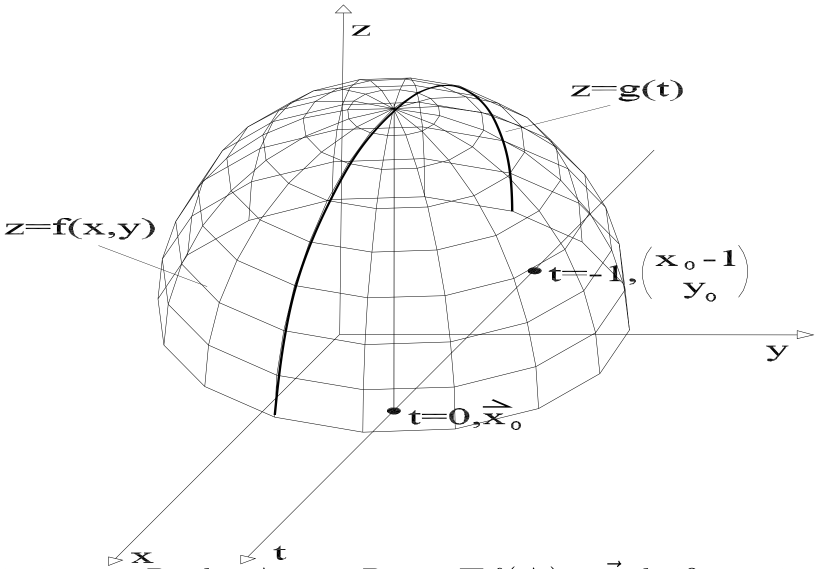
<u>Satz 3</u> $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ sei ein innerer Punkt von D, f sei in $\vec{x}_0$ differenzierbar. Dann gilt: f hat in $\vec{x}_0$ ein Extremum $\Longrightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$

<u>Beweis:</u> f habe in $\vec{x}_0$ z.B. ein lokales Maximum $\Longrightarrow g(t) = f\big(\vec{x}_0 + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\big) =$

$f(x_{01} + t, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ hat in $t = 0$ ein lokales Maximum.

Nach Satz 1, 8.2, folgt $0 = \dot{g}(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)$.

Analog $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0,\ i = 2, \ldots, n \Longrightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. $\square$



Def.: Ein innerer Punkt $\vec{x}_0$ von D, wo $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$, heißt stationärer Punkt von f.

(Stationäre Punkte sind also die $\vec{x}_0$, wo die Tangentialebene waagrecht ist.)

Ergebnis von Satz 3: Die möglichen **Kandidaten** für Extrema sind also

(a) stationäre Punkte, d.h.

$$\vec{x}_0 \text{ im Innern von } D \wedge f \text{ in } \vec{x}_0 \text{ differenzierbar } \wedge \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0},$$

(b) Randpunke von D,

(c) Punkte $\vec{x}_0$, wo f nicht differenzierbar ist.

Bsp. 3 $f(x,y) = (x-y)\cdot(x^2+y^2-1)$ ist ein Polynom und daher überall differenzierbar.

(a) $\nabla f = \vec{0} \iff$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2+y^2-1+(x-y)\cdot 2x = 3x^2-2xy+y^2-1 = 0 \qquad \text{I}$$

$$\wedge \frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2+y^2-1)+(x-y)\cdot 2y = -x^2+2xy-3y^2+1 = 0 \quad \text{II}$$

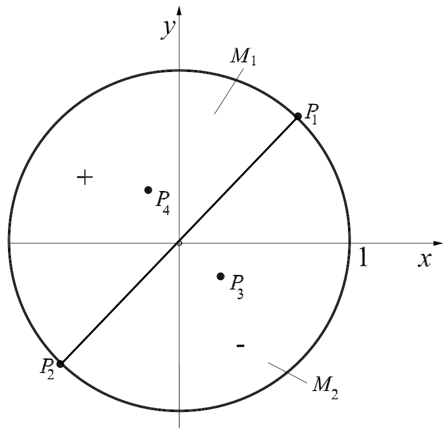
$$\text{I+II} : 2x^2-2y^2 = 0 \iff x^2 = y^2 \iff x = \pm y$$

1. Fall: $y = x \Longrightarrow$ aus $\text{I} : 2x^2 = 1,\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = y$

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2. Fall: $y = -x \Longrightarrow$ aus $\text{I} : 6x^2 = 1,\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = -y$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$



Das Bild zeigt,
daß P_1, P_2 *keine*
Extrema sein können,
da $f > 0$ in
$M_1 = \{\vec{x} : y > x,\ x^2 + y^2 < 1\}$
und $f < 0$ in
$M_2 = \{\vec{x} : y < x,\ x^2 + y^2 < 1\}$.

f hat in P_4 ein *lokales Maximum,*
da nach Satz 2 in $\overline{M_1} = \{\vec{x} : y \geq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein solches existieren muß. (Die Minima von f in $\overline{M_1}$ liegen am Rand, wo $f = 0$.) Ebenso hat f in P_3 ein *lokales Minimum.*

(b) Die Randpunkte von D sind

$\big\{\vec{x} : \|\vec{x}\| = 2\big\}$, d.h. $\vec{x}$ mit $x^2 + y^2 = 4$.

Wir parametrisieren diesen Kreis durch

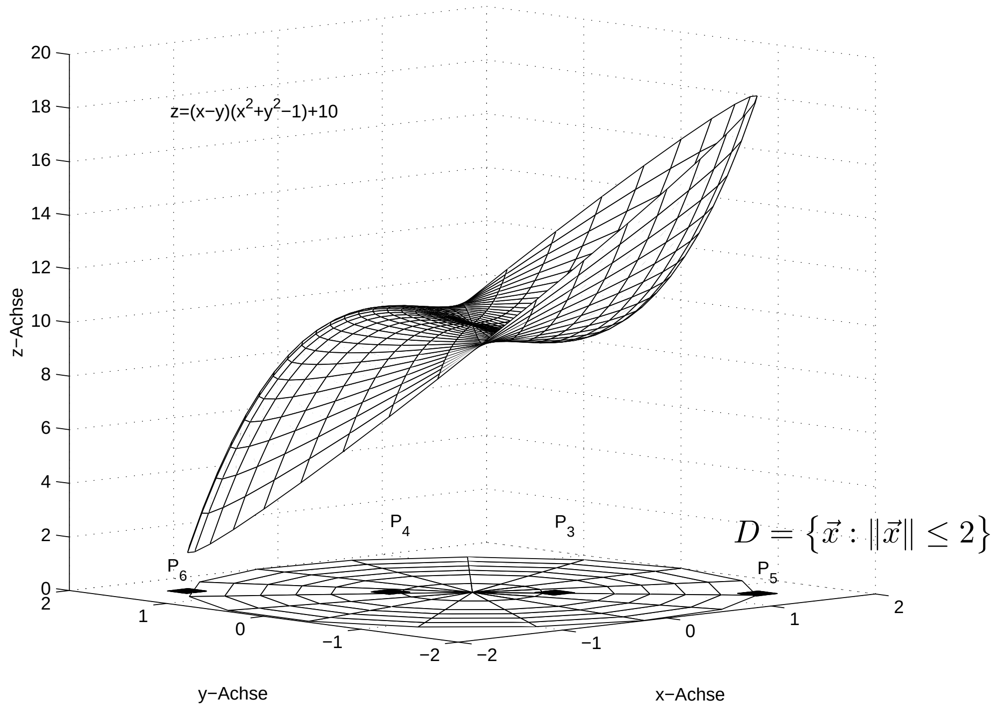
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big) = (2\cos t - 2\sin t) \cdot (4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 1)$$
$$= 6(\cos t - \sin t)$$

f hat ein Extremum $\Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot} = 6(-\sin t - \cos t) = 0 \Longrightarrow \sin t + \cos t = 0$

$\Longrightarrow y = -x \Longrightarrow P_5 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ P_6 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2});\ f(P_5) = 6\sqrt{2} > f(P_4) = \dfrac{4}{3\sqrt{6}}$

$\Longrightarrow f$ hat in P_5 ein *globales Maximum.* Ebenso hat f in P_6 ein *glob. Minimum.*

Bild:

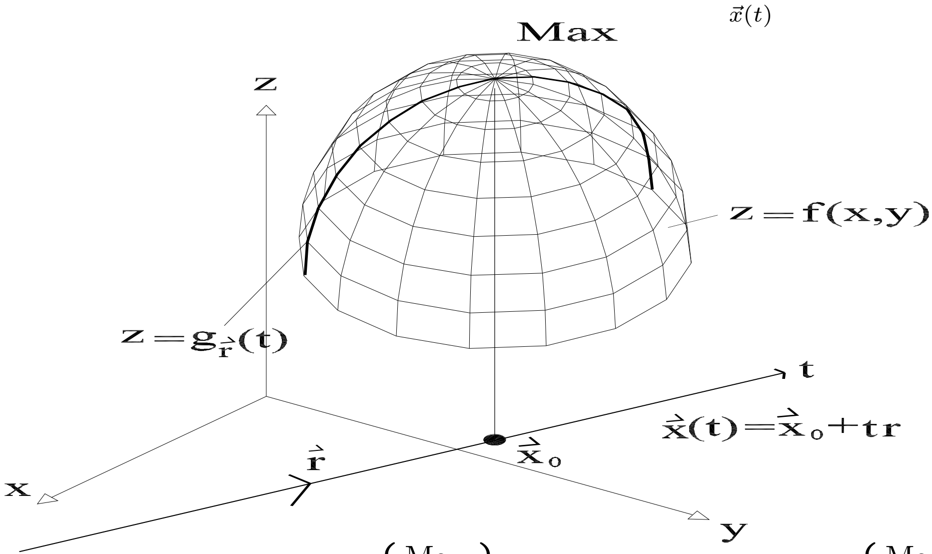


20.5 DER EXTREMSTELLENTEST

Wir suchen ein mehrdimensionales Análogon zu Satz 1 in 9.1. (Dort heißt es:

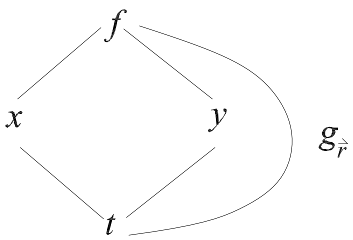
Es sei $f'(x_0) = 0$ (d.h. x_0 stationär). Dann gilt: $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \text{ Min.} \\ f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \text{Max.)} \end{cases}$

Wir setzen (vgl. den Beweis von Satz 3) $g_{\vec{r}}(t) = f(\underbrace{\vec{x}_0 + t\vec{r}}_{\vec{x}(t)}) = f \circ \vec{x}(t)$.



Dann gilt: f hat in $\vec{x}_0$ ein $\begin{Bmatrix} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \forall \vec{r} : g_{\vec{r}}$ hat in 0 ein $\begin{Bmatrix} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{Bmatrix}$.

Auf $g_{\vec{r}}$ werden wir 9.1, Satz 1 anwenden und dann auf f schließen. Dazu wird mit der Kettenregel $\ddot{g}_{\vec{r}}(0)$ berechnet:



Zunächst für $n = 2$:

$$g_{\vec{r}}(t) = f(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2) \Longrightarrow$$

$$\dot{g}_{\vec{r}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2) \cdot r_1 + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2) \cdot r_2$$

$$\Longrightarrow \ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) \cdot r_1^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}_0)}_{\searrow} \cdot r_1 r_2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0)}_{\swarrow} \cdot r_1 r_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) \cdot r_2^2$$

$$\underset{\text{(Schwarz)}}{=}$$

Allgemein in n Variablen:

$$\ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) \cdot r_i r_j$$

<u>Def.:</u> Die symmetrische Matrix

$$\mathrm{H}f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

heißt <u>Hesse'sche Matrix</u> von f (für zweimal stetig differenzierbares f).

<u>Bemerkungen:</u> 1) In einer Variablen ist $\nabla f = f'$, $\mathrm{H}f = f''$.

2) $\ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) r_j}_{(\mathrm{H}f\cdot\vec{r})_i} r_i = \underbrace{\underset{1\times n,\, n\times n,\, n\times 1}{\vec{r}^T \cdot \mathrm{H}f \cdot \vec{r}}}_{1\times 1}$

<u>Bsp. 3</u> $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2 - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - 6y$$

$$\Longrightarrow \mathrm{H}f = \begin{pmatrix} 6x-2y & 2y-2x \\ 2y-2x & 2x-6y \end{pmatrix}; \qquad P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f(P_3) = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} \\ -4/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} \end{pmatrix};$$

$$\ddot{g}_{\binom{1}{0}}(P_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = \frac{4}{\sqrt{2}} > 0 \overset{\text{(Satz 1, 9.1)}}{\Longrightarrow} g_{\binom{1}{0}} \text{ hat in } 0 \text{ ein Minimum.}$$

$$\ddot{g}_{\binom{0}{1}}(P_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) = -\frac{4}{\sqrt{2}} < 0 \Longrightarrow g_{\binom{0}{1}} \text{ hat in } 0 \text{ ein Maximum.}$$

P_1 ist daher ein "Sattelpunkt" und kein Extremum (wie wir ohnehin schon wissen).

<u>Def.:</u> $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ innerer Punkt von D.

$\vec{x}_0$ heißt <u>Sattelpunkt</u> $\Longleftrightarrow$ (i) $\vec{x}_0$ stationär, d.h. $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$,

(ii) $\vec{x}_0$ ist kein Extremum.

In P_3 hingegen ist $\ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \vec{r}^T \cdot \mathrm{H}f \cdot \vec{r}$ immer positiv, denn

$$(r_1, r_2) \cdot \begin{pmatrix} 8/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} \\ -4/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{6}} r_1^2 - \frac{8}{\sqrt{6}} r_1 r_2 + \frac{8}{\sqrt{6}} r_2^2$$

$$= \frac{8}{\sqrt{6}}(r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{8}{\sqrt{6}}\left[\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2}(r_1 - r_2)^2\right] > 0 \text{ für } \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Nach Satz 1, 9.1 hat $g_{\vec{r}}$ in $t = 0$ ein Minimum und daher auch f.

Def.: Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt

(a) $\left\{\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}\right\}$ definit $\iff \forall \vec{0} \neq \vec{r} \in \mathbb{R}^n : \left\{\begin{matrix} \vec{r}^T A \vec{r} > 0 \\ \vec{r}^T A \vec{r} < 0 \end{matrix}\right.$

(b) indefinit $\iff$ $\begin{matrix} (\exists \vec{r} \in \mathbb{R}^n : \vec{r}^T A \vec{r} > 0) \\ \wedge\ (\exists \vec{r} \in \mathbb{R}^n : \vec{r}^T A \vec{r} < 0) \end{matrix}$

Satz 4 Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\det A = ac - b^2$.

(1) A positiv definit $\iff a > 0 \wedge \det A > 0$

(2) A negativ definit $\iff a < 0 \wedge \det A > 0$

(3) A indefinit $\iff \det A < 0$

Beweis: Es sei $\vec{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $v \neq 0$, $t = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \vec{r}^T A \vec{r} = (u, v) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = au^2 + 2buv + cv^2 = \underbrace{v^2}_{>0}(at^2 + 2bt + c)$$

(1) A positiv definit $\iff \vec{r}^T A \vec{r} > 0$ für $v = 0,\ u \neq 0$

$\wedge\ \vec{r}^T A \vec{r} > 0$ für $v \neq 0$

$$\iff a > 0 \wedge \forall t : \underbrace{at^2 + 2bt + c}_{h(t)} > 0$$

Wenn $a > 0$, so ist $y = h(t)$ ist eine nach oben offene Parabel. Dann gilt:

$\forall t : h(t) > 0 \iff h$ hat keine reelle Nullstelle

$$\iff {}_1t_2 = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}} \notin \mathbb{R} \iff \underbrace{b^2 - ac}_{-\det A} < 0 \iff \det A > 0$$

(2) und (3) werden ähnlich bewiesen. $\square$

Bemerkung: Für beliebiges n gilt nach dem "Jacobi-Kriterium":

$$A \left\{\begin{matrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{matrix}\right\} \text{ definit } \iff a_{11} \left\{\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right\} \wedge \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge$$

$$\wedge \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \left\{\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right\} \wedge \cdots,$$

d.h. die Vorzeichen der "Hauptunterdeterminanten" von A sind

$$\left\{\begin{matrix} \text{alle } > 0 \\ \text{abwechselnd } < 0 \text{ und } > 0 \end{matrix}\right\}$$

Folgerung (Extremstellentest) $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f $\big($= Kandidat vom Typ a$\big)$, f sei in $\vec{x}_0$ 2-mal differenzierbar. Dann gilt:

(1) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit, d.h. für $n = 2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) > 0,\ \det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) > 0$

$\Longrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum

(2) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ negativ definit, d.h. für $n = 2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) < 0,\ \det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) > 0$

$\Longrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum

(3) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ indefinit, d.h. für $n = 2$: $\det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) < 0$

$\Longrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt

(4) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ ist weder noch, d.h. für $n = 2$: $\det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) = 0$

keine Entscheidung; man muß $g_{\vec{r}}$ direkt betrachten.

Beweis: Z.B. für (1):

$\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Longleftrightarrow \forall \vec{r} \neq \vec{0} : \ddot{g}_{\vec{r}}(0) > 0 \Longrightarrow$ (Satz 1, 9.1): $\forall \vec{r} \neq \vec{0}$:

$g_{\vec{r}}$ hat in $t = 0$ ein Minimum $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall \vec{r} \neq \vec{0}: \ \forall 0 \neq t$ klein: $g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r}\,) > f(\vec{x}_0)$

Mit Hilfe der Taylorreihe (s. Kap. VI) sieht man, daß sogar gilt:

$(*)\ \exists \delta > 0 : \forall \vec{r}$ mit $\|\vec{r}\| = 1$: $\forall t$ mit $0 < |t| < \delta : g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r}) > f(\vec{x}_0)$

und daher $\forall \vec{x}$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$: $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$, d.h. f hat in $\vec{x}_0$ ein Minimum.

$\square$

Bemerkung: $\vec{x}_0$ ist in $\left\{\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\}$ sogar ein "isoliertes" $\left\{\begin{matrix}\text{Min.}\\\text{Max.}\end{matrix}\right\}$, d.h. das einzige $\left\{\begin{matrix}\text{Min.}\\\text{Max.}\end{matrix}\right\}$ in einer kleinen Umgebung von $\vec{x}_0$, denn in $(*)$ gilt $>$.

Schema z.B. für Bsp. 3

Kandidaten nach (a) (=stationäre Punkte)	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\det \mathrm{H}f$	Ergebnis
P_1	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$-\frac{16}{2} < 0$	Sattelpunkt
P_2	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$-\frac{16}{2} < 0$	Sattelpunkt
P_3	$\frac{8}{\sqrt{6}} > 0$	$\frac{64-16}{6} > 0$	lokales Minimum
P_4	$-\frac{8}{\sqrt{6}} < 0$	$\frac{64-16}{6} > 0$	lokales Maximum

Bsp. 3 Die Kandidaten nach (b) erfüllen die Gleichung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Def.: Es seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ g_1, \dots, g_k : D \longrightarrow \mathbb{R},\ \vec{x}_0 \in D$.

$\vec{x}_0$ heißt Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_1, \dots, g_k \Longleftrightarrow$

(a) $g_1(\vec{x}_0) = \dots = g_k(\vec{x}_0) = 0\ \wedge$

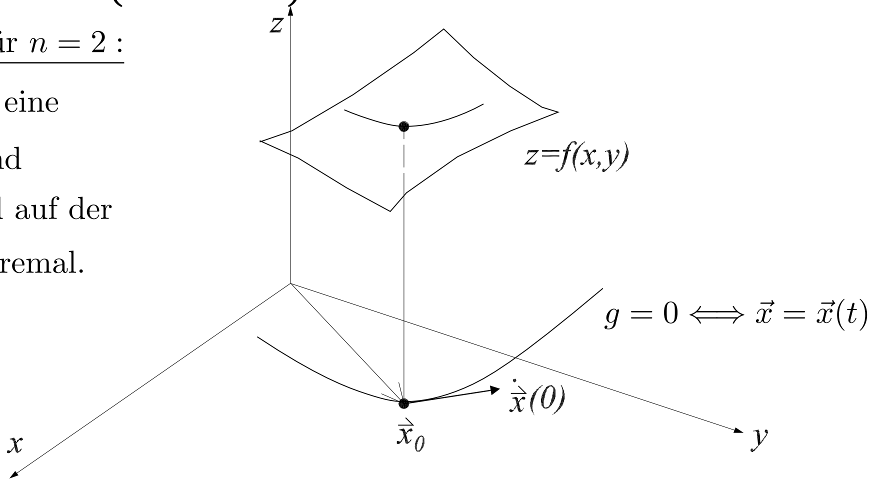
(b) $\exists \delta > 0$:

$$\forall \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \text{ und } g_1(\vec{x}) = \dots = g_k(\vec{x}) = 0 : \begin{cases} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \end{cases}$$

In Worten: Unter den $\vec{x}$, die die Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_k(\vec{x}) = 0$ erfüllen, hat $\vec{x}_0$ lokal einen $\left\{\begin{matrix}\text{maximalen}\\ \text{minimalen}\end{matrix}\right\}$ f-Wert.

Untersuchung für $n = 2$:

$g(x,y) = 0$ gibt eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ und $z = f(x,y)$ wird auf der Kurve in $\vec{x}_0$ extremal.



Es sei $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Dann läßt sich nach §19, Satz 3, 2, $g(x,y) = 0$ als $y = h(x)$ oder als $x = h(y)$ schreiben. Allgemeiner sei $\vec{x}(t)$ irgendeine Parametrisierung von $g(x,y) = 0$ mit $\vec{x}(0) = \vec{x}_0,\ \dot{\vec{x}}(0) \neq \vec{0}$.

$\vec{x}_0$ Extremum unter der Nebenbedingung $g \Longleftrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big)$ hat in 0 ein Extremum $\Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot}(0) = 0 \Longrightarrow$

$$\text{I} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot \dot{x}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot \dot{y}(0) = 0$$

Andererseits ist $\forall t : g\big(\vec{x}(t)\big) = 0 \Longrightarrow$

$$\text{II} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot \dot{x}(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot \dot{y}(0) = 0$$

Da $\dot{\vec{x}}(0) \neq \vec{0}$, müssen die Zeilen dieses Gleichungssystems linear abhängig sein, d.h. $\exists \lambda_0 : \nabla f(\vec{x}_0) = \lambda_0 \nabla g(\vec{x}_0)$, d.h. in $\vec{x}_0$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}$$

Dies führt zu folgendem Rezept:

Bilde $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$;

$\vec{x}_0$ Extremum von f unter der Nebenbedingung $g \wedge \ (\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0})$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ ist ein stationärer Punkt von } F \text{ für ein gewisses } \lambda_0$$

Denn in $\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -g \qquad\quad = 0 \end{aligned}$$

Bezeichnung: λ heißt Lagrange'scher Multiplikator.

Zurück zu Bsp. 3 $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$, $g(x,y) = x^2+y^2-4$

$F(x,y,\lambda) = (x-y)(x^2+y^2-1) - \lambda(x^2+y^2-4)$

$$\text{I} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2 - 1 - 2\lambda x = 0$$

$$\text{II} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 - 2\lambda y = 0$$

$$\text{III} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 + 4 = 0$$

I+II: $2x^2 - 2y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y = 0$

$$\Longrightarrow (x-y)(x+y) - \lambda(x+y) = 0$$

$$\Longrightarrow (x+y)[x-y-\lambda] = 0$$

1. Fall $x+y=0$, $y^2 = x^2$ III: $2x^2 = 4$, $x = \pm\sqrt{2}$; das führt auf P_5, P_6

2. Fall $x+y \neq 0 \Longrightarrow x-y = \lambda$

I gibt $3x^2 - 2xy + y^2 - 1 - 2(x-y)x = 0$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ Widerspruch zu III.

(Beachte, daß die Voraussetzung $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ für alle $\vec{x}_0$ auf dem Kreis zutrifft!)

Allgemeines Rezept:

$\vec{x}_0$ Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_1, \ldots, g_k \Longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{\lambda}_0 \end{pmatrix}$ stationärer Punkt von $F(\vec{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \cdots - \lambda_k g_k(\vec{x})$ für ein gewisses $\vec{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^k$.

§21: Vektorfelder

21.1 NABLA

Def. Eine vektorwertige Funktion $\vec{v}$ ist eine Vorschrift, die jedem $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ ein $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.

Schreibweise: $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$

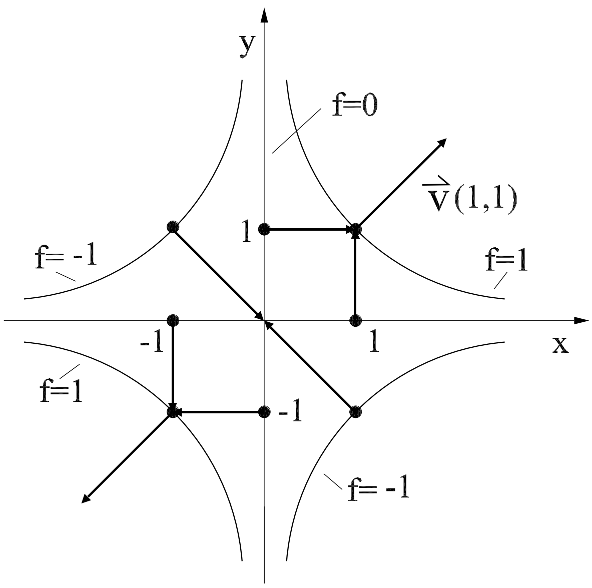
Bemerkung: Wenn $m = n$, so nennt man $\vec{v}$ auch Vektorfeld. Zur Betonung des Unterschiedes wird $f(\vec{x})$ wie in §19 auch Skalar(feld) genannt.

Mathematische Interpretation: $\vec{v}$ besteht aus den m gewöhnlichen ("skalaren") Funktionen $v_1, \ldots, v_m$.

Physikalische Interpretation: Man kann sich $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ z.B. als Geschwindigkeitsvektor einer Strömung oder als Kraftvektor im Punkt $\vec{x}$ vorstellen. Man zeichnet daher $\vec{v}(\vec{x})$ als Vektor mit Anfangspunkt in $\vec{x}$.

Bsp. 1 $f(\vec{x})$ Funktion $\Longrightarrow \operatorname{grad} f$ ist ein Vektorfeld.

Z.B. im $\mathbb{R}^2 : f = xy \Longrightarrow \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \vec{v}(\vec{x})$



Def. $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $D \subset \mathbb{R}^3$.

1) $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}$ heißt Divergenz von $\vec{v}$.

2) $\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$ heißt <u>Rotation</u> von $\vec{v}$.

<u>Schreibweise:</u> Wenn $\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$ als Operator-Vektor aufgefaßt wird, so ist $\operatorname{grad} f = \nabla \cdot f$, $\operatorname{div}\vec{v} = \langle \nabla, \vec{v} \rangle$, $\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$

<u>Bemerkungen:</u>

1) Skalarfeld $\underset{\operatorname{div}}{\overset{\operatorname{grad}}{\rightleftarrows}}$ Vektorfeld $\circlearrowleft$ rot

2) grad, div können ebenso im $\mathbb{R}^n$ definiert werden $\left(\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{pmatrix}\right.$, $\operatorname{div}\vec{v}$ $\left. = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}\right)$, aber $\operatorname{rot}\vec{v}$ wird im $\mathbb{R}^n$ eine schiefsymmetrische Matrix:

$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \mathrm{J}\vec{v} - (\mathrm{J}\vec{v})^T$ (s. 21.3) und hat also $\dfrac{n(n-1)}{2}$ Komponenten.

<u>Bsp. 2</u> $\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix}$

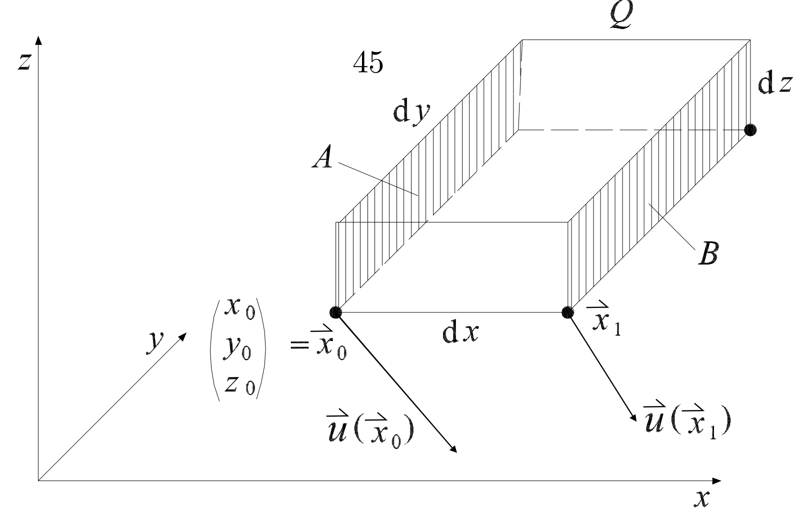
$$\Longrightarrow \operatorname{div}\vec{v} = \langle \nabla, \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix} \right\rangle = y + 0 - \cos(y-z)$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(y-z) - 1 \\ 0 - 0 \\ 0 - x \end{pmatrix}$$

<u>Physikalische Interpretation der Divergenz</u>

$\vec{v}(\vec{x})$ sei das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, $\varrho(\vec{x})$ [kg m^{-3}] sei die Dichte, $\vec{u} = \varrho \cdot \vec{v}$ [kg m^{-2} sec^{-1}] ist die Impulsdichte. Im allgemeinen hängen $\vec{v}, \varrho, \vec{u}$ auch noch von der Zeit t ab. Wenn das nicht der Fall ist, nennt man die Strömung "stationär". Dies nehmen wir zunächst an.

Von $\vec{x}_0$ aus werde ein kleiner Quader Q mit den Seitenlängen dx, dy, dz gezeichnet:



AFM sei eine Abkürzung für “aus Q pro Sekunde austretende Flüssigkeitsmasse [kg/sec]”.

$$\left.\begin{array}{l}\text{AFM} = a > 0\\ \text{AFM} = a < 0\end{array}\right\}\ \text{bedeutet}\ \left\{\begin{array}{l} a\ \text{[kg/sec] strömt aus } Q \text{ aus}\\ |a|\ \text{[kg/sec] strömt nach } Q \text{ ein}\end{array}\right.$$

Dann gilt:

$$\text{AFM durch } A \approx -u_1(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned}\text{AFM durch } B \approx\ & u_1(\vec{x}_1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = u_1(x_0+\mathrm{d}x, y_0, z_0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\approx \left[u_1(\vec{x}_0) + \frac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x}_0)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

(Denn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$ gibt einen Flüssigkeitstransport parallel zu A, B)

$\Longrightarrow$ AFM durch A und $B \approx \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$\Longrightarrow$ AFM auf allen Seiten von $Q \approx \operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Also: $\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}_0) =$ “Quellstärke von $\vec{u}$ in $\vec{x}_0$”.

Bei einer stationären Strömung oder bei einer inkompressiblen Flüssigkeit ist daher $\operatorname{div}\vec{u} = 0$; wenn $\vec{u}$ zusätzlich von t abhängt und die Flüssigkeit/das Gas kompressibel ist, muß das nicht der Fall sein. Ähnlich läßt sich $\operatorname{rot}\vec{u}$ als “Wirbelstärke von $\vec{u}$ in $\vec{x}_0$” interpretieren.

Def. Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heißt

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{quellenfrei}}\\ \underline{\text{wirbelfrei}}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{v} = 0\\ \operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}\end{array}\right\}.$$

21.2 ZUSAMMENGESETZTE OPERATOREN

Sinnvoll sind: $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f$

$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \vec{0}$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}$

Sinnlos sind: $\operatorname{rot}\operatorname{div}\vec{v}$, $\operatorname{div}\operatorname{div}\vec{v}$, $\operatorname{grad}\operatorname{grad} f$ und $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\vec{v}$

Rechnungen dazu:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$

b) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Schwarz}}}{=} \vec{0}.$

c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{3y} - v_{2z} \\ v_{1z} - v_{3x} \\ v_{2x} - v_{1y} \end{pmatrix} \rangle$

$$= v_{3yx} - v_{2zx} + v_{1zy} - v_{3xy} + v_{2xz} - v_{1yz} \overset{\substack{\text{Schwarz} \\ \uparrow}}{=} 0$$

d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$, wobei $\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$ (vgl. die Übung 65)

Bemerkung: b) und c) kann man sich "alchimistisch" merken: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$, da "$\nabla f \parallel \nabla$"; $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \langle \nabla, \nabla \times \vec{v} \rangle = 0$, da "$\nabla \times \vec{v} \perp \nabla$".

Def: Wenn das Vektorfeld $\vec{v}$ sich als $\vec{v} = \begin{Bmatrix} \operatorname{grad} f \\ \operatorname{rot}\vec{w} \end{Bmatrix}$ schreiben läßt, so sagt man

$\vec{v}$ hat ein $\begin{Bmatrix} \underline{\text{Potential}}\ (= f) \text{ oder } \vec{v} \text{ ist } \underline{\text{konservativ}} \\ \underline{\text{Vektorpotential}}\ (= \vec{w}) \end{Bmatrix}$.

Bemerkungen: 1) f ist (wie das unbestimmte Integral) durch $\vec{v}$ bis auf eine Konstante bestimmt:

$\nabla f_1 = \vec{v} = \nabla f_2 \Longrightarrow \nabla(\underbrace{f_1 - f_2}_{g}) = \vec{0} \Longrightarrow \forall y, z : \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 0 \Longrightarrow g$ ist bzgl. x konstant; ebenso ist g bzgl. y, z konstant $\Longrightarrow g =$ Konstante. $\vec{w}$ ist nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt, da $\operatorname{rot}(\vec{w} + \operatorname{grad} g) = \operatorname{rot}\vec{w}$, s. auch Satz 1.

(2) Wenn $\vec{K}$ ein konservatives Kraftfeld ist, d.h. $\vec{K} = \nabla f$, so nennt man in der Physik $U = -f$ Potential von $\vec{K}$.

Grund dafür: Ein Massenpunkt mit Masse m erfüllt $m\ddot{\vec{x}} = \vec{K} = -\nabla U \quad |\cdot \dot{\vec{x}}$

$$\Longrightarrow \underbrace{m\langle \ddot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}} \rangle}_{m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})} = -\underbrace{\langle \nabla U, \dot{\vec{x}} \rangle}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U\left(\vec{x}(t)\right)} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\cdot} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\underbrace{\frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2}_{E_{\text{kin}}} + \underbrace{U\left(\vec{x}(t)\right)}_{E_{\text{pot}}}\Bigg) = 0,$$ d.h. in einem konservativen Kraftfeld gilt der Energieerhaltungssatz und die potentielle Energie ist U mit $\vec{K} = -\nabla U$.

<u>Satz 1</u>

1) $\vec{v}$ hat ein Potential $\Longrightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, d.h. $\vec{v}$ ist wirbelfrei.
2) $\vec{v}$ hat ein Vektorpotential $\Longrightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$, d.h. $\vec{v}$ ist quellenfrei.
3) Wenn die Definitionsmenge D von $\vec{v}$ konvex ist $\big[$d.h. $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in D \Longrightarrow$ die ganze Verbindungsstrecke $t\vec{x}_0 + (1-t)\vec{x}_1$, $t \in [0,1]$, liegt auch in $D\big]$, so gilt in $1), 2)$ auch "$\Longleftarrow$".

<u>Beweis:</u>

1) $\vec{v} = \operatorname{grad} f \Longrightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}$
2) $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w} \Longrightarrow \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{w} = 0$
3) Es sei z.B. $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und der Einfachheit halber $D = \mathbb{R}^3$. Wir wollen ein f mit $\nabla f = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ bestimmen.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = v_1 \Longrightarrow f = \displaystyle\int v_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x = V_1(\vec{x}) + C;$

darin ist V_1 eine Stammfunktion von v_1 bzgl. x, z.B. $V_1(\vec{x}) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} v_1(t,y,z)\,\mathrm{d}t$, und C eine Konstante bzgl. x, die aber noch von y, z abhängen kann, d.h. $C = C(y,z)$.

b) $f = V_1 + C \Longrightarrow$

$$v_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_1}{\partial y}(t,y,z)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial C}{\partial y};$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \Longrightarrow$$

$$v_2(\vec{x}) = \frac{\partial C}{\partial y} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_2}{\partial x}(t,y,z)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial C}{\partial y} + v_2(\vec{x}) - v_2(x_0,y,z) \qquad \Big|\, - v_2(\vec{x})$$

$$\Longrightarrow C(y,z) = \int v_2(x_0,y,z)\,\mathrm{d}y = V_2(y,z) + D;$$

darin ist V_2 eine Stammfunktion von $v_2(x_0, y, z)$ bzgl. y, z.B.

$V_2(y, z) = \int\limits_{y_0}^{y} v_2(x_0, t, z)\,\mathrm{d}t$ und D eine Konstante bzgl. x und y, die aber noch von z abhängen kann, d.h. $D = D(z)$.

c) $f = V_1 + V_2 + D \Longrightarrow$

$$v_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial v_1}{\partial z}(t, y, z)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial v_2}{\partial z}(x_0, t, z)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}$$

$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}, \ \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y} \Longrightarrow v_3(\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} + v_3(\vec{x}) - v_3(x_0, y, z) + v_3(x_0, y, z) - v_3(x_0, y_0, z) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} = v_3(x_0, y_0, z)$, d.h. D ist eine Stammfunktion von $v_3(x_0, y_0, z)$ bzgl. z.

$f = V_1 + V_2 + D$ ist also ein Potential von $\vec{v}$. □

Bsp. 3 $\vec{v} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \end{pmatrix}$. $D = \mathbb{R}^3$ ist konvex.

Es ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) - \cos(xy) + xy\sin(xy) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Nach Satz 1 existiert ein Potential f. Wir bestimmen es wie im Beweis:

$$\vec{v} = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = v_1 = y\cos(xy) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f = \int y\cos(\underbrace{xy}_{u})\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{\frac{\mathrm{d}u}{y}} = \sin(xy) + C(y, z)$$

$$\Longrightarrow v_2 = y + \cancel{x\cos(xy)} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big[\sin(xy) + C(y, z)\big] = \cancel{x\cos(xy)} + \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = y \Longrightarrow C = \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + D(z) \Longrightarrow f = \sin(xy) + \frac{y^2}{2} + D(z)$$

$$\Longrightarrow v_3 = \mathrm{e}^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\sin(xy) + \frac{y^2}{2} + D(z)\right] = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}$$

$$\Longrightarrow D = \int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z + E$$

Also ist $f = \sin(xy) + \frac{y^2}{2} + \mathrm{e}^z + E$. Die Konstante E kann beliebig gewählt werden (vgl. Bemerkung 1 oben).

21.3 DIE JACOBI-MATRIX

Wir haben uns bisher nicht systematisch um die Differenzierbarkeit von Vektorfeldern gekümmert, sondern vorausgesetzt, daß die benötigten partiellen Ableitungen existieren.

Def.: $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 \in D$ innerer Punkt.

$\vec{v}$ heißt in $\vec{x}_0$ (bzw. schlechthin) differenzierbar $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, m : v_i$ in $\vec{x}_0$ (bzw. schlechthin) differenzierbar. Dann heißt die $m \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial v_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} (\nabla v_1)^T \\ \vdots \\ (\nabla v_m)^T \end{pmatrix} (\vec{x}_0)$$

Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix von $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$.

Bezeichnung dafür J oder genauer $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ oder $\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$

Bemerkung: J faßt also alle ersten Ableitungen $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ in einer Matrix zusammen.

Für ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ gilt z.B.

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} & \dfrac{\partial v_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y} & \dfrac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ und } \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{Spur}(\mathrm{J}), \ \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} (\mathrm{J} - \mathrm{J}^T)_{32} \\ (\mathrm{J} - \mathrm{J}^T)_{13} \\ (\mathrm{J} - \mathrm{J}^T)_{21} \end{pmatrix}$$

Satz 2 (Bedeutung der Jacobi-Matrix)

$\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Äquivalent sind:

(a) $\vec{v}$ ist in $\vec{x}_0$ differenzierbar,

(b) $\exists$ $m \times n$-Matrix A, sodaß

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{\varrho}(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

wobei $\vec{\varrho}(\vec{h})$ vom Typ $o(\|\vec{h}\|)$ ist, d.h. $\displaystyle\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|\vec{\varrho}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0$.

In diesem Fall (wenn (a),(b) gelten) ist $A = \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$.

Beweis: Analog §19, Satz 1.

<u>Bedeutung von Satz 2:</u> $J\vec{v}(\vec{x}_0)$ liefert also eine "lineare Approximation" von $\vec{v}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. genauer

$$\underbrace{\vec{v}(\vec{x})}_{m\times 1} \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \underbrace{J\vec{v}(\vec{x}_0)}_{m\times n} \cdot \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{n\times 1} \text{ für } \vec{x} \to \vec{x}_0.$$

<u>Bsp. 2</u> $\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$J = \begin{pmatrix} (\nabla v_1)^T \\ (\nabla v_2)^T \\ (\nabla v_3)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(y-z) & -\cos(y-z) \end{pmatrix};$$

es sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $J\vec{v}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

nach Satz 2 ist für $\vec{x} \to \vec{x}_0$

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &\approx \vec{v}(\vec{x}_0) + J\vec{v}(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-1 \\ z \\ y-z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. z.B. $\underbrace{\vec{v}(1.01, 0.98, 1.02)}_{\parallel} \approx \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.02 \\ -0.04 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1.01\cdot 0.98 \\ 1.02 \\ \sin(-0.04) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9898 \\ 1.02 \\ -0.039989\ldots \end{pmatrix}$$

Der Unterschied ist $\vec{\varrho}(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

<u>Bemerkung:</u> Satz 2 zeigt, warum die partiellen Ableitungen als $m\times n$-Matrix und nicht als $n\times m$-Matrix angeordnet werden: Sonst hätte das Produkt $J\vec{v}(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)$ keinen Sinn. Ebenso bei der Kettenregel:

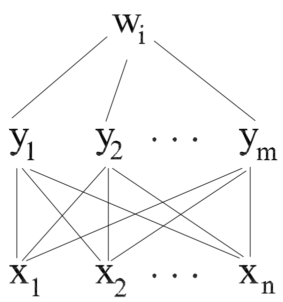
$$\vec{v} : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{D_1}} \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \vec{y},\quad \vec{w} : \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{D_2}} \longrightarrow \mathbb{R}^l : \vec{y} \longmapsto \vec{w}(\vec{y})$$

$$\vec{w}\circ\vec{v} : \big\{\vec{x} \in D_1 : \vec{v}(\vec{x}) \in D_2\big\} \longrightarrow \mathbb{R}^l : \vec{x} \longmapsto \vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big)$$

Dann gilt für $\vec{x}_0 \in D_1$ mit $\vec{v}(\vec{x}_0) \in D_2$:

$$\underbrace{J(\vec{w}\circ\vec{v})(\vec{x}_0)}_{l\times n} = \underbrace{(J\vec{w})\big(\vec{v}(\vec{x}_0)\big)}_{l\times m} \cdot \underbrace{J\vec{v}(\vec{x}_0)}_{m\times n}$$

denn



$$\Longrightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_i}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial w_i}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$
$$\begin{aligned} \mathrm{J}(\vec{w}\circ\vec{v})_{ij} &= (\mathrm{J}\vec{w})_{i1}(\mathrm{J}\vec{v})_{1j} + \cdots + (\mathrm{J}\vec{w})_{im}(\mathrm{J}\vec{v})_{mj} \\ &= \big((\mathrm{J}\vec{w})\cdot(\mathrm{J}\vec{v})\big)_{ij} \end{aligned}$$

(wobei der Einfachheit halber das Einsetzen von $\vec{x}_0$ bzw. $\vec{v}(\vec{x}_0)$ hier nicht explizit angeschrieben wurde).

21.4 DAS NEWTONSCHE NÄHERUNGSVERFAHREN IN MEHREREN VARIABLEN

Es seien n Gleichungen in n Variablen gegeben:

$$\begin{aligned} &v_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ &\cdots \qquad\qquad \text{bzw. } \vec{v}(\vec{x})=\vec{0}. \\ &v_n(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{aligned}$$

$\vec{x}_0$ sei ein Startpunkt “in der Nähe” einer Nullstelle $\vec{x}$. Dann gilt nach Satz 2:

$$\begin{aligned} &\vec{0}=\vec{v}(\vec{x})\approx\vec{v}(\vec{x}_0)+\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) \qquad /-\vec{v}(\vec{x}_0) \\ \Longrightarrow\ & -\vec{v}(\vec{x}_0)\approx\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) \qquad /\cdot\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)^{-1} \text{ von links} \\ \Longrightarrow\ & -\mathrm{J}(\vec{v})(\vec{x}_0)^{-1}\cdot\vec{v}(\vec{x}_0)\approx\vec{x}-\vec{x}_0 \qquad /+\vec{x}_0 \\ \Longrightarrow\ & \vec{x}_0-\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)^{-1}\cdot\vec{v}(\vec{x}_0)\approx\vec{x} \end{aligned}$$

Daher nehmen wir als nächste Näherung

$$\vec{x}_1=\vec{x}_0-\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)^{-1}\cdot\vec{v}(\vec{x}_0)$$

und gelangen mit Iteration zur Formel

$$\boxed{\vec{x}_{k+1}=\vec{x}_k-\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_k)^{-1}\cdot\vec{v}(\vec{x}_k)}$$

Bemerkungen: 1) Für $n=1$ erhalten wir die Formel aus Mathematik A mit v statt f, k statt n :

$$n=1 \Longrightarrow \mathrm{J}v(x)=v'(x) \Longrightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{v(x_k)}{v'(x_k)}.$$

2) Damit $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_k)^{-1}$ existiert, muss $\det\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_k)\neq 0$ gelten.

Bsp. 3.5 Bestimme das lokale Maximum von $f(x,y)=\cos x+\cos y+\sin\left(\frac{xy}{2}\right)+\frac{x}{5}$ in der Nähe von $(0/0)$.

Die Funktion $z=\cos x+\cos y$ ist periodisch, vgl. Übung 58 und hat ein Maximum bei $\vec{0}$, durch die (kleinen) Zusatzterme verschiebt sich dieses Maximum etwas.

$$\vec{v}(\vec{x})=\nabla f=\begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\ \partial f/\partial y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin x+\frac{y}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right)+\frac{1}{5}\\ -\sin y+\frac{x}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right)\end{pmatrix}\stackrel{!}{=}\vec{0}$$

$$\mathrm{J}\vec{v} = \begin{pmatrix} -\cos x - \frac{y^2}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right) - \frac{xy}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right) - \frac{xy}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) & -\cos y - \frac{x^2}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) \end{pmatrix} = \mathrm{H}\, f$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \mathrm{J}v(\vec{x}_0)^{-1} \cdot \vec{v}(\vec{x}_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2\dot{6} \\ 0.1\dot{3} \end{pmatrix}$$

Mit Iteration erhält man $\vec{x} \approx \begin{pmatrix} 0.27134 \\ 0.13607 \end{pmatrix}$. Vgl. dazu das maple-Programm im Anhang.

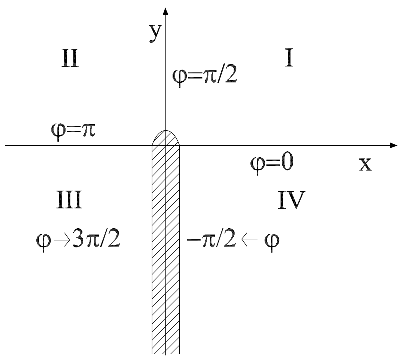
21.5 KOORDINATEN-TRANSFORMATIONEN

Def.: n differenzierbare Funktionen $v_1(\vec{x}), \ldots, v_n(\vec{x})$, $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißen Koordinaten, wenn die Abbildung $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ umkehrbar ist, d.h. wenn $\left[\vec{v}(\vec{x}_1) = \vec{v}(\vec{x}_2) \Longrightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2\right]$.

Bemerkung: Zur Unterscheidung nennt man die Koordinaten bzgl. einer Basis (s. Math. A) manchmal *lineare* Koordinaten, und den obigen, allgemeineren Begriff *krummlinige* Koordinaten.

Bsp. 4 (Polarkoordinaten)

$n = 2$, $v_1 = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v_2 = \varphi = \arctan \frac{y}{x} (+\pi)$ sind Koordinaten in $D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y > 0\}$. (Beachte: "$x \neq 0$" gilt außerhalb der y-Achse, "$y > 0$" gilt in der oberen Halbebene, "$x \neq 0$ oder $y > 0$" gilt in der **Vereinigung** dieser beiden Mengen, d.h. außerhalb der negativen y-Achse.)



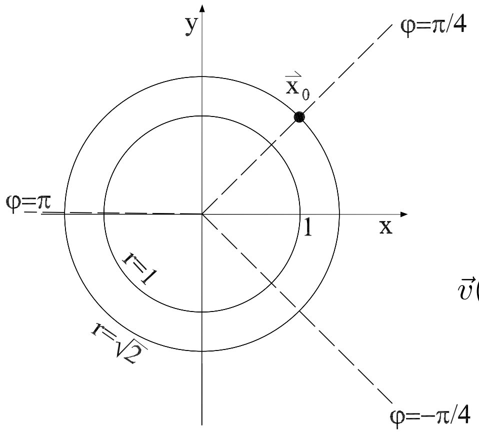
Wir nehmen immer
$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ für $\vec{x} \in$ II,III
und daher muß die xy-Ebene
wie im Bild "aufgeschnitten" werden.

(Oft wird auch $\varphi = \arctan \frac{y}{x} - \pi$ für $\vec{x} \in$ III gesetzt. Dann ist φ entlang der negativen x-Achse unstetig und es wird dort aufgeschnitten.)

Es gibt zwei Möglichkeiten, sich Koordinaten vorzustellen:

(a) Zeichne in $\mathbb{R}^n$ die Niveauflächen von $v_1, \ldots, v_n$. Die Koordinaten eines Punktes $\vec{x}_0$ werden durch die Niveauflächen bestimmt, auf denen er liegt.

In Bsp. 4:



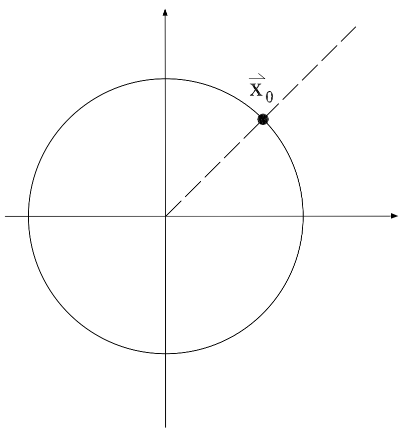
Z.B.:

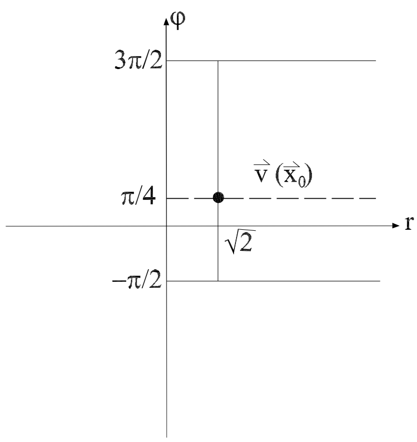
$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{kartesische Koordinaten von } \vec{x}_0$$

$$\vec{v}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi/4 \end{pmatrix} = \text{Polarkoordinaten von } \vec{x}_0$$

(b) Als Abbildung, die jedem Punkt $\vec{x}$ von $D \subset \mathbb{R}^n$ den Punkt $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Die Niveauflächen gehen dabei in (Hyper-)ebenen (bzw. für $n = 2$: Geraden) über.

Im Bsp. 4:





Satz 3 (über die Umkehrfunktion)

$\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Wenn $\det \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0$, so sind $v_1, \ldots, v_n$ bei $\vec{x}_0$ Koordinaten (d.h. $\exists\, \delta > 0 : \vec{v}$ ist auf $\{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$ umkehrbar).

Bezeichnung:

$$\det(\mathrm{J}\vec{v}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ heißt Funktionaldeterminante und wird auch

mit $\dfrac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ bezeichnet.

Beweis: a) $\det \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0 \Longleftrightarrow \nabla v_1(\vec{x}_0), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_0)$ sind eine Basis im $\mathbb{R}^n$ (denn dies sind die Zeilen von $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$).

$\vec{v}$ stetig differenzierbar in $\vec{x}_0 \Longrightarrow \nabla v_1, \ldots, \nabla v_n$ sind stetig in $\vec{x}_0 \Longrightarrow \nabla v_1(\vec{x}_1), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_n)$ sind auch eine Basis im $\mathbb{R}^n$, wenn $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ n Punkte nahe bei $\vec{x}_0$ sind.

b) Der MWS angewendet auf $f(t) = v_1\big(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})\big)$, gibt

$f(1) - f(0) = (1-0) \cdot \dot{f}(t_1),\ t_1 \in]0,1[$;

$\vec{x}_1 = \vec{x} + t_1(\vec{y} - \vec{x}) \Longrightarrow$

$$v_1(\vec{y}) - v_1(\vec{x}) = f(1) - f(0) = \dot{f}(t_1) \overset{\substack{\text{Kettenregel}\\ \downarrow}}{=} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}_1) \cdot (y_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial v_1}{\partial x_n}(\vec{x}_1) \cdot (y_n - x_n) = \langle \nabla v_1(\vec{x}_1), \vec{y} - \vec{x} \rangle$$

Analog für $v_2, \cdots, v_n$.

Wenn daher $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{y})$ für $\vec{x}, \vec{y}$ nahe bei $\vec{x}_0 \Longrightarrow \vec{y} - \vec{x} \perp \nabla v_1(\vec{x}_1), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_n)$

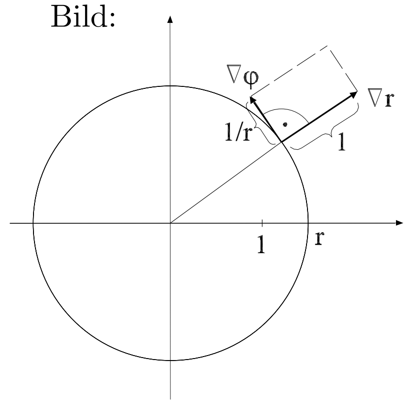
$\Longrightarrow \vec{y} - \vec{x} = \vec{0}$, da $\nabla v_1(\vec{x}_1), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_n)$ eine Basis ist. □

Zurück zu Bsp. 4:

$$\mathrm{J}\vec{v} = \begin{pmatrix} (\nabla r)^T \\ (\nabla \varphi)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathrm{J}\vec{v}) = \frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

Bild:



$\big|\det(\mathrm{J}\vec{v})\big|$ = Fläche des Parallelogramms, das $\nabla v_1, \nabla v_2$ aufspannen. Hier ist das Parallelogramm ein Rechteck, da $\nabla r \perp \nabla \varphi$ und daher $\big|\det(\mathrm{J}\vec{v})\big| = \|\nabla r\| \cdot \|\nabla \varphi\| = 1 \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

Def.: Die Koordinaten $v_1, \cdots, v_n$ heißen orthogonal $\Longleftrightarrow$ alle Niveauflächen von $v_1, \ldots, v_n$ schneiden sich senkrecht $\Longleftrightarrow$ $\nabla v_1, \ldots, \nabla v_n$ stehen in jedem Punkt $\perp$.

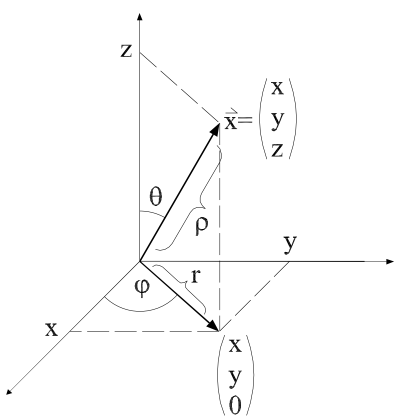
Bemerkung: Für orthogonale Koordinaten gilt $|\det \mathrm{J}\vec{v}|$ = Volumen des von $\nabla v_1, \ldots, \nabla v_n$ aufgespannten "Quaders" $= \|\nabla v_1\| \cdots \|\nabla v_n\|$

Bsp. 5: Kugelkoordinaten

$v_1 = \varrho = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$v_2 = \vartheta = \angle(\vec{x}, z\text{-Achse})$

$v_3 = \varphi = \angle(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x\text{-Achse})$



Wie erhalten wir x, y, z aus $\varrho, \vartheta, \varphi$?

$$z = \varrho\cos\vartheta,\ r = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \varrho\sin\vartheta,\ x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{x} = \varrho \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

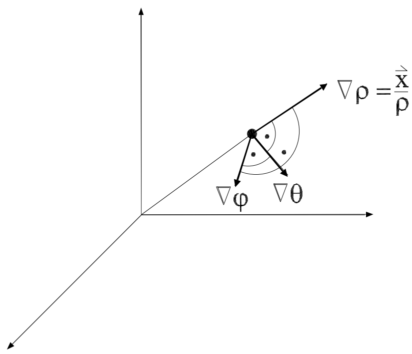
Umgekehrt folgt daraus $\vartheta = \arccos\frac{z}{\varrho},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x}(+\pi)$

Die Niveauflächen von $v_1 = \varrho$: Kugeln um 0

$v_2 = \vartheta$: Kegel um die z-Achse

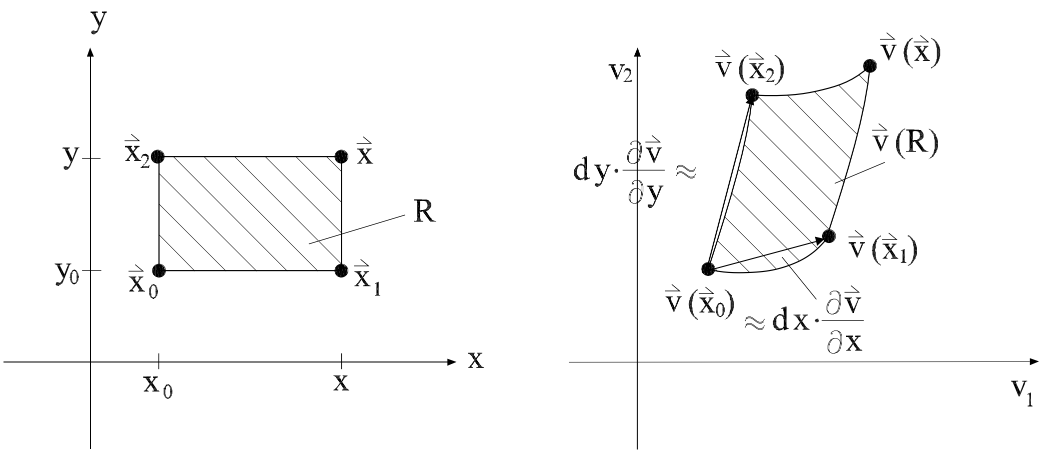
$v_3 = \varphi$: Halbebenen durch die z-Achse

schneiden sich senkrecht $\Longrightarrow$ Kugelkoordinaten sind orthogonal.



21.6 DIE FUNKTIONALDETERMINANTE ALS FLÄCHEN- (VOLUMS-)DEHNUNG

Es sei $n = 2$ und v_1, v_2 Koordinaten. Vorstellung wie in 21.5,(b):



Wenn wir $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix}$ nahe bei $\vec{x}_0$ wählen, so ist

$$\vec{v}(\vec{x}_1) = \vec{v}\left(\vec{x}_0 + \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{v}(\vec{x}_0) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}(\vec{x}_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\mathrm{d}x} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x \\ \partial v_2/\partial x \end{pmatrix}}_{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}}$$

$\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} =$ erste Spalte von $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) = \mathrm{J}$

Ebenso ist $\vec{v}(\vec{x}_2) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{d}y \cdot \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ und

$$\vec{v}(\vec{x}) \ \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{d}x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \mathrm{d}y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$$

Wegen $|\det \mathrm{J}| =$[Fläche des von den Spalten $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}, \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ aufgespannten Parallelogramms] erhalten wir, daß $\vec{v}$ das Rechteck R von der Fläche $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ in etwas ungefähr parallelogrammartiges mit der näherungsweisen Fläche $|\det \mathrm{J}|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ abbildet, d.h.

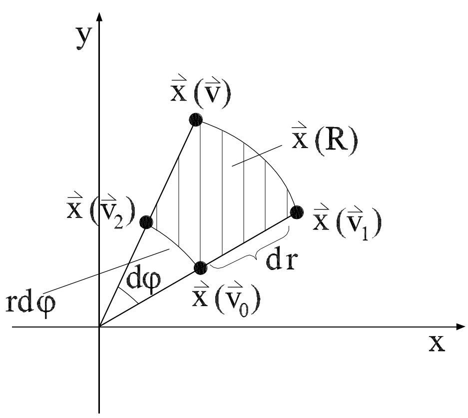
$$\boxed{|\det \mathrm{J}| = \left|\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x, y)}\right| = \lim_{R \to 0} \frac{\text{Fläche von } \left\{\vec{v}(\vec{x}) : \vec{x} \in R\right\}}{\text{Fläche von } R}}$$

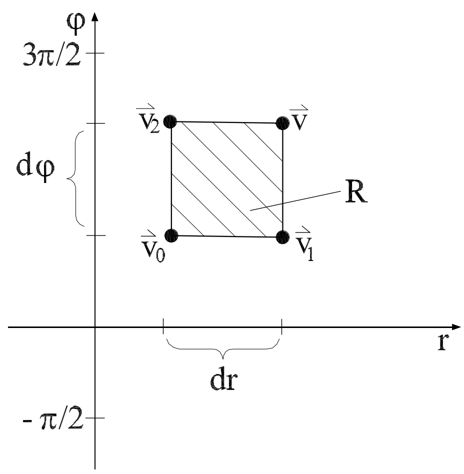
$\left\{\begin{matrix} |\det \mathrm{J}| > 1 \\ |\det \mathrm{J}| < 1 \end{matrix}\right\}$ bedeutet also, bei $\vec{x}_0$ $\left\{\begin{matrix} \text{vergrößert} \\ \text{verkleinert} \end{matrix}\right\}$ $\vec{v}$ die Fläche. (Das Vorzeichen von $\det \mathrm{J}$ sagt, wie die Spalten $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}, \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ bzw. wie die Zeilen $\nabla v_1, \nabla v_2$ orientiert sind.)

Die eingerahmte Aussage gilt natürlich analog im $\mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^n)$, wenn R (n–dimensionale) Quader sind und "Fläche" durch "Volumen" (im $\mathbb{R}^n$) ersetzt wird.

Umgekehrt werden Rechtecke in v_1, v_2-Koordinaten in krummlinige Gebiete der xy-Ebene mit Fläche $\approx \left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(v_1, v_2)}\right| \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2$ abgebildet.

Im Bsp. 4:





Offenbar ist die Fläche von $\vec{x}(R)$ (für kleine $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\varphi) \approx r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$, d.h. $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r$

Rechnerische Kontrolle: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{pmatrix}}{\underset{\downarrow}{=}}$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Früher hatten wir $\dfrac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{r}$ erhalten und das ist in Übereinstimmung mit

Satz 4 $\vec{v}$ umkehrbar $\Longrightarrow \dfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(v_1,\dots,v_n)} \cdot \dfrac{\partial(v_1,\dots,v_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = 1$

(Vgl. auch §7, Satz 3, p. 59).

1. Beweis (Geometrisch) z.B. für $n = 2$:

Ein kleines Rechteck R mit Fläche F bei $\vec{x}_0$ wird von $\vec{v}$ in ein ungefähres Parallelogramm P mit Fläche $F_1 \approx F \cdot \left|\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right|$ bei $\vec{v}(\vec{x}_0)$ abgebildet. P wird von $\vec{v} \longmapsto \vec{x}(\vec{v})$ wieder auf R abgebildet mit Fläche

$$F \approx F_1 \cdot \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{v}}\right| \approx F \cdot \left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right| \cdot \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{v}}\right|.$$

Für $F \to 0$ folgt $\left|\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right| \cdot \left|\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{v}}\right| = 1.$ $\square$

2. Beweis: (Kettenregel)

Es sei $\vec{w} = \vec{v}^{-1} : \vec{v}(\vec{x}) \longmapsto \vec{x}$.

Dann ist $\vec{w} \circ \vec{v} =$ Identität, d.h.

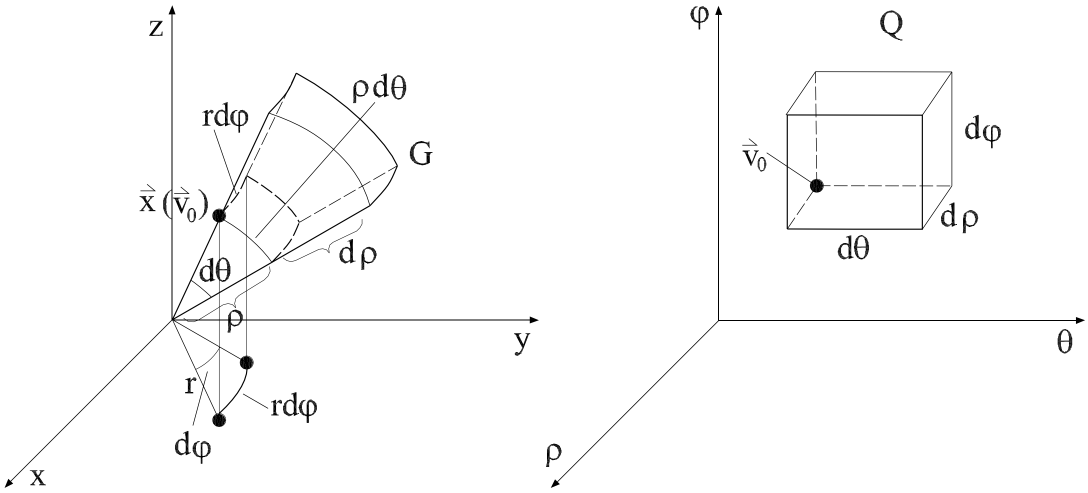
$$\vec{w} \circ \vec{v}(\vec{x}) = \vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big) = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{J}(\vec{w}\circ\vec{v}) = \mathrm{J}\ \text{Identität} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\Longrightarrow$ (s.21.3) $\mathrm{J}\vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x}_0)\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) = I$

$$\underbrace{\det \mathrm{J}\vec{w}}_{\dfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(v_1,\dots,v_n)}} \cdot \underbrace{\det \mathrm{J}\vec{v}}_{\dfrac{\partial(v_1,\dots,v_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}} = \det I = 1$$ $\square$

Bsp. 5: Um $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$ zu bestimmen, kann man rechnerisch vorgehen (s. Übungen) oder geometrisch:



Ein kleiner Quader Q mit Seitenlängen $\mathrm{d}\varrho$, $\mathrm{d}\vartheta$, $\mathrm{d}\varphi$ wird im xyz-Raum in ein quaderartiges Gebiet G mit den Seiten $\mathrm{d}\varrho$, $\varrho\mathrm{d}\vartheta$, $r\mathrm{d}\varphi = \varrho\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ und daher mit Volumen $\approx \varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ abgebildet

$$\Longrightarrow \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}\right| = \varrho^2\sin\vartheta.$$

(Daß G rechte Winkel hat, liegt an der Orthogonalität der Kugelkoordinaten. I.a. wäre G ein parallelepiped-artiges Gebiet.)

KAPITEL VI: DIE TAYLORREIHE

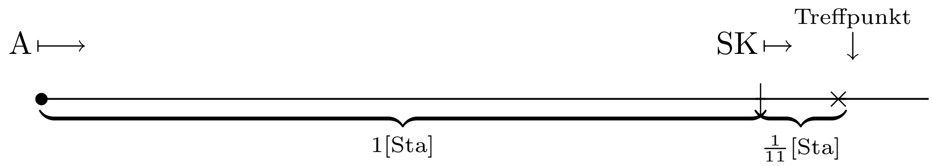
§22: Konvergenzkriterien

22.1 KONVERGENZ VON REIHEN

Bsp. 1 (Geometrische Reihe) Der griechische Sophist Zenon (5. Jhdt. v. Chr.) behauptete, einen Widerspruch im mathematischen Denken gefunden zu haben. Er konstruierte folgendes Parádoxon:

Kann Achilles, der 12mal so schnell läuft wie eine Schildkröte, diese einholen, wenn sie einen Vorsprung von 1 Stadion $\big(1\,[\text{Sta}] = 184.97\,[\text{m}]\big)$ hat?

Die Vernunft sagt ja. Genauer: Wenn die Schildkröte $\dfrac{1}{11}$ [Sta] gekrochen ist, so hat Achilles das 12-fache, d.h. $\dfrac{12}{11} = 1 + \dfrac{1}{11}$ [Sta] zurückgelegt und hat sie eingeholt.



Die Zenon'sche Mathematik sagt nein:

Zuerst läuft A	1 [Sta],	SK inzwischen $\dfrac{1}{12}$ [Sta];
dann läuft A	$\dfrac{1}{12}$ [Sta],	SK inzwischen $\dfrac{1}{12^2}$ [Sta];
dann läuft A	$\dfrac{1}{12^2}$ [Sta],	SK inzwischen $\dfrac{1}{12^3}$ [Sta] etc.

Um sie einzuholen, muß Achilles also $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \cdots$ [Sta] laufen und eine Summe von ∞ vielen Termen gibt - nach Zenon - ∞. Also kann Achilles - nach Zenon - die Schildkröte nicht einholen. In Wahrheit ist die Summe der Grenzwert einer konvergenten Folge:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{\substack{a_1\\ \| \\ s_1}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{a_2}}_{s_2} + \underbrace{\frac{1}{12^2}}_{a_3}}_{s_3} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{12^{n-1}}}_{a_n}}_{s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = S = 1\frac{1}{11}$$

Numerisch: $s_1 = 1,\ s_2 = 1\frac{1}{12} = 1.08\dot{3},\ s_3 = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144} = 1.0902\dot{7}, \ldots,$
$S = 1\frac{1}{11} = 1.090909\ldots\,[\text{Sta}] \approx 201.79\,[\text{m}]$

Def: Ein Ausdruck der Form $a_1 + a_2 + \cdots$ (mit $a_i \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt (unendliche) Reihe (engl. series). a_n heißt n-tes Reihenglied. $s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ heißt n-te Partialsumme.

Die Reihe $\left\{\begin{matrix}\text{konvergiert}\\ \text{divergiert}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$ die Folge s_n der Partialsummen $\left\{\begin{matrix}\text{konvergiert}\\ \text{divergiert}\end{matrix}\right\}$.

Falls die Reihe konvergiert, nennt man $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ihre Summe und schreibt $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Also: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Summe einer konvergenten Reihe}\\ \qquad = \text{Grenzwert der Folge der Partialsummen}\end{array}}$

Schreibweise: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ steht für $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ und es gibt 4 Möglichkeiten:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S \Longleftrightarrow s_n$ konvergiert gegen S

(b/c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty \Longleftrightarrow s_n$ divergiert gegen $\pm\infty$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ existiert nicht $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existiert nicht.

Bemerkungen: Der Laufindex kann 1. umbenannt und 2. substituiert werden, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{1.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{2.}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \qquad \left\| \begin{array}{l} n = i+1 \\ n = 1 \Rightarrow i = 0 \\ n = \infty \Rightarrow i = \infty \end{array} \right.$$

Manchmal ist es bequem, eine Reihe ab 0 oder allgemeiner ab $n = N$ zu numerieren, d.h. man betrachtet $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ und setzt $s_n = \sum\limits_{k=N}^{n} a_k$. Beachte, daß der Laufindex in s_n nicht n sein kann, sondern anders heißen muß!

Bsp. 2 $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$,

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Longrightarrow$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \overset{(k=1)}{\frac{1}{1\cdot 2}} + \overset{(k=2)}{\frac{1}{2\cdot 3}} + \overset{(k=3)}{\frac{1}{3\cdot 4}} + \cdots + \overset{(k=n)}{\frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \text{ d.h.}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}s_n=1$$

<u>Zurück zu Bsp. 1</u> Es sei $p \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Die Reihe $1+p+p^2+p^3+\cdots$ heißt <u>geometrische Reihe</u>. (Sie enthält noch den "Parameter" p.)

Es ist also $a_k = p^{k-1}$, $k=1,2,\ldots$. $\quad\big($Zenon: $p=\frac{1}{12}\big)$

$$1+p+p^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}p^n \qquad \left\| \begin{array}{l} k=n+1 \\ k=1\Rightarrow n=0 \\ k=\infty\Rightarrow n=\infty \end{array}\right.$$

<u>Berechnung von $s_n=\sum_{k=1}^{n}p^{k-1}$:</u>

$$s_n = 1 \;+\; p \;+\; p^2 \;+\cdots+p^{n-1} \qquad \Big|\cdot(1-p)$$

$$\Longrightarrow (1-p)s_n = 1-\cancel{p}+\cancel{p}-\cancel{p^2}+\cancel{p^2}-p^3+\cdots+p^{n-1}-p^n$$

$$=1-p^n \Longrightarrow \underline{\underline{s_n=\frac{1-p^n}{1-p}}} \text{ falls } p\neq 1;$$

(für $p=1$ ist $s_n=\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}=n$)

<u>1. Fall</u> $|p|<1 \Longrightarrow 1+p+p^2+\cdots=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overset{\nearrow 0}{p^n}}{1-p}=\frac{1}{1-p}=S$

<u>2. Fall</u> $|p|\geq 1$ a) $p=1\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$

b) $p\neq 1 \Longrightarrow s_n=\dfrac{1-p^n}{1-p}$ divergiert,

da p^n divergiert, vgl. 3.1, Bsp. 4 und 6, p. 25.

<u>Ergebnis:</u> $\sum_{n=0}^{\infty}p^n=\dfrac{1}{1-p}$ konvergiert $\Longleftrightarrow |p|<1$

<u>Spezielle Beispiele:</u>

a) $1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{p}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$\big($hier ist $s_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1-2^{-n}}{\frac{1}{2}}=2(1-2^{-n})=2-2^{1-n}$,

z.B. $s_3=2-2^{-2}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}\checkmark\big)$

b) (Zenon) $1+\underbrace{\frac{1}{12}}_{p}+\frac{1}{12^2}+\cdots=\dfrac{1}{1-\frac{1}{12}}=\dfrac{1}{\frac{11}{12}}=\dfrac{12}{11}=1\dfrac{1}{11}$

c) $1 + \underbrace{1}_{p} + 1 + \cdots$ divergiert, da $|1| \geq 1 \quad (s_n = n)$

d) $1 \underbrace{-1}_{p} + 1 - 1 + \cdots$ divergiert, da $|-1| \geq 1$

$$\left(s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ s_3 = 1, \cdots, s_n = \left\{ \begin{array}{l} 0 : n \text{ gerade} \\ 1 : n \text{ ungerade} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\big(1 - (-1)^n\big)\right.$$

e) $1 \underbrace{-3}_{p} + 9 - 27 + - \cdots$ divergiert, da $|-3| \geq 1$

$$\left(s_n = \frac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)} = \frac{1}{4}\big(1 - (-3)^n\big),\ \text{z.B. } s_3 = \frac{1}{4}\big(1 - (-27)\big) = \frac{28}{4} = 7\checkmark \right)$$

22.2 DAS NOTWENDIGE KRITERIUM $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Schreibweise: In Konvergenzbetrachtungen steht oft $\sum a_n$ für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$.

Für die Konvergenz ist es egal, mit welchem n begonnen wird.

Satz 1 $\underbrace{\sum a_n \text{ konvergiert}}_{A} \Longrightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}_{B}$

Beweis: $\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$;

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + \cdots + a_n = s_n \\ a_1 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1} \end{array}\right\} - \Longrightarrow a_n = \underset{S}{\underset{\downarrow}{s_n}} - \underset{S}{\underset{\downarrow}{s_{n-1}}} \overset{\text{GWS}}{\to} 0, \text{ d.h. } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \square$$

Bemerkung: Weil $A \Longrightarrow B$, gilt auch $\not B \Longrightarrow \not A$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum a_n$ divergiert.

Bsp. 3

a) $\arctan 1 + \arctan 2 + \cdots, a_n = \arctan n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi}{2} \neq 0 \Longrightarrow \sum \arctan n$ divergiert;

b) $1 - 1 + \underbrace{1}_{a_3 = (-1)^2} - 1 + \cdots, a_n = (-1)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert nicht} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \text{ divergiert (vgl. auch Bsp. 1, d).}$$

Vorsicht: I.a. gilt nicht $B \Longrightarrow A$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist ein "notwendiges", aber kein "hinreichendes" Kriterium für die Konvergenz von $\sum a_n$.

Bsp. 4 (Harmonische Reihe)

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots, a_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ABER: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergiert.

Beweis: $s_{16} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}$

Also: $s_1 = 1,\ s_2 = 1+\frac{1}{2},\ s_4 > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ s_8 > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},$

$s_{\underbrace{16}_{=2^4}} > 1+4\cdot\frac{1}{2},\ s_{2^k} > 1+k\cdot\frac{1}{2},$

$s_n > \underbrace{1+\frac{k}{2}}_{=M}$ für $n \geq \underbrace{2^k}_{=2^{2(M-1)}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow s_n \geq M$ für $n \geq 2^{2(M-1)} = N \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ $\square$

Ergebnis von Satz 1 Damit $\sum a_n$ konvergiert, muß jedenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten (Bsp. 3). Wenn das gilt, gibt es 2 Möglichkeiten: a) $\sum a_n$ konvergiert (Bsp. 2)

b) $\sum a_n$ divergiert (Bsp. 4)

22.3 REIHEN OHNE NEGATIVE GLIEDER

Wenn alle $a_n \geq 0$ sind, so ist s_n schwach monoton steigend :

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 \leq & \underbrace{a_1+a_2} & \leq & \underbrace{a_1+a_2+a_3} & \leq & \cdots \\ \Longrightarrow \quad \| & \| & & \| & & \\ s_1 \leq & s_2 & \leq & s_3 & \leq & \cdots \end{array}$$

Dann gibt es 2 Möglichkeiten: Entweder wächst s_n unbeschränkt, d.h. $\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ (s. Bsp. 4) oder s_n ist beschränkt, d.h. $\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$. Nach §3, Satz 4, S. 30 (Vorsicht: dort steht S für M) ist s_n dann konvergent, d.h. $\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S < \infty$. In diesem Fall schreibt man einfach $\sum a_n < \infty$. Also:

Satz 2 Es seien alle $a_n \geq 0$. Dann gilt: $\sum a_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ die Folge s_n ist beschränkt. $\square$

Vorsicht: Wenn manche $a_n < 0$, so kann " $\Longleftarrow$" falsch sein.

Z.B. ist $1-1+1-1+-\cdots$ divergent, obwohl $s_n = \left\{\begin{matrix} 0 : n \text{ gerade} \\ 1 : n \text{ ungerade}\end{matrix}\right\}$ beschränkt ist.

Bemerkung: Wenn alle $a_n \geq 0$, läßt sich über Konvergenz/Divergenz oft durch Vergleich entscheiden:

I) Wenn $\boxed{\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum b_n \text{ konvergiert}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = M$, d.h. die Summe von b_k ist eine Schranke zu $s_n \Longrightarrow s_n$ beschränkt $\overset{\text{Satz 2}}{\Longrightarrow} \boxed{\sum a_n \text{ konvergiert}}$

Es genügt auch, $\forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq c \cdot b_n$ mit einem positiven c zu verlangen, weil es für die Konvergenz auf die ersten a_n nicht ankommt und weil mit $\sum b_n$ auch $\sum cb_n$ konvergent ist.

II) Ebenso, wenn $\boxed{\forall n : 0 \leq b_n \leq a_n \wedge \sum b_n \text{ divergiert}} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} b_k \to \infty \Longrightarrow s_n \to \infty \Longrightarrow \boxed{\sum a_n \text{ divergiert}} \text{ Also:}$$

<u>Folgerung 1</u> (Vergleichskriterium) $c > 0,\ N \in \mathbb{N}$.

(I) $\forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq c \cdot b_n \wedge \sum b_n$ konvergiert $\Longrightarrow \sum a_n$ konvergiert

(II) $\forall n \geq N : 0 \leq c \cdot b_n \leq a_n \wedge \sum b_n$ divergiert $\Longrightarrow \sum a_n$ divergiert $\square$

<u>Bezeichnung:</u>

$$\sum cb_n \text{ ist } \left\{ \begin{matrix} \geq \sum a_n \text{ in I} \\ \leq \sum a_n \text{ in II} \end{matrix} \right\} \text{ und wird daher } \left\{ \begin{matrix} \text{in I} & : & \text{konvergente } \underline{\text{Majorante}} \\ \text{in II} & : & \text{divergente } \underline{\text{Minorante}} \end{matrix} \right\}$$

genannt. (major=größer, minor=kleiner in lat.)

<u>Bsp. 5</u> a) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots,\ a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

<u>Idee:</u> $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist größer als $\frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n} = \infty$ (Bsp. 4); also ist vermutlich auch $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$.

<u>Exakt:</u> $\sqrt{n} \leq n \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{a_n} \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$ (hier ist $N = 1,\ c = 1$)

$\sum b_n$ div. $\underset{\text{Vkrit.II}}{\Longrightarrow} \sum a_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div.

$\sum \frac{1}{n}$ ist also eine divergente Minorante.

b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,\ a_n = \frac{1}{n^2}$

(nicht verwechseln mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, s. Bsp. 1a)

<u>Idee:</u> $\frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n(n+1)}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Bsp.2)

also ist vermutlich auch $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$

<u>Exakt:</u> Wir wollen $\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n} \leq c \cdot \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{b_n}$ $\qquad \Big| \cdot n^2 \cdot (n+1)$

$\Longleftrightarrow n + 1 \leq c \cdot n$; das stimmt für $c = 2$

Also $a_n \leq 2 \cdot b_n$; $\sum b_n$ konvergiert $\underset{\text{Vkrit.I}}{\Longrightarrow} \sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert

Genauer: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Bsp. 2}}}{=} 2.$

Aus der Fourieranalysis ergibt sich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934.$

Beachte: Die Konvergenz einer Reihe ist oft viel leichter zu zeigen, als die Summe zu berechnen.

Bemerkung: Oft ist $a_n = f(n)$, f eine Funktion. In Bsp. 5 etwa in a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, in b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Die Konvergenz von $\sum a_n = \sum f(n)$ hängt dann mit der Konvergenz von $\int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ zusammen.

Folgerung 2 (Integralkriterium)

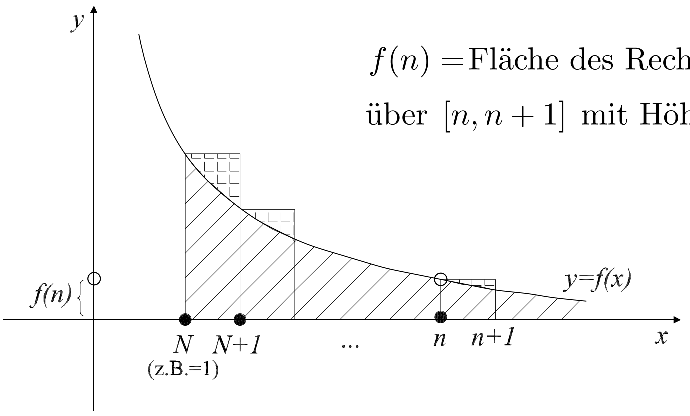
$f(x)$ sei positiv und monoton fallend für $x > N - 1$. Dann gilt:

(a) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n) \geq \int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n) \leq \int\limits_{N-1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ konvergiert $\Longleftrightarrow \int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert

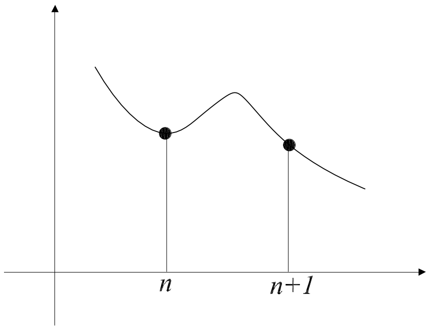
Beweis: (a)



$\Longrightarrow \sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n) =$ Fläche aller Rechtecke $\geq$ Fläche unter der Kurve über $[N, \infty[=$

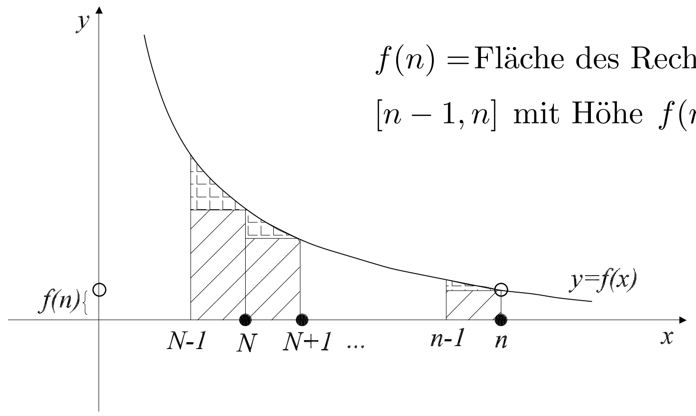
$= \int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

[Weil f monoton fallend ist, kann so etwas:



nicht passieren, und gilt $\geq$]

b) Nun tragen wir die Rechtecke nach <u>links</u> auf:



$f(n)$ =Fläche des Rechtecks über $[n-1, n]$ mit Höhe $f(n)$

$$\Longrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} f(n) = \text{Fläche aller Rechtecke} \leq \text{Fläche unter der Kurve über } [N-1, \infty[=$$

$$= \int_{N-1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Bisher wurde vorausgesetzt, daß $\sum$ und $\int$ konvergieren.

α) "$\Longrightarrow$" $S = \sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ sei konv. $\overset{(a)}{\Longrightarrow} \forall b \in \mathbb{N} : \int\limits_{N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S$

$\Longrightarrow \int\limits_{N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ monoton steigend und nach oben beschränkt

$\Longrightarrow \int\limits_{N}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

β) "$\Longleftarrow$" $M = \int\limits_{N}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sei konv. $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=N}^{n} f(k) = f(N) + \sum_{k=N+1}^{n} f(k) \overset{(b)}{\leq} f(N) + \int_{N}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = f(N) + M$$

$\Longrightarrow s_n$ monoton steigend und nach oben beschränkt $\overset{\text{vgl. Satz 2}}{\Longrightarrow}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=N}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} s_n \text{ konv.} \qquad \square$$

<u>Bsp. 5</u> $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Nach Vkrit. I ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konv. $\Longleftrightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konv. $\overset{\S 14.1}{\Longleftrightarrow} \alpha > 1$

<u>Def.:</u> $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, heißt <u>Riemann'sche Zetafunktion</u>.

Genauer für $\alpha = 2$: $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$ Abschätzung mit dem Integralkriterium:

z.B. $\underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}}_{1.36\dot{1}} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \underbrace{\sum\limits_{n=4=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \le \underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}}_{1.69\dot{4}}$

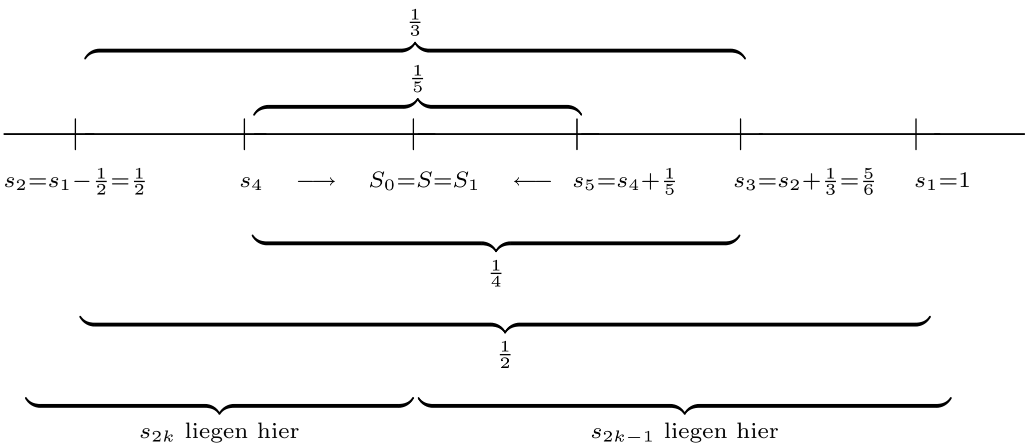
$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \overset{(b)}{\le} \int\limits_{N-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{N-1}^{\infty} = \frac{1}{N-1} \Longrightarrow \quad \le \frac{1}{4-1}$$

Oft gibt es keine Formel für die Summe S $\left(\text{hier } \frac{\pi^2}{6}\right)$, und man ist auf solche Abschätzungen angewiesen $\big($z.B. für $\zeta(3)\big)$.

22.4 <u>REIHEN MIT NEGATIVEN GLIEDERN</u>

<u>Bsp. 6:</u> $\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{s_1} - \frac{1}{2}}_{s_2} + \frac{1}{3}}_{s_3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{=a_n}$

Was passiert mit den s_n?



s_{2k} ist monoton steigend und nach oben beschränkt $(\le s_1) \overset{\S 3,\text{ Satz } 4}{\Longrightarrow} s_{2k} \to S_0$

s_{2k-1} ist monoton fallend und nach unten beschränkt $(\ge s_2) = s_{2k-1} \to S_1$

$$S_0 - S_1 = \lim_{k\to\infty} \underbrace{(s_{2k} - s_{2k-1})}_{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} = 0$$

$\Longrightarrow S_0 = S_1 = S$ und $s_n \to S$

Also folgt: Diese Reihe konvergiert.

Allgemein:

Satz 3 (Leibnizkriterium) Die Reihe $\sum a_n$ erfülle

1) Die Reihe ist "alternierend", d.h. das Vorzeichen der Reihenglieder wechselt (d.h. $\forall n : \operatorname{sign} a_n = -\operatorname{sign} a_{n+1}$);
2) die Beträge der Reihenglieder sind monoton fallend $\big($d.h. $\forall n : |a_n| \geq |a_{n+1}|\big)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (nach Satz 1 für Konvergenz notwendig)

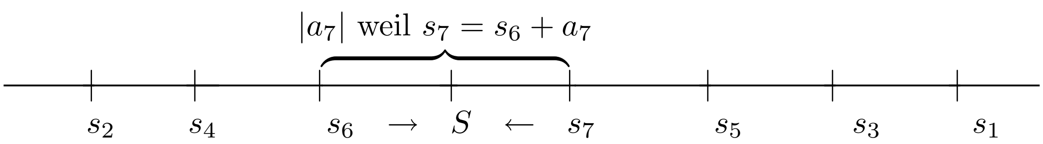
Dann konvergiert $S = \sum a_n$ und es gilt

$$|S - s_n| \leq |a_{n+1}|. \qquad (*)$$

$(*)$ in Worten: Der Abstand der n-ten Partialsumme von der Reihensumme (= der "Fehler") ist $\leq$ dem Betrag des ersten weggelassenen Reihengliedes.

Genauer: $S = \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$, $s_n = \sum\limits_{k=N}^{n} a_k$, $(*)$ für $n \geq N$; meistens ist $N = 1$.

Beweis: Wie oben sei z.B. $a_1 > 0 \Longrightarrow a_2 < 0,\ a_3 > 0, \cdots$. Dann gilt genauso



$\Longrightarrow S$ zwischen s_6 und s_7

$\Longrightarrow |S - s_6| \leq |a_7|$ und allgemein $(*)$. □

Zurück zu Bsp. 6 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

1) alternierend $\surd$ 2) $|a_n| = \frac{1}{n} \geq |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \surd$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0 \surd$

Also konvergiert S und z.B. $|S - s_6| \leq |a_7| = \frac{1}{7} \approx 0.1428.$

$s_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 0.61\dot{6}$ Später $S = \ln 2 \approx 0.693.$

Beachte: Die Reihe der Beträge $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ divergiert (Bsp. 4, harmonische Reihe). Man sagt: $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ist "bedingt konvergent".

Def.: 1) Die Reihe $\sum a_n$ heißt bedingt konvergent $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ (i) $\sum a_n$ ist konvergent

$\wedge$ (ii) $\sum |a_n|$ ist divergent.

2) Die Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent $\Longleftrightarrow \sum |a_n|$ ist konvergent.

Satz 4 $\sum a_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum a_n$ konvergent. [In Worten: Wenn die Reihe der Beträge konvergiert, so konvergiert auch die Reihe selbst.]

Beweis: Es seien $s_n = a_1 + \cdots + a_n$,

$$s_n^{(1)} = [\text{Summe aller positiven } a_k,\ k = 1, \ldots, n] = \sum_{\substack{k=1 \\ a_k \geq 0}}^{n} a_k$$

$$s_n^{(2)} = [\text{Summe aller negativen } a_k,\ k = 1, \ldots, n] = \sum_{\substack{k=1 \\ a_k < 0}}^{n} a_k$$

$$\sum a_n \text{ absolut konvergent } \Longrightarrow T = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

$\Longrightarrow 0 \leq s_n^{(1)}$ ist schwach monoton steigend und nach oben beschränkt durch T

$0 \geq s_n^{(2)}$ ist schwach monoton fallend und nach unten beschränkt durch $-T$

$\overset{\S 3, \text{Satz } 4}{\Longrightarrow} s_n^{(1)},\ s_n^{(2)}$ sind konvergent

$\underset{\text{GWS}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n = s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$ ist konvergent.

(Für $a_n \in \mathbb{C}$ setzt man $s_n^{(1)} = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Re} a_k \geq 0}}^{n} \operatorname{Re} a_k, \ldots, s_n^{(4)} = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im} a_k < 0}}^{n} \operatorname{Im} a_k$

$s_n = s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \mathrm{i}(s_n^{(3)} + s_n^{(4)})$ und verfährt analog.) $\square$

Ergebnis von Satz 4:

$$\text{alle Reihen} \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \left.\begin{array}{c} \text{absolut konvergent} \\ \hdashline \text{bedingt konvergent} \end{array}\right\} \text{konvergente Reihen} \\ \hline \text{divergent} \\ \hline \end{array} \right.$$

Bemerkung: Konvergente Reihen lassen sich addieren/subtrahieren und mit Zahlen multiplizieren: $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konv. $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \right) \overset{\text{GWS}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ und ebenso: $\lambda \sum a_n = \sum \lambda a_n$.

Vorsicht: Nur absolut konvergente Reihen lassen sich umordnen (s. Übung 90) und multiplizieren. Letzteres heißt

$\sum a_n, \ \sum b_n$ absolut konvergent$\Longrightarrow$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{a_1b_1}_{k=2} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_1)}_{k=3} + \underbrace{(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)}_{k=4} + \cdots =$$

jedes a_m
mit jedem b_n
multiplizieren

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{m+n=k} a_m \cdot b_n \right)$$

22.5 DAS QUOTIENTENKRITERIUM

Idee: Es sei z.B. $a_2 \approx \frac{1}{3}a_1, \ a_3 \approx \frac{1}{3}a_2, \ldots, a_{n+1} \approx \frac{1}{3}a_n$ bzw. $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{1}{3}}$. Dann ist $a_{n+1} \approx \frac{1}{3}a_n \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a_{n-1} \approx \cdots \approx \left(\frac{1}{3}\right)^n a_1$ und $\sum a_n \approx \sum a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{konv.}}$ sollte auch konvergent sein.

Exakt:

Satz 5 (Quotientenkriterium) Es sei $\sum a_n$ gegeben.

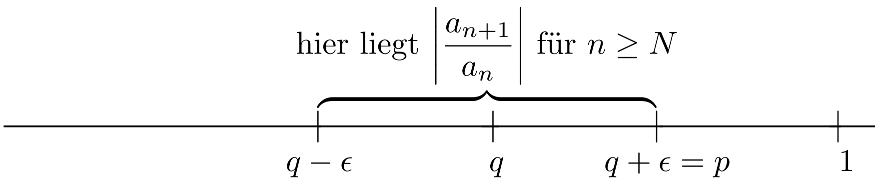
(I) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1 \Longrightarrow \sum a_n$ absolut konvergent

(II) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q > 1 \Longrightarrow \sum a_n$ divergent

(Wenn $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ oder nicht existiert, ist alles möglich.)

Beweis: (I) $0 < \epsilon$ sei so (klein), daß $\underbrace{q + \epsilon}_{p} < 1$;

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q \Longrightarrow \exists N : \forall n \geq N : \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - q \right| < \epsilon, \text{ d.h.}$$



$$\Longrightarrow 0 \le \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q+\epsilon = p \qquad \text{für } n \ge N$$

$$\Longrightarrow |a_{n+1}| \le p \cdot |a_n| \text{ für } n \ge N$$

$$\Longrightarrow |a_{N+1}| \underset{\Downarrow}{\le} p \cdot |a_N|$$

$$\Longrightarrow |a_{N+2}| \le p \cdot |a_{N+1}| \le p^2 |a_N| \Longrightarrow |a_{N+2}| \underset{\Downarrow}{\le} p^2 |a_N|$$

$$\Longrightarrow |a_{N+3}| \le p \cdot |a_{N+2}| \le p^3 |a_N| \Longrightarrow |a_{N+3}| \le p^3 |a_N|$$

$$\ddots \qquad \ddots \qquad \ddots$$

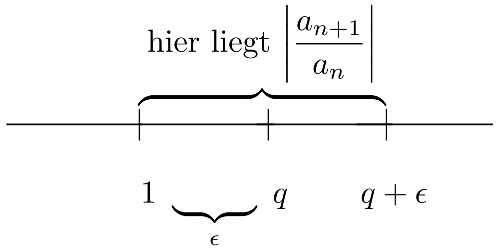
$$|a_{\underbrace{N+k}_{n}}| \le p^k |a_N| = p^{N+k} \cdot \underbrace{\frac{|a_N|}{p^N}}_{c}$$

$$\Longrightarrow \forall n \ge N : |a_n| \le c \underbrace{p^n}_{b_n} \wedge \sum p^n \text{ konvergiert } (p<1)$$

$\Longrightarrow$ nach Vkrit. I: $\sum |a_n|$ konvergiert $\Longrightarrow \sum a_n$ absolut konvergent.

(II) $q = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,\ \epsilon = q-1$

$$\Longrightarrow \exists N : \forall n \ge N : \left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q \right| < \epsilon$$



$$\Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \text{ für } n \ge N$$

$$\Longrightarrow |a_{n+1}| > |a_n| \text{ für } n \ge N$$

$$\Longrightarrow |a_{N+1}| > |a_N|,\ |a_{N+2}| > |a_{N+1}| > |a_N| \text{ etc.}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \underset{(\text{Satz } 1)}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ divergiert} \qquad \square$$

<u>Bsp. 7</u> a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \qquad (0! = 1);$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = q < 1 \Longrightarrow$$

(Q.krit.) $\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert

§23: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} = 2.71828\ldots$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Longleftrightarrow \alpha > 1 \qquad$ (vgl. Bsp. 5)

Qkrit.: $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\atop 0}\right)^\alpha} = 1 = q \text{ (für beliebige } \alpha)$$

Das Quotientenkriterium gibt hier also keine Entscheidung. Man sieht, daß für $q = 1$ die Reihe sowohl konvergieren $(\alpha > 1)$ als auch divergieren $(\alpha \leq 1)$ kann.

§23: Potenzreihen

23.1 DER KONVERGENZRADIUS

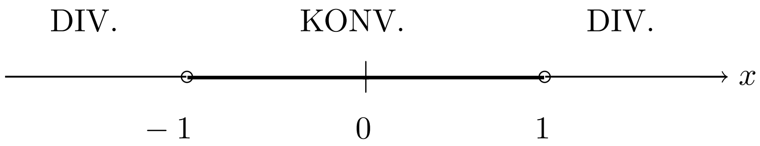
Bemerkung: Ein Polynom vom Grad n hat die Form $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$. Eine Potenzreihe ist ein "Polynom vom Grad ∞".

Def.: Es seien $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Die (von x abhängige) Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ heißt Potenzreihe. Die Zahlen $c_0, c_1, \dots$ heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

Bsp. 1 (Geometrische Reihe) $c_0 = c_1 = \cdots = 1$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert

$\left(\text{und} = \dfrac{1}{1-x}\right)$ für $|x| < 1$, d.h. $-1 < x < 1$, und divergiert für $|x| \geq 1$.

Bild:



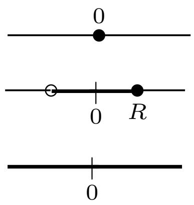
Bemerkung: Der nächste Satz besagt, daß die Menge der x, wo $\sum c_nx^n$ konvergiert, immer ein symmetrisches Intervall um 0 ist (bis auf die Randpunkte).

Satz 1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ sei eine Potenzreihe, $x_0 \in \mathbb{R}$

(A) $\sum c_nx_0^n$ konvergiert $\wedge\ |x| < |x_0| \Longrightarrow \sum c_nx^n$ konvergiert absolut

(B) Die Menge $M = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum c_nx^n \text{ konvergiert}\right\}$ hat eine der Formen

z.B.



a) $\{0\} = [0,0]$

$\vee$ b) $]-R,R[\,;\ [-R,R[\,;\ ]-R,R]$; $[-R,R]$ mit $R > 0$

$\vee$ c) $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$

Def. Die Menge M heißt Konvergenzintervall und R $\big(= 0$ in a), $= \infty$ in c)$\big)$ heißt Konvergenzradius von $\sum c_nx^n$.

Beweis von Satz 1 (A) $p = \dfrac{|x|}{|x_0|} < 1$;

$$|c_nx^n| = \left|c_nx_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |c_nx_0^n| \cdot p^n$$

$$\sum c_nx_0^n \text{ konvergiert } \underset{(\S 22,\ \text{Satz } 1)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} c_nx_0^n = 0$$

$$\Longrightarrow \exists N : \forall n \geq N : |c_nx_0^n| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \forall n \geq N : |c_n x^n| = |c_n x_0^n| \cdot p^n \leq \underbrace{p^n}_{b_n}$$

$\sum p^n$ konvergiert $\overset{\text{Vkrit.I}}{\Longrightarrow} \sum |c_n x^n|$ konvergiert

(B) Nach (A) ist mit $x_0 \in M$ auch $]-|x_0|, |x_0|[\subset M$.

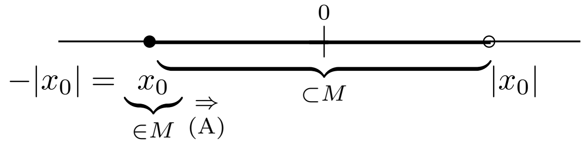
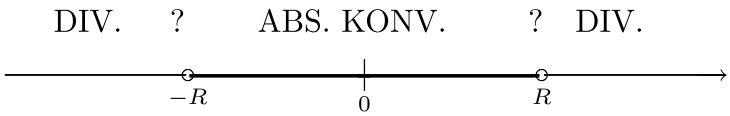


Bild für $x_0 < 0$

Daher hat M eine der Formen in (B). $\square$

<u>Ergebnis von Satz 1</u>



Die Punkte $x = \pm R$ sind separat zu untersuchen. In Bsp. 1 etwa wäre $R = 1$;

$\sum x^n$ ist in $x = \pm 1$ div. ($x = \ 1 \Longrightarrow 1 + 1 + \cdots$ divergiert

$x = -1 \Longrightarrow 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$ divergiert)

$\Longrightarrow M =]-1, 1[$.

<u>Bsp. 2</u> (ln) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n x^n}{n}}_{a_n} = \frac{2x}{1} + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} + \cdots$

a) Quotientenkriterium: $\displaystyle q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{|x^{n+1}|}^{|x^n|\cdot|x|} 2^{n+1} \cdot n}{|x^n| 2^n (n+1)} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2|x|n}{n+1} = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}} = 2|x|$$

Daher ist $\sum a_n$ absolut konvergent für $q = 2|x| < 1$, d.h. $|x| < \dfrac{1}{2}$

divergent für $q = 2|x| > 1$, d.h. $|x| > \dfrac{1}{2}$

? für $q = 2|x| = 1$, d.h. $x = \pm\dfrac{1}{2}$

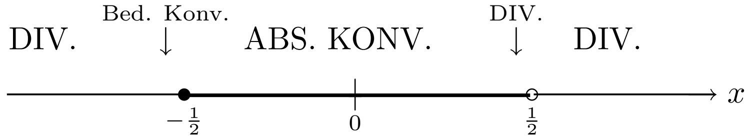
Also $R = \dfrac{1}{2}$.

b) Untersuchung der Punkte $x = \pm\dfrac{1}{2}$:

α) $x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \sum a_n = \sum \dfrac{1}{n}$ divergiert (§22, Bsp. 4)

β) $x = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \sum a_n = \sum \dfrac{(-2)^n}{2^n \cdot n} = \sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (§22, Bsp. 6)

Ergebnis: $M = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$



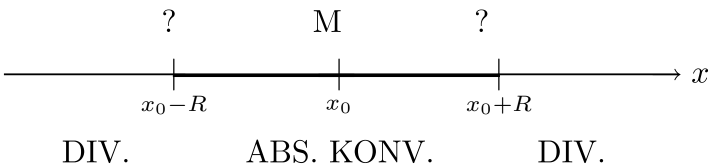
<u>Vorgangsweise allgemein:</u> $\sum \underbrace{c_n x^n}_{a_n}$ gegeben.

a) $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x^{n+1}c_{n+1}}{x^n c_n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x| \cdot l;$

$q < 1 \Longleftrightarrow |x| < \dfrac{1}{l} = R \ (l = 0 \Longrightarrow R = \infty;\ l = \infty \Longrightarrow R = 0)$

b) Betrachte $x = \pm R$ separat.

<u>Bemerkung:</u> Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, d.h. "Potenzreihe um x_0" ist analog M ein symmetrisches Intervall um x_0 :



23.2 GLIEDWEISES DIFFERENZIEREN UND INTEGRIEREN

<u>Idee:</u> Wir versuchen $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ zu berechnen. (Dann ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n} = f(2x)$ erledigt.) Wenn wir die einzelnen Terme nach x differenzieren, erhalten wir $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n x^{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, eine geometrische Reihe.

<u>Satz 2</u> (ohne Beweis) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$ (auch $R = \infty$ ist erlaubt.) Für $|x| < R$ ist 1) $f(x)$ unendlich oft differenzierbar,

2) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ und $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ und diese Reihen haben wieder Konvergenzradius R.

<u>In Worten:</u> Potenzreihen kann man für $|x| < R$ gliedweise differenzieren und integrieren.

<u>Zurück zu Bsp. 2</u> $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ hat Konvergenzradius $R = 1$

(zeigt man wie in 23.1)

$|x| < 1 \underset{\text{Satz 2}}{\Longrightarrow} f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$

$$\Longrightarrow f(x) \underset{\substack{\downarrow \\ (\text{eigentl.} \in)}}{=} \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|1-x| + C = -\ln(1-x) + C$$

(weil $|x| < 1 \Longleftrightarrow -1 < x < 1 \Longrightarrow 1 - x > 0$)

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0 \Longrightarrow -\ln(1-0) + C = 0 \Longrightarrow C = 0$$

Ergebnis: $\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \text{ für } |x| < 1 = R}$

Das gilt auch noch für $x = -1$ (hier ist $M = [-1, 1[$) nach dem "Satz von Abel"

$$\Longrightarrow \underbrace{\ln\big(1-(-1)\big)}_{\ln 2 \approx 0.693} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

<u>Bsp. 3</u> Wir wollen $f(x) = \arctan x$ in eine Potenzreihe entwickeln.
Es sei $|x| < 1 \Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{setze } p=-x^2}}{=} \frac{1}{1-p} \underset{\substack{\uparrow \\ |p|<1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots$$

$$\Longrightarrow \arctan x = f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots)\,\mathrm{d}x \overset{(\text{Satz } 2)}{=}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots + C$$

$\arctan 0 = 0 \Longrightarrow C = 0$

Rechnung mit dem Summensymbol:

$$\arctan x = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Satz } 2 \\ \downarrow}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underbrace{C}_{=0}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \text{ für } |x| < 1 = R}$$

Vorsicht: $\arctan x$ ist definiert in ganz $\mathbb{R}$, aber der Konvergenzradius der Reihe ist $R = 1$ und $M = [-1, 1]$. Wieder gilt die Gleichung auch für $x = \pm 1 \in M$ (Satz von Abel), d.h. $x = 1 \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$.

23.3 DER SATZ VON TAYLOR IM $\mathbb{R}^1$

Wiederholung: f differenzierbar in x_0, $x = x_0 + h \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \varrho(h)$ mit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho(h)}{h} = 0$ bzw. in x geschrieben

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\substack{g(x)=s_1(x)= \\ \text{lin. Näherung an } f \text{ bei } x_0}} + \varrho(x-x_0)$$

Tangente in x_0 : $y = g(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{Polynom vom Grad 1}}$

Frage: Wie läßt sich f genauer, d.h. durch ein Polynom höheren Grades, annähern?

Satz 3 (Satz von Taylor im $\mathbb{R}^1$)

1) f n-mal differenzierbar in $x_0 \Longrightarrow$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n + \varrho_n(h)$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_n(h)}{h^n} = 0$, bzw. in $x = x_0 + h$ geschrieben:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}_{s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k} + \varrho_n(x-x_0)$$

2) Wenn f im abgeschlossenen Intervall von x_0 bis x $(n+1)$-mal differenzierbar ist, so gilt die "Lagrange'sche Restgliedformel":

$$\varrho_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi_n \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x.$$

Def.: s_n heißt Taylorpolynom n-ten Grades an f in x_0, ϱ_n heißt n-tes Restglied.

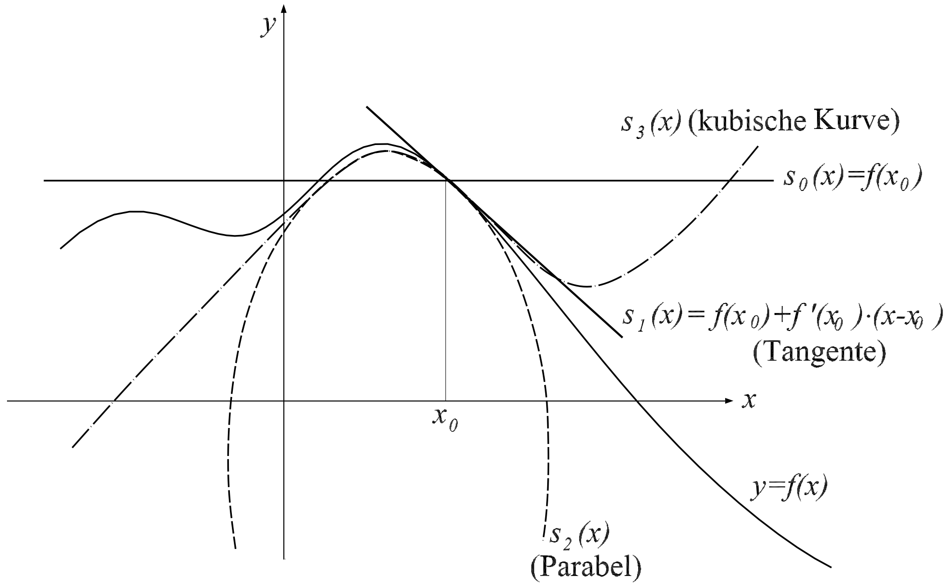


Bild:

Je größer n ist, umso besser nähert s_n die Kurve bei x_0 an.

Folgerung: Wenn f ∞ oft differenzierbar in x_0 und wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(h) = 0$, so folgt

$f(x_0 + h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n$ bzw. in x geschrieben:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n}$$

Def.: Diese Potenzreihe in $(x - x_0)$-Potenzen heißt Taylorreihe von f um x_0. Speziell für $x_0 = 0$ heißt

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Mac-Laurin-Reihe von f (oder Taylorreihe um 0).

Bsp. 4 $f(x) = \mathrm{e}^x,\ f'(x) = \mathrm{e}^x, \ldots, f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \Longrightarrow \forall n : f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

MacLaurin: $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ falls $\varrho_n(x) \to 0$

Hier ist also $x_0 = 0$ und nach Lagrange $\varrho_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} =$

$= \dfrac{\mathrm{e}^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{?} 0$ mit ξ_n zwischen 0 und x.

Es sei $|x| \leq k \in \mathbb{N}$ fest und $n > k$; $\xi_n \leq |x| \Longrightarrow \mathrm{e}^{\xi_n} \leq \mathrm{e}^{|x|} \leq e^k$ und

$$|\varrho_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi_n}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{e^k|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{e^k k^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{e^k\cdot k\cdot k\cdot\dots\cdot k\cdot k\cdot\dots\cdot k}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k\cdot(k+1)\cdot\dots\cdot(n+1)} = \frac{e^k\cdot k^k}{k!}\cdot\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\le 1}\cdot\dots\cdot\underbrace{\frac{k}{n}}_{\le 1}\cdot\frac{k}{n+1}$$

$$\le \underbrace{\frac{e^k\cdot k^k}{k!}}_{\text{fest}}\cdot\underbrace{\frac{k}{n+1}}_{\to 0} \longrightarrow 0 \text{ für } n\to\infty. \text{ Also}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \text{ für } x\in\mathbb{R}\ (R=\infty)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe muß also $R = \infty$ sein (wie man auch mit dem Quotientenkriterium sieht, s. Übung 95b).

<u>Noch einmal Bsp. 2</u>

$$f(x) = \ln(1-x), \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\underbrace{(-1)}_{\text{innere Abl.}} = -(1-x)^{-1}, \qquad f'(0) = -1$$

$$f''(x) = -(-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1) = -(1-x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -(-2)(1-x)^{-3}\cdot(-1) = -2(1-x)^{-3}, \qquad f'''(0) = -2$$

$$f^{(4)}(x) = -2\cdot(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1) = -6(1-x)^{-4}, \quad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1-x)^{-n}, \qquad f^{(n)}(0) = -(n-1)!$$

Satz 3 gibt also mit $x_0 = 0$:

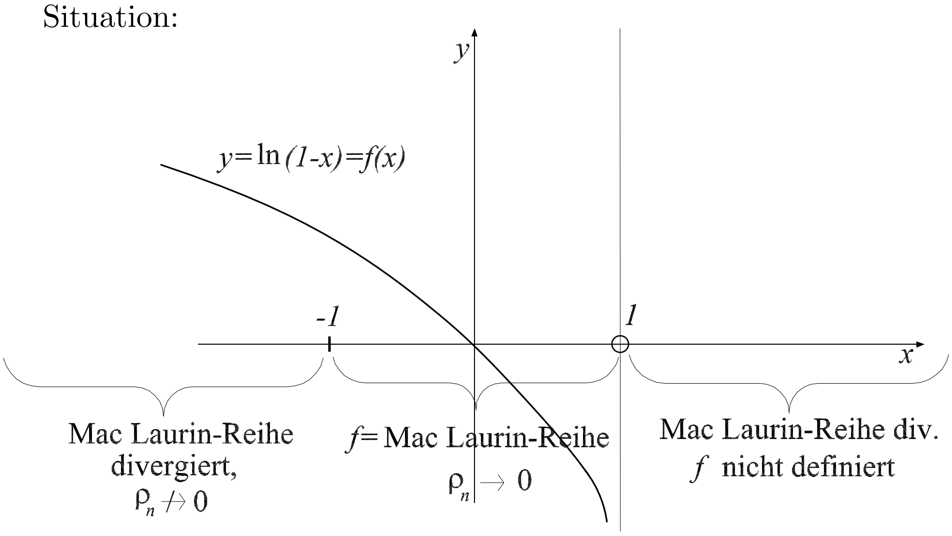
$$\ln(1-x) = f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k}_{s_n(x)} + \varrho_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{-(k-1)!}{k!}x^k + \varrho_n(x) \qquad \Big|\, k! = k\cdot(k-1)!$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + \varrho_n(x)$$

Nach 23.1/2 hat die Potenzreihe $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ den Konvergenzradius $R = 1$ und ist $\ln(1-x)$ für $-1 \le x < 1$. Daher ist $\varrho_n(x) \to 0$ für $-1 \le x < 1$ und $\varrho_n(x) \not\to 0$ für $x < -1$. Für $x \ge 1$ ist $f(x)$ nicht definiert.

Situation:



Ähnlich ist es bei $f(x) = \arctan x$, wo auch $R = 1$.

Bsp. 5
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x &\Longrightarrow f(0) &= 0 \\ f' &= \cos &\Longrightarrow f'(0) &= 1 \\ f'' &= -\sin &\Longrightarrow f''(0) &= 0 \\ f''' &= -\cos &\Longrightarrow f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)} &= \sin, & & \text{alles beginnt von vorn} \end{aligned}$$

$$\varrho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \left|f^{(n+1)}(\xi_n)\right| = \left\{ \begin{matrix} |\sin(\xi_n)| \\ |\cos(\xi_n)| \end{matrix} \right\} \le 1$$

$$\Longrightarrow |\varrho_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty \text{ und } x \text{ fest (s. Bsp. 3)}$$

Also gilt nach MacLaurin:

$$\sin x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

bzw. $$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R}\ (R = \infty)}$$

Weil sin ungerade ist, treten nur ungerade x-Potenzen in der Mac-Laurin-Reihe auf (s. Satz 4) und diese stellt man durch x^{2k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dar.

Ebenso: $$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - + \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R}\ (R = \infty)}$$

Bsp. 6 (Hyperbelfunktionen) $f = \mathrm{sh},\ f(0) = 0$

$f' = \mathrm{ch} \Longrightarrow f'(0) = 1$

$f'' = \mathrm{sh} \Longrightarrow f''(0) = 0$

$f''' = \mathrm{ch} \Longrightarrow f'''(0) = 1$ etc.

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\mathrm{sh}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R}\ (R = \infty)}$$

$$\text{Ebenso} \qquad \boxed{\mathrm{ch}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R}\ (R = \infty)}$$

Beweis von Satz 3 1) Zu zeigen ist

f n-mal differenzierbar in $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varrho_n(h)}{h^n} = 0$

$$\text{für } \varrho_n(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} h - \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n;$$

ϱ_n hängt natürlich auch von f ab, wir bezeichnen es im Beweis genauer mit $\varrho_{n,f}$.

$\underline{n = 1:}$ $\varrho_{1,f} = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h = \varrho$ von §6 $\Longrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varrho_{1,f}(h)}{h} = 0$

(siehe §6)

$\underline{n > 1:}$ $\varrho_{n,f}(0) = 0 \Longrightarrow$ l'Hôpital gibt $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varrho_{n,f}(h)}{h^n} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} \varrho_{n,f}(h)}{n h^{n-1}}$;

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} \varrho_{n,f}(h) &= f'(x_0 + h) - 0 - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2h - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n h^n \\
&= f'(x_0 + h) - f'(x_0) - \frac{(f')'(x_0)}{1!} h - \cdots - \frac{(f')^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} \\
&= \varrho_{n-1,f'}(h)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\varrho_{n,f}(h)}{h^n} = \lim_{h \to 0} \frac{\varrho_{n-1,f'}(h)}{n h^{n-1}} = \cdots = \lim_{h \to 0} \frac{\varrho_{1,f^{(n-1)}}(h)}{n! h} = 0 \text{ nach Fall } n = 1$$

1.5) Der $\underline{\text{MWS der } \int\text{-rechnung}}$ f_1, f_2 stetig auf $[a, b]$, $f_1(t) \geq 0\ \forall t \in [a, b]$

$$\Longrightarrow \exists t_0 \in [a, b] : \int_a^b f_1(t) f_2(t)\, \mathrm{d}t = f_2(t_0) \int_a^b f_1(t)\, \mathrm{d}t$$

$\underline{\text{Denn}}$ $\left.\begin{matrix} m \\ M \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix}\right\}$ von $f_2(t),\ t \in [a, b]$ (existiert nach §4, Satz 6, p. 44) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall t \in [a, b] : m \leq f_2(t) \leq M \ \Big| \cdot f_1(t) \geq 0$

$\Longrightarrow \forall t \in [a, b] : f_1(t) m \leq f_1(t) f_2(t) \leq f_1(t) M; \qquad \int$ monoton, §10,3), p. 83

$$\Longrightarrow \int_a^b f_1(t)m\,\mathrm{d}t \le \underbrace{\int_a^b f_1(t)f_2(t)\,\mathrm{d}t}_{I} \le \int_a^b f_1(t)M\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow m\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t \le I \le M \underbrace{\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t}_{\ge 0}$$

$$\Longrightarrow I = c\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t \text{ mit } m \le c \le M$$

ZWS (§4, p. 43) $\Longrightarrow c = f_2(t_0)$

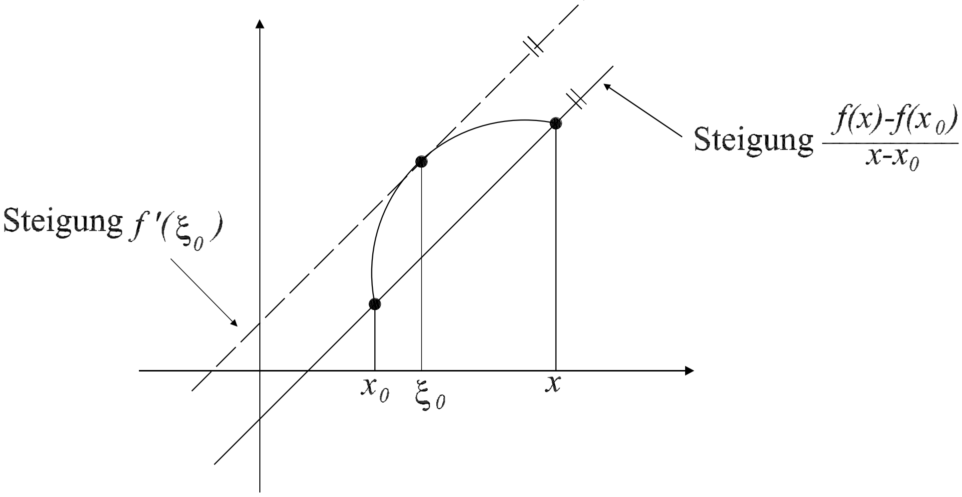
2) Zu zeigen ist: $\exists \xi_n \in [x_0, x] : \varrho_n(x - x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$

wobei $\varrho_n(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \cdots - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

(Der Einfachheit halber sei $x \ge x_0$).

Für $\underline{n = 0}$ ist das gerade der MWS der Differentialrechnung (§8, Satz 3, p. 66), denn

$\varrho_0(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \underset{\text{MWS}}{=} f'(\xi_0)(x - x_0)$



<u>Allgemeines n</u> a) Darstellung von ϱ_n durch ein $\int$:

$$\int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u_1} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v_1{}'}\,\mathrm{d}t \overset{\text{partiell}}{=} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u_1} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v_1}\Bigg|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}\cdot \overbrace{(-1)}^{\substack{\text{innere}\\ \text{Abl.}}}}{(n-1)!}}_{u_1{}'} \cdot \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v_1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow\\ \text{untere}\\ \text{Grenze}}}{-} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{u_2} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v_2{}'}\,\mathrm{d}t = \cdots = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$-\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \cdots - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\,\mathrm{d}t}_{f(x)-f(x_0)} =$$

$$= f(x) - s_n(x) = \varrho_n(x-x_0)$$

b) MWS $\int$-rechnung $\Longrightarrow \varrho_n(x-x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{0 \le f_1} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f_2}\,\mathrm{d}t =$

$$= f^{(n+1)}(\xi_n) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi_n) \cdot \int_{x-x_0}^{0} \frac{u^n}{n!}\,(-\mathrm{d}u) \qquad \left\| \begin{array}{l} u = x-t \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -1 \\ t = x_0 \Rightarrow u = x - x_0 \\ t = x \Rightarrow u = 0 \end{array} \right.$$

$$= f^{(n+1)}(\xi_n) \cdot \left. \frac{-u^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{x-x_0}^{0} = f^{(n+1)}(\xi_n) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \square$$

<u>Satz 4</u> $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ für $|x| < R,\ R > 0.$

Dann: $f \left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\} \iff$ nur $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ x-Potenzen treten in der MacLaurin-Reihe auf.

<u>Beweis:</u> Z.B. f gerade, d.h. $\forall x : f(-x) = f(x) \qquad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\Longrightarrow \forall x : -f'(-x) = f'(x)$, d.h. f' ungerade $\qquad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\Longrightarrow \forall x : +f''(-x) = f''(x)$, d.h. f'' gerade

$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow f^{(2k+1)}$ ungerade;

g ungerade $\Longrightarrow g\overbrace{(0)}^{=-0} = g(-0) = -g(0) \qquad \big| + g(0)$

$\Longrightarrow 2g(0) = 0 \Longrightarrow g(0) = 0$

Also gilt $\forall k : f^{(2k+1)}(0) = 0$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ungerade } n \\ \text{geben } 0}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \text{ für } |x| < R.$$

Umgekehrt, wenn $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}$, so ist $f(-x) = f(x)$ für $|x| < R$,

d.h. f gerade. $\square$

<u>Bsp.:</u> Siehe Bsp. 3 (arctan), Bsp. 5 (sin, cos), Bsp. 6 (sh, ch).

23.4 DIE BINOMIALKOEFFIZIENTEN

Idee:

$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$$

$$\underbrace{(a+b)}_{\text{Binom}}{}^3 = \underbrace{1}_{\binom{3}{3}}\cdot a^3b^0 + \underbrace{3}_{\binom{3}{2}}\cdot a^2b^1 + \underbrace{3}_{\binom{3}{1}}\cdot a^1b^2 + \underbrace{1}_{\binom{3}{0}}\cdot a^0b^3$$

"Binomialkoeffizienten"

Allgemein:

Satz 5 $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \Longrightarrow$

$$(*) \qquad \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}, \qquad \text{wobei } \binom{n}{0} = 1 \text{ und für } k \in \mathbb{N}:$$

$$\binom{n}{k} \overset{1)}{=} \text{Anzahl der Möglichkeiten, } k \text{ Dinge aus } n \text{ Dingen auszuwählen}$$

$$\overset{2)}{=} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\ \cdots\ \cdots\ 1} \overset{3)}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\overset{4)}{=}$ k-te Zahl in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks (bei Zählung ab 0):

$$\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & 1 & & & & & & \text{0. Zeile} \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \text{1. Zeile} \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \text{2. Zeile} \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \text{3. Zeile} \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \text{4. Zeile} \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \text{5. Zeile} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
\text{0. Zahl} & & \text{1. Zahl} & & \text{2. Zahl} & & \text{3. Zahl} & & \text{4. Zahl} & & \text{5. Zahl} & \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} &
\end{array}$$

Außerdem gilt: 5) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

6) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Def.: Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen Binomialkoeffizienten, $(*)$ heißt binomische Formel.

Bsp. 7 $n = 5,\ k = 2$; $\binom{5}{2}$ tritt bei a^2b^3 in der binomischen Formel auf:

$$(a+b)^5 = \cdots + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \cdots$$

1) Wähle aus den 5 Karten As, K, D, B, 10 zwei aus

$\Longrightarrow \exists 10$ Möglichkeiten:

$$10 \begin{cases} \text{As,K; As,D; As,B; As,10} \\ \text{K,D; K,B; K,10} \\ \text{D,B; D,10} \\ \text{B,10} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \binom{5}{2} = 10$$

2) $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \dfrac{20}{2} = 10\checkmark$

3) $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{120}{2 \cdot 6} = 10\checkmark$

4) siehe oben 5) $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ 6) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 20 = \binom{6}{3}$

<u>Beweis von Satz 5</u>

1) $(a+b)^2 = \underbrace{(a+b)}_{\text{1. Klammer}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{2. Klammer}}$

$$= \underbrace{a}_{\substack{\text{aus}\\ \text{1. Kl.}}} \cdot \underbrace{a}_{\substack{\text{aus}\\ \text{2. Kl.}}} + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$= \sum \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{1. Kl.}}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{2. Kl.}}}$$

über alle Möglichkeiten $\leftarrow$

Analog

$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{\text{1. Kl.}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{2. Kl.}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a+b)}_{n\text{. Kl.}}$

$$= \sum \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{1. Kl.}}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{2. Kl.}}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ n\text{. Kl.}}}$$

In der $\sum$ tritt $a^k b^{n-k}$ auf, wenn in k Klammern a und in den restlichen b gewählt wird $\Longrightarrow (a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, wobei

$\binom{n}{k}$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n Dingen (hier: Klammern)

k auszuwählen (diejenigen, wo a genommen wird).

2) Speziell $f(x) = (\underset{\substack{\| \\ a}}{x} + \underset{\substack{\| \\ b}}{1})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Andererseits nach MacLaurin:

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, da $f^{(n+1)} = 0$ und daher nach Lagrange auch

$$\varrho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0;$$

$$f' = n(x+1)^{n-1},\ f'' = n(n-1)(x+1)^{n-2}, \cdots,$$

$$f^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+1)^{n-k}, \quad f^{(k)}(0) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^k$$

$$\Longrightarrow \tbinom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

3) $$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)}(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k! \qquad \cancel{(n-k)}(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

5) $$\binom{n}{\underbrace{n-k}_{\text{statt } k}} \overset{3)}{=} \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \overset{3)}{=} \binom{n}{k}$$

(Direkt aus $(*)$: $(a+b)^n = \cdots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k + \cdots$)

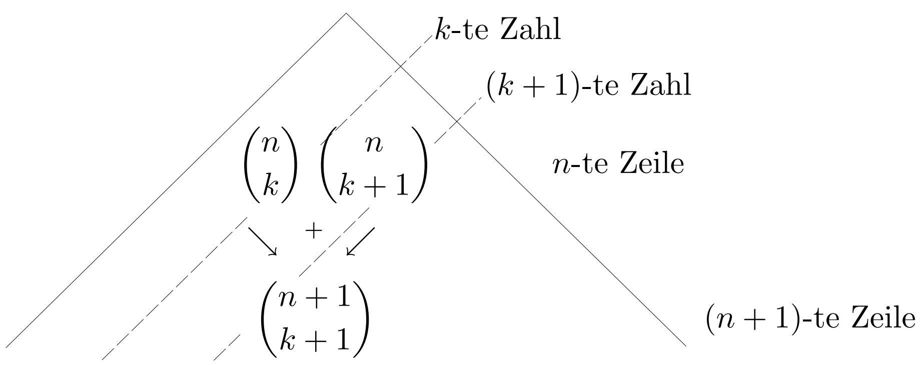
$\qquad\qquad = \qquad$ (Symmetrie in a, b)

6) Entweder (wie 5) rechnerisch aus 2 oder (besser) aus $(*)$

$$(a+b)^n = \cdots + \tbinom{n}{k} a^k \overbrace{b^{n-k} + \tbinom{n}{k+1} a^{k+1}}^{A} \underbrace{b^{n-k-1} + \cdots \quad \Big|\cdot (a+b)}_{B}$$

$$\Longrightarrow (a+b)^{n+1} = \cdots + \underbrace{\overbrace{\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}^{A} + \overbrace{\binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k}}^{B}}_{= \binom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{n-k}} + \cdots$$

4) folgt aus 6), denn die 1. Zeile stimmt und die $(n+1)$-te Zeile von Binomialkoeffizienten erhält man aus der n-ten Zeile nach 6) durch Addition



$\square$

<u>Bsp. 8</u> Wie wahrscheinlich sind

a) ein Lotto 6-er, b) ein Lotto 5-er?

a) Wir müssen 6 Zahlen aus 45 auswählen und haben nach Satz 5, 1) dafür $\binom{45}{6}$ Möglichkeiten; $\binom{45}{6} \overset{2)}{=} \dfrac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8\,145\,060$;

nur 1 Kombination gibt den 6-er $\Longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit für 6-er$=$

$= \dfrac{\text{Anzahl der "günstigen Möglichkeiten"}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}} = \dfrac{1}{8\,145\,060} \approx 1$ zu 8 Millionen$\approx$

$\approx 0.0000001228 = 0.00001228\,\%$

b) Einen 5-er erhält man, wenn man 5 aus den 6 richtigen wählt und 1 Zahl aus den 39 falschen. Die "günstigen" Möglichkeiten (für den 5-er) sind daher $\binom{6}{5} \cdot \binom{39}{1} = 6 \cdot 39 \Longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit für den 5-er$= \dfrac{6 \cdot 39}{8\,145\,060} \approx 0.0000287 =$ $0.00287\,\% \approx \dfrac{1}{34808} \approx 1$ zu 35 Tausend.

<u>Idee:</u> $f(x) = (1+x)^\nu$ läßt sich auch für $\underline{\nu \in \mathbb{R}}$ differenzieren. Die Rechnung in 2) des Beweises ergibt $f^{(k)}(0) = \nu \cdot (\nu - 1) \cdots (\nu - k + 1)$. Wir erhalten als MacLaurinreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} x^k$.

<u>Def.:</u> Für $\nu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ setzt man $\binom{\nu}{0} = 1$ und $\binom{\nu}{k} = \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k(k-1)\ \cdots\ \cdots\ 1}$

<u>Satz 6</u> Für $\nu \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ gilt

$$\boxed{(1+x)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} x^k \text{ für } |x| < 1 = R} \qquad (*)$$

<u>Bemerkung:</u> Für $\nu = n \in \mathbb{N}$ ist $\binom{n}{k} = 0$ wenn $k > n$ und $(*)$ ist die binomische Formel. Für $\nu \in \mathbb{R}$ nimmt man $(*)$.

<u>Beweisskizze:</u> Wir müßten $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$ für festes x mit $|x| < 1$ zeigen.

<u>Fall 1</u> $0 \le x < 1$; Lagrange gibt

$$\varrho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n)(\xi_n+1)^{\nu-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$0 = x_0 \le \xi_n \le x < 1 \Longrightarrow \xi_n + 1 \ge 1 \Longrightarrow (\xi_n + 1)^{\underbrace{\nu-n-1}_{\downarrow}}$ ist beschränkt;

negative Potenz für großes n

wenn $|\nu| \le k \in \mathbb{N}$, k fest, so ist $|\nu - 1| \le k + 1$ etc. $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left| \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n)}{(n+1)!} \right| \le \frac{k(k+1)\cdots(k+n)}{(n+1)!} \overset{\text{Satz 5, 2)}}{=} \binom{k+n}{n+1} =$$

$$\overset{\text{Satz 5, 5)}}{=} \binom{k+n}{k+n-(n+1)} = \binom{k+n}{k-1} = \frac{(k+n)\cdots(k+n-(k-1)+1)}{(k-1)!} \le$$

$\le (k+n)\cdots(k+n) = (k+n)^{k-1}$.

Weil $x^{n+1} \cdot (k+n)^{k-1} \to 0$ für $n \to \infty$ und $0 \le x < 1$, $k \in \mathbb{N}$ fest (vgl. Math. A, p. 73, Bsp. 1, x dort entspricht n hier), folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$

<u>Fall 2</u> $-1 < x < 0$ geht nicht wie im Fall 1, da $\xi_n + 1 \le 1$. Man verwendet ein allgemeines Prinzip:

$f(x) =$MacLaurinreihe für $0 \le x < R \wedge f$ "analytisch" $\Longrightarrow =$ gilt auch für $-R < x < 0$. $\square$

<u>Bsp. 8</u> a) $(1+x)^{-1/2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k$

$$\binom{-1/2}{0} = 1,\ \binom{-1/2}{1} = \frac{-1/2}{1},\ \binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2\cdot 1} = +\frac{3}{8},$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdots$$

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots\overbrace{(-1/2-k+1)}^{-(2k-1)/2}}{k!} = \frac{(-1)^k 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k\cdot k!}$$

Also

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^k = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - + \cdots \quad \text{für } |x| < 1}$$

b) $f(x) = \arcsin x,\ |x| < 1 \Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1\underbrace{-x^2}_{t})^{-1/2} = (1+t)^{-1/2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\cancel{-}1)^k 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} \underbrace{t^k}_{(-x^2)^k = (\cancel{-}1)^k x^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^{2k}$$

$$\Longrightarrow \arcsin x = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + C$$

$x = 0 \Longrightarrow 0 = C$

Ergebnis:

$$\boxed{\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \quad \text{für } |x| < 1}$$

23.5 DIE TAYLORREIHE IM $\mathbb{R}^n$

Wiederholung: $f(x,y)$ sei differenzierbar in $\vec{x}_0 = \binom{x_0}{y_0}$. Nach §19, Def. und Satz 1, p. 16, gilt:

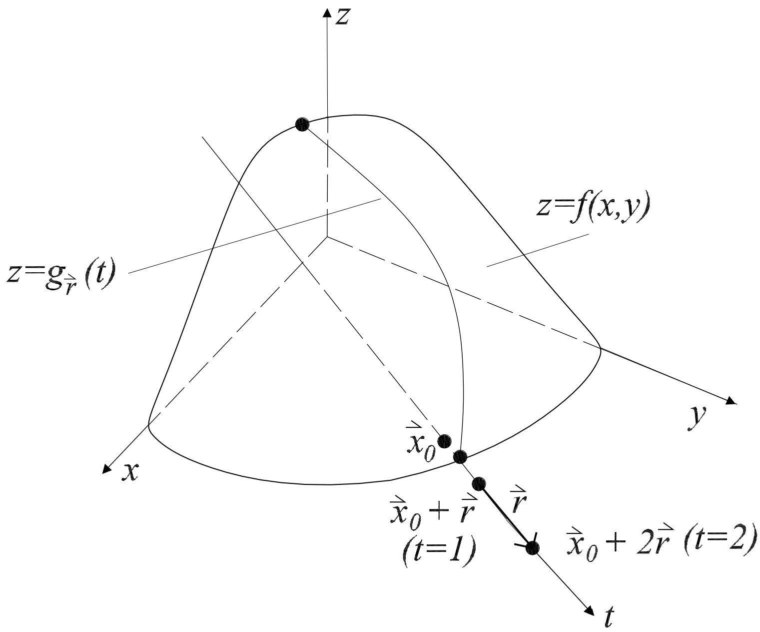
$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)}_{s_1(\vec{x})\text{ lineare Näherung an } f \text{ bei } \vec{x}_0} + \varrho_1(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

mit $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\varrho_1(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^1} = 0$ $\quad\big($Tangentialebene: $z = s_1(x,y)\big)$

Problem: Nähere f genauer an!

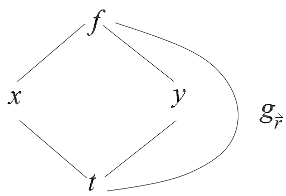
Lösung: Betrachte $g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r})$ mit $\vec{r}\in\mathbb{R}^2$ fest mit $\|\vec{r}\| = 1$;

$g_{\vec{r}}$ ist eine Funktion einer Variablen:



Satz 3 gibt $g_{\vec{r}}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \frac{g_{\vec{r}}^{(k)}(0)}{k!} t^k + \varrho_l(t)$; was ist $g_{\vec{r}}^{(k)}(0)$?

$$g_{\vec{r}}(t) = f(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2)$$
$$g_{\vec{r}}(0) = f(\vec{x}_0)$$



$$\dot{g}_{\vec{r}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots)\cdot r_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdots)\cdot r_2 = \left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x} + r_2\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right](\vec{x}_0 + t\vec{r})$$

$$\dot{g}_{\vec{r}}(0) = \left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x} + r_2\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right](\vec{x}_0)\big(= \mathrm{RA}(f,\vec{x}_0,\vec{r})\big)$$

Iteration: $\ddot{g}_{\vec{r}}(t) = \left(\dot{g}_{\vec{r}}\right)^{\cdot}(t) = \left[\left(r_1\dfrac{\partial}{\partial x} + r_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right](\vec{x}_0 + t\vec{r})$

$$\ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x} + r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right](\vec{x}_0)$$

$$\left(= r_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + 2r_1r_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) + r_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0), \qquad \text{vgl. 20.5, p. 37}\right)$$

Allgemein: $g_{\vec{r}}^{(k)}(0) = \left[\left(r_1\dfrac{\partial}{\partial x} + r_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec{x}_0)$

$$\left(\overset{\text{Satz 5}}{=} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{i}}_{\frac{k!}{i!(k-i)!}} \frac{\partial^k f}{(\partial x)^i(\partial y)^{\underbrace{k-i}_{=j}}}(\vec{x}_0)r_1^i r_2^{k-i}\right)$$

und daher $g_{\vec{r}}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \frac{\left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x} + r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec{x}_0)}{k!}t^k + \varrho_l(t)$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{\left[\left(tr_1\frac{\partial}{\partial x} + tr_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec{x}_0)}{k!} + \varrho_l(t)$$

Wir setzen $\vec{r} = \dfrac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$, $t = \|\vec{x}-\vec{x}_0\|$ und zur Abkürzung $\vec{h} = \vec{x}-\vec{x}_0 = t\vec{r} \Longrightarrow$

$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0 + \vec{x} - \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0 + t\cdot\vec{r}) = g_{\vec{r}}(t) \Longrightarrow$

Satz 7 1) $f(x,y)$ sei l-mal differenzierbar in $x_0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x,y) = \sum_{k=0}^{l} \frac{\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec{x}_0)}{k!} + \varrho_l(\vec{x}-\vec{x}_0)}$$

wobei nach dem Differenzieren $h_1 = x - x_0$, $h_2 = y - y_0$ gesetzt wird und

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \dfrac{\varrho_l(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^l} = 0$. Daraus folgt mit der binomischen Formel:

$$\boxed{f(x,y) = \sum_{\substack{i=0\\ i+j\le l}}^{l}\sum_{j=0}^{l} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{i+j} f}{(\partial x)^i(\partial y)^j}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)^i(y-y_0)^j + \varrho_l(\vec{x}-\vec{x}_0)}$$

2) Allgemein in n Variablen: $f(x_1,\ldots,x_n)$ sei l-mal differenzierbar in

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{l} \frac{\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right](\vec{x}_0)}{k!} + \varrho_l(\vec{x}-\vec{x}_0),$$

wobei <u>nach dem Differenzieren</u> $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ eingesetzt wird.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Falls $\varrho_l \to 0$, gilt wieder $f(\vec{x}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \cdots$.

2) Die ersten 4 Terme in Satz 7, 1) (d.h. $n = 2$) sind:

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)}_{s_1(\vec{x}):\ \text{Tangentialebene}} +$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)^2\right]}_{s_2(\vec{x}):\ \text{“Schmiegeparaboloid”}} +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)^2\cdot(y-y_0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\vec{x}_0)\cdot(x-\right.$$
$$\left.x_0)\cdot(y-y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)^3\right] + \varrho_3(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

3) Die ersten 3 Terme in Satz 7, 2) (d.h. beliebiges n) sind:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{(x_1-x_{0,1})\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + \cdots + (x_n-x_{0,n})\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)}_{=(\vec{x}-\vec{x}_0)^T\cdot\nabla f(\vec{x}_0)} +$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2!}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f\right](\vec{x}_0)} + \varrho_2(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i-x_{0,i})(x_j-x_{0,j})\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)^T}_{1\times n}\cdot\underbrace{\mathrm{H}f(\vec{x}_0)}_{n\times n}\cdot\underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{n\times 1}$$

Somit: $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\vec{x}-\vec{x}_0)^T\cdot\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T\cdot\mathrm{H}f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) + \varrho_2(\vec{x}-\vec{x}_0)$

<u>Bsp. 9</u> Berechne die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}$ um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

bis ϱ_2 (vgl. §19, Bsp. 3).

$$
\begin{aligned}
z &= f(x,y) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}, \quad f(\vec{x}_0)=\frac{2}{3}\\
z_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x/4}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4}\\
z_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = -1\\
z_{xx} &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{z-x\cdot z_x}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{15}{32}\\
z_{xy} &= +\frac{1}{4}\cdot\frac{x\cdot z_y}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{2}{3}\cdot(-1)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{3}{8}\\
z_{yy} &= -\frac{z-y\cdot z_y}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) = -\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-1)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -3
\end{aligned}
$$

Also: $\nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{H}f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{32} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -3 \end{pmatrix}$,

$$
f(x,y) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0) +
$$

$$
+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)^2 + \varrho_2\right.
$$

$$
= \underbrace{\underbrace{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)-1\left(y-\frac{2}{3}\right)}_{z=s_1(x,y):\ \text{Tangentialebene}} + \frac{1}{2}\left[-\frac{15}{32}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\frac{3}{8}\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right) - 3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\right]}_{z=s_2(x,y):\ \text{Schmiegeparaboloid}} +
$$

$$
+\varrho_2
$$

<u>Bemerkung:</u> Aus Satz 7 (der oben auch nicht bis ins Letzte bewiesen wurde, da ϱ_l von der Richtung $\dfrac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$ abhängt und daher $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\dfrac{\varrho_l(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^l}=0$ noch genauer zu begründen wäre) folgt $(*)$ in S. 40, 20.5, denn: Es seien $\nabla f(\vec{x}_0)=0$ und $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Longrightarrow 0 < c = \min\{\vec{r}^T\cdot\mathrm{H}f(\vec{x}_0)\cdot\vec{r} : \|\vec{r}\|=1\} \Longrightarrow$ mit $\vec{r}=\dfrac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$ gilt

$$
f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2\left(\underbrace{\vec{r}^T\cdot\mathrm{H}f(\vec{x}_0)\cdot\vec{r}}_{\geq c} + \underbrace{\frac{\varrho_2(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2}}_{\to 0}\right)
$$

$$
\geq f(\vec{x}_0) + \frac{c}{2}\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2 \text{ für } \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta, \text{ d.h. } \vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{r} \text{ mit } |t|<\delta,\ \|\vec{r}\|=1.
$$

23.6 DIE TAYLORREIHE IN $\mathbb{C}$

Die Theorie entfällt aus Zeitmangel.

Bsp. 10 $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C} \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[1 + \frac{\mathrm{i}x}{1} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \cdots - \left(1 - \frac{\mathrm{i}x}{1} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} - \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + - \cdots\right)\right] \\
&= \frac{2}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{i}x}{1} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}x)^5}{5!} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\mathrm{i}x - \frac{\mathrm{i}x^3}{3!} + \frac{\mathrm{i}x^5}{5!} - + \cdots\right] = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ in Übereinstimmung mit Bsp. 5.}
\end{aligned}
$$

KAPITEL VII: INTEGRALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

§24: Mehrfache Integrale

24.1 DAS DOPPELINTEGRAL

Wiederholung von 10.1: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $Z = \{x_0, \cdots, x_k\}$ mit

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \ \mathrm{UD}\,(Z) = \sum_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i},\ \ \mathrm{OD}\,(Z) = \sum_{i=1}^{k} \overline{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

mit
$$\underline{f}_i = \min\big\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\big\}$$
$$\overline{f}_i = \max\big\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\big\}.$$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{UD}\,(Z^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{OD}\,(Z^{(n)})$, wenn $\varphi(Z^{(n)}) \to 0$, und dieser Limes wird mit $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet.

Bsp. 1 $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$

$$Z = \{\underbrace{0}_{x_0}, \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{x_1}, \underbrace{2\pi}_{x_2}\},\ k = 2,$$

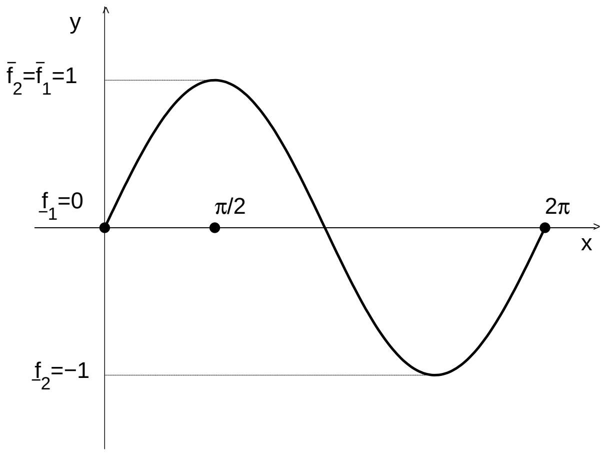
$\underline{f}_1 = 0,\ \overline{f}_1 = 1,$

$\underline{f}_2 = -1,\ \overline{f}_2 = 1,$

$\mathrm{UD}\,(Z) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \cdot \frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2},$

$\mathrm{OD}\,(Z) = 1 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \frac{3\pi}{2} = 2\pi,$

$\mathrm{UD}\,(Z) \le \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \le \mathrm{OD}\,(Z).$



Nun sei $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ stetig.

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ sei eine Zerlegung in Gebiete so, dass $D_i \cap D_j$ Fläche 0 hat,

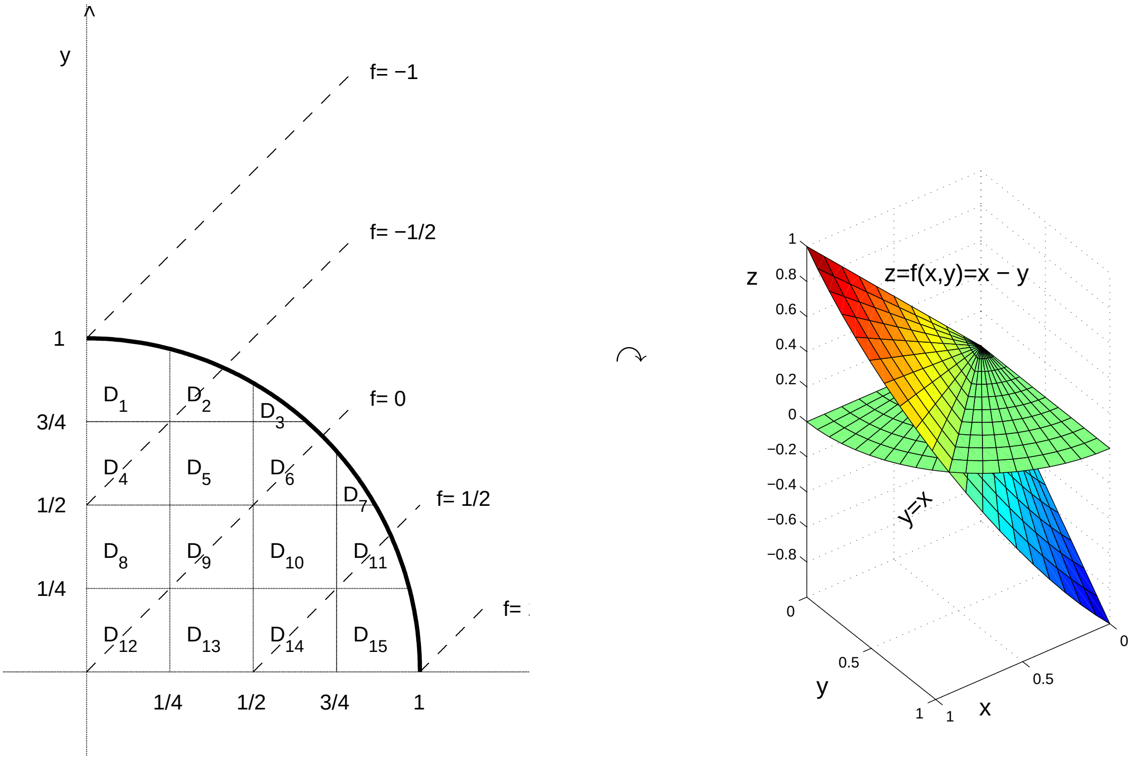
$\underline{f}_i = \min\,\big\{f(x,y) : (x,y) \in D_i\big\},\ \overline{f}_i = \max\big\{f(x,y) : (x,y) \in D_i\big\}$

$\mathrm{UD}\,(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot$ Fläche von D_i, $\mathrm{OD}\,(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{f}_i \cdot$ Fläche von D_i und

$\varphi(Z) =$ größter Durchmesser der Gebiete $D_1, \ldots, D_k$.

<u>Satz 1</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{UD}\,(Z^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{OD}\,(Z^{(n)})$ falls $\varphi(Z^{(n)}) \to 0$ (und D nicht zu irregulär ist) und dieser Limes wird mit $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ bezeichnet.

<u>Bsp. 2</u> $f(x,y) = x - y$, $D =$ Gebiet im 1. Quadranten, das durch $x^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird, $Z =$ Zerlegung durch ein Raster mit Breite $\frac{1}{4}$.



(Die Nummerierung der D_i ist ganz willkürlich.)

Z.B. $\underline{f}_1 = f(0,1) = -1$ und $\overline{f}_1 = f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ etc.

Wie in 10.2 hat $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 5 Eigenschaften. Speziell gilt 1)

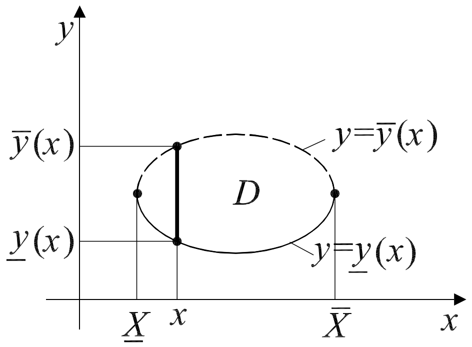
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{array}{l} [\text{Volumen zwischen } xy-\text{Ebene und Fläche, wo } f(x,y) > 0] \\ -[\text{Volumen zwischen } xy-\text{Ebene und Fläche, wo } f(x,y) < 0] \end{array}$$

In Bsp. 2 ist daher aus Symmetriegründen

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x\geq 0,\, y\geq 0 \\ x^2+y^2\leq 1}} (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

24.2 ITERIERTE INTEGRALE

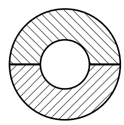
Wir führen nun Doppelintegrale auf einfache Integrale zurück. $D \subset \mathbb{R}^2$ sei beschränkt. $\underline{X}$ sei der kleinste x-Wert in D, $\overline{X}$ der größte; wir zerlegen das Volumen über/unter D in kleine Scheiben parallel zur yz-Ebene so, wie man einen Brotlaib in Schnitten schneidet:



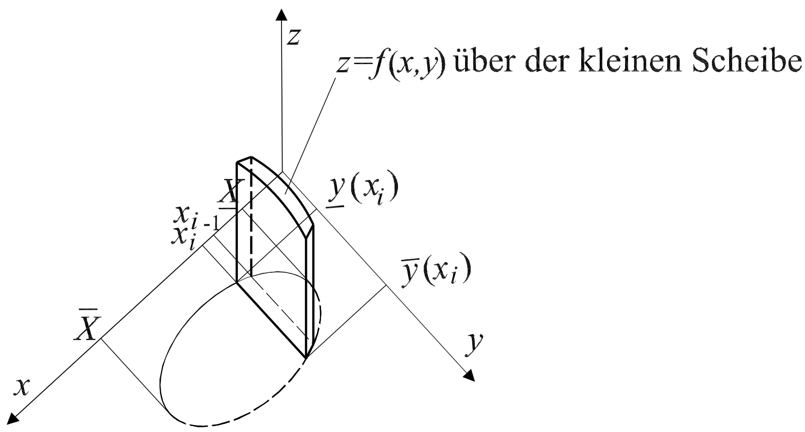
$$\left.\begin{array}{l}\overline{y}(x)\\ \underline{y}(x)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{größter}\\ \text{kleinster}\end{array}\right\} y\text{-Wert}$$

in D für FESTES x.

Wir nehmen an, dass $D = \{(x,y) : \underline{X} \le x \le \overline{X},\ \underline{y}(x) \le y \le \overline{y}(x)\}$ und dass $\underline{y}, \overline{y}$ stetig sind. (Man nennt D dann Normalbereich bzgl. x.) Ein Kreisring ist z.B. kein Normalbereich, kann aber in zwei Normalbereiche zerlegt werden:



Der Einfachheit halber sei $f(x,y) \ge 0$.



Die i-te Scheibe trägt zum Integral V_i bei, $V_i \approx$ Breite $\cdot$ Querschnittfläche bei x_i

$$= \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i} \cdot \underbrace{\int_{\underline{y}(x_i)}^{\overline{y}(x_i)} f(x_i, y)\,\mathrm{d}y}_{g(x_i)}$$

$\sum\limits_i V_i \approx \sum\limits_i (x_i - x_{i-1}) \cdot g(x_i)$ ist eine Riemannsumme des Integrals $\int\limits_{\underline{X}}^{\overline{X}} g(x)\,\mathrm{d}x$ und daher erhalten wir

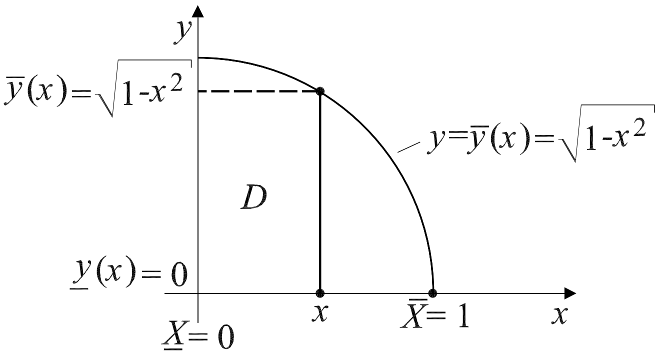
Satz 2 (Fubini) $D \subset \mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{matrix} \overline{X} \\ \underline{X} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix}\right\}$ x-Wert in ganz D,

$\left\{\begin{matrix} \overline{y}(x) \\ \underline{y}(x) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix}\right\}$ y-Wert in D für FESTES x.

Es gelte $D = \left\{(x,y) : \underline{X} \le x \le \overline{X},\ \underline{y}(x) \le y \le \overline{y}(x)\right\}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=\underline{X}}^{\overline{X}} \left(\int\limits_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Bsp. 2



für FESTES x ist $\underline{y}(x) = 0$, $\overline{y}(x) = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{1} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_{0}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{d}x}_{\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}} =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}$$

$$= \int\limits_{u=1}^{0} \underbrace{\sqrt{u}}_{u^{1/2}} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}u}{2} \right) - \frac{1}{3}$$

$$\left\| \begin{aligned} & 1 - x^2 = u \\ & \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x,\ x\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{2} \\ & x = 0 \Longrightarrow u = 1 \\ & x = 1 \Longrightarrow u = 0 \end{aligned} \right.$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{u=1}^{0} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(0^{3/2} - 1^{3/2}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

wie wir schon in 24.1 feststellten.

Bemerkungen: 1) In Satz 2 wird außen nach x, innen nach y integriert. Ebenso geht es umgekehrt:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{y=\underline{Y}}^{\overline{Y}} \Bigg(\int\limits_{x=\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Bigg)\,\mathrm{d}y, \text{ wenn}$$

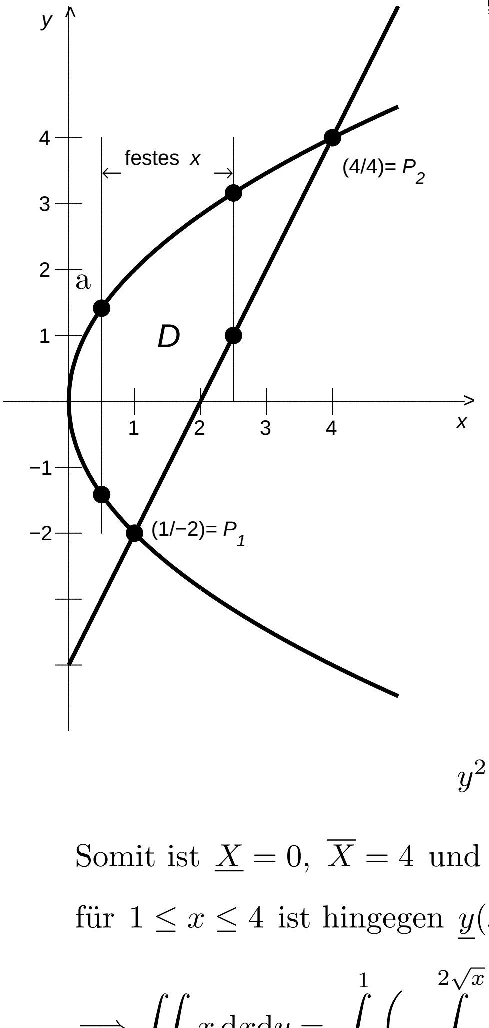
$\left\{\begin{matrix}\overline{Y}\\ \underline{Y}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{größter}\\ \text{kleinster}\end{matrix}\right\}$ y-Wert in ganz D, $\left\{\begin{matrix}\overline{x}(y)\\ \underline{x}(y)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{größter}\\ \text{kleinster}\end{matrix}\right\}$ x-Wert in D

für FESTES y und $D = \big\{(x,y) : \underline{Y} \le y \le \overline{Y},\ \underline{x}(y) \le x \le \overline{x}(y)\big\}$.

2) Manchmal muss man D zerlegen:

Bsp. 3 Bestimme $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird (vgl. Üb. 77, Math. A 1996/97).

$y = 2x - 4$ bzw. $x = \frac{y}{2} + 2$



Zur Bestimmung der Schnittpunkte P_1, P_2 setzt man $4x = y^2 = (2x-4)^2$

$$\Longrightarrow \cdots x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

$y^2 = 4x$ bzw. $y = \pm 2\sqrt{x}$ bzw. $x = \frac{y^2}{4}$

Somit ist $\underline{X} = 0$, $\overline{X} = 4$ und für $0 \le x \le 1$ ist $\underline{y}(x) = -2\sqrt{x}$, $\overline{y}(x) = 2\sqrt{x}$;

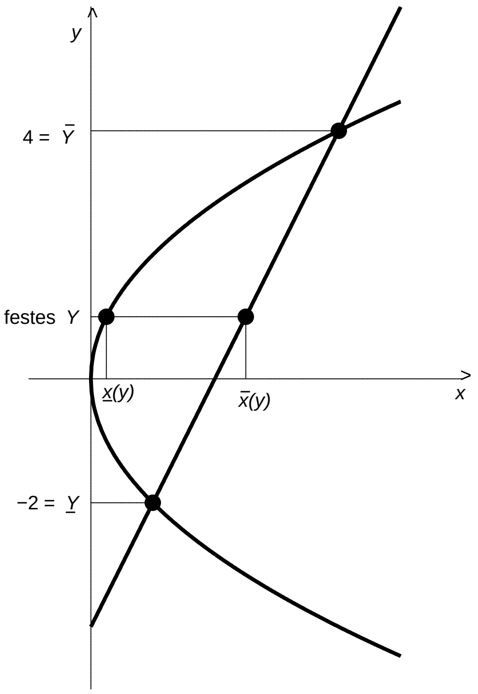
für $1 \le x \le 4$ ist hingegen $\underline{y}(x) = 2x - 4$, $\overline{y}(x) = 2\sqrt{x}$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=0}^{1} \underbrace{\Bigg(\int\limits_{y=-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x\,\mathrm{d}y \Bigg)}_{xy\big|_{y=-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}} \mathrm{d}x + \int\limits_{x=1}^{4} \underbrace{\Bigg(\int\limits_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x\,\mathrm{d}y \Bigg)}_{xy\big|_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} 4x^{3/2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=1}^{4} x \cdot \big(2\sqrt{x} - 2x + 4\big)\,\mathrm{d}x = 4\frac{x^{5/2}}{5/2}\bigg|_0^1 + \left(2\frac{x^{5/2}}{5/2} - 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{4}{5}\underbrace{(\underbrace{4^{5/2}}_{2^5} - 1)}_{31} - \frac{2}{3}(\underbrace{4^3 - 1}_{63}) + 2(\underbrace{4^2 - 1}_{15}) = \frac{8 + 4\cdot 31}{5} - 42 + 30 = \frac{72}{5} = 14.4$$

Wenn wir außen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung:



$$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{y=-2}^{4} \left(\int\limits_{x=y^2/4}^{\frac{y}{2}+2} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{y=-2}^{4} \frac{x^2}{2}\bigg|_{x=y^2/4}^{\frac{y}{2}+2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{y=-2}^{4}\left(\Big(\underbrace{\frac{y}{2}+2}_{u}\Big)^2 - \frac{y^4}{16}\right)\mathrm{d}y =$$

$$\Bigg\| \quad u = \frac{y}{2} + 2, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{u=1}^{4} u^2 \cdot 2\,\mathrm{d}u - \frac{1}{32}\frac{y^5}{5}\bigg|_{y=-2}^{4} = \frac{u^3}{3}\bigg|_{u=1}^{4} - \frac{1}{32}\,\frac{4^5 - (-2)^5}{5} =$$

$$= \frac{64-1}{3} - \frac{1}{2^5 \cdot 5}(4^5 + 2^5) = 21 - \frac{1}{5}\Big(\underbrace{2^5 + 1}_{33}\Big) = 14.4.$$

<u>Bemerkung:</u> Beachte, dass $\iint\limits_D 1 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ (Volumen über D unter der Höhe 1) $=$ (Fläche von D) $= A$.

Satz 2 gibt $A = \int\limits_{\underline{X}}^{\overline{X}} \Bigg(\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} \mathrm{d}y \Bigg) \mathrm{d}x = \int\limits_{\underline{X}}^{\overline{X}} \big(\overline{y}(x) - \underline{y}(x) \big) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x) \big) \mathrm{d}x$ in der Notation von § 13, 13.1.

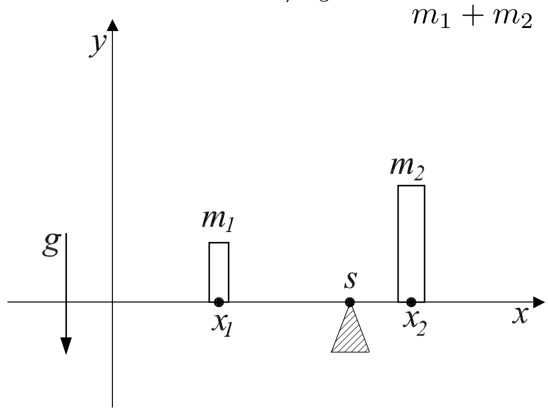
In Bsp. 3 ergibt sich $A = 9$ (Übung 77, Math. A 96/97).

24.3 STATISCHE MOMENTE UND SCHWERPUNKT

1) Die x-Achse werde als gewichtslose Stange vorgestellt, auf der bei x_1 bzw. x_2 die Massen m_1 bzw. m_2 sitzen, die Schwerkraft gehe in Richtung der negativen y-Achse. Wenn man die x-Achse im Punkt s balancieren will, so muss die Summe der Momente um s 0 sein, d.h.

$$(x_1 - s)m_1 + (x_2 - s)m_2 = 0 \implies x_1 m_1 + x_2 m_2 = s m_1 + s m_2 = s(m_1 + m_2)$$

$$\implies s = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$



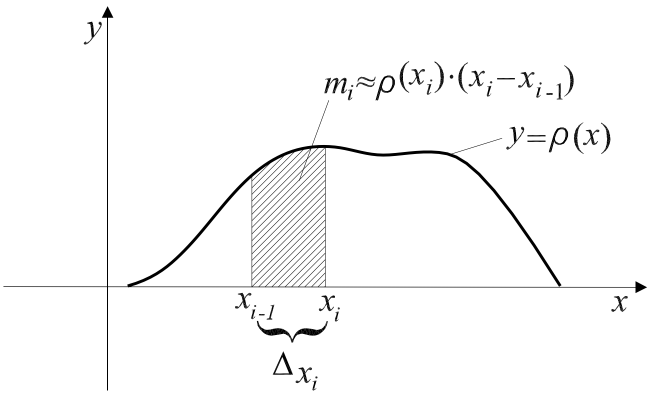
Wenn wir k Massen m_i bei x_i haben, so ist (mit derselben Rechnung)

$$s = \sum_{i=1}^{k} x_i m_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Wenn eine Massendichte $\varrho(x)$ [kg/m] gegeben ist, so ist $m_i \approx \varrho(x_i)\Delta x_i$ und der Grenzwert $\varphi(Z) \to 0$ liefert

$$s = \int x\varrho(x)\,\mathrm{d}x \Big/ \int \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \text{statisches Moment/Gesamtmasse.}$$



Def. $S = \sum x_i m_i$ bzw. $\int x\varrho(x)\,\mathrm{d}x$ heißt statisches Moment der Massenverteilung.

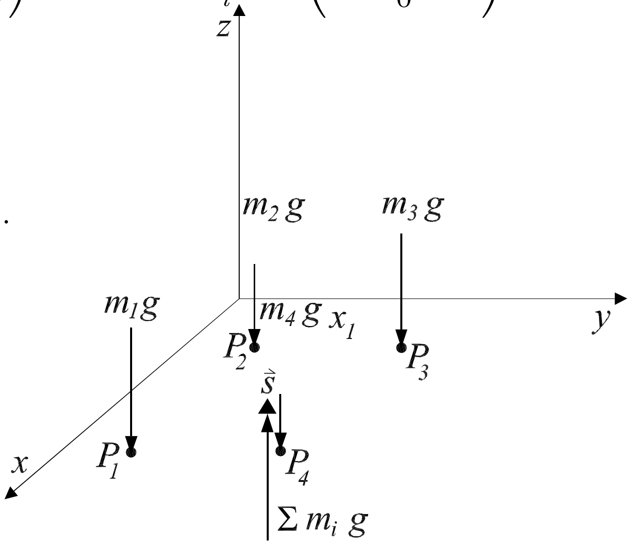
2) Nun werde die xy-Ebene als gewichtslose Platte vorgestellt, auf der in den Punkten $P_i = (x_i, y_i)$ die Massen m_i sitzen; die Schwerkraft gehe in Richtung der negativen z-Achse.
Der Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$ ist der Punkt, um den die Summe der Momente verschwindet, d.h.

$$\sum_i \begin{pmatrix} x_i - s_1 \\ y_i - s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i g \end{pmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow g \sum_i m_i \begin{pmatrix} -(y_i - s_2) \\ x_i - s_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \sum m_i x_i = s_1 \cdot \sum m_i$$

$$\sum m_i y_i = s_2 \cdot \sum m_i$$

$$\Longrightarrow \vec{s} = \left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \right).$$



Wenn das Gebiet D mit der Dichte $\varrho(x, y)$ [kg/m^2] belegt ist, erhalten wir

Satz 3 Der Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$ ist durch

$$s_1 = \frac{S_1}{M} = \iint_D x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big/ \iint_D \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$s_2 = \frac{S_2}{M} = \iint_D y\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big/ \iint_D \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

gegeben. Um diesen Punkt verschwindet das Moment der Schwerkraft.

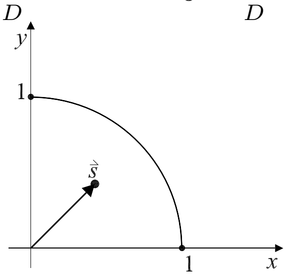
Bezeichnung: Man nennt

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 = \iint_D x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \\ S_2 = \iint_D y\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{array}\right\}$$ statische Momente bzgl. der $\left\{\begin{array}{c} y(!) \\ x(!) \end{array}\right\}$-Achse und schreibt

oft $\left\{\begin{array}{c} S_y(!) \\ S_x(!) \end{array}\right\}$ für $\left\{\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array}\right\}$.

Im Allgemeinen haben die statischen Momente die Dimension von $x \cdot \varrho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$, d.h. $\left[\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}\right] = [\mathrm{kg\,m}]$. Wenn $\varrho = 1$, so nennt man $\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ statische Momente des Gebietes D; sie haben Dimension $[\mathrm{m}^3]$.

Bsp. 2 D ist der Viertel-Einheitskreis und $\varrho = 1$. Nach 24.2 ist
$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3} = \iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; weiters ist $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ Fläche von $D = \frac{\pi}{4}$



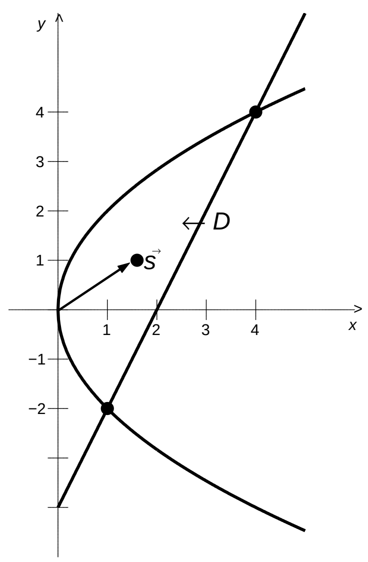
$$\Longrightarrow \vec{s} = \left(\frac{1/3}{\pi/4}, \frac{1/3}{\pi/4}\right) = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right) \approx (0.424, 0.424)$$

Bsp. 3 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 14.4 = \frac{72}{5} = \frac{8 \cdot 9}{5}$,

$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9 \Longrightarrow s_1 = \frac{\frac{8\cdot 9}{5}}{9} = \frac{8}{5} = 1.6$

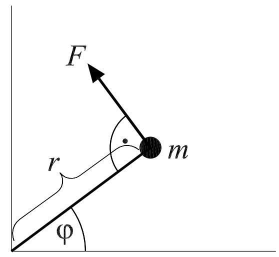
$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9$ (Übung) $\Longrightarrow s_2 = \frac{9}{9} = 1$

$\Longrightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 1 \end{pmatrix}$



24.4 TRÄGHEITSMOMENTE

1) Eine Masse m drehe sich am Ende einer gewichtslosen Stange der Länge r.
Eine Kraft F am Ende der Stange bewirkt eine Beschleunigung a und nach Newton ist $F = m \cdot a$.



Wenn $\omega = \ddot{\varphi}$ die Winkelbeschleunigung ist, so gilt $v = r\dot{\varphi}$, $a = r\ddot{\varphi} \implies F = rm\ddot{\varphi}$.
Die Kraft F entspricht dem Drehmoment $N = rF \implies N = rF = r^2 m\ddot{\varphi}$.

Def. $r^2 m$ heißt Trägheitsmoment und wird mit I bezeichnet (Trägheit = inertia (lat.)).

Somit gilt

Drehmoment = Trägheitsmoment · Winkelbeschleunigung

(vgl.: Kraft = Masse · Beschleunigung)

2) $\varrho(x,y)$ sei eine Massendichte in der xy-Ebene.
Wenn wir um die Gerade $g : a_1x + a_2y = b$ drehen, so hat der Punkt (x/y) von g den Abstand $r = \dfrac{|a_1x + a_2y - b|}{\|\vec{a}\|}$ (s. LA, § 6,B) und daher ist das Trägheitsmoment bzgl. Drehung um g gleich

$$\begin{aligned} I_g &= \iint\limits_D r^2 \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \frac{(a_1x + a_2y - b)^2}{\|\vec{a}\|^2}\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Speziell die x-Achse ist durch $1 \cdot y = 0$, d.h. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = 0$ gegeben

$\implies I_x = I_{x\text{-Achse}} = \iint\limits_D y^2 \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und ebenso

$I_y = I_{y\text{-Achse}} = \iint\limits_D x^2 \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Weiters bezeichnet man $\iint\limits_D xy\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ mit I_{xy}.

Dann gilt also (mit $M = \iint\limits_D \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ = Gesamtmasse)

$$\begin{aligned} I_g &= \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\iint (a_1^2x^2 + a_2^2y^2 + b^2 + 2a_1a_2xy - 2a_1bx - 2a_2by)\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(a_1^2 I_y + a_2^2 I_x + 2a_1a_2 I_{xy} + b^2 M - 2a_1bS_1 - 2a_2bS_2) \end{aligned}$$

Speziell, wenn die Koordinatenachsen durch den Schwerpunkt gehen, so ist $\vec{s} = \vec{0}$, d.h. $S_1 = S_2 = 0 \implies$

$$I_g = \underbrace{\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(a_1^2 I_y + a_2^2 I_x + 2a_1 a_2 I_{xy})}_{I_h} + \underbrace{\frac{b^2 M}{\|\vec{a}\|^2}}_{d^2 M}$$

wobei $h : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$ parallel zu g ist und durch $\vec{0} = \vec{s}$ geht und $\vec{s} = \vec{0}$ den Abstand $d = \dfrac{|b|}{\|\vec{a}\|}$ von g hat. Das ergibt:

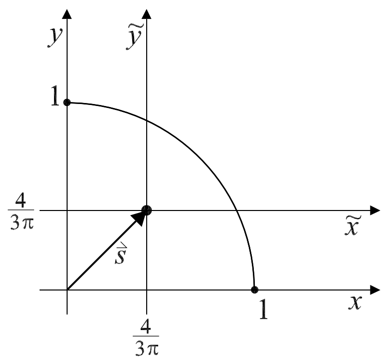
Satz 4 (Steiner)

$I_g = I_h + d^2 M$, wenn $h \parallel g$, $\vec{s} \in h$,
M = Gesamtmasse, d = Abstand von $\vec{s}$ zu g

Bemerkung: Die Trägheitsmomente spielen auch bei der Balkenbiegung eine große Rolle, s. Hofstetter 4.4.

Bsp. 2 Viertelkreis. Wir bezeichnen mit $\tilde{x}, \tilde{y}$ verschobene Koordinaten durch den Schwerpunkt. (Vorsicht: Bei Hofstetter hingegen $x_{\text{hier}} = \overline{x}_{\text{Hofst.}}$, $y_{\text{hier}} = \overline{y}_{\text{Hofst.}}$; $\tilde{x}_{\text{hier}} = x_{\text{Hofst.}}$, $\tilde{y}_{\text{hier}} = y_{\text{Hofst.}}$)

Dann ist $\tilde{x} = x - \dfrac{4}{3\pi}$, $\tilde{y} = y - \dfrac{4}{3\pi}$;



$$I_x = \iint\limits_{\text{Viertelkreis}} y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \,\mathrm{d}y \Bigg) \mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{1} \frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 (1-x^2)^{3/2} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{3/2} \cos t \,\mathrm{d}t$$

Substitution: $x = \sin t$
$\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$
$x = 0$ "$\Longrightarrow$" $t = 0$
$x = 1$ "$\Longrightarrow$" $t = \pi/2$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 t \,\mathrm{d}t = (\text{Math. A, S. 137}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$$

Aus Symmetriegründen ist $I_x = I_y$.

Nach Steiner ist $I_{\tilde{x}} = I_x - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} = I_{\tilde{y}}$. Weiters ist

$$I_{xy} = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1} x \Bigg(\underbrace{\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y}_{\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}} \Bigg)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Allgemein gilt $\tilde{x} = x - s_1,\ \tilde{y} = y - s_2$ wenn (s_1, s_2) die Koordinaten von $\vec{s}$ im xy-System sind $\Longrightarrow$

$$I_{\tilde{x}\tilde{y}} = \iint_D \varrho\cdot(x - s_1)(y - s_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \varrho\cdot(xy - s_1 y - s_2 x + s_1 s_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$= I_{xy} - s_1 \overbrace{S_x}^{s_2\cdot M} - s_2 \overbrace{S_y}^{s_1\cdot M} + s_1 s_2 M = I_{xy} - s_1 s_2 M$$

Somit ist beim Viertelkreis

$$I_{\tilde{x}\tilde{y}} = I_{xy} - s_1 s_2 M = \frac{1}{8} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}.$$

Für die Gerade $g : a_1\tilde{x} + a_2\tilde{y} = 0$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ durch den Schwerpunkt ist

$$I_g = a_1^2 I_{\tilde{y}} + a_2^2 I_{\tilde{x}} + 2a_1 a_2 I_{\tilde{x}\tilde{y}} = \vec{a}^T \begin{pmatrix} I_{\tilde{y}} & I_{\tilde{x}\tilde{y}} \\ I_{\tilde{x}\tilde{y}} & I_{\tilde{x}} \end{pmatrix} \vec{a},$$

eine quadratische Form in $\vec{a}$.

Die Maximal-/Minimalwerte von I_g sind daher die Eigenwerte von $J = \begin{pmatrix} I_{\tilde{y}} & I_{\tilde{x}\tilde{y}} \\ I_{\tilde{x}\tilde{y}} & I_{\tilde{x}} \end{pmatrix}$.

Def. Die Maximal-/Minimalwerte von I_g mit g durch $\vec{s}$ heißen Hauptträgheitsmomente, und die Achsen in Richtung der Eigenvektoren heißen Hauptachsen der Dichte ϱ auf D.

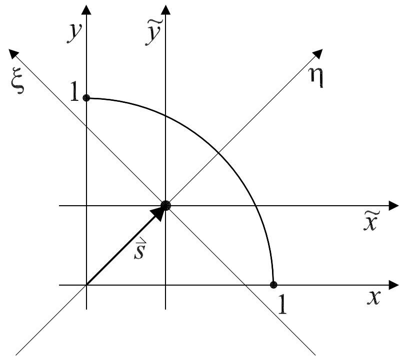
Bezeichnung: ξ, η seien die Koordinaten in Richtung der Hauptachsen, I_ξ, I_η die Hauptträgheitsmomente.

<u>Bsp. 2</u> $J = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} & \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \\ \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} & \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.055 & -0.016 \\ -0.016 & 0.055 \end{pmatrix}$

Allgemein: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = 0 \implies (a-\lambda)^2 - b^2 = 0 \implies (a-\lambda)^2 = b^2 \implies a - \lambda = \pm b \implies {}_1\lambda_2 = a \pm b$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Somit

$$I_\xi = a + b = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi} \approx 0.0384$$

$$I_\eta = a - b = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \approx 0.0713$$



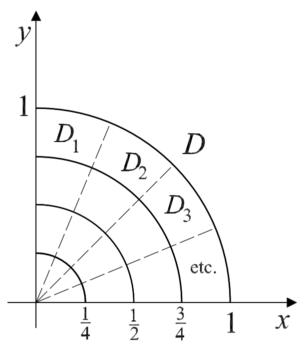
In den neuen Koordinaten ξ, η ist $\tilde{J} = \begin{pmatrix} I_\eta & 0 \\ 0 & I_\xi \end{pmatrix}$ diagonal und $I_{\xi\eta} = 0$. Bei Drehung um die ξ-Achse hat der Viertelkreis also Trägheitsmoment $I_\xi = 0.0384$, d.h. er verhält sich so, als ob seine gesamte Masse $A = \frac{\pi}{4}$ im Abstand i_ξ von der ξ-Achse entfernt ist, wobei $i_\xi^2 A = I_\xi$, d.h.

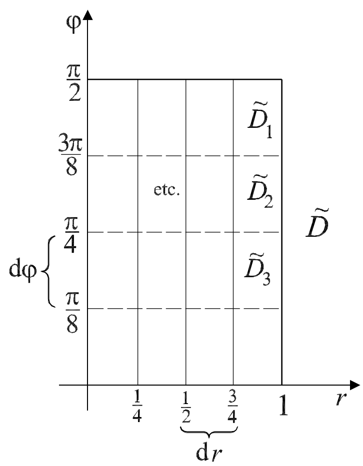
$$i_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} \approx 0.221. \quad \text{Ebenso } i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} \approx 0.301$$

<u>Def.</u> $i_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{M}}$, $i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{M}}$ heißen <u>Hauptradien</u> der Massenverteilung ϱ. Ihre Einheit ist Länge.

24.5 SUBSTITUTION (=KOORDINATENWECHSEL) BEI $\iint$

<u>Bsp. 2</u>





Ein rechteckiges Raster in r, φ entspricht einer Zerlegung in x, y. Nach § 21.5 ist die [Fläche von D_i] $\approx \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| \cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$. Es sei $f(x,y)$ gegeben,

$$g(r,\varphi) = f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| \implies \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_i \underline{f}_i \cdot \text{Fläche von } D_i = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_i \underline{f}_i \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|}_{=r} \cdot \underbrace{\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}_{\substack{=\text{Fläche} \\ \text{von } \tilde{D}_i}} =$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} g(r,\varphi)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint\limits_{\tilde{D}} \underbrace{f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big)}_{\substack{\tilde{f}(r,\varphi) \text{ meist kurz} \\ f(r,\varphi), \text{ s.§ 19.3}}} \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

Diese Überlegung funktioniert für beliebige Koordinaten und ergibt:

Satz 5 $v_1(x,y), v_2(x,y)$ seien Koordinaten. Dann ist

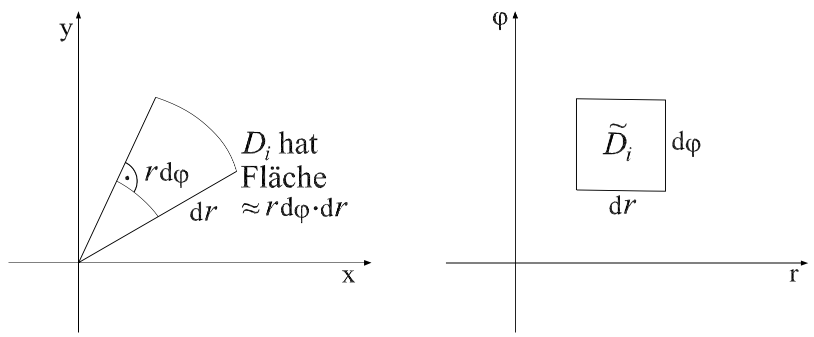
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} f\big(\big(x(v_1,v_2), y(v_1,v_2)\big) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(v_1,v_2)}\right| \mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2,$$

wobei $\tilde{D}$ dem Bereich D in der v_1, v_2-Ebene entspricht.

Speziell in Polarkoordinaten:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} \tilde{f}(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}$$

Bemerkungen: 1) $r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ entspricht der Fläche von D_i (s.o.) und lässt sich wie in § 21.6, S. 57 unten veranschaulichen:



2) Das analoge zu Satz 5 in einer Variablen ist die Substitution in § 11.4. Dort sind die Buchstaben etwas anders gewählt:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_a^b & h\big(g(x)\big) & \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = & \displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} & h(t)\,\mathrm{d}t \\ & \vdots \quad \vdots \; \vdots & \vdots \qquad \vdots & & \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots \\ & f \quad x \;\; v & \frac{\partial x}{\partial v} \quad \mathrm{d}v & & f \;\; x \; \mathrm{d}x \end{array}$$

Weiters entspricht $[a, b]$ dem Bereich D und

$$\left.\begin{cases} \big[g(a), g(b)\big] & \text{falls } g(a) < g(b) \\ \big[g(b), g(a)\big] & \text{falls } g(b) < g(a) \end{cases}\right\} \text{ dem Bereich } \tilde{D}.$$

In einer Variablen fehlt der Betrag bei der “Funktionaldeterminante” $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$, weil man rechts nicht über $\tilde{D}$ integriert, sondern ein Kurvenintegral schreibt (siehe später).

Bsp. 3 D = Viertelkreis, $f(x, y) = x$

$$\Longrightarrow S_1 = \iint\limits_D x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\tilde{D}} \underbrace{r\cos\varphi}_{x} \cdot r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_{r=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \Bigg) \,\mathrm{d}r = \int\limits_{r=0}^{1} (r^2 \sin\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_{r=0}^{1} r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{1} = \frac{1}{3} \checkmark \qquad \text{(vgl. 24.3)}$$

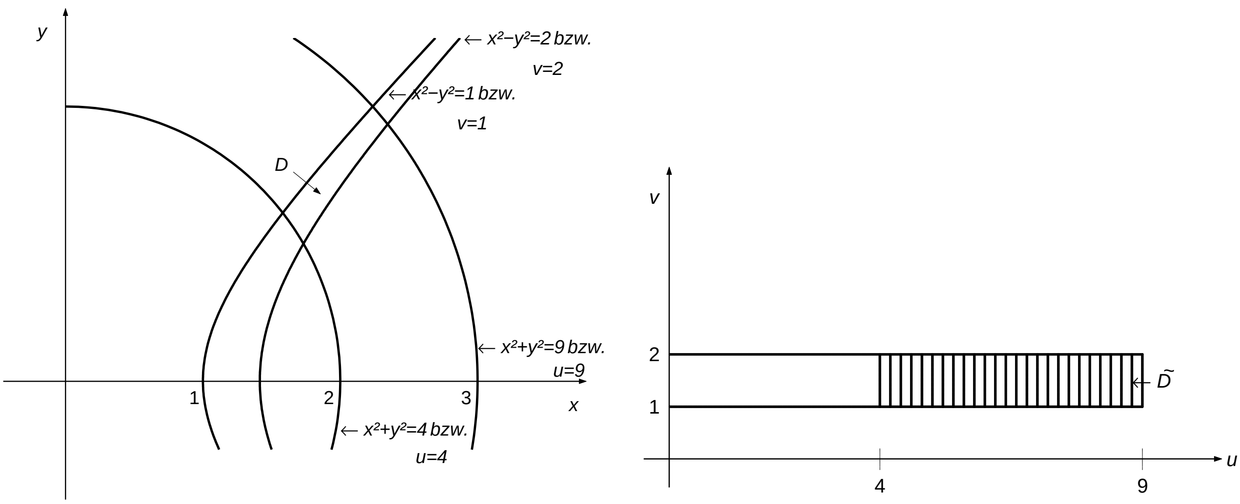
$$I_y = \iint\limits_D x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} r^2 \cos^2\varphi \cdot r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{r=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} r^3 \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \Bigg) \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_{r=0}^{1} r^3 \cdot \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi}_{\substack{\S\ 11.8\text{: halbe Inter-}\\ \text{valllänge } = \frac{\pi}{4}}} \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}, \qquad \text{s. 24.4.}$$

Bsp. 4 Berechne $\iint\limits_D (x^4 - y^4)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D das Gebiet im ersten Quadranten ist, das durch die Kreise $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9$ und die Hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2$ eingeschlossen wird.

Wir führen die neuen Koordinaten $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2$ ein.

Dem Gebiet D entspricht dann $\tilde{D} : 4 \le u \le 9,\ 1 \le v \le 2$.



$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = u \cdot v \overset{\text{Satz 5}}{\Longrightarrow} \iint\limits_D (x^4 - y^4)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} u \cdot v \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Nach § 21, Satz 4, S. 58 gilt für die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \underbrace{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}_{} = 1$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix} = -8xy$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{|-8xy|} = \frac{1}{8xy}, \text{ da in } D\ x > 0, y > 0.$$

Das müssen wir noch durch u, v ausdrücken:

$$u^2 - v^2 = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 4x^2y^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{u^2 - v^2} = 2|xy|$$

$$\Longrightarrow \text{ in } D \text{ gilt } \frac{1}{8xy} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D (x^4 - y^4)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{uv}{4\sqrt{u^2 - v^2}}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9} u\Big(\int\limits_{v=1}^{2} \frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}\,\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}u =$$

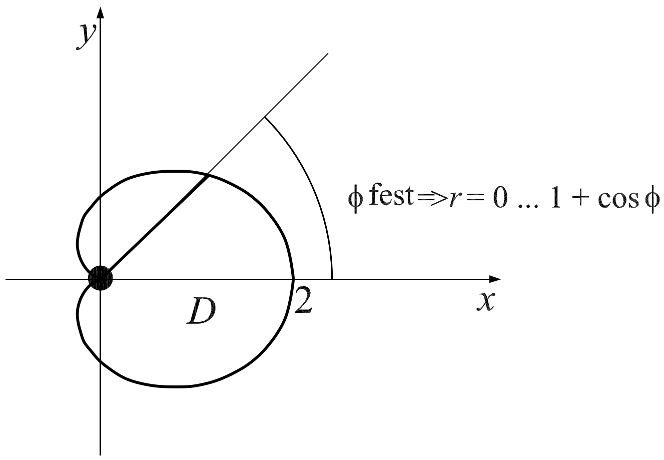
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9} u\Big(\int\limits_{t=u^2-1}^{u^2-4} \frac{-\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}\Big)\,\mathrm{d}u =$$

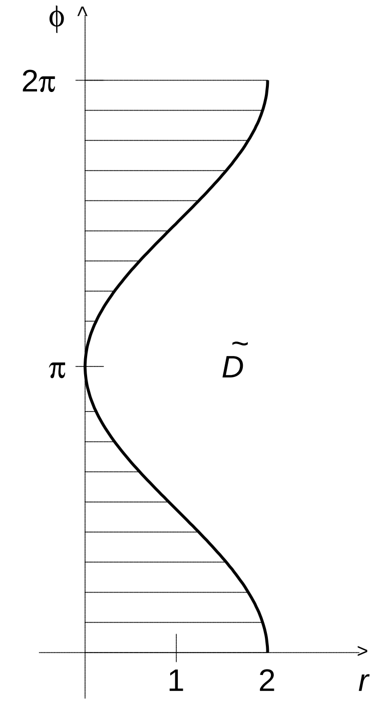
$$\left\| \begin{array}{l} t = u^2 - v^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = -2v \\ v\,\mathrm{d}v = -\dfrac{\mathrm{d}t}{2} \\ v = 1 \implies t = u^2 - 1 \\ v = 2 \implies t = u^2 - 4 \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9} u\Big(-\sqrt{t}\,\Big|_{t=u^2-1}^{u^2-4}\Big)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9}\Big(u\sqrt{\underbrace{u^2-4}_{s}} - u\sqrt{\underbrace{u^2-1}_{\tilde{s}}}\Big)\,\mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(u^2-4)^{3/2} - \frac{1}{3}(u^2-1)^{3/2}\right]\Bigg|_{u=4}^{9} = -\frac{1}{12}\big[77^{3/2} - 12^{3/2} - 80^{3/2} + 15^{3/2}\big] \approx$$
1.945

<u>Bsp. 5</u> Man bestimme die Fläche A der Kardioide $r = 1 + \cos\varphi$ (Math. B, Übung 31 vom 24. 3. 99).

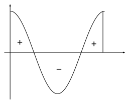




$$A = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{Satz 5}}{=} \iint\limits_{\tilde{D}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\Big(\int\limits_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi =$$

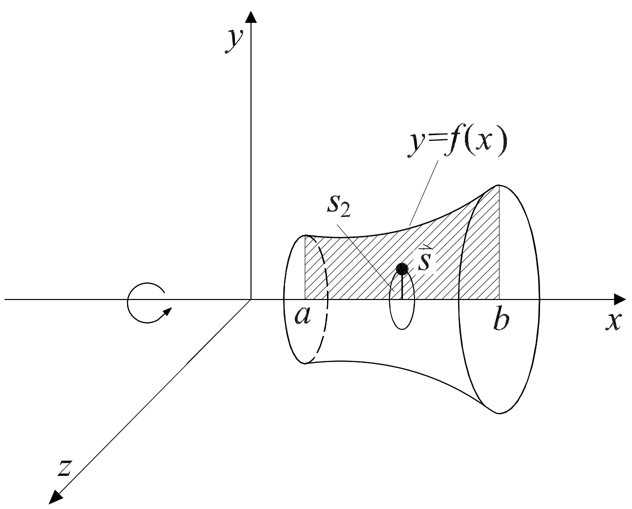
$$= \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi}_{2\pi} + 2\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{0} + \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{\substack{\text{halbe} \\ \text{Intervalllänge} \\ =\pi \\ \text{(s. Math. A,} \\ \text{11.8, S. 97)}}}\Bigg] = \frac{3\pi}{2} \approx 4.7 \text{ FE.}$$

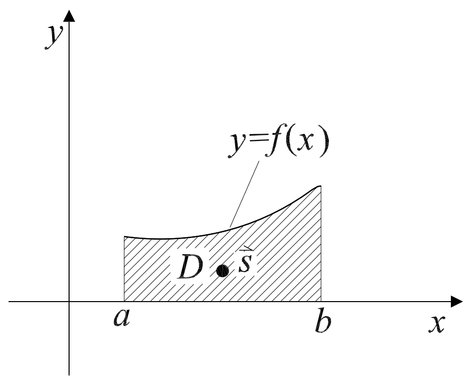


24.6 <u>DIE 1. GULDIN'SCHE REGEL</u>

Wenn die Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse rotiert, so hat nach Math. A, 13.2 der entstehende Körper Volumen $V = \pi \int\limits_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$.

D sei der Querschnitt





Dann ist S_2 = [statisches Moment bzgl. x-Achse] =

$$= \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=a}^{b}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{f(x)} y\,\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \implies V = 2\pi S_2 = 2\pi\cdot A\cdot s_2 =$$

$= A\cdot 2\pi s_2$, wobei A = Fläche von D, $\vec{s} = (s_1, s_2)$ = Schwerpunkt von D.

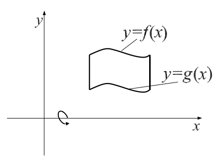
Dann ist $2\pi s_2$ = Weglänge des Schwerpunkts bei der Drehung und daher gilt

<u>Satz 6</u> (Guldin)

Drehvolumen = Querschnittfläche · Schwerpunktweg.

<u>Bemerkung:</u> Durch Subtraktion sehen wir,

dass das auch für Gebiete der Form

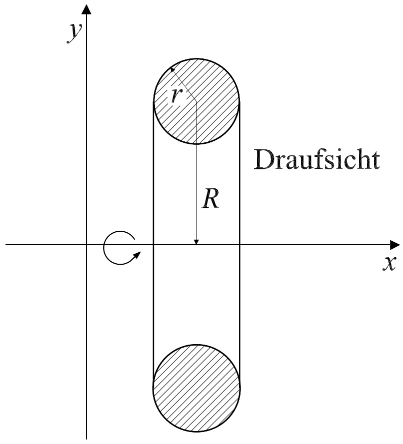


gilt.

Bsp. 6 Torus = Drehkörper bei Rotation eines Kreises:

V = Fläche $\cdot$ Weg

$= r^2\pi \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$



24.7 DREIFACH-INTEGRALE

Analog zu 24.1 sei $D \subset \mathbb{R}^3$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ stetig und

$UD(Z) = \sum\limits_{j=1}^{k} \underline{f}_i \cdot$ Volumen von D_i und ähnlich $OD(Z)$.

Dann gilt wie in Satz 1 $\lim UD(Z^{(n)}) = \lim OD(Z^{(n)})$ und wird mit

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

bezeichnet.

Wenn z.B. ein Körper D mit Massendichte $\varrho[\mathrm{kg/m^3}]$ belegt ist, so ist

M = Gesamtmasse = $\iiint\limits_D \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Analog zu 24.2, Satz 2 gilt

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{x=\underline{X}}^{\overline{X}} \left(\int\limits_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} \left(\int\limits_{z=\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

wobei $\underline{X}, \overline{X}, \underline{y}, \overline{y}$ wie dort sind und $\left\{ \begin{matrix} \overline{z}(x,y) \\ \underline{z}(x,y) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix} \right\}$ z-Wert in D für feste x, y.

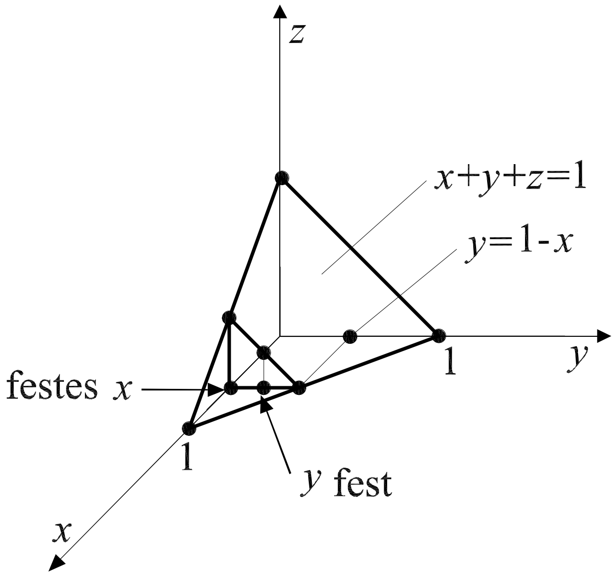
<u>Bsp. 7</u> Der Tetraeder, der durch die 3 Koordinatenebenen und durch die Ebene $x+y+z=1$ begrenzt wird, ist mit Massendichte $\varrho(x,y,z)=x$ belegt. Bestimme seine Masse!

Offenbar ist $\underline{X}=0,\ \overline{X}=1$;

für festes x ist

$\underline{y}(x)$ = kleinster y-Wert = 0

$\overline{y}(x)$ = größter y-Wert = $1-x$



für feste x, y ist $\underline{z}(x,y)=0,\ \overline{z}(x,y)=1-x-y$

$$\text{Also } M=\int\limits_{x=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-x}\Big(\int\limits_{z=0}^{1-x-y} x\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x=\int\limits_{x=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-x} x\cdot z\Big|_{z=0}^{1-x-y}\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{x=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-x} x\cdot(1-x-y)\,\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x=\int\limits_{x=0}^{1} x\cdot\left[-\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]\Bigg|_{y=0}^{1-x}\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{x=0}^{1} x\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{1}(x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6-8+3}{12}=\frac{1}{24}$$

Ebenso gut könnte man in einer anderen Reihenfolge integrieren, z.B.

$$M=\int\limits_{z=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-z}\Big(\int\limits_{x=0}^{1-y-z} x\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}z.$$

24.8 SCHWERPUNKT UND TRÄGHEITSMOMENTE IM $\mathbb{R}^3$

1) Wir gehen nun zur Indexschreibweise über, d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Für $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ schreiben wir $\mathrm{d}V$.

Es sei eine Massenverteilung $\varrho(\vec{x})$ in D gegeben. Der Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ist **der** Punkt, um den die Summe der Drehmomente verschwindet, egal in welche Richtung $\vec{v}$ die Schwerkraft wirkt. Es sei z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies$

$$\vec{N} = \text{Drehmoment um } \vec{s} = \sum \text{ Kraftarm } \times \text{ Kraftvektor}$$

$$= \iiint (\vec{x} - \vec{s}) \times \varrho(\vec{x}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \mathrm{d}V = -g \iiint \varrho(\vec{x}) \begin{pmatrix} x_2 - s_2 \\ -x_3 + s_3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}V \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\implies \underbrace{\iiint \varrho(\vec{x}) x_2 \,\mathrm{d}V}_{S_2} = s_2 \iiint \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V = s_2 \cdot M$$

Allgemein gilt also

$$\boxed{s_i = \frac{S_i}{M} = \frac{1}{M} \iiint\limits_D x_i \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V},$$

wobei M = Gesamtmasse = $\iiint_D \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V$.

<u>Bezeichnung:</u> $S_1 = \iiint x_1 \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V$ heißt **statisches Moment** bzgl. der x_2x_3-Ebene und wird auch mit $S_{x_2x_3}$ bezeichnet. Analog $S_{x_1x_3}$, $S_{x_2x_3}$.

Also gilt $\vec{s} = \dfrac{1}{M}(S_{x_2x_3}, S_{x_1x_3}, S_{x_1x_2})$.

<u>Bsp. 7</u> Der Tetraeder sei wie oben $\implies$

$$S_1 = S_{x_2x_3} = \iiint_D x_1 \cdot \underbrace{\varrho(\vec{x})}_{=x_1} \mathrm{d}V = \cdots = \int\limits_0^1 x_1^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - x_1)^2 \,\mathrm{d}x_1 =$$

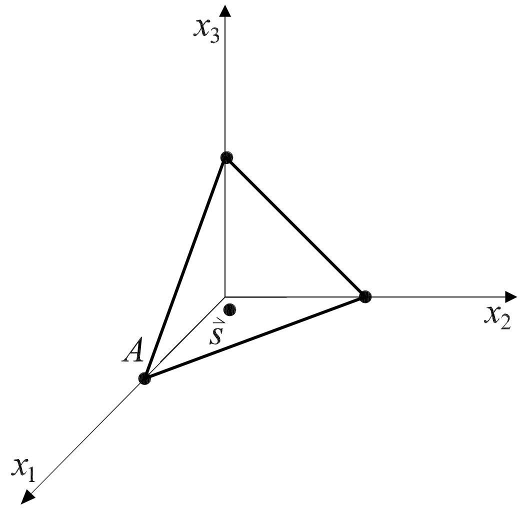
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60} \implies s_1 = \frac{S_1}{M} = \frac{1/60}{1/24} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Analog ist $S_2 = \displaystyle\iiint x_2 \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V = \cdots = \frac{1}{120}$,

$$S_3 = \iiint x_3 \underbrace{\varrho(\vec{x})}_{x_1} \mathrm{d}V = \text{(hier aus Symmetrie)} =$$

$$= \iiint x_2 x_1 \, \mathrm{d}V = S_2 = \frac{1}{120}$$

und daher $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.



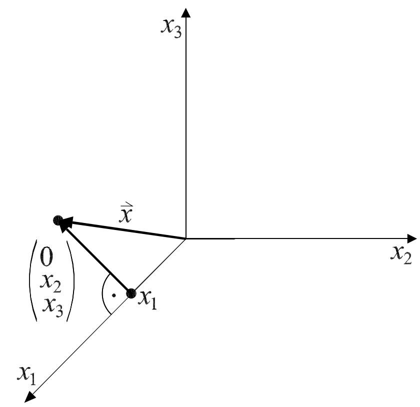
Beim homogen belegten Tetraeder (d.h. $\varrho(\vec{x}) = 1$) ist der Schwerpunkt in

$$\frac{1}{4} \cdot \sum \text{Eckvektoren} \underset{\text{hier}}{=} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Bei unserer Dichte $\varrho(\vec{x}) = x_1$ hingegen ist wegen der größeren Dichte bei A der Schwerpunkt in Richtung A verschoben.

2) **Trägheitsmomente**

Der Punkt $\vec{x}$ hat Abstand $\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ von der x_1-Achse
$\Longrightarrow I_1$ =Trägheitsmoment bzgl. Drehung um die x_1-Achse =
$$= \iiint_D (x_2^2 + x_3^2) \varrho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V.$$



Analog $I_2 = \iiint\limits_D (x_1^2 + x_3^2) \varrho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V, \quad I_3 = \iiint\limits_D (x_1^2 + x_2^2) \varrho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V.$

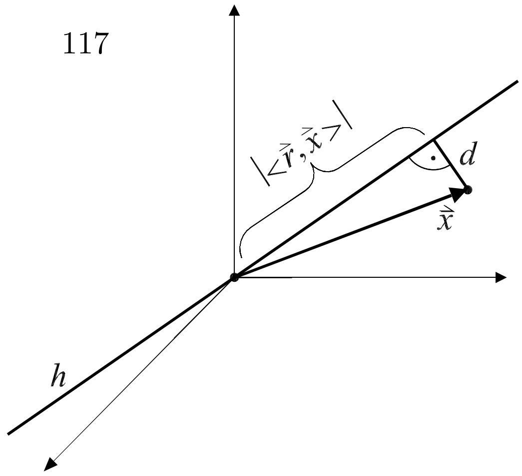
(Beachte: Statische Momente sind bzgl. Hyperebenen, Trägheitsmomente sind bzgl. Geraden)

Ebenso wie im $\mathbb{R}^2$ gilt und beweist man im $\mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) den Satz von Steiner:

$I_g = I_h + d^2 M$, wobei $h \parallel g$; $\vec{s} \in h$, $M =$ Gesamtmasse, $d =$ Abstand $(\vec{s}, g)$.

Wir wollen nun wieder die Trägheitsmomente verschiedener Geraden h durch den Schwerpunkt vergleichen. Die Koordinaten seien so verschoben, dass $\vec{s} = \vec{0}$. Der Einfachheit halber schreibe ich wieder $\vec{x}$ dafür (in 24.4 hingegen $\tilde{x}, \tilde{y}$).

Es sei $h : \vec{x} = \lambda\vec{r}$ eine Gerade durch $\vec{s} = \vec{0}$, $\|\vec{r}\| = 1$.
Dann hat ein beliebiger Punkt $\vec{x}$ von h den Abstand $d = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 - \langle\vec{r},\vec{x}\rangle^2}$:



$$\Longrightarrow\ I_h = \iiint_D d^2 \cdot \varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_D \left(\|\vec{x}\|^2 - \langle\vec{r},\vec{x}\rangle^2\right)\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_D \big[\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3)^2}\big]\,\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$$x_1^2(\underbrace{1 - r_1^2}_{r_2^2+r_3^2}) - 2r_1r_2x_1x_2 + x_2^2(\underbrace{1 - r_2^2}_{r_1^2+r_3^2}) + x_3^2\,\underbrace{(1 - r_3^2)}_{r_1^2+r_2^2} - 2r_1r_3x_1x_3 - 2r_2r_3x_2x_3$$

$$= \iiint\limits_D \big[r_1^2(x_2^2 + x_3^2) + r_2^2(x_1^2 + x_3^2) + r_3^2(x_1^2 + x_2^2) - 2r_1r_2x_1x_2 - 2r_1r_3x_1x_3 -$$

$$- 2r_2r_3x_2x_3\big]\,\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$$= r_1^2I_1 + r_2^2I_2 + r_3^2I_3 - 2r_1r_2I_{12} - 2r_1r_3I_{13} - 2r_2r_3I_{23} = \vec{r}^{\,T}J\vec{r} \text{ mit}$$

$$J = \begin{pmatrix} I_1 & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_2 & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_3 \end{pmatrix} \text{ und } I_1 = \iiint\limits_D (x_2^2 + x_3^2)\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V,$$

$$I_{12} = \iiint\limits_D x_1x_2\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V \text{ etc.}$$

<u>Bemerkungen:</u> 1) a_1, a_2 auf Seite 105 entspricht $-r_2, r_1$ hier.

Daher sind $I_{\tilde{y}} = I_2$, $I_{\tilde{x}} = I_1$ dort in anderer Position in der Matrix J und fehlt das $-$ bei $I_{\tilde{x}\tilde{y}} = I_{12}$.

2) In Matrixschreibweise ist

$$I_h = \iiint \left(\vec{x}^{\,T} \cdot \vec{x} - (\vec{r}^{\,T} \cdot \vec{x})^2\right)\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint (\underbrace{\vec{r}^{\,T} \cdot \vec{r}}_{=1} \cdot \vec{x}^{\,T} \cdot \vec{x} - \vec{r}^{\,T} \cdot \vec{x} \cdot \vec{x}^{\,T} \cdot \vec{r})\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

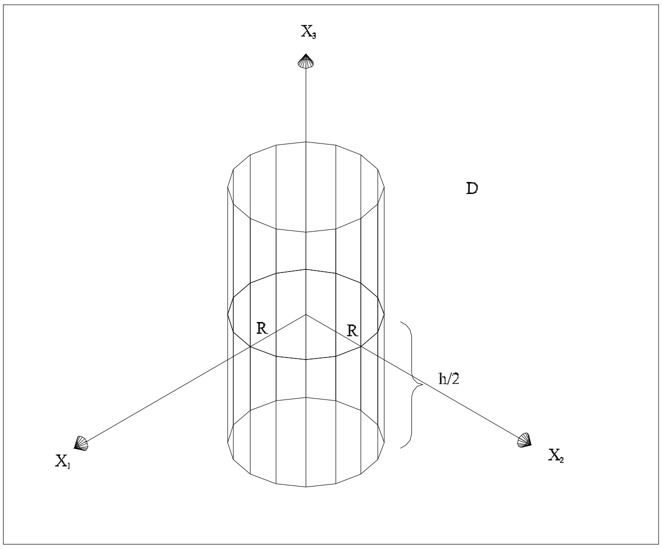
$$= \vec{r}^{\,T} \cdot \underbrace{\iiint (\vec{x}^{\,T} \cdot \vec{x} \cdot \overset{\substack{\text{hier } 3\times 3 \text{ Einheitsmatrix}\\ \downarrow}}{I_3} - \vec{x} \cdot \vec{x}^{\,T})\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V}_{J} \cdot \vec{r}$$

Diese Formel würde auch im $\mathbb{R}^n$ gelten (mit I_n statt I_3).

3) Nach Lineare Algebra § 7 F sind die Maximal-/Minimalwerte von I_h der größte bzw. kleinste Eigenwert von J. Die Eigenwerte von J heißen wieder **Hauptträgheitsmomente** und die Achsen in Richtung der Eigenvektoren **Hauptachsen**.

Bsp. 7 Bestimme J für einen homogenen Zylinder mit Radius R, Höhe h, $\varrho = 1$!

Wir wählen die Koordinaten durch den Schwerpunkt:



Aus Symmetriegründen ist $I_1 = I_2$ und $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

(Z.B. $I_{12} = \iiint\limits_D \underbrace{x_1 x_2}\,\mathrm{d}V = 0$

positiv für (x_1, x_2) im 1. und 3. Quadranten

negativ für (x_1, x_2) im 2. und 4. Quadranten)

$$I_3 = \iiint\limits_D (x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \underbrace{\left(\iint\limits_{x_1^2+x_2^2 \le R^2} \overbrace{(x_1^2 + x_2^2)}^{r^2}\, \overbrace{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}^{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi} \right)}_{\text{von } x_3 \text{ unabhängig}} \mathrm{d}x_3 =$$

$$= \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \mathrm{d}x_3 \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\left(\int\limits_{r=0}^{R} r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r \right)}_{\frac{R^4}{4}} \mathrm{d}\varphi = h \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{hR^4\pi}{2}$$

$$I_1 = I_2 = \iiint (x_1^2 + x_3^2)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (r^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{halbe Intervalllänge}}}{\cos^2 \varphi} + x_3^2) r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \Bigg)\,\mathrm{d}x_3 =$$

$$\int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{R} (\pi r^3 + 2\pi x_3^2 r)\,\mathrm{d}r \Bigg)\,\mathrm{d}x_3 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \left(\pi \frac{R^4}{4} + \pi x_3^2 R^2 \right) \mathrm{d}x_3$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{hR^4\pi}{4} + \frac{h^3R^2\pi}{12} = \frac{hR^2\pi(3R^2+h^2)}{12},$$

$$J = \frac{hR^2\pi}{12} \begin{pmatrix} 3R^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2+h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}.$$

Es ist also leichter, den Zylinder um die x_3-Achse als um die x_1-Achse in Drehung zu versetzen, solange $6R^2 < 3R^2 + h^2$, d.h. $R < \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

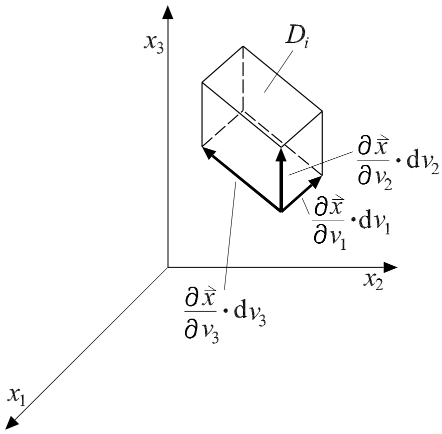
Bemerkung: Wenn man so wie oben bzgl. x_1, x_2 Polarkoordinaten einführt, nennt man das **Zylinderkoordinaten**, d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ x_3 \end{pmatrix}$.

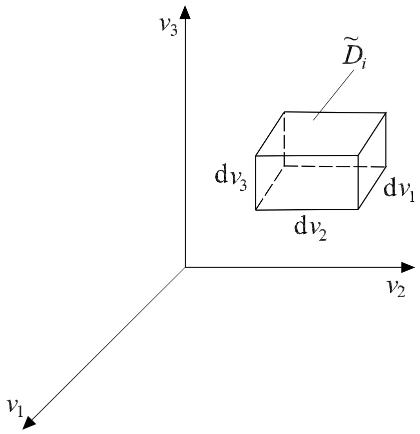
Dann gilt $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x_3$.

Wenn man über Kugelteile integriert, sind hingegen Kugelkoordinaten vorteilhaft, siehe 24.9.

24.9 KOORDINATENWECHSEL IN $\iiint$

Analog zu 24.5 betrachten wir neue Koordinaten v_1, v_2, v_3 und darin eine Zerlegung von $\tilde{D}$ in Quader $\tilde{D}_i$:





Dies entspricht einer krummlinigen Zerlegung D_i in den alten Koordinaten x_1, x_2, x_3 und es gilt (vgl. § 21.5):

$$\text{Volumen von } D_i \approx \left| \underbrace{\det \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial v_1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v_2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v_3} \right)}_{= \det J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(v_1, v_2, v_3)}} \right| \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3$$

$$\Longrightarrow \iiint\limits_D f(\vec{x})\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = \lim_{\varphi(Z) \to 0} \sum \underline{f}_i \cdot \text{Volumen von } D_i =$$

$$= \lim_{\varphi(Z) \to 0} \sum_i \underline{f}_i \cdot \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(v_1, v_2, v_3)} \right| \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3 = \iiint_{\tilde{D}} f\big(\vec{x}(\vec{v})\big) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(v_1, v_2, v_3)} \right| \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3$$

Speziell für Kugelkoordinaten gilt (§ 21.4)

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 &= \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 &= \varrho \cos \vartheta \end{aligned} \qquad \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\varrho, \vartheta, \varphi)} \underset{\substack{\text{(Üb. 76} \\ \text{v.2.6.99)}}}{=} \varrho^2 \sin \vartheta.$$

Schreibweise: Man schreibt oft nur ein Integral statt der 2, 3, bzw. n Integrale im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, bzw. $\mathbb{R}^n$.

Die Überlegungen oben gelten analog auch im $\mathbb{R}^n$ und ergeben

Satz 7 $\vec{v}(\vec{x})$ seien neue Koordinaten $\Longrightarrow$

$$\int\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int\limits_{\tilde{D}} \underbrace{f\big(\vec{x}(\vec{v})\big)}_{=\tilde{f}(\vec{v})}\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(v_1,\cdots,v_n)}\right|\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_n$$

Speziell in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{\int\limits_D f(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\tilde{D}} \tilde{f}(\varrho,\vartheta,\varphi)\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}$$

Bemerkung: $\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ ist das angenäherte Volumen von D_i und wird in S. 59 anschaulich bestimmt.

Bsp. 8 Die Trägheitsmomente einer homogenen Kugel sind für alle Achsen durch den Mittelpunkt gleich. Es sei R = Kugelradius und Dichte $\varrho = 1$.

a) $$I_3 = \iiint\limits_{\|\vec{x}\|<R} \underbrace{(x_1^2+x_2^2)}_{\varrho^2\sin^2\vartheta} \quad \underbrace{\mathrm{d}V}_{\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi} = \underbrace{\int\limits_{\varrho=0}^{R}\varrho^4\,\mathrm{d}\varrho}_{R^5/5}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{2\pi} =$$

$$= \frac{2R^5\pi}{5}\cdot\int\limits_0^\pi \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2R^5\pi}{5}\left[-\cos\vartheta+\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]\Bigg|_{\vartheta=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{2R^5\pi}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8R^5\pi}{15}.$$

Bemerkung: Ein dreifaches Integral $\iiint_{\tilde{D}} f(v_1,v_2,v_3)\,\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3$ lässt sich genau dann als PRODUKT schreiben, wenn

1. $f(v_1,v_2,v_3) = f_1(v_1)\cdot f_2(v_2)\cdot f_3(v_3)$

   $\big($oben: $f_1(v_1) = \varrho^4,\ f_2(v_2) = \sin^3\vartheta,\ f_3\underbrace{(v_3)}_{=\varphi} = 1\big)$ UND

2. das Gebiet $\tilde{D}$ ein Quader ist, d.h.

   $\tilde{D} = \{\vec{v} : a_1 \le v_1 \le b_1,\ a_2 \le v_2 \le b_2,\ a_3 \le v_3 \le b_3\}$

   (oben $a_1 = 0$, $b_1 = R$ etc.)

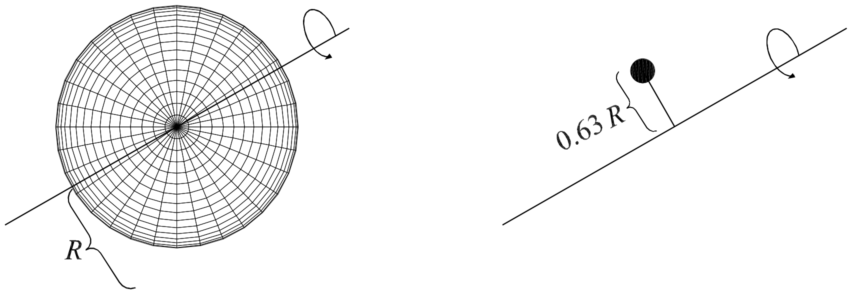
Beachte, dass $D = \big\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| < R\big\}$ NICHT quaderförmig war.

b) Elegantere Berechnung mit Trick:

$$I_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{1}{3}\int_D (\underbrace{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2}_{2\varrho^2}) \underbrace{\mathrm{d}V}_{\varrho^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^R \varrho^4 \,\mathrm{d}\varrho \int_0^\pi \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{8R^5\pi}{15}.$$

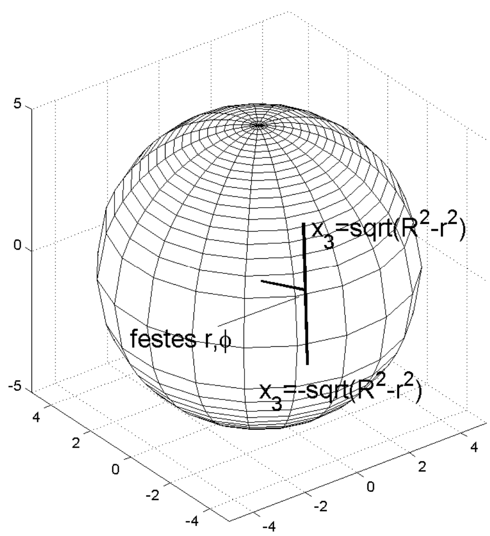
Weil M = Masse = Volumen = $\dfrac{4R^3\pi}{3} \implies I_3 = \dfrac{2}{5}MR^2$, d.h. es ist ebenso schwer die Kugel in Rotation zu versetzen, wie wenn ihre gesamte Masse konzentriert im Abstand $R \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0.63R$ von der Drehachse wäre.



c) Wenn man in Zylinderkoordinaten rechnet, so wird das Integral schwieriger:

$$x_1 = r\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\varphi \qquad \text{Kugel: } \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{r^2} + x_3^2 \le R^2 \iff |x_3| \le \sqrt{R^2 - r^2}$$
$$x_3 = x_3$$

Also: $\varphi = 0 \cdots 2\pi,\ r : 0 \cdots R,\ x_3 : -\sqrt{R^2 - r^2} \cdots \sqrt{R^2 - r^2}$



$$\Longrightarrow\ I_3 = \iiint \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{r^2} \underbrace{\mathrm{d}V}_{r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x_3} = \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}}_{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \Bigg(\underbrace{\int\limits_{x_3=-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}x_3}_{2\sqrt{R^2-r^2}} \Bigg) r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_{r=0}^{R} 2\sqrt{R^2-r^2} \cdot \underbrace{r^3\,\mathrm{d}r}_{r^2 \cdot \underbrace{r\,\mathrm{d}r}_{=-\mathrm{d}t/2}} =$$

$$\left\| \begin{array}{l} t = R^2 - r^2,\ r^2 = R^2 - t \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -2r \\ r = 0 \implies t = R^2, \\ r = R \implies t = 0 \end{array} \right.$$

$$= 2\pi \int\limits_{t=R^2}^{0} \sqrt{t} \cdot (R^2 - t) \cdot (-\mathrm{d}t) =$$

$$= -2\pi \cdot \left(R^2 \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{5/2}}{5/2} \right)\Bigg|_{t=R^2}^{0} = -2\pi\left(-\frac{2R^5}{3} + \frac{2R^5}{5} \right) = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

Man kann natürlich auch in einer anderen Integrationsreihenfolge rechnen, was hier vorteilhaft ist:

x_3 fest $\Longrightarrow\ r \leq \sqrt{R^2 - x_3^2}$

$$\Longrightarrow\ I_3 = \int\limits_{x_3=-R}^{R} \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}}_{2\pi} \underbrace{\int\limits_{r=0}^{\sqrt{R^2-x_3^2}} r^3\,\mathrm{d}r}_{\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{R^2-x_3^2}}} \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x_3 = 2\pi \int\limits_{x_3=-R}^{R} \frac{1}{4}(R^2 - x_3^2)^2\,\mathrm{d}x_3 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int\limits_{0}^{R} (R^4 - 2R^2x_3^2 + x_3^4)\,\mathrm{d}x_3 = \pi\left(R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

24.10 DARSTELLUNGEN DURCH EINFACHE INTEGRALE

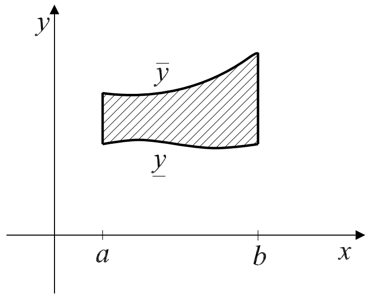
Wenn $\varrho = 1$ lassen sich viele Doppel-/Dreifachintegrale durch einfache Integrale ausdrücken.

A) Statische Momente von ebenen Flächen

Wenn D durch

$a \leq x \leq b,\ \underline{y}(x) \leq y \leq \overline{y}(x)$

gegeben ist,



so ist $$S_1 = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b x\big(\overline{y}(x) - \underline{y}(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

und $$S_2 = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} y \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{1}{2}\big(\overline{y}(x)^2 - \underline{y}(x)^2\big)\,\mathrm{d}x$$

B) Trägheitsmomente von ebenen Flächen

Ebenso ist $$I_x = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=\underline{y}}^{\overline{y}} y^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{1}{3}(\overline{y}^3 - \underline{y}^3)\,\mathrm{d}x$$

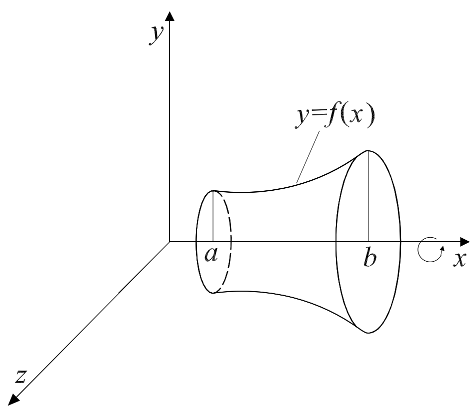
$$I_y = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=\underline{y}}^{\overline{y}} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b x^2(\overline{y} - \underline{y})\,\mathrm{d}x$$

C) Statische Momente von Drehkörpern

Wenn der Drehkörper durch Drehung der Fläche $0 \leq y \leq f(x)$ um die x-Achse entsteht, so ist sein Schwerpunkt auf der x-Achse und in Zylinderkoordinaten folgt

$$S_{yz} = \int\limits_{x=a}^{b} \iint\limits_{y^2+z^2 \leq f(x)^2} x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{x=a}^{b} x \underbrace{\int\limits_{r=0}^{f(x)} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r}_{2\pi\frac{f(x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_a^b x f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$



und somit $\vec{s} = \Big(\int\limits_a^b xy^2\,\mathrm{d}x / \int\limits_a^b y^2\,\mathrm{d}x, 0, 0\Big)$ (mit $y = f(x)$).

Auch ohne Dreifachintegrale erhält man S_{yz} mit einer Zerlegung in kleine Zylinder und einer Riemannsumme wie in 13.2. Ebenso wie in 13.5 geht das auch für <u>Oberflächen</u> von Drehkörpern. Dann ist

$$S_{yz} = 2\pi \int\limits_a^b xy\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

(In § 25 werden allgemeine Formeln angegeben für beliebige Flächen und $\varrho \neq 1$.)

D) <u>Trägheitsmomente von Drehkörpern</u>

Wieder folgt in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint (y^2+z^2)\,\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{x=a}^b \int\limits_{y^2+z^2 \leq f(x)^2} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int\limits_{x=a}^b 2\pi \int\limits_{r=0}^{f(x)} r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int\limits_a^b f(x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int\limits_a^b y^4\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Diese Formel entspricht der Rechnung bei der Kugel am Schluss von 24.9. Für die Oberfläche eines Drehkörpers erhalten wir (wie in C) $I_1 = 2\pi \int\limits_a^b y^3\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$.

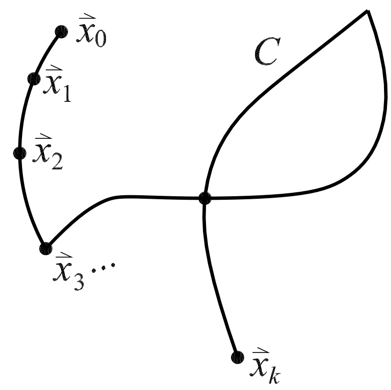
§25: Kurven- und Oberflächenintegrale

25.1 KURVENINTEGRALE 1. ART

C sei eine stückweise glatte Kurve im $\mathbb{R}^n$, d.h. mit höchstens endlich vielen Ecken und Überkreuzungen.

Problem:

Was ist ihre Masse M,
wenn sie mit der Dichte $\varrho(\vec{x})$ belegt ist?



Lösung: Eine Zerlegung $Z = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k\}$ ist eine Folge von Punkten auf C,

$\varphi(Z) = \max\big\{\|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\| : i = 1, \cdots, k\big\} \implies M = \lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} \varrho(\vec{x}_{i-1}) \cdot \|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\|$

Def. Wenn $f : C \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto f(\vec{x})$ stückweise stetig ist, so heißt $\lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} f(\vec{x}_{i-1}) \cdot \|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\|$ Kurvenintegral 1. Art und wird mit $\int\limits_C f(\vec{x})\,\mathrm{d}s$ bezeichnet.

Bemerkungen: 1) Wenn $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto \vec{x}(t)$ eine Parametrisierung von C ist, so ist $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$ und $\|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\| = \|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| \approx \big\|\dot{\vec{x}}(t_{i-1})\big\| \cdot (t_i - t_{i-1})$

$$\implies \boxed{\int\limits_C f(\vec{x})\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \underbrace{\big\|\dot{\vec{x}}(t)\big\|\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s}}$$

2) Wie in § 24 werden wieder die statischen Momente und die Trägheitsmomente definiert. Z.B. im $\mathbb{R}^2$: $S_1 = S_y = \int\limits_C x\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}s$, $S_2 = \int\limits_C y\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}s$, $\vec{s} = \big(\frac{S_1}{M}, \frac{S_2}{M}\big)$, $I_x = \int\limits_C y^2\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}s$ etc.

Bsp. 1 Bestimme den Schwerpunkt einer homogenen Halbkreislinie!

Es sei $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = R^2, \ y \geq 0\big\}$

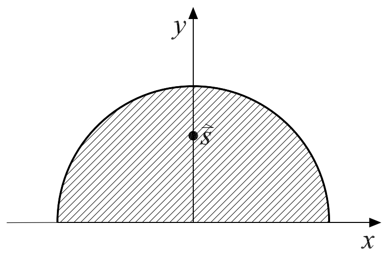
Parametrisierung: $\vec{x} = R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots \pi$,

$\mathrm{d}s = \big\|\dot{\vec{x}}(t)\big\|\,\mathrm{d}t = \left\|R \cdot \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right\|\,\mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}t$,

$\varrho(\vec{x}) = 1 \implies M = \displaystyle\int\limits_C \mathrm{d}s =$ Länge von $C = R\pi$,

$$S_2 = \int\limits_C y\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^\pi R\sin t \cdot R\,\mathrm{d}t = 2R^2,$$

$$s_2 = \frac{S_2}{M} = \frac{2R^2}{R\pi} = \frac{2R}{\pi} \approx 0.64R.$$



Aus Symmetriegründen ist $S_1 = 0 = s_1$.

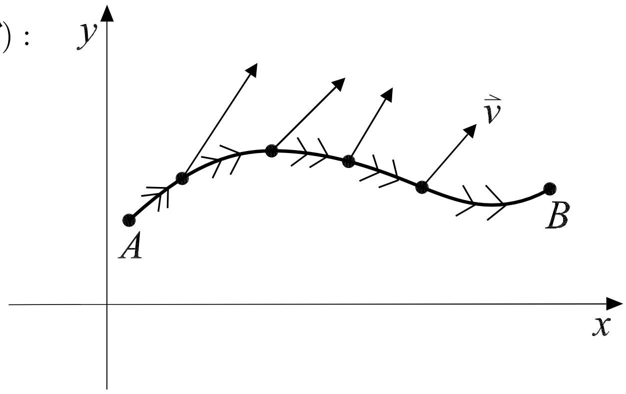
In $\vec{s}$ muss man stützen, wenn die Halbkreislinie auf einer gewichtslosen Halbkreisplatte aufgelegt wird.

Der Schwerpunkt liegt etwas höher als beim homogenen Halbkreis (für den $\vec{s} = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right) \approx (0, 0.42R)$), weil die Halbkreis<u>linie</u> im Vergleich zur Fläche im Schnitt höher liegt.

<u>Bemerkung:</u> In Polarkoordinaten ist $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi$ (vgl. 18.3) und daher gilt in Bsp. 1 $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}t$, da dort $r = R$ konstant, $t = \varphi$.

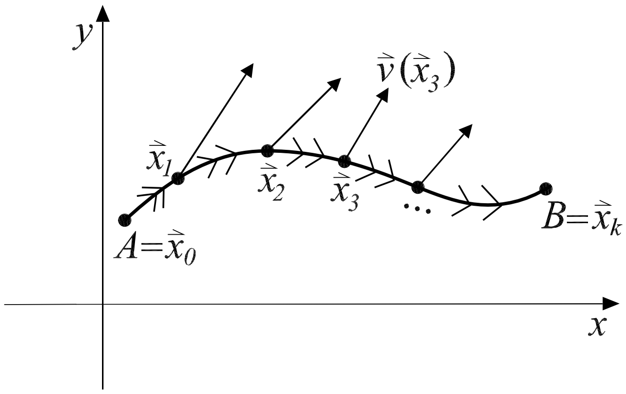
25.2 KURVENINTEGRALE 2. ART

Wir bewegen einen Massenpunkt auf einer (stückweise glatten) Kurve C im Kraftfeld $\vec{v}(\vec{x})$:



<u>Problem:</u> Welche Arbeit W wird geleistet?

<u>Lösung:</u> Wir zerlegen C in kleine, praktisch gerade Stücke.



$\varphi(Z) = \max\big\{\|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\| : \ i = 1, \cdots, k\big\}$.

Dann ist $W = \lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} \big\langle \underbrace{\vec{v}(x_{i-1})}_{\text{Kraft}}, \underbrace{\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}}_{\text{Weg}} \big\rangle$

Def. Dieser Grenzwert heißt Kurvenintegral 2. Art oder Arbeitsintegral.

Schreibweisen:

$$W = \int\limits_C \langle \vec{v}(\vec{x}), \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \int\limits_C \langle \vec{v}(\vec{x}), \mathrm{d}\vec{s} \rangle = \int\limits_C v_1(\vec{x})\,\mathrm{d}x + v_2(\vec{x})\,\mathrm{d}y = \int\limits_C v_j(\vec{x})\,\mathrm{d}x_j \quad \text{(TSW)}$$

Bemerkungen: 1) Wenn die Kurve durch $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \vec{x}(t)$ parametrisiert ist, so ist $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$, $\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1} \approx \dot{\vec{x}}(t_{i-1}) \cdot (\underbrace{t_i - t_{i-1}}_{\mathrm{d}t})$ und daher

$$W = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t_{i-1})\big), \dot{\vec{x}}(t_{i-1}) \Big\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}) \ \text{d.h.}$$

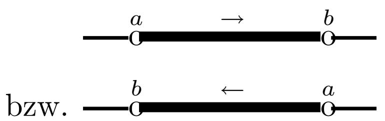
$$\boxed{\int\limits_C \langle \vec{v}(\vec{x}), \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \int\limits_a^b \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t}$$

2) Alles gilt ebenso für Kurven im $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^n$.

3) Beachte, dass W nicht von der Parametrisierung von C abhängt (d.h. davon wie schnell C durchlaufen wird). W hängt aber von der Durchlaufrichtung ab, d.h. C ist als orientierte Kurve gegeben, d.h. Anfangspunkt A und Endpunkt B sind bekannt. Bei umgekehrter Orientierung ergibt sich $-W$. Wenn die Kurve geschlossen ist, d.h. $A = B$, schreibt man oft $\oint \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$. Es ist dann zwar unerheblich, wo man $A = B$ auf C wählt, aber die Durchlaufrichtung muss bekannt sein.

4) Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist eigentlich ein Kurvenintegral 2. Art über

die Kurve



falls $a < b$

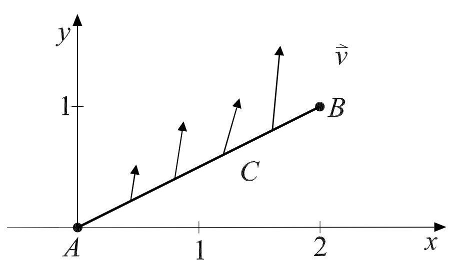
falls $a > b$

im $\mathbb{R}^1$.

Daher entfällt bei Substitution in einer Variablen der Betrag, vgl. 24.5.

Bsp. 2 $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix}$,

$C =$ gerade Strecke von $\vec{0}$ nach $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



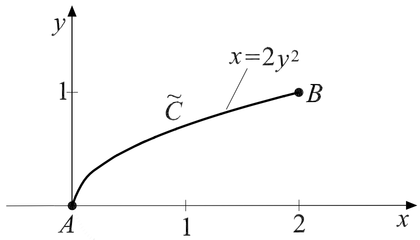
$$W = \int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \int\limits_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

<u>Berechnung:</u> Parametrisiere C z.B. durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t/2 \end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots 2 \implies$

$$\implies W = \int\limits_{t=0}^{2} \Big\langle \underbrace{\vec{v}\big(\vec{x}(t)\big)}_{\binom{t^2/2}{3t/2}}, \underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{\binom{1}{1/2}} \Big\rangle\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{4}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = 2\frac{5}{6}.$$

Was ergibt sich, wenn wir auf einem anderen Weg von A nach B gehen, z.B. auf dem Parabelstück $x = 2y^2$?



<u>Berechnung:</u> Parametrisiere $\tilde{C}$ z.B. durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t \end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots 1$

$$\implies \tilde{W} = \int\limits_{t=0}^{1} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 2t^2 + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_0^1 (8t^4 + 2t^2 + t)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 2\frac{23}{30}.$$

Auf dem Weg $\tilde{C}$ wird also ein bißchen weniger Arbeit geleistet. (In § 26 werden wir mit dem Satz von Green die Differenz $W - \tilde{W} = \dfrac{1}{15}$ kontrollieren.)

Wir untersuchen als nächstes, für welche Vektorfelder $\vec{v}$ die Arbeit W vom Weg unabhängig ist und nur von den Endpunkten A, B der Kurve C abhängt.

25.3 <u>DAS POTENTIAL</u>

<u>Erinnerung</u> (vgl. 21.2): Das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ heißt <u>konservativ</u> bzw. <u>hat ein Potential</u> $\iff \exists f : \vec{v} = \nabla f$.

Es gilt immer $\vec{v} = \nabla f \implies \operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ (d.h. $\vec{v}$ <u>wirbelfrei</u>) und in konvexen Gebieten im $\mathbb{R}^3$ gilt auch $\Longleftarrow$. Im $\mathbb{R}^n$ ist statt $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ die Bedingung $\forall i,j : \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ zu nehmen.

<u>Satz</u> $\vec{v}(\vec{x})$ sei ein stetiges Vektorfeld für $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

1) $\vec{v}$ konservativ, d.h. $\exists f : \vec{v} = \nabla f$;

2) $\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von C ab und zwar ist (mit f in 1)

$$\boxed{\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = f(B) - f(A)}$$

Daher Schreibweise: $\displaystyle\int\limits_A^B \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$;

3) für geschlossene Kurven ist $\displaystyle\oint\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = 0$.

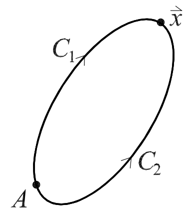
<u>Beweis:</u> 1) $\Longrightarrow$ 2): Wenn $\vec{v} = \nabla f$ und $\vec{x}(t)$, $t \in [a,b]$, eine Parametrisierung von C ist, so gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle &= \int\limits_a^b \underbrace{\Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle}\, \mathrm{d}t \\
&= \left.\sum_{i=1}^n \underbrace{v_i\big(\vec{x}(t)\big)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\vec{x}(t)\right)} \cdot \dot{x}_i(t) \right\} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\vec{x}(t)\big) \\
&= \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\vec{x}(t)\big)\, \mathrm{d}t = f\big(\vec{x}(t)\big)\Big|_{t=a}^b = f(B) - f(A),
\end{aligned}$$

wobei $\left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{x}(a) \\ \vec{x}(b) \end{matrix}\right\}$ Anfangs- bzw. Endpunkt von C sind.

2) $\Longrightarrow$ 3): $A = B \implies \displaystyle\oint\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = f(B) - f(A) = 0$,

3) $\Longrightarrow$ 1): $A \in D$ sei fixiert. Wir definieren $f(\vec{x}) := \int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$, wobei C irgendeine Kurve in D, von A nach $\vec{x}$ ist. (Der Einfachheit halber sei D zusammenhängend.) Es ist egal, welches C wir nehmen, denn wenn



so ist $\int\limits_{C_1} - \int\limits_{C_2} = \oint\limits_{C_1 \cup -C_2} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = 0$ nach 3).

Wenn wir die Gerade von $\vec{x}$ nach $\tilde{\vec{x}} = (x_1 + \epsilon, x_2, \cdots)$ durch $\vec{x}(t) = (x_1 + t, x_2, \cdots)$ parametrisieren, so folgt $f(\tilde{\vec{x}}) - f(\vec{x}) = \int\limits_0^\epsilon \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}} \Big\rangle \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^\epsilon v_1\big(\vec{x}(t)\big) \, \mathrm{d}t$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\tilde{\vec{x}}) - f(\vec{x})}{\epsilon} = \underbrace{\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\int\limits_0^\epsilon v_1\big(\vec{x}(t)\big) \, \mathrm{d}t}_{F(\epsilon)}}_{F'(0)} \overset{\substack{\text{Hauptsatz} \\ \int\text{rechnung}}}{=} v_1(\vec{x})$$

und daher $\nabla f = \vec{v}$. □

Ergebnis: Für ein konservatives Kraftfeld $\vec{v}$ ergibt sich also $f(\vec{x})$ als Arbeit, die geleistet wird, wenn von einem festen Punkt A aus auf irgendeiner Kurve C nach $\vec{x}$ gegangen wird. In der Physik wird $U = -f$ potentielle Energie genannt. Es gilt also $U(\vec{x}) = -\int\limits_A^{\vec{x}} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$, $\nabla U = -\vec{v}$. (Vgl. auch 21.2).

Z.B. im Gravitationsfeld einer festen Masse M in $\vec{0}$ ist $\vec{v}(\vec{x}) = -G \dfrac{mM\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ (mit $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\,\mathrm{sec}^2}\right]$) und $U(\vec{x}) = -G \dfrac{mM}{\|\vec{x}\|}$ bzw. in linearer Näherung auf der Erde $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$, $U(\vec{x}) = mgx_3$.

Beachte, dass U (im Gegensatz zur kinetischen Energie) nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Man kann also nur Differenzen der potentiellen Energie messen!

Bsp. 3 $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \end{pmatrix}$ hat ein Potential, da $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ (vgl. 21.2, p. 47).

Wir bestimmen f als Arbeitsintegral: $f(\vec{x}) = \int\limits_{\vec{0}}^{\vec{x}} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$.

Es sei C die gerade Strecke von $\vec{0}$ nach $\vec{x}$, d.h. $\vec{x}(t) = t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$.

(Vorsicht: $\vec{x}$ ist fix.)

$$\Longrightarrow\ f(\vec{x}) = \int\limits_{t=0}^{1} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{t=0}^{1} \left\langle \begin{pmatrix} ty\cos(t^2xy) \\ ty + tx\cos(t^2xy) \\ \mathrm{e}^{tz} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{t=0}^{1} \big(2txy\cos(t^2xy) + ty^2 + z\mathrm{e}^{tz}\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left(\sin(t^2xy) + \frac{t^2y^2}{2} + \mathrm{e}^{tz}\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = \sin(xy) + \frac{y^2}{2} + \mathrm{e}^{z} - 1.$$

25.4 OBERFLÄCHENINTEGRALE 1. ART

Eine Fläche D im $\mathbb{R}^3$ ist meist durch eine Gleichung $F(x,y,z) = 0$ (und evtl. verschiedene Ungleichungen) gegeben. Eine Parameterdarstellung einer Fläche benötigt zwei Parameter und hat also die Form

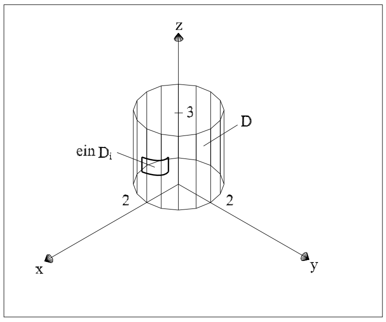
$$\underbrace{(u,v)}_{\in\tilde{D}} \longmapsto \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Bsp. 4 $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 3$ gibt im $\mathbb{R}^3$ einen Zylinder.

Wir können ihn parametrisieren durch

$$u = \varphi,\ v = z,\ \text{d.h.}\ \vec{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\underbrace{0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 3}_{\tilde{D}}.$$



Es sei nun auf D eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ sei eine Zerlegung von D in viele kleine praktisch ebene Stücke und

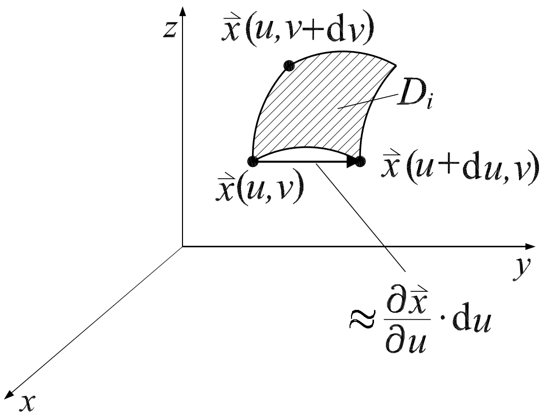
$UD(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot$ Fläche von D_i, $OD(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{f}_i \cdot$ Fläche D_i wie in 24.1.

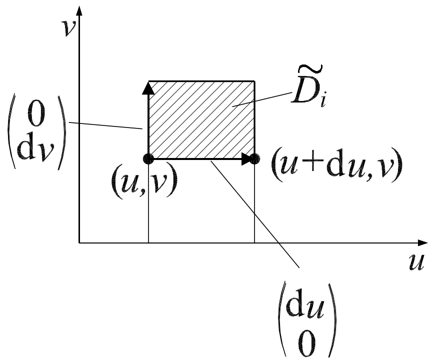
Satz und Def. Wenn D beschränkt und genügend glatt ist, und f stetig ist, so gilt

$\lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} UD(Z) = \lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} OD(Z)$ und heißt Oberflächenintegral 1. Art und wird mit $\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma$ bezeichnet.

Bemerkung: Wenn D ein Gebiet in der xy-Ebene ist, so erhalten wir das gewöhnliche Doppelintegral (24.1), d.h. dann ist $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Berechnung: D sei parametrisiert durch $\vec{x}(u,v)$





Einem kleinen Rechteck $\tilde{D}_i$ mit Fläche $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ entspricht ein krummes parallelogrammähnliches Flächenstück D_i und

$$\begin{aligned}
\vec{x}(u+\mathrm{d}u,v) &= \vec{x}\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ 0 \end{pmatrix}\right) \approx \vec{x}(u,v) + J \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \vec{x}(u,v) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \vec{x}(u,v) + \mathrm{d}u \cdot \begin{pmatrix} \partial x/\partial u \\ \partial y/\partial u \\ \partial z/\partial u \end{pmatrix} = \vec{x}(u,v) + \mathrm{d}u \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\,.
\end{aligned}$$

Die Kantenvektoren von D_i sind also in 1. Näherung $\mathrm{d}u \cdot \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $\mathrm{d}v \cdot \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial v}$.

Die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms ist

$\mathrm{d}u\mathrm{d}v \cdot \left\| \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| \approx$ Fläche von D_i. Daher folgt

$$\boxed{\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\tilde{D}} f\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}\sigma}}$$

Bsp. 4 Es sei D der Zylinder wie oben und $\varrho(\vec{x}) = z^2 \implies$ Masse $= M = \iint\limits_D z^2 \, \mathrm{d}\sigma$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathrm{d}\sigma = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} \right\| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \left\| \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$$

$$\implies M = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{3} z^2 \cdot 2\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{z^3}{3}\bigg|_0^3 = 36\pi$$

Das Moment bzgl. der xy-Ebene wäre

$$S_3 = S_{xy} = \iint\limits_D z^2 \cdot z \, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=6}^{3} z^3 \cdot 2 \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{z^4}{4}\bigg|_0^3 = 81\pi$$

$\implies s_3 = \dfrac{S_3}{M} = \dfrac{81}{36} = \dfrac{9}{4} = 2.25$ und $\vec{s} = (0, 0, 2.25)$ liegt über der Mitte, da die Dichte mit z stark wächst.

Bemerkungen: 1) Speziell, wenn man x, y als Parameter verwendet (beim Zylinder oben nicht möglich), d.h. D durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ gegeben ist, so ist

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}, \ \mathrm{d}\sigma = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(Vgl. $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x$ bei Kurven.)

Auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ hingegen können ϑ, φ als Parameter verwendet werden

$$\implies \vec{x}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho \sin\vartheta \cos\varphi \\ \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ \varrho \cos\vartheta \end{pmatrix}, \ \varrho \text{ fest.}$$

Wegen der Orthogonalität der Kugelkoordinaten gilt

$$\left. \underbrace{\mathrm{d}V = \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\varrho}_{\varrho^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi} \right\} \implies \mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi,$$

was man auch direkt nachrechnet: $\left\| \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta} \times \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right\| = \varrho^2 \sin\vartheta$

2) Im $\mathbb{R}^2$ spannen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ die Fläche $\left|\det(\vec{v}, \vec{w})\right|$ auf und das liefert die Substitutionsformel in 24.5. Im $\mathbb{R}^n$ spannen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ die Fläche $\sqrt{\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle^2}$ auf und daher gilt allgemein

$$\iint_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\tilde{D}} f\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \sqrt{\left\|\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right\rangle^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

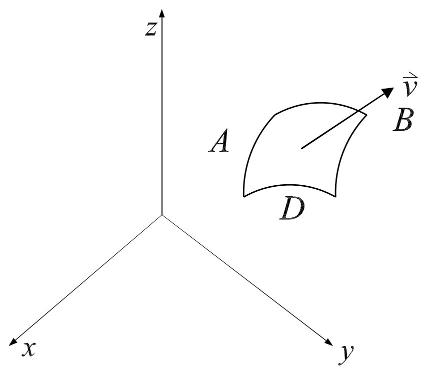
Noch allgemeiner, wenn D eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ ist, parametrisiert durch $\vec{x}(\vec{v}) = \vec{x}(v_1, \cdots, v_m)$, so ist

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\det\Bigg(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial v_j}\frac{\partial x_i}{\partial v_k}\right)_{j,k=1,\cdots,m}}_{m\times m\text{-Matrix}}\Bigg)}\,\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_m.$$

25.5 OBERFLÄCHENINTEGRALE 2. ART

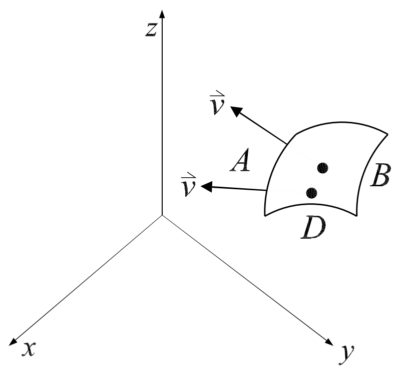
D sei eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ [m/sec] das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung.

Problem: Wieviel Volumen fließt pro sec durch D von einer Seite A zur anderen Seite B?



Hier ergibt sich etwas > 0.

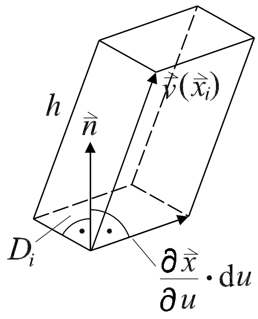
Wenn hingegen,



,

so rechnen wir den Durchfluss von A nach B negativ.

Ausschnitt:



Parallelepiped P

$\|\vec{n}\| = 1$

$\vec{n}$ stehe $\perp$ auf D_i in $\vec{x}_i$, $\|\vec{n}\| = 1$, $\vec{n}$ weise von A nach B. Pro Sekunde fließt dann von A nach B

$$\begin{aligned} \pm \text{ Volumen von } P = &\ \text{Grundfläche } \cdot \pm \text{ Höhe} \\ \approx &\ \text{Fläche von } D_i \cdot \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \end{aligned}$$

Def. D sei eine orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$, d.h. $\forall \vec{x} \in D$ ist ein Normaleneinheitsvektor (von den zwei möglichen) $\vec{n}(\vec{x})$ gewählt, sodass $\vec{n}(\vec{x})$ sich stetig ändert, $\vec{v}$ sei ein Vektorfeld auf D, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ Zerlegungen, $\vec{x}_i \in D_i$ beliebig.

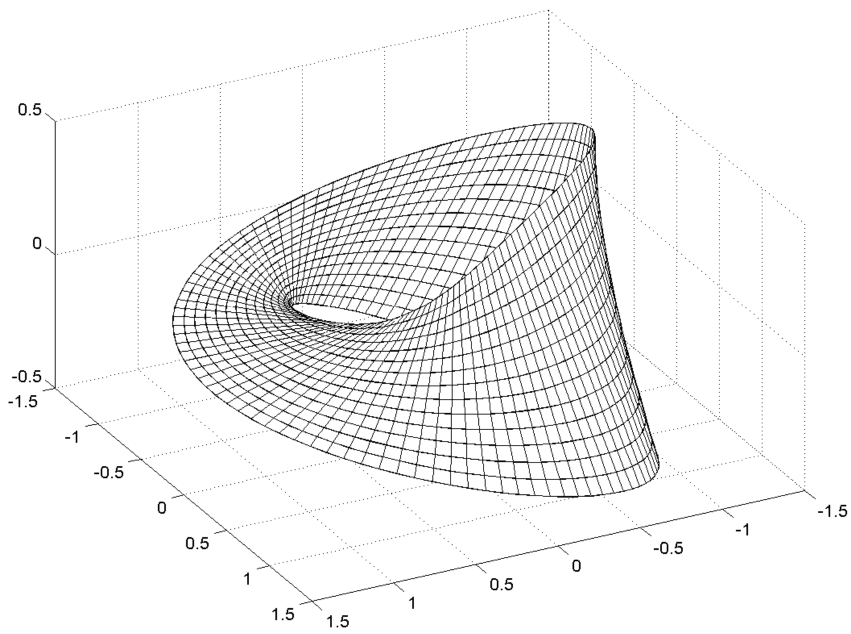
Dann heißt

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\langle \vec{v}(\vec{x}_i), \vec{n}(\vec{x}_i) \rangle}_{= f(\vec{x}_i)} \cdot \text{ Fläche von } D_i$$

Oberflächenintegral 2. Art bzw. Durchflussintegral von $\vec{v}$.

Nach 25.4 ist es $\displaystyle\iint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$.

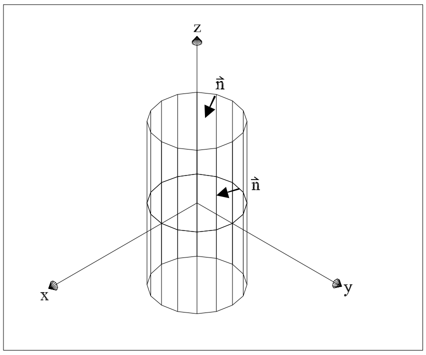
Bemerkung: Bei umgekehrter Orientierung ergibt sich das Negative. Vorsicht: Es gibt auch Flächen, die gar nicht orientierbar sind, z.B. ein Möbiusband.



Berechnung: $\vec{x}(u,v)$ parametrisiere D, wir schreiben kurz $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ statt $\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial v}$. Offenbar sind $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ tangential an D. Im Allgemeinen sind sie linear unabhängig und daher ist $\vec{n} = \pm \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}$, wobei $\pm$ je nach Wahl der Orientierung. Wegen $\mathrm{d}\sigma = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ folgt

$$\boxed{\iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\tilde{D}} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(u,v)\big), \pm \vec{x}_u \times \vec{x}_v \Big\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

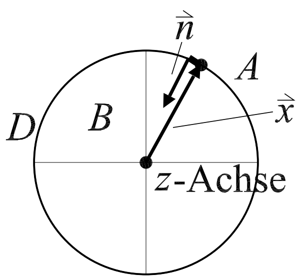
Bsp. 5 D sei der Zylinder aus Bsp. 4 und $\vec{n}$ weise zur z-Achse.



Nach Bsp. 4 ist $\vec{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\| = 2$, $\dfrac{\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z}{\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\|} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, hier ist also $\vec{n} = -\dfrac{\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z}{\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\|} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das erhält man natürlich auch direkt:



Wenn z.B. $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ z^2 \\ \mathrm{e}^{-yz} \end{pmatrix} \implies \iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{=2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z}$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \left\langle \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ z^2 \\ \mathrm{e}^{-2z\sin\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot 2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{3} (4\cos^2\varphi - 2z^2\sin\varphi)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (12\cos^2\varphi - \underbrace{18\sin\varphi}_{\to 0})\,\mathrm{d}\varphi = 12\pi.$$

Die Strömung transportiert also pro sec 12π VE von A nach B, d.h. hinein.

Wenn hingegen $\vec{w} = \begin{pmatrix} +x \\ z^2 \\ \mathrm{e}^{-yz} \end{pmatrix}$, so ist $\iint\limits_D \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = -12\pi$, d.h. die Strömung $\vec{w}$ transportiert pro sec -12π VE von A nach B, d.h. $+12\pi$ VE von B nach A.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Wenn D der Rand eines endlichen Körpers K ist, so schreibt man oft ∂K statt D und $\oiint\limits_{\partial K}$ statt $\iint\limits_{D}$. Meist wird ∂K so orientiert, dass $\vec{n}$ von K nach außen weist. Es sei z.B. $K = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| \leq R\}$ (Kugel) $\implies D = \partial K = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| = R\}$ und $\vec{n} = \dfrac{\vec{x}}{R}$. Wenn z.B. $\vec{v} = \vec{x}$, so folgt

$$\oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \oiint\limits_{D} \underbrace{\left\langle \vec{x}, \frac{\vec{x}}{R} \right\rangle}_{\frac{\|\vec{x}\|}{R} = R} \mathrm{d}\sigma = R \oiint\limits_{D} \mathrm{d}\sigma = R \cdot \text{Kugeloberfläche}$$

$= R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$ (Kontrolle: Satz von Gauß, § 26)

2) Tabelle:

	$\int$ 1. Art (nicht or.)	$\int$ 2. Art (orientierte Mfkt.)
Kurven im $\mathbb{R}^n$	$\int\limits_C f(\vec{x}) \, \mathrm{d}s$	$\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$
Flächen im $\mathbb{R}^3$	$\iint\limits_D f(\vec{x}) \, \mathrm{d}\sigma$	$\iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$
Allgemein: m-dim. Mfkt. im $\mathbb{R}^n$	$\int\limits_D f(\vec{x}) \, \mathrm{d}\sigma$ (s. S. 134)	$\int\limits_D \omega$

Rechts unten ist D eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit (d.h. die Reihenfolge der Parameter $v_1, \cdots, v_m$ ist geeignet) und in diesen $\omega = g(\vec{v}) \, \mathrm{d}v_1 \cdots \mathrm{d}v_m$. In den ursprünglichen $x_1, \cdots, x_m$-Koordinaten ist ω eine "m-Form", d.h. $\omega = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_m} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}$. Die Umrechnung erfolgt mit den Regeln $\mathrm{d}x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial v_1} \mathrm{d}v_1 + \cdots + \dfrac{\partial x_i}{\partial v_m} \mathrm{d}v_m$ und $\mathrm{d}v_i \wedge \mathrm{d}v_j = -\mathrm{d}v_j \wedge \mathrm{d}v_i$ (speziell $\mathrm{d}v_i \wedge \mathrm{d}v_i = 0$).

Die Einordnung von Durchflussintegralen in diesen Formalismus geht so: Bei richtiger Reihenfolge von u, v ist $\vec{n} \, \mathrm{d}\sigma = \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} y_u z_v - y_v z_u \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$; andererseits ist $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = (y_u \, \mathrm{d}u + y_v \, \mathrm{d}v) \wedge (z_u \, \mathrm{d}u + z_v \, \mathrm{d}v) = (y_u z_v - y_v z_u) \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ etc. $\implies \iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D v_1 \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - v_2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + v_3 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$

§26: Die Integralsätze

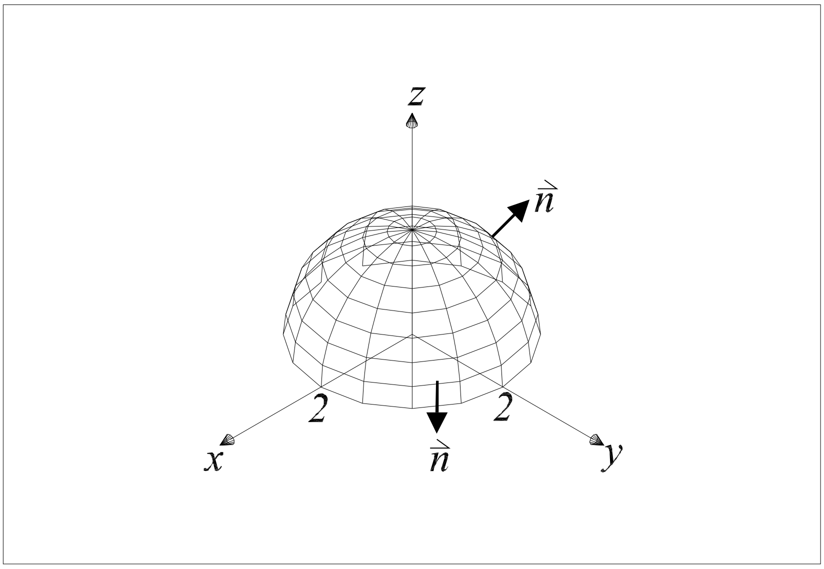
26.1 DER SATZ VON GAUSS

K sei ein endliches Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit stückweise glatter Randfläche ∂K. Dann ist ∂K orientierbar und wir wählen $\vec{n}$ so, dass $\vec{n}$ von K nach außen zeigt. Das Vektorfeld $\vec{v}$ sei in ganz K definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt der

Satz von Gauß $$\boxed{\oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V}$$

Bsp. 1 a) $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ und $K =$ "obere Halbkugel mit Radius 2" d.h.

$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| \leq 2, z \geq 0 \right\}$.



Hier ist $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3 \implies \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_{K} 3 \, \mathrm{d}V =$

$= 3 \cdot$ Volumen von $K = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4 \cdot 2^3 \pi}{3} = 16\pi$.

∂K besteht aus 2 Teilen:

$$\partial K = \begin{cases} D_1 = & \text{Halbkugelfläche } \|\vec{x}\| = 2, \ z \geq 0 \\ D_2 = & \text{Grundkreis } x^2 + y^2 \leq 4, \ z = 0 \end{cases}$$

In D_1 ist $\vec{n} = \dfrac{1}{2} \vec{x}$

$$\iint\limits_{D_1} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} \underbrace{\left\langle \vec{x}, \frac{\vec{x}}{2} \right\rangle}_{\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2 = 2} \mathrm{d}\sigma = 2 \cdot \text{ Oberfläche von } D_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2^2 \pi = 16\pi.$$

In D_2 ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\implies \iint\limits_{D_2} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = 0$$

$$\implies \oiint\limits_{K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = 16\pi = \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V$$

b) Wenn z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (konstantes Vektorfeld), so ist $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

$$\implies \oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma \overset{\text{Gauß}}{=} \iiint\limits_{K} 0 \, \mathrm{d}V = 0.$$

Kontrolle: $\displaystyle \iint\limits_{D_1} \langle \underbrace{\vec{v}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overbrace{\vec{n}}^{\frac{1}{2}\vec{x}} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} \frac{x + 2y + 3z}{2} \, \mathrm{d}\sigma =$

(Kugelkoordinaten: $x = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, etc., $\mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$)

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} (2 \sin\vartheta \overset{0}{\cancel{\cos}\varphi} + 4 \sin\vartheta \overset{0}{\cancel{\sin}\varphi} + 6 \cos\vartheta) \cdot 2^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} 12 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \cdot 6 \sin^2\vartheta \Big|_0^{\pi/2} = 12\pi$$

$$\iint\limits_{D_2} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = -3 \iint\limits_{D_2} \mathrm{d}\sigma \ = -3 \ \cdot \ \text{Fläche von } D_2$$

$= -3 \cdot 4\pi = -12\pi$ und daher $\displaystyle \oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = 0.$

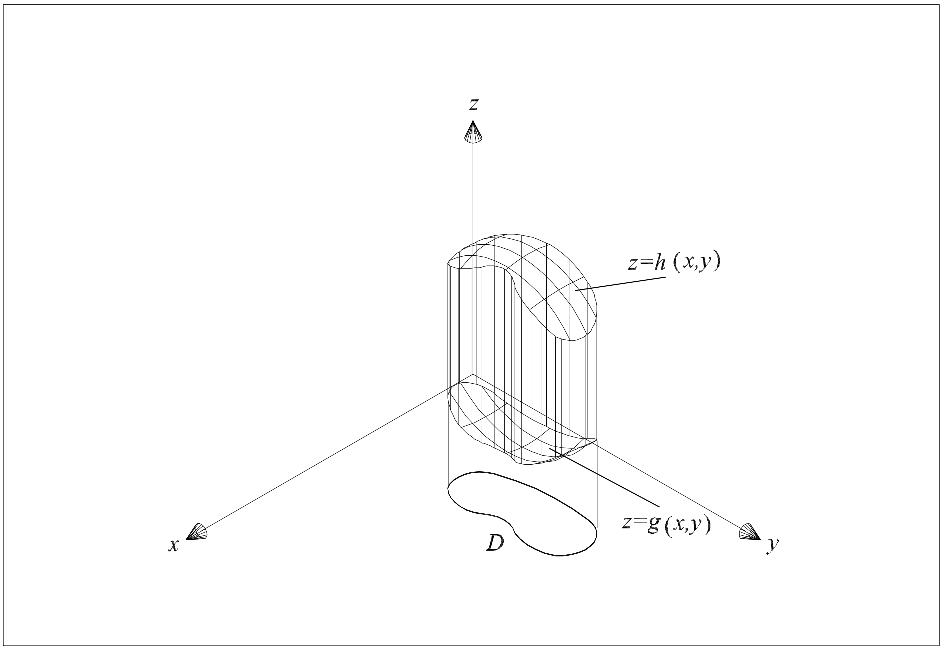
<u>Beweis des Satzes von Gauß</u>

Wir können $\vec{v}$ zerlegen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$; es genügt einen, z.B. den letzten Summanden zu betrachten und zu zeigen

$$\iiint\limits_{K} \frac{\partial v_3}{\partial z} \, \mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial K} v_3 \cdot n_3 \, \mathrm{d}\sigma$$

(Für die anderen 2 Summanden geht alles analog.) K sei zylindrisch, d.h. von der Form $(x, y) \in D,\ g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$

(Praktisch jeder Körper lässt sich in solche zylindrische Stücke zerlegen.)



Es gibt 3 Randflächen:

1) Deckel: $z = h(x, y),\ (x, y) \in D$

2) Mantel: $(x, y) \in C = \partial D,\ g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$

3) Boden: $z = g(x, y),\ (x, y) \in D$

Oben bzw. unten (in 1) bzw. 3)) ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \text{ bzw. } g \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\ \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma &= \pm \frac{\partial \vec{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x h \text{ bzw. } \partial_x g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y h \text{ bzw. } \partial_y g \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pm \begin{pmatrix} -\partial_x h \text{ bzw. } -\partial_x g \\ -\partial_y h \text{ bzw. } -\partial_y g \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\ n_3\,\mathrm{d}\sigma = \pm \mathrm{d}x\mathrm{d}y \begin{cases} \text{oben, d.h. in 1)} \\ \\ \text{unten, d.h. in 3)} \end{cases}
$$

Am Mantel (d.h. in 2)) ist $n_3 = 0$.

Zusammen: $\displaystyle \oint\!\!\!\!\iint_{\partial K} v_3 n_3\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \Big[v_3\big(x, y, h(x, y)\big) - v_3\big(x, y, g(x, y)\big) \Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_D \Big(\int\limits_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_K \frac{\partial v_3}{\partial z}\,\mathrm{d}V. \qquad \square$$

26.2 DER SATZ VON GREEN

Der Satz von Gauß gilt (mit demselben Beweis) in allen Dimensionen, d.h.

$$\oint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_K \operatorname{div} \vec{v}\,\mathrm{d}V$$

wobei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}$,

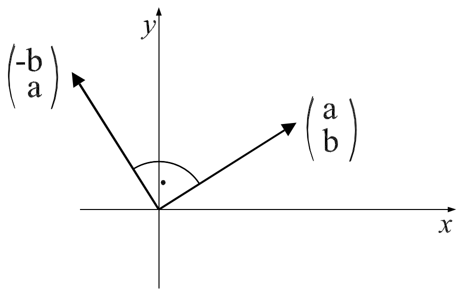
$\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm \vec{x}_{u_1} \times \cdots \times \vec{x}_{u_{n-1}} \cdot \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}$ (vgl. Lin. Alg., § 6C, p. 73) bzw. $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \pm\det(\vec{x}_{u_1}, \cdots, \vec{x}_{u_{n-1}}, \vec{v})\,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}$ für eine Parametrisierung $\vec{x}(u_1, \cdots, u_{n-1})$ von ∂K. (Im $\mathbb{R}^n$ schreibt man nur 1 Integral, s. S. 120).

Spezialfälle: 1) $n = 3$, s. 26.1

2) $n = 1 \implies \vec{v}(\vec{x}) = f(x)$, $\operatorname{div} \vec{v} = f'$, $K = [a, b]$, $\partial K = \{a, b\}$, $\oint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = f(b) - f(a)$, d.h. der Satz von Gauß ist in 1 Dimension der Hauptsatz der Integralrechnung

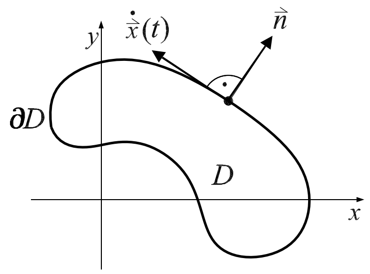
$$\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

3) $n = 2$. Im $\mathbb{R}^2$ ist $\times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, vgl. Lin. Alg. S. 73, und $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} > 0$, d.h. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sind positiv orientiert:



Wir schreiben den Satz von Gauß für $w = \begin{pmatrix} w_1(x, y) \\ w_2(x, y) \end{pmatrix}$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$ an $\implies$

$\implies \iint\limits_D \operatorname{div} \vec{w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{\partial D} \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$. Offenbar ist $\operatorname{div} \vec{w} = \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2}{\partial y}$. Wenn ∂D durch $\vec{x}(t)$ so parametrisiert ist, dass es im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, so ist $\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = - \times \dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$, weil $\dot{\vec{x}}, \vec{n}$ negativ orientiert sind $\implies$



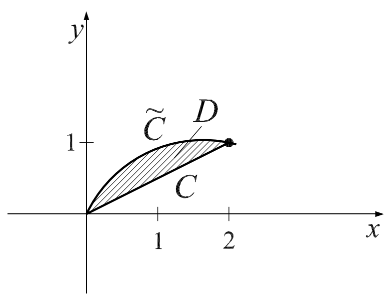
$$\int_a^b \underbrace{\underbrace{\left\langle \vec{w}\big(\vec{x}(t)\big), \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \right\rangle}_{w_1\dot{y} - w_2\dot{x}} \mathrm{d}t}_{w_1\,\mathrm{d}y - w_2\,\mathrm{d}x} = \iint_D \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Wir setzen $v_1 = -w_2$ und $v_2 = w_1 \implies$

$$\boxed{\oint_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \oint_{\partial D} v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Dies nennt man den Satz von Green. Beachte, dass ∂K im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden muss, was man manchmal mit $\circlearrowleft\!\!\!\!\int$ andeutet.

Bsp. 2 Es sei $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 2y^2 \le x \le 2y\big\}$ und $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$.



(vgl. S. 128)

$$\int_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle - \int_{\tilde{C}} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \oint_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \overset{\text{Green}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (1-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{y=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{x=2y^2}^{2y} (1-x)\,\mathrm{d}x \Bigg)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{y=0}^{1} \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{x=2y^2}^{2y} \mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(2y - \frac{(2y)^2}{2} - \left(2y^2 - \frac{(2y^2)^2}{2} \right) \right) \mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{1} (2y - 4y^2 + 2y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$ in Übereinstimmung mit S. 128.

Bemerkung: Umgekehrt erlaubt es der Satz von Green Flächen, statische Momente sowie Trägheitsmomente von D durch Kurvenintegrale 2. Art über ∂D auszudrücken:

$$\begin{aligned}
F &= \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} y\,\mathrm{d}x \\
S_1 &= \iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} xy\,\mathrm{d}x \\
S_2 &= \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} xy\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x \\
I_x &= \iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} xy^2\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} \frac{y^3}{3}\,\mathrm{d}x \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

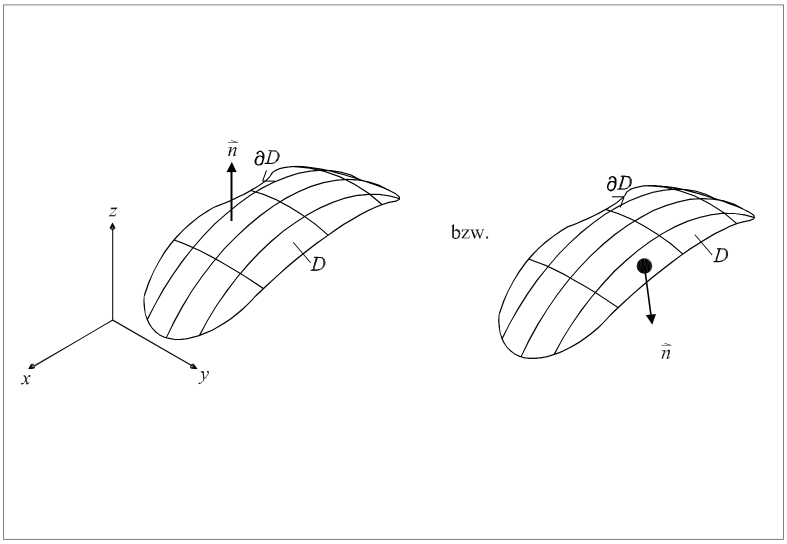
26.3 DER SATZ VON STOKES

Der Satz von Gauß ist selber ein Spezialfall des allgemeinen Satzes von Stokes $\int\limits_D \mathrm{d}\omega = \oint\limits_{\partial D} \omega$ für eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit D mit Rand ∂D und eine $(m-1)$-Form ω. Wenn D eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist und

$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ergibt sich daraus der (spezielle) Satz von Stokes

$$\boxed{\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \iint\limits_D \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma}$$

Dabei ist $D \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche, und die Randkurve ∂D wird nach der Korkenzieherregel orientiert:



<u>Bemerkungen:</u> 1) Aus dem speziellen Satz von Stokes erhalten wir den Satz von Green so als Spezialfall: $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$, $D \subset \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

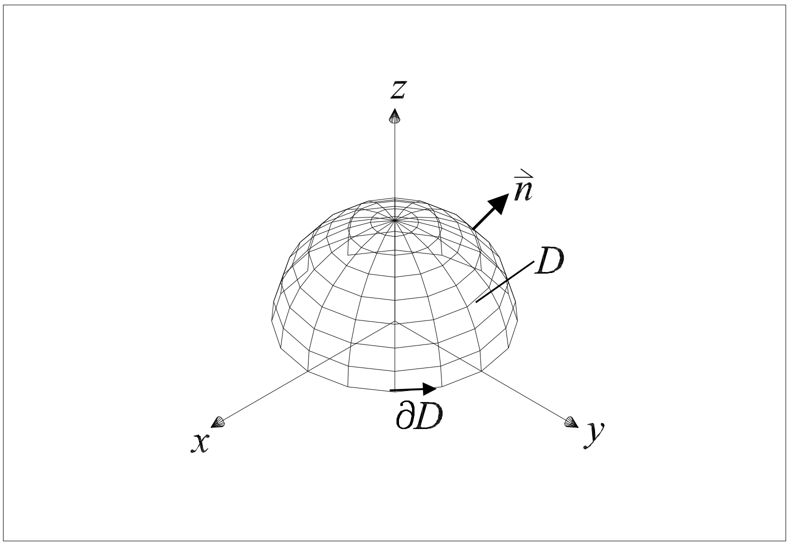
$\Longrightarrow \ \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$, $\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und das liefert den Satz von Green. Somit:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Gauß} & & \\
 & {\scriptstyle m=n}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle n=2} & \\
\text{allg. Stokes} & & & & \text{Green} \\
 & {\scriptstyle m=2 \atop n=3}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle D\subset\mathbb{R}^2 \atop \vec{v}\ \text{speziell}} & \\
 & & \text{spez. Stokes} & &
\end{array}
$$

2) <u>Zusammenstellung</u>

	Randintegral	Eine Integration mehr dafür $\vec{v}$ differenziert
Gauß	$\oint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma \ =$	$\int\limits_K \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V$
Green	$\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \ =$	$\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
Stokes	$\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \ =$	$\iint\limits_D \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$

<u>Bsp. 3</u> D sei die Halbkugel $\|\vec{x}\| = 1,\ z \geq 0$. Dann ist $\partial D =$ "Rand des Einheitskreises" $= \{\vec{x} : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$. Wenn wir ∂D im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, so muss $\vec{n}$ nach oben zeigen, d.h. $n_3 > 0$. Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ \cos z \end{pmatrix}$.



a) Berechnung von $\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$:

Parametrisierung: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots 2\pi$

$$\Longrightarrow \oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \int\limits_0^{2\pi} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = -\pi$$

b) Berechnung von $\iint\limits_D \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ xz \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z - 1 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung durch Kugelkoordinaten:

$$\varrho = 1 \Longrightarrow \vec{x}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix};\ \text{auf der Kugel ist } \vec{n} = \frac{\vec{x}}{\varrho} = \vec{x} \text{ und}$$

$\mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta$. (s. S. 134)

$$\Longrightarrow \iint\limits_D \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \\ \cos\vartheta - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right\rangle}_{-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \cos^2\vartheta - \cos\vartheta} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} [-\pi \underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\cdot\sin\vartheta} + 2\pi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 2\pi\cos\vartheta\sin\vartheta] \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} [-\pi\sin\vartheta + 3\pi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 2\pi\cos\vartheta\sin\vartheta] \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$= (\pi\cos\vartheta - \pi\cos^3\vartheta + \pi\cos^2\vartheta)\Big|_{\vartheta=0}^{\pi/2} = -\pi + \pi - \pi = -\pi \, \checkmark$$

Bemerkung: Beachte, dass es viele Flächen mit demselben ∂D gibt, so wie es in 25.2 vielen Kurven von A nach B gibt. Für alle diese Flächen D stimmt $\iint\limits_D \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma$ überein (und $= \oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle$) wie auch der Satz von Gauß zeigt:

$$= \iint\limits_{D_1} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_2} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \oiint\limits_{\partial K} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_K \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})}_{=0} \, \mathrm{d}V = 0,$$

wenn K der zwischen D_1 und D_2 liegende Körper ist und $\vec{n}$ auf D_1 von K nach außen zeigt.

Etwa in Bsp. 3 könnten wir auch den Einheitskreis $D_1 = \{\vec{x} : z = 0, \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ nehmen:

$$\iint\limits_{D_1} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} \left\langle \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} (\underset{\substack{\| \\ 0 \\ \text{auf } D_1}}{z} - 1) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\text{ Fläche von } D_1 = -\pi \, \checkmark.$$

Beweis des (spez.) Satzes von Stokes:

D sei durch x, y parametrisiert, d.h. $u = x, \; v = y, \; \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$.

(Dies ist nicht immer möglich, vgl. S. 132. Aber D lässt sich immer in Teile zerlegen, wo entweder x, y oder x, z oder y, z als Parameter verwendet werden können. Und für x, z bzw. y, z geht alles analog.)

Dann ist $\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (vgl. 26.1),

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \iint\limits_D \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \pm \iint\limits_{\tilde{D}\subset\mathbb{R}^2_{x,y}} \left[-\partial_x f\cdot(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_y f\cdot(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_x v_2 - \partial_y v_1\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Auf ∂D gilt $\mathrm{d}\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \end{pmatrix}$ (wie man aus einer Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f\big(x(t), y(t)\big) \end{pmatrix}$ von ∂D sieht).

$$\Longrightarrow \oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle = \int\limits_{\partial\tilde{D}} \underbrace{\left[v_1\big(x,y,f(x,y)\big) + v_3\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right]}_{u_1} \mathrm{d}x +$$

$$+ \underbrace{\left[v_2\big(x,y,f(x,y)\big) + v_3\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right]}_{u_2} \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{(Green)}}{=} \pm \iint\limits_{\tilde{D}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{ (Kettenregel)}$$

$$= \pm \iint\limits_{\tilde{D}} \Big\{ \partial_x v_2 + \partial_z v_2\cdot\partial_x f + (\partial_x v_3 + \cancel{\partial_z v_3\cdot\partial_x f})\cdot\partial_y f + \cancel{v_3\partial_{xy} f} -$$

$$- \left[\partial_y v_1 + \partial_z v_1\cdot\partial_y f + (\partial_y v_3 + \cancel{\partial_z v_3\cdot\partial_y f})\cdot\partial_x f + \cancel{v_3\partial_{yx} f}\right]\Big\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dabei ist $\pm$ zu wählen, wenn $\partial\tilde{D}$ $\left\{\begin{matrix}\text{gegen}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\}$ dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, d.h. wenn $n_3 \left\{\begin{matrix} > 0 \\ < 0\end{matrix}\right\}$. Daher erhalten wir dasselbe. $\square$

§27: Ergänzungen zu den Integralsätzen

27.1 DIE KONTINUITÄTSGLEICHUNG

Wie in 21.1 (Math. B, p. 44) sei $\vec{v}(t,\vec{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, $\varrho(t,\vec{x})$ die Dichte, $\vec{u}(t,\vec{x}) = \varrho \cdot \vec{v}$ die Impulsdichte. In einem Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ ist dann zur Zeit t die Masse $M(t) = \int\limits_V \varrho(t,\vec{x})\,\mathrm{d}V$ enthalten. (Ab hier wieder kurz $\int \cdots \mathrm{d}V$ statt $\iiint \cdots \mathrm{d}V$ etc.). Im Zeitintervall $[t_1,t_2]$ fließt aus V die Masse $M_{t_1,t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\oint\limits_{\partial V} \langle \vec{u},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma\Big)\,\mathrm{d}t$ hinaus.

Der Satz von Gauß ergibt $M_{t_1,t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\int\limits_V \operatorname{div}\vec{u}\,\mathrm{d}V\Big)\,\mathrm{d}t$. Andererseits gilt die Massenbilanz $M(t_2) = M(t_1) - M_{t_1,t_2}$ bzw. $M(t_2) - M(t_1) + M_{t_1,t_2} = 0$, d.h.

$$\int\limits_V \Big[\underbrace{\varrho(t_2,\vec{x}) - \varrho(t_1,\vec{x})}_{=\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}t} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \operatorname{div}\vec{u}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}V = 0$$

Also gilt $\forall t_1, t_2, V$

$$\int\limits_V \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,\vec{x}) + \operatorname{div}\vec{u}(t,\vec{x})\Big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}V = 0 \qquad (*)$$

und das führt zur Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,\vec{x}) + \operatorname{div}\vec{u}(t,\vec{x}) = 0}$$

(Denn wäre z.B. $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u} > 0$ in $(t_0,\vec{x}_0)$, so könnten wir V um $\vec{x}_0$ und $t_1 < t_0 < t_2$ so wählen, dass $\forall t \in [t_1,t_2], \forall \vec{x} \in V : \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u} > 0$ und erhielten einen Widerspruch zu $(*)$.)

Bemerkungen: 1) Speziell für eine stationäre Strömung, wo $\varrho, \vec{v}, \vec{u}$ von t unabhängig sind, sowie für eine inkompressible Flüssigkeit, wo $\varrho =$ konst, gilt daher $\operatorname{div}\vec{u} = 0$.

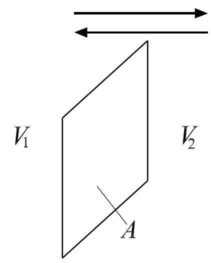
2) $\operatorname{div}\vec{u} = \operatorname{div}(\varrho \cdot \vec{v}) = \varrho \cdot \operatorname{div}\vec{v} + \langle \nabla\varrho, \vec{v}\rangle$.

27.2 EULER UND STOKES

Nun sei $\varrho = \varrho_0$ konstant (inkompressible Flüssigkeit) und es wirke der isotrope Druck $p(t, \vec{x})$ [Nm^{-2}], d.h. zwei kleine Volumina mit Grenzfläche A und Einheitsnormale $\vec{n}$ üben daran aufeinander die Kräfte $\pm \vec{n} A p$ aus:

Außerdem sei z.B. die Graviation wirksam bzw. allgemeiner eine $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}\ \vec{F}(t, \vec{x})$ [Nkg^{-1}].

Auf das Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ wirkt insgesamt die Kraft



$$\vec{K} = \int_V \varrho_0 \vec{F} \,\mathrm{d}V - \oint_{\partial V} \vec{n} \cdot p \,\mathrm{d}\sigma, \text{ d.h. } K_j = \int_V \varrho_0 F_j \,\mathrm{d}V - \oint_{\partial V} n_j p \,\mathrm{d}\sigma, \quad j = 1, 2, 3.$$

Der Satz von Gauß gibt

$$\oint_{\partial V} n_1 p \,\mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial V} \left\langle \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial p}{\partial x} \,\mathrm{d}V \text{ etc.}$$

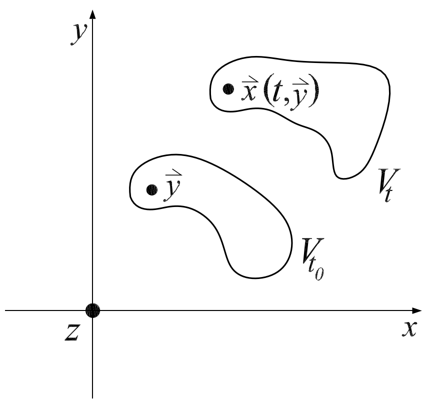
$$\Longrightarrow \vec{K} = \int_V (\varrho_0 \vec{F} - \nabla p) \,\mathrm{d}V.$$

Aus $\vec{K} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \text{Impuls} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \varrho_0 \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}V$ folgt dann die

Eulersche Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \vec{v}(t, \vec{x}) \,\mathrm{d}V = \int_V \left(\vec{F} - \frac{1}{\varrho_0} \nabla p \right)(t, \vec{x}) \,\mathrm{d}V.$$

Vorsicht: Das Volumen V bewegt sich mit der Zeit und wir können $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ und $\int_V$ nicht einfach vertauschen. Zur Zeit t_0 sei V_{t_0} gegeben und V_t das daraus bei der Strömung entstehende Gebiet.



Ein Partikel, das zur Zeit t_0 in $\vec{y}$ ist, ist zur Zeit t in $\vec{x}(t,\vec{y})$. Daher ist $V_t = \big\{\vec{x}(t,\vec{y}) : \vec{y} \in V_{t_0}\big\}$ und für eine beliebige Funktion $f(t,\vec{x})$ gilt

$$\int\limits_{V_t} f(t,\vec{x})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \overset{24.9}{=} \int\limits_{V_{t_0}} f\big(t,\vec{x}(t,\vec{y})\big)\cdot\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}\right|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3.$$

Imkompressibilität $\implies \left|\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}\right| =$ Volumsveränderungsfaktor $= 1$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_t} f(t,\vec{x})\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_{t_0}} f\big(t,\vec{x}(t,\vec{y})\big)\,\mathrm{d}V$$

$$\overset{\text{(Kettenregel)}}{=} \int\limits_{V_{t_0}}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{(\nabla f)_i}\cdot\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{v_i}\Big)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V_t}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}+\langle\nabla f,\vec{v}\,\rangle\Big)\,\mathrm{d}V$$

<u>Def.</u> Man nennt $\dfrac{\partial f}{\partial t}+\langle\nabla f,\vec{v}\,\rangle$ <u>Stokessche Ableitung</u> von f und schreibt dafür $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

Die Eulersche Gleichung ergibt also

$$\int\limits_V\Big[\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-\vec{F}+\frac{1}{\varrho_0}\nabla p\Big]\,\mathrm{d}V = 0 \text{ für jedes } V \overset{\text{(vgl. p. 149)}}{\implies} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}-\frac{1}{\varrho_0}\nabla p$$

bzw. $\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+\langle\nabla v_i,\vec{v}\,\rangle = F_i-\dfrac{1}{\varrho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x_i},\ i=1,2,3.$

Nach 27.1 gilt außerdem $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

27.3 KELVIN UND BERNOULLI

<u>Def.</u> Für eine orientierte geschlossene Kurve C heißt $Z = \oint\limits_C\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle$ <u>Zirkulation</u> von $\vec{v}$ um C.

Nach dem Satz von Stokes ist $Z = \iint\limits_D\langle\operatorname{rot}\vec{v},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$ für eine beliebige Fläche D mit $\partial D = C$.

Der <u>Satz von Kelvin</u> sagt $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint\limits_C\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle = 0$ falls $\vec{F} = -\nabla U$, d.h. falls $\vec{F}$ ein Potential hat (z.B. Gravitation).

<u>Vorsicht:</u> Analog zu 27.2 wird $C = C_t$ als von der Strömung bewegt aufgefasst. Wenn C_{t_0} parametrisiert ist durch $\vec{y}(\varphi)$, $\varphi\in[a,b]$, so wird C_t parametrisiert durch $\vec{x}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)$, $\varphi\in[a,b]$, und wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint\limits_{C_t}\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_a^b\Big\langle\vec{v}\Big(t,\vec{x}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)\Big),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{x}\,\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)\Big\rangle\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_a^b \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\vec{x}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)\right\rangle \mathrm{d}\varphi + \underbrace{\underbrace{\int_a^b \underbrace{\left\langle \vec{v}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)}_{\vec{v}\left(t,\vec{x}\left(t,\vec{y}(\varphi)\right)\right)}\right\rangle}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2\right)} \mathrm{d}\varphi}_{\frac{1}{2}\left\|\vec{v}\left(t,\vec{x}\left(t,\vec{y}(\varphi)\right)\right)\right\|^2\Big|_{\varphi=a}^{b}}}_{=0,\ \text{da}\ \vec{y}(a)=\vec{y}(b)}$$

$$= \int_{C_t} \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\vec{x}\right\rangle \overset{27.2}{=} \int_{C_t} \langle \underbrace{\vec{F}}_{-\nabla U} - \frac{1}{\varrho_0}\nabla p, \mathrm{d}\vec{x}\rangle$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} -\iint_{D_t} \left\langle \underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{grad}}_{=0}\left(U + \frac{1}{\varrho_0}p\right), \vec{n}\right\rangle \mathrm{d}\sigma = 0,$$

wobei D_t eine Fläche mit Randkurve $\partial D_t = C_t$ ist.

Schließlich sei $\vec{v}$ das Geschwindigkeitsfeld einer wirbelfreien Strömung (vgl. 27.4), d.h. $\forall t : \operatorname{rot}\vec{v}(t,\vec{x}) = \vec{0}$.

Nach 21.2 ist $\vec{v} = \nabla\varphi$ und die Eulersche Gleichung ergibt

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{\underbrace{\left\langle \nabla \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}^{=v_i}, \overbrace{\nabla f}^{=\vec{v}}\right\rangle}_{\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\|\vec{v}\|^2} = F_i - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\|\vec{v}\|^2 = \vec{F} - \frac{1}{\varrho_0}\nabla p.$$

Speziell im stationären Fall im Gravitationsfeld ist $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} =$ $\nabla(-gz)$

$$\Longrightarrow \nabla\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + gz + \frac{1}{\varrho_0}p\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + gz + \frac{1}{\varrho_0}p = \text{konstant}.$$

Das nennt man die Bernoulli-Gleichung.

27.4 DIV, ROT ALS GRENZWERTE VON RANDINTEGRALEN

a) $\vec{v}(\vec{x})$ sei in der Nähe von $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ definiert, $f = \operatorname{div}\vec{v}$ und V ein kleines $\vec{x}_0$ enthaltendes Gebiet. In erster Näherung ist in V $f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0)$

$$\Longrightarrow \iiint\limits_V f(\vec{x})\,\mathrm{d}V \approx \iiint\limits_V f(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}V = f(\vec{x}_0)\cdot \mathrm{Vol.}\,(V)$$

$$\Longrightarrow f(\vec{x}_0) \approx \frac{\iiint\limits_V f(\vec{x})\,\mathrm{d}V}{\mathrm{Vol.}(V)} \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{\oint\!\!\oint\limits_{\partial V} \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{Vol.}(V)}$$

Daher gilt

$$\boxed{(\operatorname{div}\vec{v})(\vec{x}_0) = \lim_{V\to\{\vec{x}_0\}} \frac{\oint\!\!\oint\limits_{\partial V} \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{Vol.}(V)}}$$

$V \to \{\vec{x}_0\}$ soll dabei bedeuten, dass V Gebiete mit glattem Rand sind und $\max\big\{\|\vec{x}-\vec{x}_0\| : \vec{x}\in V\big\} \to 0$.

<u>In Worten:</u> $(\operatorname{div}\vec{v})(\vec{x}_0)$ ist die "Quellstärke von $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$", d.h. der Grenzwert aus $\dfrac{\text{Durchflussintegral}}{\text{eingeschlossenes Volumen}}$ bei $\vec{x}_0$ (vgl. auch 21.1).

b) D sei eine kleine orientierte Fläche durch $\vec{x}_0$ und $f = \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle$. In erster Näherung ist in D $f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0)$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma \approx \iint\limits_D f(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}\sigma = f(\vec{x}_0)\cdot \text{Fläche}(D)$$

$$\Longrightarrow f(\vec{x}_0) \approx \frac{\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma}{\text{Fläche}(D)} \overset{\text{Stokes}}{=} \frac{\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle}{\text{Fläche}(D)}$$

Daher gilt

$$\boxed{\big\langle (\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0), \vec{n}\big\rangle = \lim_{\substack{D\to\{\vec{x}_0\}\\ \vec{n}(\vec{x}_0)=\vec{n}}} \frac{\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle}{\text{Fläche}(D)}}$$

∂D wird dabei bzgl. $\vec{n}$ nach der Rechtsschraubregel durchlaufen.

<u>In Worten:</u> $(\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0)$ ist die "Wirbelstärke von $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$", d.h. $(\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0)$ zeigt senkrecht auf die Ebene, in der $\dfrac{\text{Arbeit}}{\text{umkreiste Fläche}}$ bei $\vec{x}_0$ maximal wird, und $\big\|(\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0)\big\|$ ist dann der Grenzwert dieses Quotienten.

27.5 DAS GESCHWINDIGKEITSFELD $\vec{v}$ IN DER LINEAREN NÄHERUNG

Bei $\vec{x}_0$ gilt $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o\big(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|\big)$, vgl. 21.3.

Es sei $A = \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Lemma 1 Jede $n \times n$-Matrix A lässt sich eindeutig als $A = B + C$ schreiben, wobei B symmetrisch ist ($B^T = B$) und C schiefsymmetrisch ($C^T = -C$).

Beweis In der Tat folgt aus $A = B + C$, dass $A^T = B^T + C^T = B - C \implies A + A^T = 2B,\ A - A^T = 2C \implies B = \frac{1}{2}(A + A^T),\ C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. □

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^3$ ist also $A = B + C$ mit

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) & \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32}) & a_{33} \end{pmatrix}$$

und

$$C = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13}) & \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2 Wenn $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ schiefsymmetrisch ist, so gilt $C\vec{x} = \vec{c} \times \vec{x}$ mit

$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{13} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. (Man nennt $\vec{c}$ manchmal Drehvektor.)

Beweis
$$\begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{13} \\ c_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{13}z - c_{21}y \\ c_{21}x - c_{32}z \\ c_{32}y - c_{13}x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix} \vec{x}}_{\begin{pmatrix} c_{12}y + c_{13}z \\ c_{21}x + c_{23}z \\ c_{31}x + c_{32}y \end{pmatrix}},$$

weil $c_{12} = -c_{21},\ c_{23} = -c_{32},\ c_{31} = -c_{13}$. □

Es sei nun $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) = A = B + C,\ B = B^T,\ C = -C^T,\ C\vec{x} = \vec{c} \times \vec{x}$

mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{13} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. Dann ist also

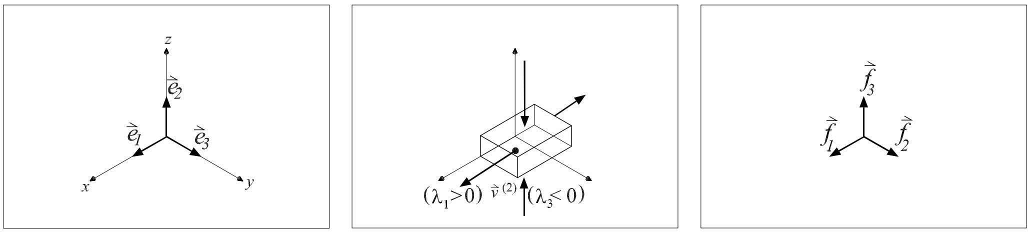
$$\vec{v}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{v}(\vec{x}_0)}_{\vec{v}^{(1)}} + \underbrace{B \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\vec{v}^{(2)}} + \underbrace{\vec{c} \times (\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\vec{v}^{(3)}} + o\big(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|\big)$$

$\vec{v}$ setzt sich also in der linearen Näherung aus folgenden 3 Anteilen zusammen:

1) $\vec{v}^{(1)}$ ist ein konstantes Geschwindigkeitsfeld;

2) $B = B^T \implies$ (Lin.Alg., § 7) bzgl. einer neuen ONB $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ist

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}^{(2)}$ bedeutet $\left\{ \begin{matrix} \text{Expansion} \\ \text{Kontraktion} \end{matrix} \right\}$ in den Richtungen $\vec{f}_j$ wenn $\left\{ \begin{matrix} \lambda_j > 0 \\ \lambda_j < 0 \end{matrix} \right\}$:

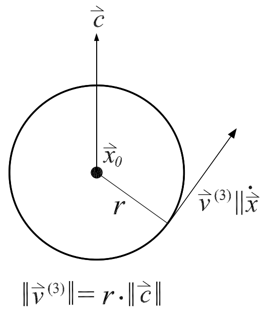


Schließlich gilt $\sum\limits_{j=1}^{3} \lambda_j = \operatorname{sp} B \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{weil } \operatorname{sp} C = 0)}}{=} \operatorname{sp} J\vec{v}(\vec{x}_0) = \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0)$

(3) $(\operatorname{rot} \vec{v})(\vec{x}_0) = (\nabla \times \vec{v})(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} (\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} = 2\vec{c},$

d.h. $\vec{v}^{(3)}$ ist das Geschwindigkeitsvektorfeld einer Drehung um die Achse durch $(\operatorname{rot} \vec{v})(\vec{x}_0)$ mit Winkelgeschwindigkeit $\|\vec{c}\| = \frac{1}{2}\big\|\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0)\big\|$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt davon, dass für einen Kreis K mit Mittelpunkt $\vec{x}_0$ senkrecht zu $\vec{c}$ gilt:

$$\begin{aligned} \oint_K \langle \vec{v}^{(3)}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle &\overset{\text{Bild}}{=} \oint_K \underbrace{\|\vec{v}^{(3)}\|}_{r\cdot\|\vec{c}\|} \cdot \|\dot{\vec{x}}\| \,\mathrm{d}t \\ &= r\|\vec{c}\| \cdot \text{ Kreislänge} \\ &= r\|\vec{c}\| \cdot 2\pi r \\ &= \underline{\underline{2}}\|\vec{c}\| \cdot \text{Kreisfläche} \end{aligned}$$



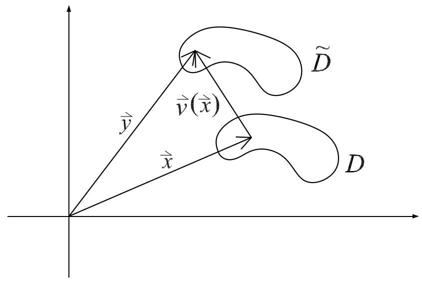
$$\implies \|\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0)\| \overset{(27.4)}{=} \lim_{K \to \{\vec{x}_0\}} \frac{\oint_K \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle}{\text{Kreisfläche}} = 2\|\vec{c}\|$$

$$\left(\text{weil } \oint_K \langle \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \overset{\text{Stokes}}{=} \iint \langle \underbrace{\operatorname{rot}(\vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)})}_{\vec{0}}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = 0\right)$$

27.6 DER VERZERRUNGSTENSOR

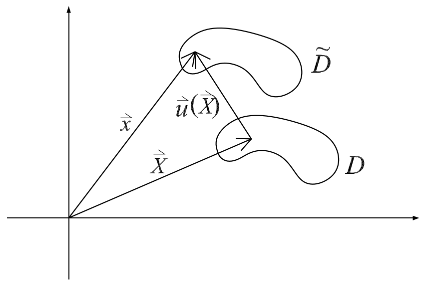
Nun bedeutet $\vec{v}$ NICHT Geschwindigkeit $\left[\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right]$, sondern die Verschiebung [m] des Ortspunktes $\vec{x}$ zu einem neuen Punkt $\vec{y}$, d.h.

$\vec{y}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}(\vec{x})$.



Wir verwenden ab nun die Bezeichnungen von Hofstetter, d.h.

oben	$\vec{x}$	$\vec{v}$	$\vec{y}$	$\mathrm{J}\vec{v}$
ab jetzt	$\vec{X}$	$\vec{u}$	$\vec{x}$	$\operatorname{grad}\vec{u}$



Somit $\vec{x}(\vec{X}) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X})$ und

$\vec{x}(\vec{X}) = \vec{x}(\vec{X}_0) + \mathrm{J}\vec{x}(\vec{X}_0) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0) + o\big(\|\vec{X} - \vec{X}_0\|\big)$ und

$\mathrm{J}\vec{x}(\vec{X}_0) = I + \mathrm{J}\vec{u}(\vec{X}_0) = I + A$ mit $a_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}(\vec{X}_0)$.

Wir betrachten zunächst kleine Verschiebungsableitungen, d.h. $|a_{ij}| << 1$.

Wieder sei $A = B + C$ mit $B = B^T,\ C = -C^T$.

Dann ist $\mathrm{J}\vec{x}(\vec{X}_0) = I + A = I + B + C \approx (I + C)\cdot(I + B)$, weil $C \cdot B$ klein von 2. Ordnung ist.

$\Longrightarrow\ \vec{x}(\vec{X}) \approx \vec{x}(\vec{X}_0) + (I + C)(I + B)\cdot(\vec{X} - \vec{X}_0)$

1) $\vec{x}(\vec{X}_0)$ bedeutet eine konstante Verschiebung;

2) $B = B^T$ ist nach HA-Transformation $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ mit $|\lambda_j| << 1$.

Somit bewirkt $I + B$ eine Verzerrung und zwar $\left\{\begin{matrix}\text{Streckung}\\ \text{Stauchung}\end{matrix}\right\}$ in den Richtungen $\vec{f}_j$ mit Faktor $1 + \lambda_j$ wenn $\left\{\begin{matrix}\lambda_j > 0\\ \lambda_j < 0\end{matrix}\right\}$.

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = (\epsilon_{ij})\ \text{heißt linearisierter Verzerrungstensor.}$$

Die Volumsänderung ist $\det(I+A) \approx$

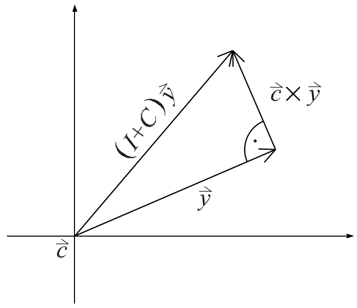
$$\det\big((I+B)(I+C)\big) = \underbrace{\det(I+B)}_{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} \cdot \underbrace{\det(I+C)}_{\approx 1}$$
$$\approx \quad 1 + \underbrace{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}_{\operatorname{sp} B = \operatorname{sp} A} = 1 + \operatorname{sp} A$$
$$= 1 + \operatorname{div}\vec{u}(\vec{X}_0)$$

Der Volumsänderungsfaktor ist also in 1. Näherung $1 + \operatorname{div}\vec{u}(\vec{X}_0)$.

3) Die lineare Abbildung $\vec{y} \longmapsto (I+C)\vec{y}$ ist in 1. Näherung eine Drehung mit Drehvektor $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u}(\vec{X}_0)$, denn $C\vec{y} = \vec{c}\times\vec{y}$ (vgl. p. 154)

$\Longrightarrow\ (I+C)\vec{y} = \vec{y} + \vec{c}\times\vec{y}$.

Draufsicht:



Vergleich lineare/nichtlineare Theorie

Für kleine $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$ ist also die Verzerrung in 1. Näherung durch

$\epsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = b_{ij}$ bestimmt. Exakt ist hingegen

$\vec{x}(\vec{X}) = \vec{x}(\vec{X}_0) + (I+A)\cdot(\vec{X}-\vec{X}_0) + o\big(\|\vec{X}-\vec{X}_0\|\big)$; $T = I + A$ erhält Längen (und Winkel) $\Longleftrightarrow$ T orthogonal $\Longleftrightarrow$ $T^T\cdot T = I \Longleftrightarrow \underbrace{(I+A)^T\cdot(I+A)}_{I+A+A^T+A^TA} = I \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow A + A^T + A^TA = 0$

Def. $E = \dfrac{1}{2}(A + A^T + A^TA)$ heißt Greenscher Verzerrungstensor.

In Koordinaten ist

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji} + a_{ki}a_{kj}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right).$$

Allgemein gilt dann

$$\big\|(I+A)\vec{y}\big\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = \big((I+A)\vec{y}\big)^T\cdot(I+A)\vec{y} - \vec{y}^T\cdot\vec{y}$$
$$= \vec{y}^T\cdot\big[(I+A)^T\cdot(I+A) - I\big]\cdot\vec{y} = \vec{y}^T\cdot 2E\cdot\vec{y},$$

d.h. $2E$ beschreibt die Längenänderung.

1999 - 03 - 03

1. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(1) Berechnen Sie $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2+1}$. Nach der Substitution $u = \operatorname{sh} v$ werden die Gleichungen $\operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2v)$, $\operatorname{sh} 2v = 2\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v = 2\operatorname{sh} v\sqrt{\operatorname{sh}^2 v+1}$, und $\operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ verwendet.

(2) Berechnen Sie das Integral in Übung (1) numerisch mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$, d.h. $k = 6$, mit der (a) Linksregel, (b) Rechtsregel, (c) Trapezregel, und (d) Simpsonregel.

(3) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $y = 2x-4$ eingeschlossen wird, durch Integration (a) nach x; (b) nach y.

Hinweis zu (a): Unterteilen Sie die Integration bei $x = 1$.

(4) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y = x^2$ und der Ellipsenhälfte $3x^2+y^2 = 4$, $y \geq 0$ eingeschlossen wird.

Hinweis: Substituieren Sie in einem Teil des Integrals $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t$.

(5) Bestimmen Sie das Volumen, das entsteht, wenn die Kurve $y = \mathrm{e}^x$, $0 \leq x \leq 1$, um die $x-$Achse rotiert.

(6) Was ergibt sich in Übung 5, wenn die Kurve um die $y-$Achse rotiert?

Hinweis: Schreiben Sie 1 als Faktor ins Integral.

(7) Berechnen Sie die Bogenlänge L der Kurve $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, numerisch mit der Simpsonregel. Verwenden Sie die Schrittweite $h = \frac{\pi}{6}$!

(8) Bestimmen Sie die Oberfläche des Drehkörpers, der bei Rotation des Hyperbelstükkes $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $1 \leq x \leq 2$, um die $x-$Achse entsteht!

(Z1) (a) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(x)$ der Kurve $y = t^{3/2}$ über dem Intervall $[0, x]$.

(b) Stellen Sie x als Funktion von s dar!

(c) Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$, wenn $\varphi = \arctan y'$ der Winkel der Tangente mit der $x-$Achse ist.

(d) Kontrollieren Sie, daß $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

1999 - 03 - 10

2. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

Stellen Sie bei den uneigentlichen Integralen in den Übungen (9) – (12) fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall! Machen Sie jeweils eine Skizze!

(9) (a) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ (b) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(10) (a) $\int\limits_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ (b) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$

(11) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in]-\pi,\pi[$, $x = 2\arctan t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, oder die Abschätzung $0 < \sin x < x$, $0 < x < 1$.

(12) $\int_0^1 x \arccos x \,\mathrm{d}x$

Hinweis: Dieses Integral wird nach partieller Integration uneigentlich. Die Substitution $x = \sin t$ macht das Integral wieder eigentlich.

(13) Die Euler'sche Gammafunktion ist definiert durch $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, $x > 0$.

Zeigen Sie: (a) $\Gamma(1) = 1$; (b) $\Gamma(3) = 2$; (c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$; (d) $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hinweise: Zu (b,c): partiell integrieren! Zu (d): $n! =$ [Produkt aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n] $= 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. (0!, das "leere Produkt", wird als 1 definiert. Dann ist (a) in (d) enthalten.)

Bemerkung: Das Integral für $\Gamma(x)$ ist ein konvergentes uneigentliches Integral 1. Art, wenn $x \in [1,\infty[$, und ist ein konvergentes uneigentliches Integral 1. und 2. Art, wenn $x \in]0,1[$. Wie könnte man sich das überlegen?

(14) Berechnen Sie zu $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + \mathrm{i}$ jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag, und Argument, sowie $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, $\frac{z}{w}$. Skizze!

(15) Überprüfen Sie für z, w aus Übung (14) die Gleichungen $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ und $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$, $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

(16) Stellen Sie $z = -1.3 - 1.7\,\mathrm{i}$ in der Form $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dar und berechnen Sie damit z^9!

(Z2) Bestimmen Sie (a) $\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$, $a > 0$; (b) $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$

1999 - 03 - 17

3. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(17) Es seien $z_n = \left(1+\dfrac{2\mathrm{i}}{n}\right)^n$ und $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Berechnen Sie $|z-z_n|$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

(18) (a) Schreiben Sie die Zahlen $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $z_2 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ in der Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

(b) Berechnen Sie $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, und $\operatorname{Im} z$ für $z = \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\pi/4}$.

(19) Welche Gestalt haben folgende parametrisierte Kurven für feste $a > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$?
(a) $z(t) = z_0 + t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$, $t \geq 0$; (b) $z(t) = z_0 + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(20) Stellen Sie $\cos^3\varphi$ durch $\cos\varphi$ und $\cos 3\varphi$ dar und berechnen Sie so $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$!

(Vgl. auch Üb. (75d) zu Math. A.)

(21) Berechnen Sie $\int_0^3 \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\sin 2x = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

(22) Stellen Sie $\sin 5\varphi$ als Linearkombination von $\sin^k\varphi$, $k = 1, \ldots, 5$, dar.

Hinweise: $\sin 5\varphi = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\varphi} = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^5 = \operatorname{Im}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^5$; $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$

(23) Lösen Sie die Gleichung $z^2 + (2+4\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$.

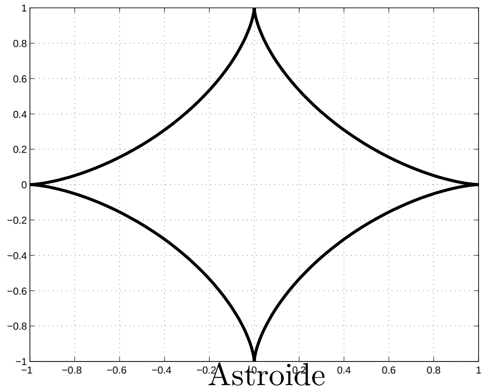
(24) Lösen Sie die Gleichung $z^6 = 7+8\mathrm{i}$. Bestimmen Sie z_0! Wie lassen sich die übrigen Lösungen z_k, $k = 1, \ldots, 5$, durch z_0 ausdrücken? Skizze!

(Z3) Für welche komplexen Zahlen w gilt $\mathrm{e}^w = z$, wenn $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gegeben ist? Folgern Sie $w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$.

1999 - 03 - 24

4. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(25) Die *Astroide* (ἄστρον = Stern) ist durch
$$\vec{x} \;:\; [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;:\; t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$$
gegeben. Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}$, $\|\dot{\vec{x}}\|$, y', $\ddot{\vec{x}}$, κ, und M (a) allgemein, sowie (b) speziell für $t = \frac{\pi}{4}$.



Astroide

(26) (a) Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Astroide.

(b) Parametrisieren Sie den Teil im ersten Quadranten (d.h. $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$) nach der Bogenlänge.

(27) Wenn der Kreis $x^2 + (y-a)^2 \le a^2$ auf der x–Achse ohne Schlupf abrollt, so beschreibt der ursprünglich in $(0, a(1-\lambda))$, $0 < \lambda < 1$, gelegene Punkt R eine *verkürzte Zykloide* oder *Trochoide* (τροχός = Rad).

(a) Zeigen Sie, daß ihre Gleichung durch $\vec{x} = a \begin{pmatrix} t - \lambda \sin t \\ 1 - \lambda \cos t \end{pmatrix}$ gegeben ist.

(b) Berechnen Sie ihre Krümmung für $t = 0$.

(28) Ein Straßenstück beschreibt einen Viertelbogen in der Form einer Klothoide
$$x(s) = \int_0^s \cos \frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad y(s) = \int_0^s \sin \frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad 0 \le s \le S,$$
und hat also im Punkt $\big(x(S), y(S)\big)$ eine senkrechte Tangente, d.h. $\dot{x}(S) = 0$.

(a) Bestimmen Sie a und S so, daß für $s = S$ der Krümmungsradius 10 m beträgt.

(b) Wie lang ist das Straßenstück?

(29) Eine in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegebene Kurve erfüllt $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$, wobei φ die Rolle des Parameters t spielt. Leiten Sie aus dieser Darstellung durch Differenzieren die Formeln (a) für das Bogenelement $\mathrm{d}s = \|\dot{\vec{x}}\|\,\mathrm{d}\varphi$ und (b) für die Krümmung κ her.

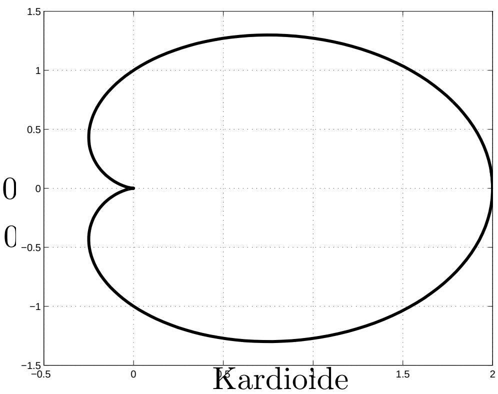
(30) Berechnen Sie den Winkel γ, mit dem die *Fermat'sche Spirale* $r^2 = 4\varphi$, $\varphi \ge 0$, den Einheitskreis schneidet.

(31) Bestimmen Sie die Punkte der *Herzlinie* oder *Kardioide* (καρδία = Herz) $r = 1 + \cos\varphi$ mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

<u>Hinweis:</u> Tangente horizontal $\Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0$

Tangente vertikal $\Leftrightarrow y' = \infty \quad \Rightarrow \dot{x} = 0$

(32) Zeigen Sie, daß für den Krümmungsradius ϱ der Kardioide gilt $\varrho^2 = \frac{8}{9}r$.



Kardioide

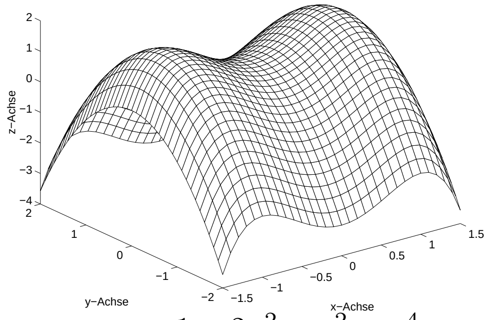
(Z4) Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve nennt man ihre *Evolute.* Zeigen Sie, daß man die Krümmungsmittelpunkte der Zykloide erhält, indem man von P aus in Richtung Q das Doppelte der Länge $\overline{PQ}$ abträgt, und daß die Evolute der Zykloide eine verschobene Zykloide ist.

1999 - 04 - 21

5. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(33) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $z = \dfrac{\sin s}{t^2} + \dfrac{t^2}{s} + s^t$.

(34) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen nach $x, y, z, a,$ und b von $u = f(x, y, z, a, b) = axy - z \arcsin(b + \cos a)$.



$z = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$

(35) Es sei $f(x, y) = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$. Bestimmen Sie die Tangentialebenen an $z = f(x, y)$ (a) in $\vec{x}_0 = \binom{1/2}{1}$, (b) in $\vec{x}_1 = \binom{0}{0}$, (c) in $\vec{x}_2 = \binom{1}{0}$.

(36) In einem Dreieck wurden die zwei Seiten x, y sowie der eingeschlossenen Winkel α gemessen. Es ergab sich $x = 100\,\mathrm{m}$, $y = 200\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30°$. Bestimmen Sie den möglichen Fehler $\mathrm{d}A$ bei der Flächenberechnung $A = \frac{1}{2}xy \sin\alpha = 5\,000\,\mathrm{m}^2$, wenn die Messungen nur auf $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = 0.5\,\mathrm{m}$, sowie $\mathrm{d}\alpha = 1°$ genau sind!

Hinweis: Warum sollte man in Radiant rechnen?

(37) Bei der Verformung eines Kegels vergrößert sich sein Grundkreisradius $r = 30\,\mathrm{cm}$ auf $30.1\,\mathrm{cm}$ und verringert sich seine Höhe h von $60\,\mathrm{cm}$ auf $59.5\,\mathrm{cm}$. Berechnen Sie die exakte Volumenänderung sowie die lineare Näherung $\mathrm{d}V$.

(38) Es sei $z = f(x, y) = xy - y \ln x$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}$
(a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(39) Es seien $z(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^2$, $x(u, v) = u^2v$, $y(u, v) = u + v^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(40) Es seien Funktionen der folgenden Form gegeben: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1(s, t)$, $x_2(t, u)$, $x_3(s)$, $x_4(s, u)$, $u(y, s)$. Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ mit der Kettenregel aus? Skizzieren Sie das "Baumdiagramm"!

(Z5) $p, v,$ und T bezeichnen Druck, Molvolumen, und Temperatur eines Gases, das der Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung $\left(p + \dfrac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$ genügt. ($a, b,$ und R sind Konstanten.)

(a) Berechnen Sie den *thermischen Ausdehnungskoeffizienten* $\alpha = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial T}$ (d.h. die Volumszunahme durch Erwärmung bei konstantem Druck) durch Differenzieren der Zustandsgleichung. (Diese definiert die Funktion $v(p, T)$ "implizit".)

(b) Wie stark dehnt sich das Volumen V von $1\,\ell$ Sauerstoff bei $0°$ und $1\,\mathrm{Atm}$ (= Luftdruck) aus, wenn man die Temperatur um $1°$ erhöht?

Hinweis: $\mathrm{d}V = V \cdot \alpha \cdot \mathrm{d}T$; $a \approx 1.36\,[\mathrm{Atm}\,\ell^2\,\mathrm{Mol}^{-1}]$, $b \approx 0.032\,[\ell\,\mathrm{Mol}^{-1}]$, $v \approx 22.4\,[\ell\,\mathrm{Mol}^{-1}]$, $R = \text{Gaskonstante} \approx 0.083\,[\mathrm{Atm}\,\ell\,\mathrm{grad}^{-1}\mathrm{Mol}^{-1}]$

1999 - 04 - 28

6. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(41) Rechnen Sie $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ in Polarkoordinaten um und überprüfen Sie die Formel am Beispiel $z = f(x, y) = 2xy = 2r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi = r^2 \sin 2\varphi$.

(42) Das elektrische Potential V sei durch $V(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ gegeben. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von V im Punkt $\vec{x}_0^T = (0, -4, 3)$ in Richtung $\vec{r} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie das Ergebnis näherungsweise, indem Sie $V(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für kleines ϵ berechnen, z.B. für $\epsilon = \frac{1}{100}$.

(43) Es seien $F(x, y) = xy$ und die neun Punkte $(i, j),\ i, j \in \{-1, 0, 1\}$ gegeben.

(a) Zeichnen Sie die (drei) Niveaulinien von F, die durch diese Punkte gehen!

(b) Zeichnen Sie die Gradienten in diesen neun Punkten ein!

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F, \binom{1}{1}, \vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$.

(44) Berechnen Sie die Richtungsableitungen von $F(x, y, z) = xy + yz + zx - 1$ in Richtung der Tangentialvektoren an die Kurven (a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$ (b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t^2-t \end{pmatrix}$, d.h. jeweils $\mathrm{RA}\big(F, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)/\|\dot{\vec{x}}(t)\|\big)$, und erklären Sie das Ergebnis in (b).

Hinweis zu (b): Die Kettenregel ergibt $F\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot} = \|\dot{\vec{x}}(t)\| \cdot \mathrm{RA}\big(F, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)/\|\dot{\vec{x}}(t)\|\big)$.

(45) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 3$ im Punkt $(1, 3, -2)$ auf zwei Arten.

(46) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an **die** Niveaufläche von $F(x, y, z) = xy^3 + yz^3 + zx^3$, in der der Punkt $\vec{x}_0^T = (1, -1, 1)$ liegt.

(47) Berechnen Sie $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, und $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ für $z = x^y$.

(48) Berechnen Sie f_x, f_z, f_{xz}, f_{zx}, und f_{zz} für $f(x, y, z) = y \arccos z + \mathrm{sh}(xz)$.

(Z6) In der Niveaufläche $F(x, y, z) = c$ werde jeweils x als Funktion von y, z; y als Funktion von x, z; und z als Funktion von x, y betrachtet. Zeigen Sie, daß dann gilt: $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$

Hinweis: $x\big(y(x, z), z\big) = x$ etc.

1999 - 05 - 05

7. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(49) Zeigen Sie, daß $f(x,y) = x^2 - y^2$ harmonisch ist (a) direkt, (b) in Polarkoordinaten $\big(f(r,\varphi) = r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = r^2\cos 2\varphi\big)$.

(50) Zeigen Sie, daß $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{\|\vec{x}\|}$ (definiert für $\vec{x} \neq \vec{0}$) harmonisch ist.

(51) Rechnen Sie $f_{xx} - f_{yy}$ in Polarkoordinaten um! Verwenden Sie zur Einübung (im Gegensatz zur Vorlesung) Indices zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen.

Hinweis: Leiten Sie wie in der Vorlesung Formeln für $f_{xx}, r_x, \varphi_x, r_{xx}, \varphi_{xx}$ etc. her.

(52) Rechnen Sie Δf für $f(x,y)$ in die Koordinaten $s = x+y$, $t = xy$ um und testen Sie das Ergebnis an $f(x,y) = x^2y + xy^2$!

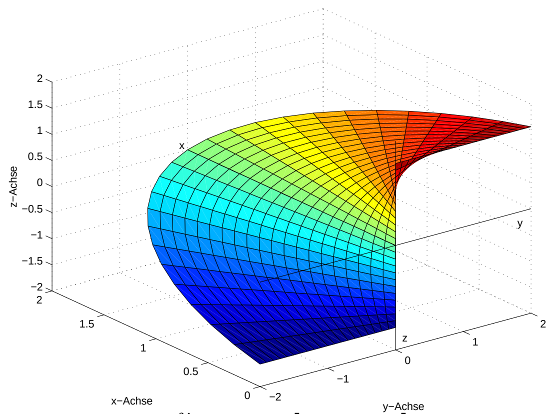
Hinweis: Wenn r, φ durch s, t ersetzt werden, so folgt aus S. 30 der Vorlesung die Formel $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}\cdot\|\nabla s\|^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\cdot\langle\nabla s, \nabla t\rangle + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\|\nabla t\|^2 + \dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\Delta s + \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\Delta t.$

(53) Wenn eine Membran auf dem Kreis $x^2+y^2 = R^2$ eben eingespannt ist und unter der Last $p(x,y)$ [N/m^2] steht, so erfüllt ihre Durchbiegung $f(x,y)$ [m] die Gleichungen $\tau\Delta f = -p$ und $f(\vec{x}) = 0$ für $\|\vec{x}\| = R$. Bestimmen Sie a, b so, daß $f(r,\varphi) = ar^2 + b$ im Fall einer Gleichlast $p =$ konstant. Wie groß ist die maximale Durchbiegung, wenn $\tau =$ Membranspannung $= 1$ [N/m], und Gesamtlast $= p\cdot R^2\pi = 1$ [N]?

(54) Zeigen Sie durch Differenzieren, daß die Wendelfläche $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$, $x > 0$, die *Minimalflächengleichung*

$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$ erfüllt!

Bemerkung: Die Umrechnung auf Polarkoordinaten empfehle ich nur hartgesottenen RechnerInnen!



$z = \arctan\frac{y}{x} = \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ x > 0$

(55) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 + x^2$ am Kreis $x^2+y^2 \leq 1$.

Hinweis: Die Gleichung $f(x,y) = 4x\big((x+\frac{1}{8})^2 + y^2 - \frac{1}{64}\big)$ zeigt, wo f positiv bzw. negativ ist.

(56) Eine oben offene, rechteckige Schachtel soll ein Volumen von $32\,\mathrm{dm}^3$ besitzen. Bestimmen Sie die Maße dieser Schachtel so, daß ihre Oberfläche minimal wird!

(Z7) Die Differentialgleichung der Torsionsfunktion ist $\Delta\psi = -2$.

(a) Zeigen Sie, daß $\psi(r,\varphi) = \dfrac{a}{2}(2R\cos\varphi - r)\left(\dfrac{r}{a} - \dfrac{a}{r}\right)$ eine Lösung dieser Gleichung ist! ($0 < a < R$ sind Konstante und r, φ sind Polarkoordinaten.)

(b) Wo ist $\psi = 0$? (Dies ist die Begrenzungslinie des verdrillten Querschnittes, der hier einer Welle mit halbkreisförmiger Keilnut entspricht.)

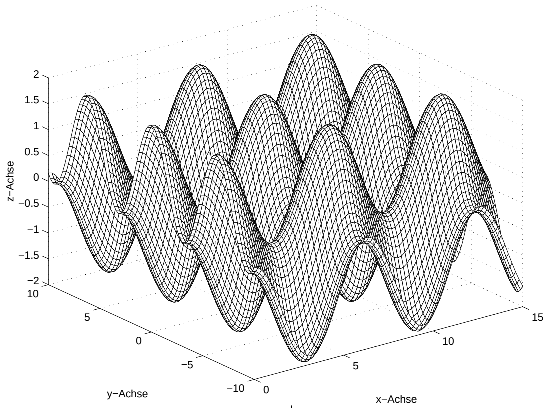
1999 - 05 - 12

8. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(57) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!

(58) Bestimmmen Sie die Extrema und die Sattelpunkte von $f(x,y) = \cos x + \cos y$.

Hinweis: $\cos k\pi = (-1)^k$; unterscheiden Sie für $P_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ die 3 Fälle 1) k, l gerade; 2) k, l ungerade; 3) eines gerade, eines ungerade!



$z = \cos x + \cos y$

(59) Bestimmen Sie die zwei stationären Punkte von $f(x,y,z) = 2x + x\mathrm{e}^{-y^2-z^2} - x^3$ und klassifizieren Sie sie mit dem Hurwitz-Kriterium.

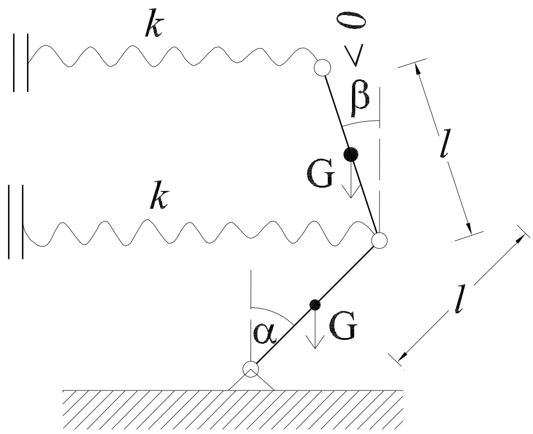
(60) Lösen Sie Übung (56) als Extremwertaufgabe mit einer Nebenbedingung, d.h. bestimmen Sie die Extrema von $xy + 2xz + 2yz$ unter der Nebenbedingung $xyz = 32$.

(61) Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $x + y = 1,\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ mit dem größten bzw. kleinsten Abstand vom Ursprung, indem Sie eine Extremwertaufgabe mit zwei Nebenbedingungen lösen!

(62) Für die gezeichnete Stabkette ist die potentielle Energie durch

$$U(\alpha,\beta) = G\frac{l\cos\alpha}{2} + G\Big(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\Big) + \frac{k}{2}(l\sin\alpha)^2 + \frac{k}{2}(l\sin\alpha + l\sin\beta)^2$$ gegeben.

Die vertikale Gleichgewichtslage ist *stabil* (d.h. knickt nicht aus), wenn U für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum hat, d.h. wenn $\mathrm{H}\,U(0,0)$ positiv definit ist. Wie groß muß $c = kl/G$ sein, damit das der Fall ist?



Stabkette

(Z8) Ein Wassergraben habe einen Querschnitt von der Form eines gleichschenkligen Trapezes mit gegebenem Flächeninhalt F. Bestimmen Sie die Form dieses Trapezes so, daß die Summe der drei benetzten Seiten (und damit die Reibung des strömenden Wassers) ein Minimum wird!

1999 - 05 - 19

9. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(63) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ für das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ \frac{y}{x}\sin z \\ \arctan(x+z) \end{pmatrix}$.

(64) Zeigen Sie (a) $\operatorname{div}(f\vec{v}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{v}\rangle + f\operatorname{div}(\vec{v})$ und (b) $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = \operatorname{grad} f \times \vec{v} + f\operatorname{rot}\vec{v}$ für eine skalare Funktion f und ein Vektorfeld $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

(65) Zeigen Sie $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ für ein Vektorfeld $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

(66) Durch $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} z\cos(xz) \\ 2yz \\ x\cos(xz) + y^2 - 2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, daß $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(67) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß $\vec{v}$ nicht wirbelfrei ist! Versuchen Sie, wie in Aufgabe (66) ein Potential zu bestimmen, und stellen Sie fest, an welcher Stelle der Versuch mißlingt!

(68) Zeigen Sie, daß $\vec{w}(\vec{x}) = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a(y^2+z^2) \\ b(x^2+z^2) \\ c(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ ein Vektorpotential zu

$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist (für konstante a, b, c). Was ist dann $\operatorname{div}\vec{v}$?

(69) Schreiben Sie die Definition der 4 Begriffe “quellenfrei”, “wirbelfrei”, “konservativ” (im unpolitischen Sinn), und “hat ein Vektorpotential” an. Welche Zusammenhänge bestehen?

(70) Wie früher sei $\varphi(x,y) = \begin{cases} (\pi+)\arctan\dfrac{y}{x} & : \pm x > 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & : x = 0,\ \pm y > 0 \end{cases}$. Begründen Sie die folgenden Aussagen!

(a) φ ist an der negativen y–Achse unstetig.

(b) Außerhalb der negativen y–Achse ist $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$.

(c) Wenn im $\mathbb{R}^3$ gerechnet wird, ist $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \\ 0 \end{pmatrix}$ außerhalb der z–Achse definiert und dort $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$.

(d) Wenn $\vec{v}$ ein Potential hätte, müßte es die Form $\varphi + C$ haben und wäre daher nicht überall (außerhalb der z–Achse) differenzierbar.

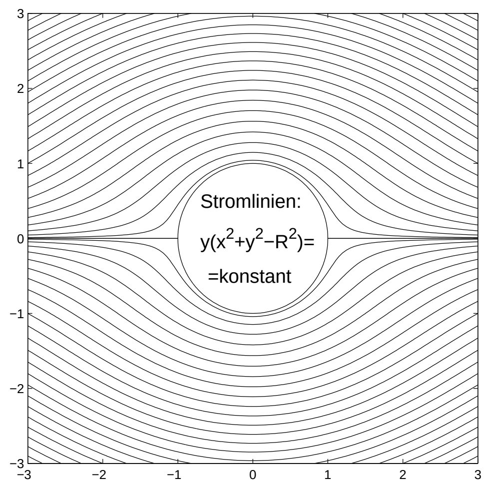
(e) Das ist kein Widerspruch zu Satz 1 in §21 der Vorlesung.

(Z9) Das Potential einer inkompressiblen, wirbelfreien Strömung um den Zylinder $x^2 + y^2 \le R^2$ ist durch $f(x,y,z) = c\left(x + \dfrac{R^2 x}{x^2+y^2}\right)$ gegeben. (c = Grenzgeschwindigkeit in Richtung der x– Achse im Unendlichen.)

(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \operatorname{grad} f$!

(b) Zeigen Sie $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

(c) Skizzieren Sie $\vec{v}$ an der Oberfläche des Zylinders $x^2 + y^2 = R^2$!



Umströmter Zylinder $x^2 + y^2 = R^2,\ R = 1$

1999 - 06 - 02

10. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(71) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ xyz \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}_0)$, $\mathrm{J}\vec{v}$, $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$. Was ist die lineare Näherung von $\vec{v}(\vec{x})$ für $\vec{x} = \vec{x}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(72) Berechnen Sie $\dfrac{\partial(v_1, v_2, v_3)}{\partial(x, y, z)} = \det(\mathrm{J}\vec{v})$ für $\vec{v}$ aus (71). Wie groß ist die Volumsänderung eines kleinen Quaders bei $\vec{x}_0$ unter der Abbildung $\vec{v}$?

(73) Es sei $\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 + y_3^2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, daß $\mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v}) = \mathrm{J}\vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}$.

(74) Zeigen Sie, daß die Kugelkoordinaten $\varrho = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vartheta = \arccos \dfrac{z}{\varrho}$, $\varphi = (\pi +) \arctan \dfrac{y}{x}$ orthogonal sind, indem Sie nachrechnen, daß die Gradienten $\nabla\varrho = \dfrac{\vec{x}}{\varrho}$, $\nabla\vartheta = \dfrac{1}{r\varrho^2} \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$, $\nabla\varphi = \dfrac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) paarweise aufeinander senkrecht stehen.

(75) Berechnen Sie aus den Formeln in Aufgabe (74) $\left| \dfrac{\partial(\varrho, \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} \right|$.

(76) (a) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \vartheta, \varphi)}$ durch Differenzieren aus $x = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = \varrho \cos\vartheta$.
(b) Kontrollieren Sie das Ergebnis mittels Aufgabe (75) und Satz 4 in §21.

(77) Berechnen Sie die Partialsummen sowie die Summe der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots$.
<u>Hinweise:</u> $a_k = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\Big)$; schreiben Sie $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ in der Form $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ an und heben Sie weg!

(78) Bestimmen Sie die Partialsummen s_n und—im Fall der Konvergenz—die Summe S der geometrischen Reihen (a) $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots$; (b) $1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots$; und (c) $1 - 2 + 4 - 8 + - \cdots$.

(Z10) Überlegen Sie, daß sich die Niveauflächen der *Zylinderkoordinaten* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = (\pi +) \arctan \dfrac{y}{x}$, $z = z$ senkrecht schneiden, d.h. daß Zylinderkoordinaten orthogonal sind. Bestimmen Sie auch die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)}$.

1999 - 06 - 09

11. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(79) Zeigen Sie, daß die Reihen (a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-33\sin n}{12\sqrt{n}-17n^2}$ divergieren!

(80) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ konvergiert!

(81) Untersuchen Sie mit dem Integralkriterium, ob die Reihe in Übung (80) konvergiert.

(82) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ und

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3$

Hinweis: Erweitern Sie $(a-b)$ mit $(a+b)$ und verwenden sie das Vergleichskriterium!

(83) Untersuchen Sie mit dem Integralkriterium die Konvergenz der Reihen (a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ und (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. Schätzen Sie in (b) die Summe nach oben ab! (Siehe auch Übung 9).

(84) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n+9\sqrt{n}}{2n^3-1}$.

(85) Zeigen Sie mit dem Integralkriterium, daß $1.0625=\frac{17}{16}\le\zeta(4)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\le\frac{53}{48}\approx 1.104$.

(86) Bestimmen Sie mit dem Integralkriterium die Anzahl der Reihenglieder, die zu summieren sind, um $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ auf 10^{-3} angeben zu können.

(Z11) Zeigen Sie, daß

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Wieviele Reihenglieder sind in der letzten Reihe zu summieren, um S auf 10^{-3} angeben zu können?

Hinweis: Schätzen Sie $\int\limits_N^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$ durch $\int\limits_N^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ ab!

1999 - 06 - 16

12. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(87) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ bedingt konvergent ist! Bis zu welchem n muß man die Reihe summieren, um die Summe der Reihe auf 0.1 genau angeben zu können?

(88) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ absolut konvergiert! Bis zu welchem n muß man die Reihe summieren, um damit die Summe $(= \mathrm{e}^{-1})$ auf 10^{-20} genau berechnen zu können?

(89) Welche Voraussetzungen des Leibnizkriteriums sind für die Reihe $\frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} - \frac{1}{8} + - \cdots$ erfüllt? Welche nicht? Ist die Reihe konvergent?

Hinweis zur letzten Frage: $s_n = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots \pm \frac{1}{n}\right] + \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ oder } \frac{1}{n-1}\right]$

(90) Zeigen Sie: (a) Die Reihe $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ erfüllt $s_2 = \frac{1}{2} < S < \frac{5}{6} = s_3$.

(b) Die daraus durch Umordnung entstandene Reihe $\tilde{S} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + - \cdots$ erfüllt (mit dieser Klammerung) auch das Leibnizkriterium und daher ist $\tilde{s}_2 = \frac{5}{6} < \tilde{S} < \frac{4}{3} = \tilde{s}_1$ und $S \neq \tilde{S}$.

Hinweis zu (b): $\tilde{S}$ hat die Form $\tilde{S} = \cdots - \frac{1}{2k} + \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3}\right) - \frac{1}{2k+2} + \cdots$.

Bemerkung: Bei bedingt konvergenten Reihen kann die Summe durch Umordnung jeden beliebigen Wert annehmen gemäß dem Spruch "*Durch Umordnung kann jede beliebige Unordnung erzeugt werden*".

Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz der folgenden 3 Reihen:

(91) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ (92) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$ (93) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(94) Bestimmen Sie mit dem Quotientenkriterium die Menge der $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -4$, für welche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2x+3}{x+4}\right)^n$ konvergiert!

(Z12) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2} (\operatorname{cth} n - \operatorname{th} n)$ (mit $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$) konvergiert. Überprüfen Sie, daß (bzw. überlegen Sie, warum) diese Reihe in der angegebenen Form mit dem Computer nicht befriedigend angenähert werden kann!

1999 - 06 - 23

13. und letztes Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden vier Potenzreihen:

(95) (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n^2}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(96) (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$

(97) Berechnen Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ und bestimmen Sie ihr Konvergenzintervall M! Was ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ (vgl Üb. 91)?

Hinweis: Differenzieren Sie die geometrische Reihe und multiplizieren Sie sie mit x.

(98) Berechnen Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ und bestimmen Sie ihr Konvergenzintervall M!

(99) Stellen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ durch eine Reihe dar und bestimmen Sie die Summe dieser alternierenden Reihe bis auf 10^{-4}.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ gilt. Dividieren Sie diese Gleichung durch x und integrieren Sie gliedweise!

(100) Entwickeln Sie $f(x) = x^3 - 7x^2 + 5x + 12$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 1$ und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren!

(101) Berechnen Sie die ersten zwei nicht verschwindenden Glieder der MacLaurinreihe von $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

(102) Entwickeln Sie $\ln x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 2$! Was ist das Konvergenzintervall dieser Reihe?

(Z13) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\, dt$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(1)$ auf 10^{-3} genau!

1999 - 06 - 29

Einige zusätzliche Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

(P1) Bestimmen Sie die MacLaurinreihen von $\operatorname{sh} x$ und $\operatorname{ch} x$ aus der MacLaurinreihe für e^x mit den Formeln $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

(P2) Bestimmen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{-n}}{n!} + \frac{n2^n + 3^n}{n6^n} + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$. (Ergebnis: $\sqrt{\mathrm{e}} + \ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$)
Hinweis: Verwenden Sie die Formeln der Vorlesung!

(P3) Berechnen Sie $\cos\frac{1}{10}$ mit der MacLaurinreihe auf 10^{-16} genau!
(Ergebnis: $0.995\,004\,165\,278\,025\,7937 \pm 10^{-16}$)

(P4) Berechnen Sie die ersten drei nicht verschwindenden Glieder der MacLaurinreihe von $f(x) = \tan x$ mit Hilfe der Gleichung $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, d.h. $f' = 1 + f^2$.
(Ergebnis: $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varrho_5(x)$)

(P5) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(\frac{1}{2})$ auf 10^{-5} genau! (Ergebnis: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$, $|x| \le 1$, $f(\frac{1}{2}) = 0.4872258 \pm 10^{-5}$)

(P6) Berechnen Sie statt mit der Regel von l'Hôpital durch Bestimmung der Taylorpolynome (3. Grades in a, b; 4. Grades in c) von Zähler und Nenner und Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varrho_n(x)}{x^n} = 0$ die Grenzwerte (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x^2} - \sin x}{\arctan x - \sin x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 \sin x}{\cos x - \sqrt{1-x^2}}$. (Ergebnis: $-\frac{1}{6}$; -7; 6)

(P7) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen? (Ergebnis: 210)

(P8) Wie wahrscheinlich ist es, im Lotto (a) genau 2 Richtige, (b) keine richtige Zahl zu haben? (Ergebnis: 15.15%; 40.05%)

(P9) Beweisen Sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ mittels der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

(P10) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$ durch Integration der binomischen Reihe auf 10^{-2} genau!
(Ergebnis: 0.914847 ± 0.01; wahrer Wert: $0.9096042...$)

(P11) (a) Zeigen Sie, dass der Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen a und b (mit $a \geq b$) durch $U(\epsilon) = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ gegeben ist, wobei $\epsilon^2 = 1 - (b^2/a^2)$. ($\epsilon$ wird *Exzentrizität* der Ellipse genannt; $U(\epsilon)$ heißt *elliptisches Integral.*)

(b) Nähern sie $U(\epsilon)$ durch ein Polynom 4. Grades in ϵ an!
$\big($Hinweis und Ergebnis: $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ U(\epsilon) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t,\ U(\epsilon) \approx 2a\pi\big(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{3}{64}\epsilon^4\big)\big)$

(P12) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2 y$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und überprüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren! $\big($Ergebnis: $f(x,y) = 2 + 4(x-1) + (y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + (x-1)^2(y-2)\big)$

(P13) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ um $(0,0)$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung! Überprüfen Sie das Ergebnis durch Verwendung der MacLaurinreihen von $\sqrt{1+x}$ und e^x. $\big($Ergebnis: $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{8}(x^2 + 2xy - y^2) + \varrho_2(x,y)\big)$

(P14) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = x\ln(2x-y)$ um $(1,1)$ bis einschließlich zu den Gliedern 3. Ordnung! $\big($Ergebnis: $f(x,y) = 2(x-1) - (y-1) + (x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - 2(x-1)^2(y-1) + \frac{3}{2}(x-1)(y-1)^2 - \frac{1}{3}(y-1)^3 + \varrho_3(x-1, y-1)\big)$

1999 - 04 - 14

1. Klausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Benützen Sie für Rechnungen die angegebenen Näherungswerte.

(1) Ein Grundstück liegt zwischen einer geraden Straße und einem gewundenen Bach. In Abständen von je 10 m wurde senkrecht von der Straße der Abstand d (auch in m) zum Bach gemessen, und es ergab sich:

x	0	10	20	30	40	50	60
d	0	2	3	7	6	3	0

Bestimmen Sie näherungsweise die Größe des Grundstückes (a) mit der Trapezregel, (b) mit der Simpsonregel.

(2) Bestimmen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation der Kurve $y = x\sin x,\ 0 \le x \le \pi$, um die $x-$Achse entsteht!
Hinweis: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;\ \pi^4 \approx 96,\ \pi^2 \approx 10$

(3) Berechnen Sie $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)\ln x}$.
Hinweis: $\ln\frac{3}{2} \approx 0.4$

(4) Stellen Sie $\sin^3\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\sin 3\varphi$ dar und berechnen Sie so $\int_0^\pi \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

(5) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -2 + 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie z_0, z_1, z_2 in der Form $a + \mathrm{i}b$ auf eine Dezimalstelle.
Hinweis: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+2\pi/3)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3};\ \sqrt{3} \approx 1.8$

(6) Parametrisieren Sie die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \arctan t \\ \ln\sqrt{1+t^2} \end{pmatrix},\ t \ge 0$, nach der Bogenlänge!

1999 - 05 - 26

2. Klausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Es sei $z = f(x,y) = \mathrm{e}^{y/x}$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(2) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $x^3 + y^3 + z^3 = 8$ im Punkt $(2, -1, 1)$ auf zwei Arten.

(3) Rechnen Sie f_{xy} in Polarkoordinaten um! (In der Endformel sollten x, y nicht mehr vorkommen.)

(4) Bestimmen und klassifizieren Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$.

(5) Bestimmen Sie die (sechs) Extrema von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + 3y^2 = 4$. (Sie brauchen die Extrema nicht zu klassifizieren.) Hinweis: $\sqrt{32/27} \approx 1.1$

(6) Durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^{-xz} \\ z/y \\ x\mathrm{e}^{-xz} - 2 + \ln y \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld gegeben. Zeigen Sie, daß $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und berechnen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$, d.h. f mit $\nabla f = \vec{v}$.

1999 - 06 - 30

3. Klausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Es sei $\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 - y_1^2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v}) = \mathrm{J}\vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}$.

(2) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{15n^{3/2}+12n}$.

(3) Bestimmen Sie mit dem Integralkriterium die Anzahl der Reihenglieder, die zu summieren sind, um $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ auf 10^{-2} angeben zu können.

(4) Zeigen Sie (mit dem Vergleichs- oder dem Integralkriterium), dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ absolut konvergiert! Bis zu welchem n muß man die Reihe summieren, um damit die Summe $(= -\frac{\pi^2}{12})$ auf 10^{-1} genau berechnen zu können?

(5) Berechnen Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$ und bestimmen Sie ihr Konvergenzintervall M!

(6) Entwickeln Sie $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 3$! (Sie brauchen keine Restgliedabschätzung durchzuführen.)

1999 - 07 - 08

1. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe (bzw. in 13b) eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (7) und (10) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Schreiben Sie die Regeln an, die für $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ bzw. für $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ gelten!

(b) Überprüfen Sie sie an $z_1 = 1+\mathrm{i},\ z_2 = -2+\mathrm{i}$. ($\frac{\pi}{4} \approx 0.78,\ \arctan(-\frac{1}{2}) \approx -0.46,\ \pi \approx 3.14,\ \arctan 3 \approx 1.24$)

(2) (a) Wie lässt sich $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ als Realteil einer e–Potenz schreiben?

(b) Berechnen Sie so $\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

(3) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t),\ t \in [a,b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Zykloide $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi$. (Hinweis: $\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$)

(4) (a) Wie berechnet man die Bogenlänge einer in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegebenen Kurve?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der logarithmischen Spirale $r = \mathrm{e}^{4\varphi/3},\ \varphi \in]-\infty, 0]$.

(5) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x,y)$ in $\vec{x}_0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$?

(6) (a) In welche Richtung weist der Vektor $\nabla F(\vec{x}_0)$ und was ist seine Länge?

(b) Im Punkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gelte $F(\vec{x}_0) = 4$ und $\nabla F(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Niveaufläche $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\vec{x}) = 4\}$ in $\vec{x}_0$ sowie $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$, wenn $\vec{r}$ den Winkel $60°$ mit $\nabla F(\vec{x}_0)$ einschließt.

(7) (a) Wie drückt man f_{xx} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y)$, $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x+y,\ t = x-y$?

(8) (a) Wann heißt die symmetrische $n \times n$–Matrix A positiv definit und wie lässt sich das im Fall $n = 2$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, charakterisieren?

(b) Hat $f(x,y) = (x-y)\cdot(x^2+y^2-1)$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ein lokales Maximum oder Minimum?

(9) (a) Wann heißt f Potential zu $\vec{v}$ und was gilt dann für $\operatorname{rot}\vec{v}$?

(b) Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} z^2/2 \\ -xy \\ xz \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$. Hat $\vec{v}$ ein Potential?

(10) (a) Wie ist die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v_1,\ldots,v_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ definiert?

(b) Rechnen Sie nach, dass $\dfrac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{r}$, wenn r, φ Polarkoordinaten sind.

(11) (a) Schreiben Sie das Vergleichskriterium an!

(b) Untersuchen Sie damit die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{15n^{3/2}+12n}$.

(12) (a) Schreiben Sie das Quotientenkriterium an!

(b) Berechnen Sie damit den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$.

(13) (a) Schreiben Sie die Lagrange'sche Restgliedformel für $\varrho_n(x-x_0)$ an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $x_0 = 0$? Was ist hier $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(x)$?
(Die Antwort auf die letzte Frage müssen Sie nicht begründen. Ein Beweis ergäbe einen Zusatzpunkt.)

(14) (a) Was ist die MacLaurinreihe von $(1+t)^{-1/2}$?

(b) Bestimmen Sie daraus die MacLaurinreihe von arcsin durch Integration!

(15) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ mit ϱ_2?

1999 - 10 - 29

2. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (2) und (7) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie lässt sich $\sin\varphi$ durch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ ausdrücken?

(b) Stellen Sie so $\sin^4\varphi$ durch $1, \cos 2\varphi, \cos 4\varphi$ dar und berechnen Sie $\int_0^\pi \sin^4 x\,\mathrm{d}x$!

(2) (a) Was besagt der Hauptsatz der Algebra von Gauß?

(b) Lösen Sie $z^2 - 4(1-\mathrm{i})z + 1 - 8\mathrm{i} = 0$.

(3) (a) Wann heisst eine Kurve $\vec{x}(s)$, $\alpha \le s \le \beta$, nach der Bogenlänge parametrisiert?

(b) Parametrisieren Sie die Helix $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$, $t \in [0,\infty[$, nach der Bogenlän-
ge!

(4) (a) Was erfüllt der Winkel β zwischen $\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ für eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = r(\varphi)$?

(b) Wie groß ist β bei der logarithmischen Spirale $r(\varphi) = 5\mathrm{e}^{\varphi}$?

(5) (a) Was gibt die Kettenregel für $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, wenn $z(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ gegeben sind?

(b) Berechnen Sie $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ für $z(x,y) = x^3 + 3x^2y$, $x(u,v) = u^2v$, $y(u,v) = u + v^2$ nach (a) und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Einsetzen!

(6) (a) Durch welche Formel ist die Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an die Niveaufläche $F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) = c$ gegeben?

(b) Was ergibt sich für $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\vec{x}) = \ln(xy+z)$?

(7) (a) Wie drückt man f_{yy} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y)$, $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x + y^2,\ t = x - y^2$?

(8) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1),\ g(x,y) = x^2+y^2-4$?

(9) (a) Was sind $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ bzw. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}$?

(b) Bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ z\mathrm{e}^{z^2} \end{pmatrix}$!

(10) (a) Was ist die anschauliche Bedeutung der Funktionaldeterminante?

(b) Vergrößern oder verkleinern die Koordinaten $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^4 \\ \arctan(x-y) \end{pmatrix}$ bei $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Fläche? Um welchen Faktor?

(11) (a) Wie und unter welchen Voraussetzungen lässt sich $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ mit dem Integralkriterium nach unten bzw. oben abschätzen?

(b) Bestimmen Sie damit A, B, sodass $A \leq \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n}{(n^2+1)^2} \leq B$.

(12) (a) Was besagt das Leibnizkriterium?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ auf $\dfrac{1}{500}$ genau! ($\frac{1}{18} = 0.0\dot{5}$)

(13) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \ln x$ und $x_0 = 2$?

(14) (a) Geben Sie die 4 Darstellungen von $\binom{n}{k}$ aus der Vorlesung an! (Kombinatorik, 2 Formeln, Pascal'sches $\triangle$)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen?

(15) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ mit ϱ_2?

2000 - 02 - 01

3. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (4), (9), und (10) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ als Grenzwert definiert und was ergibt die Euler'sche Formel?

(b) Folgern Sie aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ den Summensatz für den Cosinus!

(2) (a) Wie lassen sich die Lösungen $z_0, \ldots, z_{n-1}$ von $z^n = w = \varrho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ in der Form $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ darstellen?

(b) Lösen Sie $z^4 = -16$.

(3) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch $\dot{x}, \dot{y}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Überprüfen Sie (a) für die Ellipse $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$.

(4) (a) Wie ist eine Klothoide charakterisiert?

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Klothoide aus $\kappa = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = as$, $\|\dot{\vec{x}}\| = 1,\ \vec{x}(0) = \vec{0},\ \psi(0) = 0$.

(5) (a) Wann nennt man $f(x,y)$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar?

(b) Was ist $\varrho(\vec{x} - \vec{x}_0)$ für $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2},\ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(6) (a) Was gibt die Kettenregel für $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}\,f\circ\vec{x}}{\mathrm{d}t}$, wenn $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ gegeben sind?

(b) Berechnen Sie mit (a) $\dot{z}$ für $z = f(x,y) = 3xy - 5x^2,\ x(t) = t,\ y(t) = t^2$ und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Einsetzen!

(7) (a) Was sagt der Satz von Schwarz? (b) Kontrollieren Sie ihn für $f(x,y) = x^y$.

(8) (a) Wann heißt die symmetrische $n \times n$–Matrix A positiv definit und wie lässt sich das im Fall $n = 2$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, charakterisieren?

(b) Hat $f(x,y) = (x-y)\cdot(x^2+y^2-1)$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ein lokales Maximum oder Minimum?

(9) (a) Wann nennt man $\vec{v}(\vec{x})$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar und wie lässt sich das mit der Jacobi-Matrix $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und einem Vektorfeld $\vec{\varrho}(\vec{h})$ vom Typ $o(\|\vec{h}\|)$ charakterisieren?

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und $\vec{\varrho}(\vec{x}-\vec{x}_0)$ zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(10) (a) Wann heißen die Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$ orthogonal?

(b) Wie sind die Kugelkoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ definiert? Skizze!

(11) (a) Was gilt für $\lim a_n$, wenn $\sum a_n$ konvergiert? Ist das ein notwendiges oder hinreichendes Kriterium?

(b) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe divergiert!

(12) (a) Was besagt das Leibnizkriterium?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ auf $\frac{1}{500}$ genau! ($\frac{1}{18} = 0.0\dot{5}$; zur MacLaurinreihe des Sinus vgl. Frage 14 b)

(13) (a) Wie ist das Konvergenzintervall einer Potenzreihe $\sum c_n x^n$ definiert?

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$.

(14) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$?

(15) (a) Schreiben Sie die binomische Reihe für $(1+x)^\nu$ an!

(b) Bestimmen Sie $\binom{-1/2}{k}$ und daraus die MacLaurinreihe von $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

2002 - 07 - 10

1. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 2002

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (2), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welcher Satz gilt für inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung? Was bedeutet der Begriff "partikuläre Lösung"?

(b) Überprüfen Sie, dass $2x^{3/2}$ eine partikuläre Lösung von

$y'' + 2y' + 5y = 10x^{3/2} + 6\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ ist, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung!

(2) (a) Welchen Ansatz macht man für x_p bei der inhomogenen Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)$?

(b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ϑ_0 aus $x_{\text{st}} = A\sin(\vartheta t - \alpha)$,

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}}.$$

(3) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t),\ t \in [a,b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Helix $\vec{x} : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix}$.

(4) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x,y)$ in $\vec{x}_0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$?

(5) (a) Wie ist die Richtungsableitung $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ definiert und wie wird sie durch $\|\nabla F(\vec{x}_0)\|$ und $\angle(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r})$ dargestellt? (für $\|\vec{r}\| = 1$; $\angle =$ "Winkel")

(b) Was ist $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für $F(x,y,z) = y\,\mathrm{e}^{xy} + 2\tan z,\ \vec{x}_0 = \vec{0},\ \vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$?

In welcher Richtung wächst F am stärksten?

(6) (a) Was sagt der Satz von Schwarz? (b) Kontrollieren Sie ihn für $f(x,y) = x^y$.

(7) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Wieviele stationäre Punkte hat $f(x,y) = x^2y - y$? Wieviele Extrema?

(8) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Leiten Sie die Formel in (a) her! (Hinweis: $\vec{0} = \vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0 + (\vec{x} - \vec{x}_0)) \approx \ldots$)

(9) (a) Wann heißen die Koordinaten $v_1, \dots, v_n$ orthogonal?

(b) Wie berechnet man x, y, z aus den Kugelkoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$? Skizze!

(10) (a) Schreiben Sie das Vergleichskriterium an!

(b) Untersuchen Sie damit, ob $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert!

(11) (a) Für welche p konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n$ und was ergibt sie dann?

(b) Bestimmen Sie die MacLaurinreihe von $\arctan x$ durch Integration der geometrischen Reihe. (Setzen Sie $p = -x^2$!) Was ist der Konvergenzradius?

(12) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \operatorname{sh} x$ und $x_0 = 0$? Was ist der Konvergenzradius?

(13) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x, y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x, y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$ mit ϱ_2?

(14) (a) Was sagt der Satz von Fubini?

(b) Berechnen Sie $S_y = \iint_D x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ für den Viertelkreis $D : x^2 + y^2 \le 1,\ x, y \ge 0$.

(15) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Berechnen Sie so das Trägheitsmoment I_y für D aus (14) (b)!

2002 - 10 - 25

2. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 2002

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (1), (2), (6) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie stellt man $y_{\mathrm{hom}} = C_1 \mathrm{e}^{ax} \sin bx + C_2 \mathrm{e}^{ax} \cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Was ergibt sich speziell für $C_1 = C_2 = -2,\ a = 3,\ b = 4$? ($\sqrt{8} \approx 2.8$)

(2) (a) Wir betrachten die Differentialgleichung $y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + d_1 y' + d_0 y = g(x)$, wobei $g(x)$ nur aus Polynomen, e^{cx}, $\sin cx$, $\cos cx$ besteht. Welchen Ansatz macht man für y_{p} und was tut man im "Resonanzfall"?

(b) Was ist der Ansatz für y_{p}, wenn $y_{\mathrm{hom}} = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} \sin 3x + C_3 \mathrm{e}^{-x} \cos 3x$ und $g(x) = 4\mathrm{e}^{-x} \cos 2x + 3x^2 + 2\mathrm{e}^{x}$?

(3) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch $\dot{x}, \dot{y}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Drücken Sie mittels (a) $\kappa = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ durch $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ aus!

(4) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ durch $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ aus, wenn r, φ Polarkoordinaten sind?

(b) Was ergibt sich für $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$, wenn $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2,\ r = 3,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$?

(5) (a) Wie bestimmt man die Tangentialebene an die Niveaufläche $M_c = \{\vec{x} \in D : F(\vec{x}) = c\}$ in $\vec{x}_0 \in M_c$?

(b) Was ergibt sich für $F(\vec{x}) = 6\sqrt[3]{x} \cos y - \ln(3z + \mathrm{e}^{y^2})$, $c = 11$ und $\vec{x}_0 = (8, 0, 0)^T$?

(6) (a) Wie drückt man f_{xx} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y)$, $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x - y,\ t = y^2$?

(7) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x,y,z) = xy + 2z(x+y)$ und $g(x,y,z) = xyz - 32$?

(8) (a) Wie sind die Begriffe "$\vec{v}$ ist wirbelfrei" und "$\vec{v}$ hat ein Potential" definiert? Welcher Zusammenhang gilt?

(b) Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} z + y\cos(xy) \\ x\cos(xy) \\ x \end{pmatrix}$. Ist $\vec{v}$ wirbelfrei? Hat es ein Potential?

(9) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Was ist speziell $\vec{x}_1$, wenn $\vec{x}_0 = \vec{0}$ und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2\tan y \\ \arctan(\mathrm{e}^{6x} + \sin 8y) \end{pmatrix}$? (Hinweis: $\frac{\pi}{8} \approx 0.4$)

(10) (a) Schreiben Sie das Quotientenkriterium an!

(b) Berechnen Sie damit den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}\, x^n$.

(11) (a) Schreiben Sie die Lagrange'sche Restgliedformel für $\varrho_n(x - x_0)$ an!

(b) Was ergibt sich speziell für $\varrho_2(x)$, wenn $f = \sin$, $x_0 = 0$?

(12) (a) Was ist $\binom{\nu}{k}$ und was ist die MacLaurinreihe von $(1+x)^\nu$, $\nu \in \mathbb{R}$ fest?

(b) Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^4 in der MacLaurinreihe von $\sqrt[3]{(1+x)^4}$. ($3^{-5} \approx 0.004$)

(13) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$ mit ϱ_2?

(14) (a) Wie sind die statischen Momente S_x, S_y definiert und wie hängen sie mit dem Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$ zusammen?

(b) Bestimmen Sie S_y und s_1 zu $D: 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \cos x$, wenn für die Dichte gilt $\varrho(x,y) = 1$.

(15) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Berechnen Sie so das Trägheitsmoment $I_y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für den Viertelkreis $D:\ x^2 + y^2 \le 1,\ x, y \ge 0$.

2003 - 01 - 17

3. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 2002

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11), (12), (14) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welche reellen Lösungen hat die homogene Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = 0$ im Schwingfall $r^2 < 4cm$?

(b) Was ergibt sich für $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0$ und welche Form hat die Lösung angeschrieben mit Phasenverschiebung?

(2) (a) Bei welcher Frequenz ϑ hat die ungedämpfte Schwingungsgleichung $m\ddot{x}+cx = F_0 \sin(\vartheta t)$ Resonanz?

(b) Lösen Sie $m\ddot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)$ im Resonanzfall!

(3) (a) Wie berechnet man die Bogenlänge einer in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegebenen Kurve?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Spirale $r = \varphi^2,\ 0 \le \varphi \le \pi$! $((\pi^2 + 4)^{3/2} \approx 51.5)$

(4) (a) Wann nennt man $f(x, y)$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar?

(b) Was ist $\varrho(\vec{x} - \vec{x}_0)$ für $f(x, y) = \sin(x + 2\arctan y),\ \vec{x}_0 = \vec{0},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(5) (a) Was ergibt die Kettenregel für $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, wenn $z(x, y),\ x(u, v),\ y(u, v)$ gegeben sind?

(b) Überprüfen Sie (a) für $z = \arcsin \frac{y}{x},\ y = v \sin u$ und $x = v$ (wobei $|u| \le \frac{\pi}{2}$, $v \ne 0$).

(6) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Besitzt $f(\vec{x}) = xy+x^3+y^3,\ \vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, ($\alpha$) in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ bzw. (β) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{1}$ Extrema?

(7) (a) Was sind $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ bzw. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$?

(b) Bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ z e^{z^2} \end{pmatrix}$!

(8) (a) Wie ist die Jacobi-Matrix der differenzierbaren Abbildung $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$,

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, definiert?

(b) Geben Sie die lineare Approximation von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix}$ bei $\vec{x}_0 = (1,1,1)^T$ an!

(9) (a) Was besagt das Leibnizkriterium?

(b) Berechnen Sie damit $\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ auf $\frac{1}{300}$ genau! $(\frac{11}{24} \approx 0.46)$

(10) (a) Wie ist der Konvergenzradius R einer Potenzreihe definiert?

(b) Berechnen Sie R für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n2^n}$.

(11) (a) Schreiben Sie die Lagrange'sche Restgliedformel für $\varrho_n(x-x_0)$ an!

(b) Was ergibt sich speziell für $\varrho_2(x)$, wenn $f = \sin$, $x_0 = 0$?

(12) (a) Geben Sie die 4 Darstellungen von $\binom{n}{k}$ aus der Vorlesung an! (Kombinatorik, 2 Formeln, Pascal'sches $\triangle$)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen?

(13) (a) Was ist $\ddot{g}_{\vec{r}}(0)$ für $g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r})$?

(b) Schreiben Sie den Beginn der Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0 = \binom{1}{2}$ an, wenn $f(1,2) = 3$, $\nabla f(1,2) = \binom{4}{5}$ und $\mathrm{H}f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$!

(14) (a) Was sagt der Satz von Fubini?

(b) Bestimmen Sie das statische Moment S_x für den Viertelkreis $D: x^2+y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$.

(15) (a) Wie ist das Trägheitsmoment I_g des mit der Dichte ϱ belegten Gebietes $D \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Geraden $g: a_1x + a_2y = b$ definiert?

(b) Berechnen Sie I_x für $\varrho(x,y) = x+y$ und $D: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \mathrm{e}^x$. $(\frac{2\mathrm{e}^3+1}{27} + \frac{\mathrm{e}^4-1}{16} \approx 4.9)$

Übungsaufgaben zu Höherer Analysis, WS 2002/03

Aufgaben zu Doppelintegralen.

(A1) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Gebietes $0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \cos x$.
(Antwort: $\vec{s} = (\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8})$)

(A2) Berechnen Sie die folgenden Integrale und skizzieren Sie das Gebiet D, über das integriert wird:

(a) $\displaystyle\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=0}^{y} \frac{y}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (b) $\displaystyle\int\limits_{x=0}^{\pi} \int\limits_{y=-x}^{\pi-x} \sin^2 x \cos^2 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} y\,\mathrm{e}^{xy} \cos xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (Antwort: $1, \frac{\pi^2}{4}, \frac{1}{2}(\mathrm{e}\sin 1 - 1)$)

(A3) Das Volumen V des Körpers, der über dem Viertelkreis $D: x^2 + y^2 \le 1,\ x, y \ge 0$ liegt und von der Sattelfläche $z = xy$ begrenzt wird, ist durch $V = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gegeben. Berechnen Sie V (a) in xy–Koordinaten, (b) in Polarkoordinaten. (Antwort: $V = \frac{1}{8}$)

Aufgaben zum Koordinatenwechsel in Doppelintegralen.

(B1) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Kardioide, die in Polarkoordinaten durch $r \le 1 + \cos\varphi$ gegeben ist. (Antwort: $\vec{s} = (\frac{5}{6}, 0)$)

(B2) Skizzieren Sie das Flächenstück, das in Polarkoordinaten durch die Kurven $r = 1$, $r = 2$, $r = \varphi$, $r = \mathrm{e}^{\varphi}$ begrenzt wird und ermitteln Sie seine Größe. (Antwort: $\frac{37}{12} - 2\ln 2 \approx 1.7$)

(B3) D sei das Dreieck mit den Eckpunkten $(0/0),\ (0/1),\ (1/0)$. Berechnen Sie $\displaystyle\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, indem Sie $u = x - y,\ v = x + y$ substituieren. (Antwort: $\frac{1}{2}\sin 1 \approx 0.42$)

(B4) Berechnen Sie die Fläche der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ mit der Koordinatentransformation $x = as\cos t,\ y = bs\sin t$. (Antwort: $ab\pi$)

(B5) Berechnen Sie die von der Astroide $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ (vgl. Skriptum Math. B, Üb. 25) eingeschlossene Fläche mit der Koordinatentransformation $x = \rho\cos^3\psi$, $y = \rho\sin^3\psi$. (Antwort: $3\pi/8$)

Aufgaben zur Guldinschen Regel.

(C1) Berechnen Sie mit der Guldinschen Regel den Schwerpunkt des Viertelkreises $x^2 + y^2 \le R,\ x, y \ge 0$! (Antwort: $\vec{s} = (\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$)

(C2) Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0/0/0),\ (1/0/0),\ (1/0/1)$ um die z–Achse entsteht

(a) als Doppelintegral, (b) mit der Guldinschen Regel, (c) als Differenz von Zylinder- und Kegelvolumen. (Antwort: $\frac{2\pi}{3}$)

(C3) Berechnen Sie (a) den Schwerpunkt des Kreissegmentes $x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq a,$ $y \geq 0$ $(0 < a < 1$ fest) und damit (b) das Volumen der Kugelkappe, welche durch Rotation um die $x-$Achse entsteht. (Antwort: $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2} - \frac{1}{2}\arcsin a,$ $\vec{s} = \frac{1}{A}(\frac{1}{3}(1-a^2)^{3/2}, \frac{1}{6}(2-3a+a^3)),\ V = \frac{\pi}{3}(2-3a+a^3))$

(C4) Wenn der Halbkreis $(x-2)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 2$ um die $y-$Achse rotiert, so entsteht ein "halber Torus". (Skizze!) Bestimmen Sie mit der Guldinschen Regel sein Volumen! (Antwort: $V \approx 23.93$)

Aufgaben zu Dreifachintegralen.

(D1) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_1 bezüglich der $x-$Achse für den durch die 3 Koordinatenebenen und $x + y + z = 1$ begrenzten Tetraeder, wenn die Dichte $\rho = 1$ ist. (Antwort: $\frac{1}{30}$)

(D2) Berechnen Sie die Masse des Pyramidenstumpfes (Skizze!), der von den Ebenen $y = 1,\ y = 2,\ z = 0,\ x = y,\ z = x$ begrenzt wird und mit der Dichte $\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2}$ belegt ist! (Antwort: $\frac{1}{2}\ln 2$)

(D3) Berechnen Sie die Masse des Körpers im ersten Oktanten, der durch die Ebenen $y = 0,\ z = 0,\ x+y = 2,\ 2y+x = 6$ aus dem Zylinder $y^2 + z^2 \leq 4$ ausgeschnitten wird (Skizze!) und mit der Dichte $\rho(x, y, z) = z$ belegt ist. (Antwort: $\frac{26}{3}$)

Dreifachintegrale in Kugel- und Zylinderkoordinaten.

(E1) Berechnen Sie den Schwerpunkt des homogen mit Masse belegten Körpers, der als Schnitt der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ mit dem Kegel $x_1^2 + x_2^2 \leq a^2x_3^2,\ x_3 \geq 0,$ entsteht. (Antwort: $\vec{s} = (0, 0, \frac{3Ra^2}{8(1+a^2-\sqrt{1+a^2})})$)

(E2) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment I_1 für die Halbkugel $D: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2,$ $x_3 \geq 0,$ welche mit der Dichte $\rho(\vec{x}) = x_3$ belegt ist. (Antwort: $\frac{\pi}{8}R^6$)

(E3) Eine Halbkugelschale mit Innenradius R ist bis zur halben Höhe mit Wasser gefüllt. Welche Wassermenge enthält sie?

Hinweis: Verwenden Sie Zylinder- oder Kugelkoordinaten! (Antwort: $\frac{5\pi}{24}R^3$)

(E4) Berechnen Sie das Volumen, das innerhalb des Zylinders $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ und der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ liegt! Skizze! Verwenden Sie Zylinderkoordinaten! (Antwort: $V \approx 9.644a^3$)

Aufgaben zum Koordinatenwechsel in Dreifachintegralen.

(F1) Berechnen Sie das Volumen des Körpers im 1. Oktanten, der von den hyperbolischen Zylindern $xy = 1,\ xy = 9,\ xz = 4,\ xz = 36,\ yz = 25,\ yz = 49$ begrenzt wird. Setzen Sie $u = xy,\ v = xz,\ w = yz.$ (Antwort: $V = 64$)

(F2) Es sei $0 < r < R$. Durch Drehung des in der $yz-$Ebene liegenden Kreises $(y-R)^2 + z^2 \leq r^2$ um die $z-$Achse entsteht ein Torus. (Skizze!) Der Kreis wird parametrisiert durch $y = R + \varrho\sin\alpha,\ z = \varrho\cos\alpha,\ 0 \leq \varrho \leq r,\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (Skizze!) und daher der Torus durch die "Toruskoordinaten" $x = (R+\varrho\sin\alpha)\cos\varphi,\ y = (R+\varrho\sin\alpha)\sin\varphi,\ z = \varrho\cos\alpha.$

(a) Bestimmen Sie das Volumselement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ bzgl. ϱ, α, φ.

(b) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Torushälfte $0 \leq \varphi \leq \pi$, d.h. $y \geq 0$. (Antwort: $\mathrm{d}V = \varrho(R+\varrho\sin\alpha)\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,\ \vec{s} = (0, \frac{2R}{\pi} + \frac{r^2}{2R\pi}, 0)$)

(F3) Berechnen Sie das Volumen, das von der Fläche $|x|^{2/3}+|y|^{2/3}+|z|^{2/3}=c$ (mit $c>0$ fest) eingeschlossen wird, mittels der Substitution $x=\varrho\sin^3\vartheta\cos^3\varphi,\ y=\varrho\sin^3\vartheta\sin^3\varphi,\ z=\varrho\cos^3\vartheta$. (Antwort: $\frac{4}{35}\pi c^{9/2}$)

Aufgaben zu Kurvenintegralen 1. Art.

(G1) Berechnen Sie den Schwerpunkt des folgenden Teils einer Schraubenlinie: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le c$ $(a,b,c>0$ fest).

(Antwort: $\vec{s}=(\frac{a}{c}\sin c,\frac{a}{c}(1-\cos c),\frac{1}{2}bc))$

(G2) Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_x,I_y des Halbkreises $x^2+y^2=r^2,\ y\ge 0$, bezüglich der $x-$ und der $y-$Achse. (Antwort: $I_x=\frac{\pi}{2}r^3=I_y$)

(G3) Der halbkreisförmige Träger $C:\ x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0<r$ fest, wird durch die vertikale Linienlast $q(\varphi)=q_0\varphi$ beansprucht. Bestimmen Sie die Resultierende R und ihre Wirkungslinie, d.h. $R=\int_C q\,\mathrm{d}s,\ x_W=R^{-1}\int_C q\cdot x\,\mathrm{d}s,\ y_W=R^{-1}\int_C q\cdot y\,\mathrm{d}s$. (Antwort: $R=\frac{\pi^2}{2}q_0 r,\ x_W=-\frac{4}{\pi^2}r,\ y_W=\frac{2}{\pi}r$)

(G4) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Zykloidenbogens $\vec{x}(t)=a\binom{t-\sin t}{1-\cos t},\ 0<a$ fest, $0\le t\le 2\pi$. (Antwort: $\vec{s}=(a\pi,\frac{4}{3}a))$

Kurvenintegrale 2. Art und Potential.

(H1) Durch $\vec{v}(\vec{x})=\begin{pmatrix} y\\ x\\ -2z\end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ wirbelfrei ist und bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v}$.

(b) Berechnen Sie $W=\int\limits_{(1/0/-1)}^{(2/2/0)}\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle$ entlang der Verbindungsgeraden der 2 Punkte und kontrollieren Sie das Ergebnis mittels (a).

(Antwort: $f(\vec{x})=xy-z^2,\ W=5$)

(H2) Berechnen Sie $\int_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$

(a) entlang der Schraubenlinie $\vec{x}(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi,\varphi),\ 0\le\varphi\le\pi$, und

(b) entlang der Verbindungsgeraden der 2 Punkte $A=(1/0/0)$ und $B=(-1/0/\pi)$.

(c) Warum ergibt sich etwas Verschiedenes, obwohl die 2 Kurven beide von A nach B gehen?
(Antwort: $-2-\frac{\pi}{2},0,\operatorname{rot}\vec{v}\ne\vec{0}$)

(H3) Berechnen Sie die Arbeit, die geleistet wird, wenn ein Körper unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{v}=(-x^2y,y^2z,xz^2)^T$ um die Ellipse $x^2+y^2=1,\ z=y$ transportiert wird. (Antwort: $\pm\frac{\pi}{2}$ je nach Umlaufrichtung)

(H4) Zeigen Sie, dass $\vec{v}(\vec{x})=(4xyz+3x^2y^2z^2,2x^2z+2x^3yz^2,2x^2y+2x^3y^2z)^T$ wirbelfrei ist und bestimmen Sie ein Potential f durch $f(\vec{x})=\int_{(0/0/0)}^{\vec{x}}\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle$.
(Antwort: $f(\vec{x})=2x^2yz+x^3y^2z^2$)

Aufgaben zu Oberflächenintegralen 1. Art.

(I1) Berechnen Sie die Oberfläche des über bzw. unter dem Einheitskreis liegenden Teiles der Sattelfläche $z = xy$. (Antwort: $F = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1.22\pi$)

(I2) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkugeloberfläche $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0$. (Antwort: $\vec{s} = (0, 0, \frac{R}{2})$)

(I3) Bestimmen Sie die Oberfläche und den Schwerpunkt der Paraboloidfläche $z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 1$. (Antwort: $F \approx 5.33,\ s_3 \approx 0.559$)

(I4) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment der Paraboloidfläche $z = 2 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$ bezüglich der $z-$Achse. (Antwort: $I_z = \frac{149}{30}\pi$)

(I5) Bestimmen Sie die Größe des Teiles der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, der innerhalb des Zylinders $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ liegt (vgl. auch Aufgabe E4).

(Antwort: $8a^2(\pi - 2)$)

(I6) (a) Zeigen Sie, dass für das Flächenelement einer Fläche in Zylinderkoordinaten, d.h. $\vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix}$ gilt $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{r^2 + r^2\Big(\dfrac{\partial z}{\partial r}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\Big)^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$.

(b) Berechnen Sie damit den Flächeninhalt der Schraubenfläche $z = \varphi,\ 0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq b$, $(0 < a, b$ fest$)$. (Antwort: $F = \frac{b}{2}(a\sqrt{1+a^2} + \operatorname{arsh} a)$)

Oberflächenintegrale 2. Art.

(J1) Berechnen Sie $\iint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$ für $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{u}$, $\vec{u} = (2z - 2y, 2x - z, y - 2z)^T$. D sei dabei die Ellipsoidhälfte $x = \sin\vartheta \cos\varphi, y = \sin\vartheta \sin\varphi, z = 2\cos\vartheta$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Die Normale weise nach oben, d.h. $n_3 \ge 0$. (Antwort: 4π)

(J2) Berechnen Sie $\iint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$ für $\vec{v}(\vec{x}) = (x, 2y, 2 - 3z)^T$. Dabei sei D die Paraboloidfläche $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$. Die Normale $\vec{n}$ weise nach oben, d.h. $n_3 \ge 0$. (Antwort: 2π)

(J3) Das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung sei $\vec{v}(t, \vec{x}) = (tx, t+y, tz)^T$. Es sei $\varrho = 1$. Bestimmen Sie den Fluß zur Zeit t durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(1/0/0)$, $(0/1/0)$, $(0/0/1)$. Die Normale weise in Richtung $(1, 1, 1)^T$. (Antwort: $\frac{1}{6}(5t + 1)$)

(J4) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ den Fluss durch den Zylindermantel $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$. (Antwort: 2π)

(J5) D sei die Hyperboloidfläche $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \le z \le 1$. (Skizze!) Berechnen Sie $\iint_D \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$, wenn $\vec{n}$ so gewählt ist, dass $\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle > 0$. (Antwort: 2π)

Aufgaben zum Satz von Gauß.

(K1) Lösen Sie Aufgabe J1 mit dem Satz von Gauß. (Schließen Sie dazu die Fläche D durch den Kreis $D_1 : x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$ ab!)

(K2) Lösen Sie Aufgabe J2 mit dem Satz von Gauß. (Hinweis wie in Aufgabe K1.)

(K3) Lösen Sie Aufgabe J3 mit dem Satz von Gauß. (Ergänzen Sie die Fläche zu einem Tetraeder!)

(K4) Lösen Sie Aufgabe J5 mit dem Satz von Gauß. (Schließen Sie die Fläche D durch 2 Kreise ab!)

(K5) Berechnen Sie $\oiint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$, wobei $\vec{v} = (x^2 - xy, 2yz - 3y, z - x^2)^T$ und D die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt $(1/2/3)$ und Radius 2 ist mit dem Satz von Gauß. (Verwenden Sie die Tatsache, dass der Mittelpunkt einer Kugel auch ihr Schwerpunkt ist!) (Antwort: $\frac{128\pi}{3}$)

(K6) Berechnen Sie $\oiint x^3 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ über die Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ direkt und überprüfen Sie das Ergebnis mit dem Satz von Gauß. (Antwort: $\frac{12}{5} R^5 \pi$)

(K7) Das "archimedische Prinzip" besagt, dass der Auftrieb eines in einer Flüssigkeit befindlichen Körpers gleich dem Gewicht der verdrängten Wassermenge ist. Beweisen Sie das mit dem Satz von Gauß.
Hinweis: Der Wasserdruck ist $p = \gamma(h - z)$, h = Höhe des Flüssigkeitsstandes, γ = spezifisches Gewicht der Flüssigkeit, und wirkt normal zur Oberfläche des Körpers, d.h.

$$\text{Auftrieb} = -\oiint p n_3 \, \mathrm{d}\sigma = -\oiint \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}\sigma.$$

Aufgaben zum Satz von Green.

(L1) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Greenschen Satzes am Integral $\oint_C (2xy - x^2) \, \mathrm{d}x + (x + y^2) \, \mathrm{d}y$, wobei C der durch $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, und $x = y^2$, $0 \le y \le 1$, im positivem Drehsinn durchlaufene Weg ist. (Antwort: $\frac{1}{30}$)

(L2) Berechnen Sie mit dem Satz von Green $\oint_C y^3 \cos x \,\mathrm{d}x + 3y^2(\sin x - x)\,\mathrm{d}y$ über die geschlossene Kurve C, welche die Punkte $(0/0)$ und $(1/0)$ durch $y = x\sqrt{1-x^2}$ und die $x-$Achse verbindet. C werde im “positiven” Sinn (d.h. so wie $\vec{e}_1, \vec{e}_2 =$üblicherweise Gegenuhrzeigersinn) orientiert. (Antwort: $-\frac{2}{35}$)

Aufgaben zum Satz von Stokes.

(M1) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Stokes für $\vec{v} = (3y, -xz, yz^2)^T$ und die Fläche $D : 2z = x^2 + y^2,\ z \leq 2$. (Antwort: -20π, wenn $n_3 > 0$)

(M2) Bestimmen Sie die Differenz der zwei Kurvenintegrale in Aufgabe H2 mit dem Satz von Stokes unter Verwendung der Fläche $\vec{x}(\varphi, t) = ((1-t)(1-\frac{2\varphi}{\pi}) + t\cos\varphi, t\sin\varphi, \varphi)^T$, $0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq t \leq 1$.

(M3) Lösen Sie Aufgabe H3 mit dem Satz von Stokes.

(M4) Lösen Sie Aufgabe J1 mit dem Satz von Stokes.

(M5) Lösen Sie Aufgabe J2 mit dem Satz von Stokes.

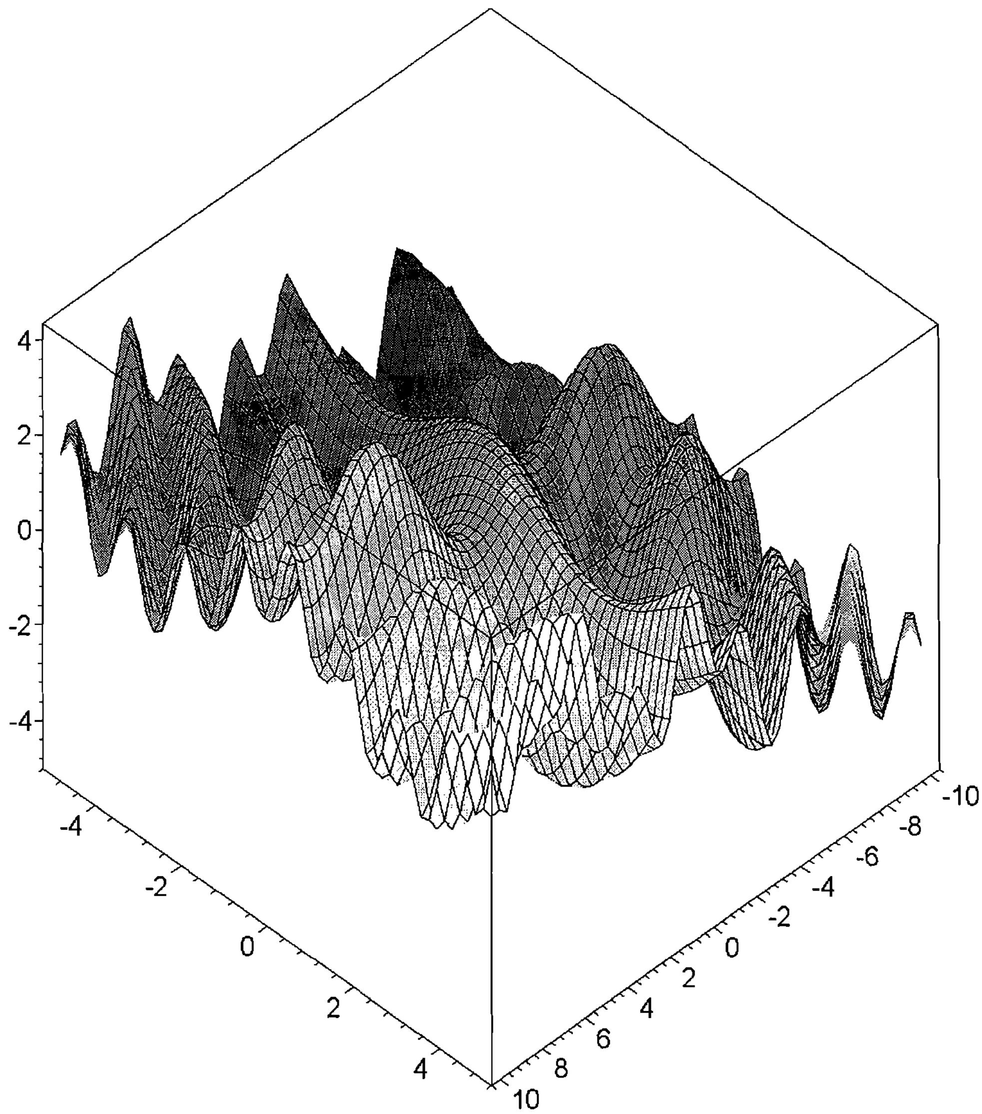
(M6) C sei der Rand des Flächenstückes $x^2 + y^2 = 1,\ z^2 \leq 2y,\ x, y, z \geq 0$ (Skizze!), und $\vec{v} = (x^2, xy, xz)^T$. C werde von $(1/0/0)$ über $(0/1/0)$ nach $(0/1/\sqrt{2})$ und zurück nach $(1/0/0)$ durchlaufen. Bestimmen Sie $\oint_C \langle \vec{u}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$ mit dem Satz von Stokes. (Antwort: $-\frac{\pi}{4}$)

Newton-Verfahren in mehreren Variablen, Bsp. 3.5:

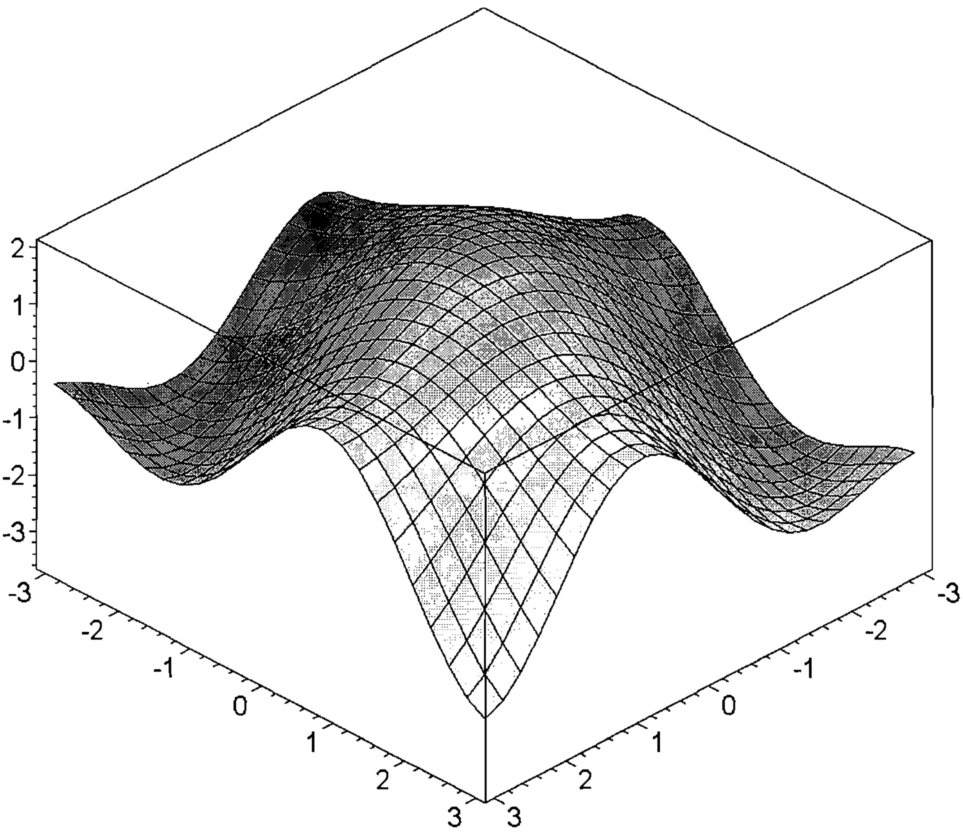
```
> f:=(x,y)->cos(x)+cos(y)+sin(1/2*x*y)+x/5;
```

$$f := (x, y) \to \cos(x) + \cos(y) + \sin\left(\frac{1}{2}\,x\,y\right) + \frac{1}{5}\,x$$

```
> plot3d([x,y,f(x,y)],x=-10..10,y=-5..5,numpoints=3000);
```




```
> plot3d(f,-3..3,-3..3);
```




```
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> v:=[D[1](f)(x,y),D[2](f)(x,y)];
```

$$v := \left[-\sin(x) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\,y\right)y + \frac{1}{5}, -\sin(y) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\,y\right)x \right]$$

```
> g:=(i,j)->D[i,j](f)(x,y):
> Jacv:=matrix(2,2,g);
```

$$Jacv := \begin{bmatrix} -\cos(x) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\,y\right)y^2 & -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\,y\right)y\,x + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\,y\right) \\ -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\,y\right)y\,x + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\,y\right) & -\cos(y) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\,y\right)x^2 \end{bmatrix}$$

```
> xv[0]:=vector([0,0]);
```

$$xv_0 := [0, 0]$$

```
> Digits:=30:for i from 1 to 5 do xv[i]:=evalf(evalm(xv[i-1]-
> subs({x=xv[i-1][1],y=xv[i-1][2]},inverse(Jacv)&*v))); od;
```

$$xv_1 := [.266666666666666666666666666667, .133333333333333333333333333333]$$

$$xv_2 := [.271334200999066803793581972225, .136063000596538489579004281161]$$

$$xv_3 := [.271338502564232105409182701706, .136065597151868595218664391207]$$

$$xv_4 := [.271338502567941684178576761867, .136065597154132055641479285977]$$

$$xv_5 := [.271338502567941684178579525081, .136065597154132055641480978526]$$