INHALTSVERZEICHNIS

Version 2: 4. März 1999

KAPITEL I: GRUNDLAGEN

§1: Zeichen, Mengen, Zahlen

1.1 SPRACHEN

Sprache $\approx$ Kommunikationssystem

Beispiele: Deutsch, chinesisch, Latein, Bienensprache, FORTRAN, Taubstummensprache, "Sprache der Mathematik".

Geschichte der Schrift:

$\approx$ 3000 v. Chr. 1. Bilderschrift bei den Sumerern: 1 Zeichen = 1 Wort

$\approx$ 1700 v. Chr. 1. Alphabet (protokanaanäisch): 1 Zeichen = 1 Laut

Daraus entwickelten sich die heutigen Alphabete:

$\approx$ 900 v. Chr. althebräisch: nicht alle Vokale!

$\approx$ 800 v. Chr. griechisch

$\approx$ 600 v. Chr. lateinisch

$\approx$ 800 n. Chr. cyrillisch

Idee des protokanaanäischen Alphabetes:

Das Zeichen für den Buchstaben stellt einen Gegenstand dar, der im Hebräischen mit diesem Buchstaben beginnt.

Beispiele:

protokan.	hebr. Wort	Bedeutung	hebr.	gr.	dt.
$\sim\sim$	má'im	Wasser		μ, M	m,M
$\Box$	ba'it	Haus		β, B	b,B
	rosch	Kopf		ϱ, P	r,R

Die griechischen Buchstaben:

α, A	alpha (a)	ν, N	ny (n)
β, B	beta (b)	ξ, Ξ	xi (x)
γ, Γ	gamma (g)	o, O	omikron (o kurz)
δ, Δ	delta (d)	π, Π	pi (p)
ϵ, E	epsilon (e kurz)	ϱ, P	rho (r)
ζ, Z	zeta (z)	σ, Σ	sigma (s)
η, H	eta (e lang)	τ, T	tau (t)
$\theta\,(\vartheta), \Theta$	theta (th)	υ, Υ	ypsilon (y)
ι, I	iota (i)	$\phi\,(\varphi), \Phi$	phi (f)
κ, K	kappa (k)	χ, X	chi (ch)
λ, Λ	lambda (l)	ψ, Ψ	psi (ps)
μ, M	my (m)	ω, Ω	omega (o lang)

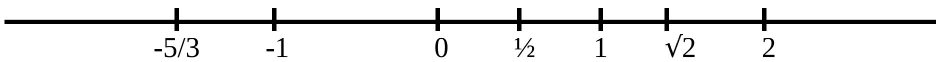
Nun zur Sprache der Mathematik!

1.2 ZEICHEN BEI MENGEN

(unterstrichen ist der symbolisierte Buchstabe)

Zeichen	Bedeutung	Beispiel
$\{,\}$	Mengenklammern	$M = \{1, 2, 3\}$
$:$	für die gilt (nach $\forall$ nur "gilt")	$M = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3\}$
$\in$	Element von	$1 \in M$
$\notin$	nicht Element von	$4 \notin M$
$\subset, \supset$	Teilmenge, Obermenge	$\{1, 2\} \subset M, M \supset \{1, 2\}$
$\cup$	Vereinigung	$M \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
$\cap$	Durchschnitt	$M \cap \{3, 4\} = \{3\}$
$\{\}$	leere Menge	$M \cap \{4, 5\} = \{\}$
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$	$2 \in \mathbb{N}, -1 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, -5 \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	Bruchzahlen (rationale Zahlen) $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ d.h. $\mathbb{Q} =$ Menge aller Quotienten von ganzen Zahlen	$\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$, $0.873 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (siehe 1.4)
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{x = \pm a_1 ... a_m . b_1 b_2 ... : a_i, b_i \in \{0, ..., 9\}$ und $(m = 1$ oder $a_1 \neq 0)$ und x hört nicht auf 9 periodisch auf$\}$	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}\, b : a, b \in \mathbb{R}\}$	siehe §16

Die reellen Zahlen lassen sich auf einer Geraden nach Wahl von 0 und 1 eindeutig anordnen und füllen diese aus:



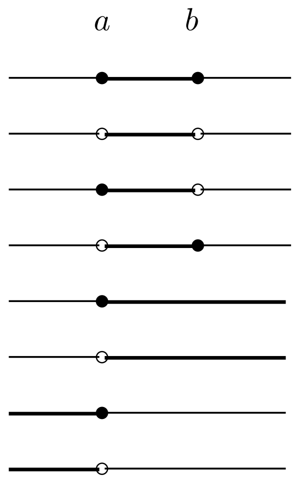
Konvention: 1 wird immer rechts von 0 gewählt. Diese Gerade heißt "Zahlengerade".

Def.: Wenn $a, b \in \mathbb{R}$ und a links von b auf der Zahlengeraden, so schreibt man $a < b$ bzw. $b > a$.

$a \leq b$ bzw. $b \geq a$ heißt: $a < b$ oder $a = b$.

<u>Def.:</u> Für $a < b$ sei

Bild



1 $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

2 $]\,a,b\,[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

3 $[a,b\,[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

4 $]\,a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

5 $[a,\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

6 $]\,a,\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

7 $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

8 $]-\infty,a\,[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$$\left.\begin{array}{l} 1,5,7 \\ 2,6,8 \\ 3,4 \end{array}\right\} \text{ heißen } \left\{\begin{array}{l} \text{abgeschlossene} \\ \text{offene} \\ \text{halboffene} \end{array}\right\} \text{ Intervalle}$$

<u>Vorsicht:</u> ∞ ist keine Zahl sondern ein Symbol.

<u>Bsp.:</u>

$$]\,1,3\,[\,\cup\,]\,2,6] =]\,1,6]$$

$$]-\infty,3]\cap\,]\,2,\infty\,[=]\,2,3]$$

1.3 <u>LOGISCHE ZEICHEN</u>

A, B seien Aussagen. "A gilt" heißt dasselbe wie "A ist wahr".

Zeichen: Bedeutung	Beispiel
$\forall$: für <u>a</u>lle; $\exists$: es <u>e</u>xistiert } "Quantoren" (vgl. Übung 4)	$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$
$A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B (wenn A falsch ist, darf B auch falsch sein) lies: "aus A folgt B"	$\forall x \in \mathbb{R} : x > 1 \Rightarrow x > 0$ $1 = 2 \Rightarrow 2 = 3$
$A \not\Rightarrow B$: A ist wahr und B ist falsch lies: "aus A folgt nicht B"	$\exists x \in \mathbb{R} : x > 1 \not\Rightarrow x > 2$
$A \Longleftrightarrow B$: A gilt genau dann, wenn B gilt lies: "A äquivalent B"	$\forall x \in \mathbb{R} : x > 1 \Longleftrightarrow x \in\,]\,1,\infty\,[$
$A \wedge B$: A und B $A \vee B$: A oder B (nicht ausschließend; lat.: vel)	$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x < y \wedge y \leq z) \Longrightarrow x < z$ $\forall M, N$ Mengen: $M \cup N =$ $= \{x : x \in M \vee x \in N\}$

Vorsicht:

$$\Longrightarrow = \text{Folgepfeil, ist zwischen Aussagen}$$
$$\longrightarrow = \text{Konvergenzpfeil (§3), zwischen Zahlen oder } \infty$$
$$\text{(oder auch bei Funktionen)}$$

Nicht verwechseln!

z.B.: $\underbrace{x > 1}_{} \Longrightarrow \underbrace{x > 0}_{}$

Aussagen

Aber: $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$

Zahlen

1.4 BEISPIELE

1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2}$ ist keine Bruchzahl

Indirekter Beweis, d.h. wir nehmen das Gegenteil an und zeigen, daß das auf einen Widerspruch führt. Also

Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{m}{n} \wedge m, n$ teilerfremd (sonst kürzen wir, bis sie wirklich teilerfremd sind) $\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = m^2 \Rightarrow m^2$ ist gerade $\Rightarrow m$ ist gerade $\Rightarrow$ $\exists a \in \mathbb{N} : m = 2a \Rightarrow m^2 = 4a^2 \Rightarrow 2n^2 = 4a^2 \Rightarrow n^2 = 2a^2 \Rightarrow n^2$ ist gerade $\Rightarrow$ n ist gerade $\Rightarrow m, n$ sind nicht teilerfremd (Widerspruch)

Also muß die Annahme falsch sein, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beachte: Aus etwas Falschem kann etwas Falsches folgen, nicht aber aus etwas Wahrem! Vgl. auch Übung 1.

2) Ungleichungen $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \qquad \text{Z.B. } 1 < 2 \Rightarrow -3 < -2 \text{ (mit } c = -4)$$
$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc \qquad \text{Z.B. } (1 < 2 \wedge 3 > 0) \Rightarrow 3 < 6$$
$$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc \qquad \text{Z.B. } (1 < 2 \wedge -2 < 0) \Rightarrow -2 > -4$$
$$(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c \qquad \text{Z.B. } (1 < 2 \wedge 2 < 4) \Rightarrow 1 < 4$$

$\forall a, b \geq 0 : \quad a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2 \qquad$ Z.B. $2, 3 \geq 0; 2 < 3 \Leftrightarrow 4 < 9$

Vorsicht: (i) $\exists a, b \in \mathbb{R} : a < b \not\Rightarrow a^2 < b^2 \qquad$ Z.B. $-2 < 1$ aber $4 < 1$ ist falsch

Hier muß man korrekt eine Fallunterscheidung machen: $a > 0, b > 0$; $a > 0, b < 0$; etc.

(ii) $\exists a, b \in \mathbb{R} : a^2 = b^2 \not\Rightarrow a = b \qquad$ Z.B. $(-1)^2 = 1^2$ aber $-1 = 1$ ist falsch

Korrekt ist: $a^2 = b^2 \iff a = b \vee a = -b$

Man schreibt für letzteres oft $a = \pm b$.

ALSO: $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$ und $x^2 = c \iff x = \pm\sqrt{c}$ für $c \geq 0$

3) Eine quadratische Ungleichung

Aufgabe: Für welche reellen x ist $x^2 + x - 6 \geq 0$?

Also gesucht: $L = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 \geq 0\}$

a) Lösung:

α) Nullstellen: ${}_1x_2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3);$

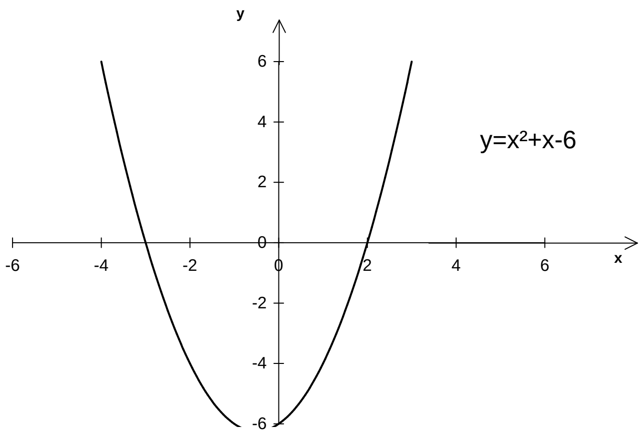
β) $(x-2)(x+3) \geq 0 \iff (x - 2 \geq 0 \wedge x + 3 \geq 0) \vee (x - 2 \leq 0 \wedge x + 3 \leq 0)$

$\iff (x \geq 2 \wedge x \geq -3) \vee (x \leq 2 \wedge x \leq -3)$

$\iff x \geq 2 \vee x \leq -3 \iff x \in [2, \infty[\cup] - \infty, -3],$

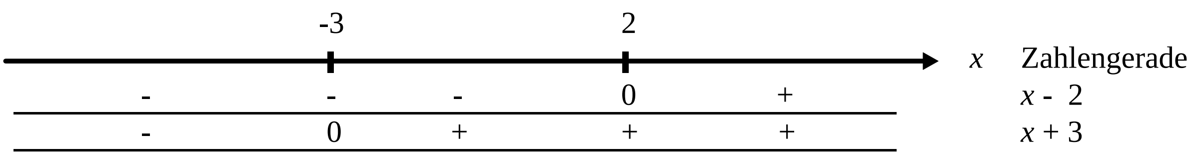
d.h. $L = [2, \infty[\cup] - \infty, -3]$

b) Graphische Veranschaulichung: (Vgl. §2)



$y \geq 0 \iff x \in [2, \infty[\cup] - \infty, -3]$

c) Methode der kritischen Punkte:



Daher ist $(x-2)(x+3) \geq 0$ für $x \geq 2$ oder $x \leq -3$.

(siehe auch Übungen 3 und 7)

4) <u>Eine Wurzelungleichung</u>

Aufgabe: Für welche reellen x ist $\sqrt{x^2+5x} < 6$?

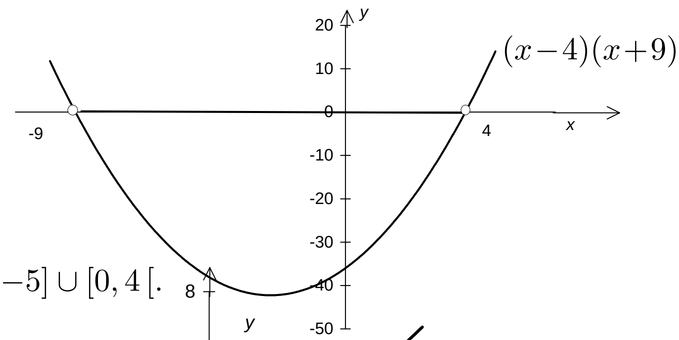
Also gesucht: $L = \{x \in \mathbb{R} : (\sqrt{x^2+5x} \text{ ist definiert}) \ \wedge (\sqrt{x^2+5x} < 6)\}$

a) Wir bestimmen zuerst die Definitionsmenge

$D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+5x} \text{ ist definiert }\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2+5x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x+5) \geq 0\} \overset{\text{wie in 3)}}{=}]-\infty, -5] \cup [0, \infty[$.

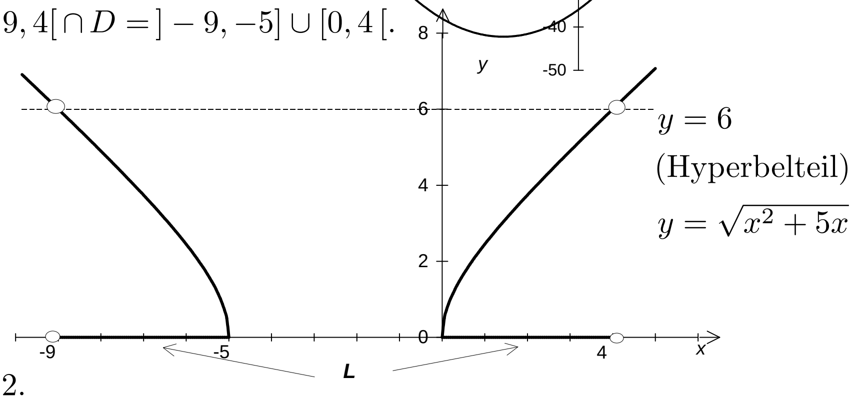
b) Für $x \in D$ gilt:

$\sqrt{x^2+5x} < 6 \overset{\text{(weil beide Seiten } \geq 0!)}{\iff} x^2+5x < 36 \iff x^2+5x-36 < 0 \iff (x-4)(x+9) < 0 \iff x \in]-9, 4[$.



Daher ist $L =]-9, 4[\cap D =]-9, -5] \cup [0, 4[$.

Bild:



Vgl. auch Übung 2.

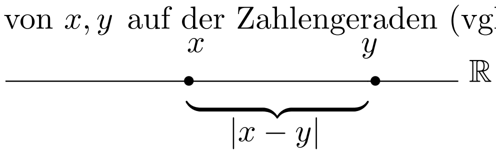
5) <u>Der (Absolut-) Betrag</u>

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} \text{ sei } |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

z.B. $|-5| = -(-5) = 5$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{falls } x \geq y, \\ y-x & \text{falls } y \geq x, \end{cases}$ d.h.

$|x-y| =$ Abstand von x, y auf der Zahlengeraden (vgl. Übung 8).

Bild:



<u>Beachte:</u> Buchstaben wie x, y etc. sind **Platzhalter** für reelle Zahlen, d.h. für (a) ein Vorzeichen, und (b) eine positive Dezimalzahl. $-x$ hat gegenüber x das gegenteilige Vorzeichen. Falls $x < 0$, so ist $-x > 0$!!!!! Bei $|x|$ wird das Vorzeichen auf $+$ gesetzt. Falls x eine Zahl ist, läßt man einfach ein eventuelles $-$ weg. Falls x oder allgemeiner ein Ausdruck A zahlenmäßig noch unbekannt ist, so verlangt $|A|$ nach der **Fallunterscheidung** 1. Fall $A \geq 0$: Dann ist $|A| = A$ und der Betrag wird weggelassen; 2. Fall $A \leq 0$: Dann ist $|A| = -A$ und der Betrag wird durch ein $-$ ersetzt (vgl. Bsp. 6).

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \\ x &\leq |x| \\ \text{(Dreiecksungleichung) } |x+y| &\leq |x| + |y| \text{ (Beweis s.u.)} \\ |x-y| &\geq ||x| - |y|| \text{ (Beweis Üb. 5)} \\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

Beweis der Dreiecksungleichung: $xy \leq |xy| \Rightarrow\ x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \Rightarrow (x+y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Rightarrow \sqrt{(x+y)^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2} \Rightarrow |x+y| \leq |\underbrace{|x|+|y|}_{\geq 0}| = |x| + |y|$. (In Mathematik B ebenso für Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$.)

6) <u>Eine Betragsungleichung</u> (Vergl. Übung 6)

Aufgabe: Für welche reelle x ist $|x+1| < x+3$?

Also gesucht: $L = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < x+3\}$.

a) rechnerisch:

1. Fall: $x + 1 \geq 0$, d.h. $x \geq -1$.

Dann ist $|x+1| = x+1$ und $x \in L \iff x+1 < x+3$

$\iff 1 < 3$, das ist wahr, d.h. $L_1 = [-1, \infty[$.

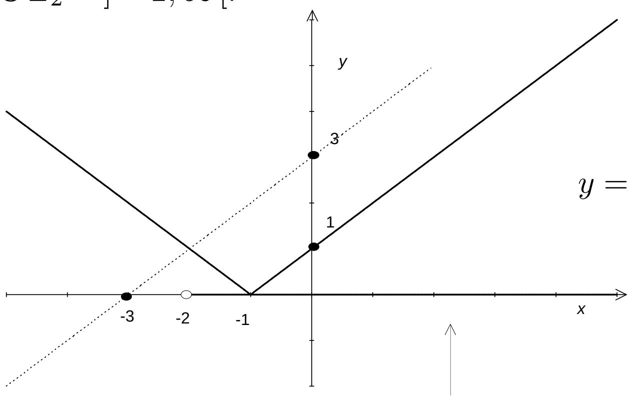
2. Fall: $x + 1 \leq 0$, d.h. $x \leq -1$.

Dann ist $|x+1| = -(x+1)$ und $x \in L \iff -x-1 < x+3$

$\iff 2x > -4 \iff x > -2$, d.h. $L_2 =]-2, -1]$.

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 =]-2, \infty[$.

b) graphisch



$y = |x+1|$

$y = x + 3$

$L:$ hier ist $|x+1| < x+3$

§2: Funktionen

2.1 DEFINITIONEN UND BEISPIELE

Def.: Eine reellwertige Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Definitionsmenge genau eine reelle Zahl zuordnet.

Vorläufig: Funktion = reellwertige Funktion

Beispiele:

1) Definitionsmenge = Menge von 5 Studenten; die Funktion ordnet jedem Studenten die Größe in cm zu. Die Größen seien 175, 180, 182, 190, 180.

   Wir wählen Namen:

Definitionsmenge:	S (tudenten)
Funktion:	G (röße)
Variable für 1 Student:	a
Variable für Größe:	l

   Nach Numerierung der Studenten ist $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Die Funktion wird symbolisch geschrieben

$$G : S \longrightarrow \mathbb{R} : a \longmapsto G(a)$$

$$\text{oder } G : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{oder } l = G(a) \text{ für } a \in S$$

$$\text{oder } l = G(a)$$

   Dann gilt z.B. $G(1) = 175, G(2) = 180, G(5) = 180$,

   $\forall a \in S : 175 \leq G(a) \leq 190$.

   Also Schreibweisen für Funktionen:

f :	$D \longrightarrow$	$\mathbb{R}$:	$x \longmapsto$	$f(x)$
(Funktion)	(Def. menge)	(mögliche Funktionswerte)	(unabh. Variable)	(Funktionswert in x)
f :	$D \longrightarrow$	$\mathbb{R}$		
$y =$ (abh. Var.)	$f(x)$,	$x \in D$		
$y = f(x)$				

2) Ein Stein wird mit 20 m/sec senkrecht in die Höhe geworfen. Gesucht wird die Höhe als Funktion der Zeit.

   Wahl der Namen:

Definitionsmenge:	T
Funktion:	h
unabhängige Variable:	t
abhängige Variable:	z

Somit $h : T \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto h(t)$ oder $z = h(t),\ t \in T$.

Physik: $h(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 + 20t$.

Der Einfachheit halber sei:

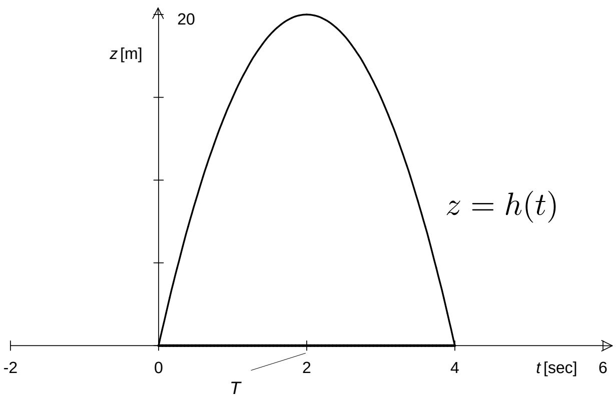
$g = 10$ m/sec$^2 \Longrightarrow h(t) = -5t^2 + 20t; h(t) \geq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq t \leq 4$.

Also $T = [0,4]$ und

$h : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto -5t^2 + 20t$

oder: $z = h(t) = -5t^2 + 20t,\ t \in [0,4]$

Graphisch:

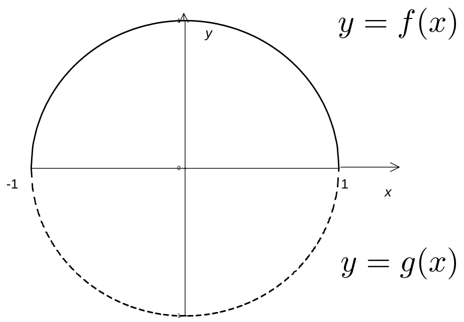


Def.: Für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ ist der Graph (= das Bild) von f die Teilmenge $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ der Ebene $\mathbb{R}^2$.

3) Der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ (eigentlich genauer $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$) besteht aus den Graphen zweier Funktionen:

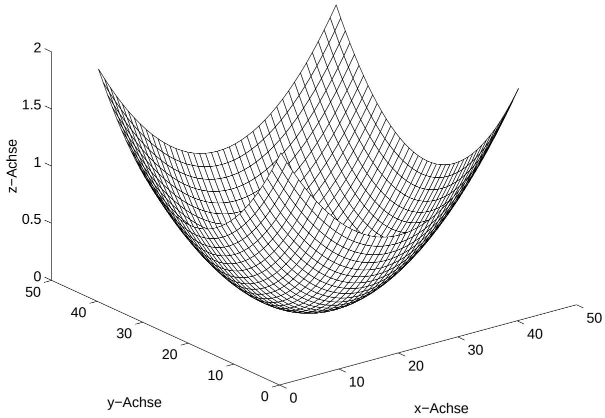
$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$

und $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -\sqrt{1 - x^2}$



Merke: Eine Funktion ordnet jedem Element der Definitionsmenge genau einen Wert zu.

4) Das Paraboloid $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$ ist eine Funktion zweier Veränderlicher. Es gibt 2 unabhängige Variable x, y und 1 abhängige Variable z.

Graph: 

Mehr dazu: Math. B

2.2 OPERATIONEN MIT FUNKTIONEN UND EINTEILUNG

Def.: $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}, g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seien 2 Funktionen und $D = D_1 \cap D_2 \neq \{\}$.
Dann definiert man

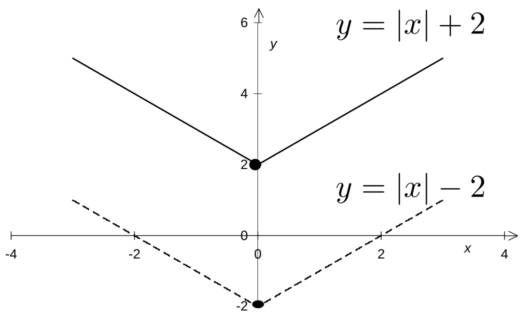
$f + g : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) + g(x)$,

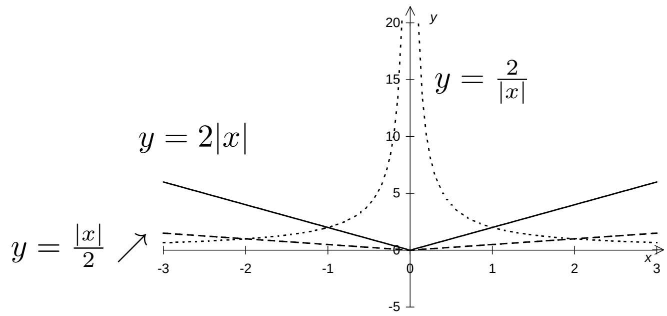
$f - g : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) - g(x)$,

$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)g(x)$

$\dfrac{f}{g} : \{x \in D : g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Bsp.: 1) $f(x) = |x|$, $g(x) = 2$, $D = \mathbb{R}$

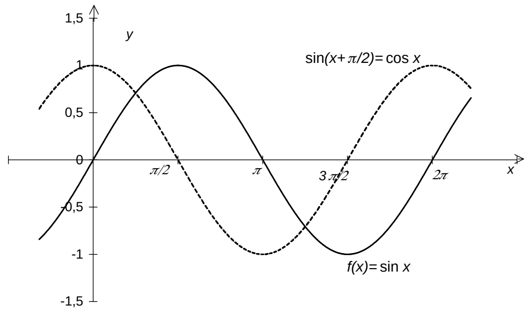


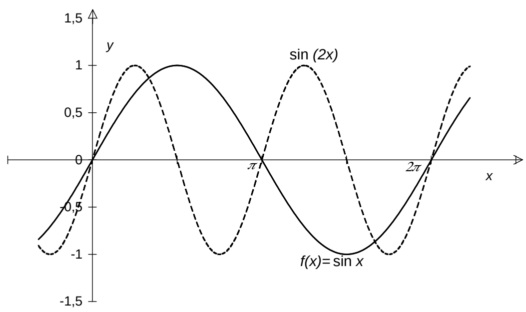


2) $f^2 = f \cdot f$, d.h. $f^2(x) = f(x)^2$ und allgemein $f^n(x) = f(x)^n$.
Z.B. $\sin^2 x = (\sin x)^2$ darf man nicht mit $\sin(x^2)$ verwechseln, vgl. Übung 11.
Es sei $c > 0$.

Die Funktion	hat im Vergleich zu $y = f(x)$ den Graph
$y = f(x) + c$	um c nach oben verschoben
$y = f(x) - c$	um c nach unten verschoben
$y = f(x) \cdot c$	in $y-$Richtung $\begin{cases} \text{gestreckt } (c > 1) \\ \text{gestaucht } (c < 1) \end{cases}$
$y = f(x - c)$	um c nach rechts (!) verschoben
$y = f(x + c)$	um c nach links (!) verschoben
$y = f(cx)$	in $x-$Richtung $\begin{cases} \text{gestaucht } (c > 1) \\ \text{gestreckt } (c < 1) \end{cases}$!

Bsp.: 1) 2)





Diese Operationen sind Spezialfälle der Zusammensetzung von Funktionen.

Def.: $f : M \longrightarrow \mathbb{R}, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt:

$$g \circ f : \{x \in M : f(x) \in D\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(f(x))$$

die Zusammensetzung von g mit f.

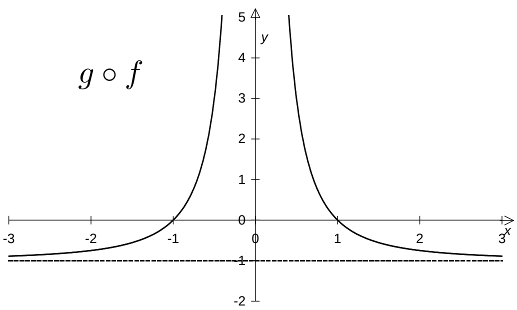
In Worten: $g \circ f$ heißt, “wende g auf das Ergebnis von f an”.

Vorsicht: I.a. ist $g \circ f \neq f \circ g$.

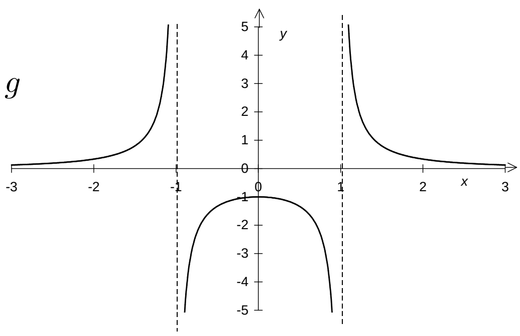
Bsp.:

$f(x)$	$g(x)$	$g \circ f(x)$	$f \circ g(x)$
$\sin x$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\sin x}$	$\sin \sqrt{x}$
$x + c$	$\lvert x\rvert$	$\lvert x + c\rvert$	$\lvert x\rvert + c$
e^x	$\cos x$	$\cos(e^x)$	$e^{\cos x}$
$\frac{1}{x}$	$x^2 - 1$	$\frac{1}{x^2} - 1$ (s. Bild)	$\frac{1}{x^2 - 1}$ (s. Bild)

$g \circ f$



$f \circ g$

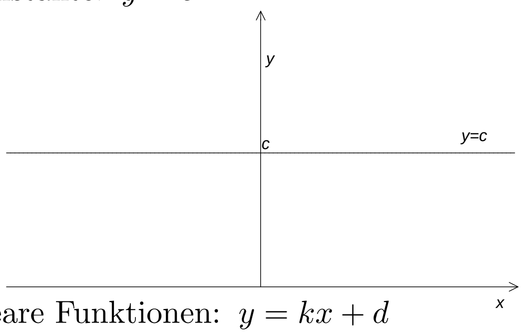


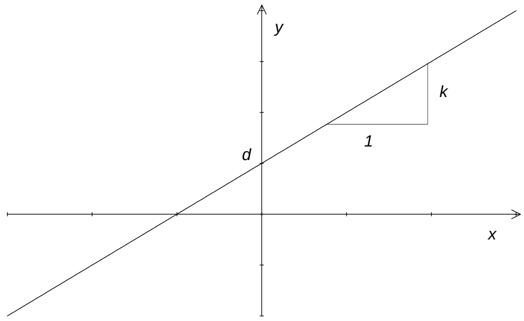
siehe auch Übung 11.

Einteilung der Funktionen (mit $D \subset \mathbb{R}$)

(jede Klasse enthält die vorige)

1) Konstante: $y = c$





2) lineare Funktionen: $y = kx + d$

(Beachte: Bei senkrechten Geraden (d.h. $x = c$) ist y keine Funktion von x).

3) Polynome: was sich durch $+, -, \cdot, \circ$ aus linearen Funktionen erzeugen läßt, d.h.

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

siehe 2.3

4) rationale Funktionen: was sich durch $+, -, \cdot, :, \circ$ aus linearen Funktionen erzeugen läßt, d.h.

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P, Q \text{ Polynome}$$

Vgl. Beispiel 2 oben und Übung 10.

5) algebraische Funktionen: was sich durch Lösung einer Polynomgleichung ergibt: z.B.

$$y^3 = x, \text{ d.h. } y = \sqrt[3]{x} \text{ oder } y = \sqrt[10]{x^{2.89} + \pi\sqrt{x}}$$

6) elementar transzendente Funktionen: was sich durch $+, -, \cdot, :, \circ$ aus Potenzen, $\sin x$, e^x, $\arcsin x$ und $\ln x$ erzeugen läßt (siehe 2.4, 2.6, §5)

7) höher transzendente Funktionen:

Besselfunktionen: J_k, N_k, K_k, I_k

hypergeometrische Funktion: ${}_2F_1(a, b; c; x)$

Integralsinus: $\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$, etc.

2.3 POLYNOME

Def.: Ein reellwertiges Polynom ist eine Funktion der Art $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, wobei $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Wenn $a_n \neq 0$, so heißt n Grad des Polynoms.

Polynome lassen sich mit dem euklidischen Algorithmus dividieren.

Bei Zahlen:

$$\begin{array}{l} 170 : 3 = 56, \text{ d.h. } 170 = 3 \cdot 56 + 2 \\ \underline{-[15]\downarrow} \\ \quad 20 \\ \underline{-[18]} \\ \quad 2 = \text{Rest} \end{array}$$

<u>Bsp.:</u> Es sei $P = x^3 - 3x^2 + 4$. Wir dividieren z.B. durch $x - 1$:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 + 0x + 4) : (x-1) = x^2 - 2x - 2 \\ \underline{-[x^3 - x^2]} \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad - 2x^2 + 0x \\ \quad \underline{- [-2x^2 + 2x]} \\ \qquad - 2x + 4 \\ \qquad \underline{- [-2x + 2]} \\ \qquad\quad 2 = \text{ Rest} \end{array}$$

Also

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x-1)(x^2 - 2x - 2) + 2.$$

Daher: $P(1) = (1-1)(\dots) + 2 = 2$.

Also: Rest $= P(1)$. Kontrolle: $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2\surd$

<u>Allgemein:</u> P werde durch $x - x_0$ dividiert.

$$\Longrightarrow \qquad \underline{P : (x - x_0) = Q}$$

$$\ddots$$

$$r \text{ Rest}$$

$\Longrightarrow P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + r \Longrightarrow P(x_0) = r$. Somit:

<u>Satz:</u> 1) Wenn P durch $x - x_0$ dividiert wird, so ist der Rest $= P(x_0)$.

2) P ist durch $x - x_0$ teilbar, d.h. Rest $= 0$

$\Longleftrightarrow P(x_0) = 0$, d.h. x_0 ist eine Nullstelle oder Wurzel von P.

3) P läßt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) in der Form

$$P = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) \cdot R$$

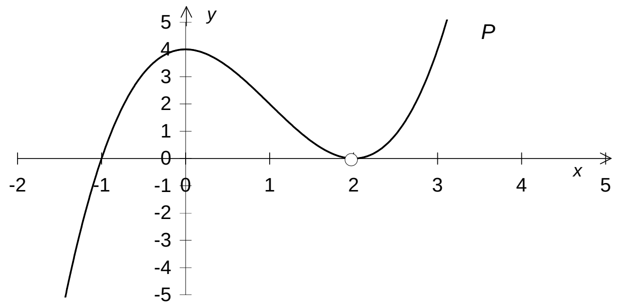
schreiben, wobei $x_0, \dots, x_k$ die (reellen) Nullstellen von P sind, $(k < n)$ und R keine (reellen) Nullstellen hat.

Zurück zum Beispiel $P = x^3 - 3x^2 + 4$. Wir erraten die Nullstelle $x_0 = -1$

$(P(-1) = -1 - 3 + 4 = 0)$

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 + 0x + 4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4 \\ \underline{-[x^3 + x^2]} \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad -4x^2 + 0x \\ \quad \underline{-[-4x^2 - 4x]} \\ \qquad 4x + 4 \\ \qquad \underline{-[4x + 4]} \\ \qquad\quad 0 = \text{Rest} \end{array}$$

weitere Nullstellen: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow {}_1x_2 = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2.$
Also $x_0 = -1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ P = (x+1)(x-2)^2.$



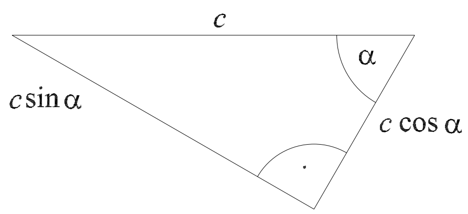
(Kurven-diskussion siehe §8)

Nach Teil 3) im Satz kann ein Polynom n-ten Grades höchstens n mal die x-Achse kreuzen ($\Longrightarrow$ z.B. $\sin x$ ist kein Polynom). Systematische Nullstellensuche (Newton's Algorithmus) und Kurvendiskussion: §8.

Vgl. auch Übung 9.

2.4 TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

(A) Im Dreieck (nur für $0° < \alpha < 90°$):



$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

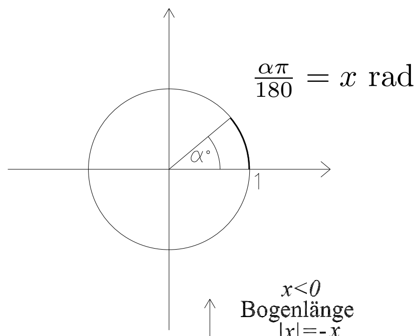
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}},\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(B) Am Einheitskreis:

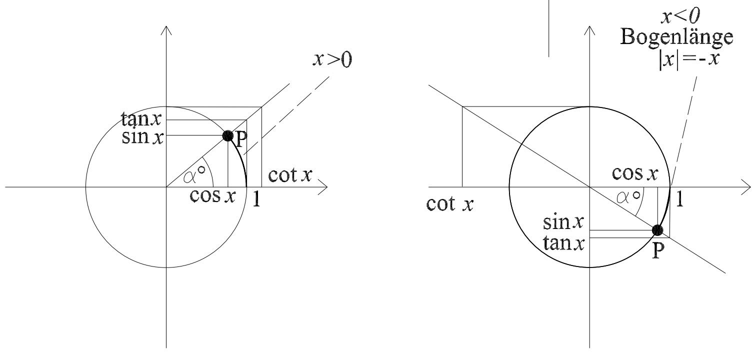
Wir messen α meist im Bogenmaß, d.h.

$$180^\circ = \pi \text{ rad(iant)}$$
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$
$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ rad}$$

rad wird meist weggelassen.



$x > 0$ heißt: P wird durch Drehen im Gegenuhrzeigersinn um x von 1 aus gefunden. Bei $x < 0$ wird im Uhrzeigersinn um $|x| = -x$ gedreht.



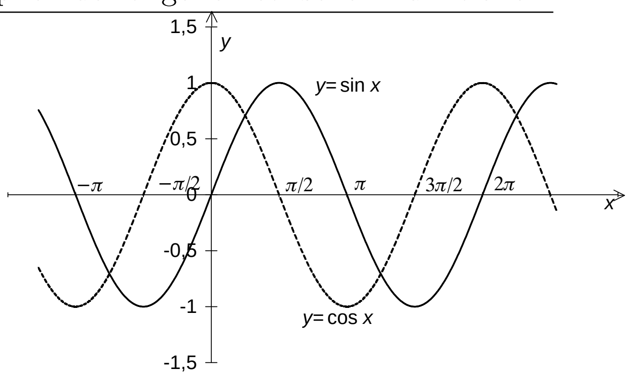
Nach Pythagoras: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Bsp.: $\alpha = 45^\circ \Longrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Longrightarrow 2\sin^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} =$ $\cos 45^\circ$,

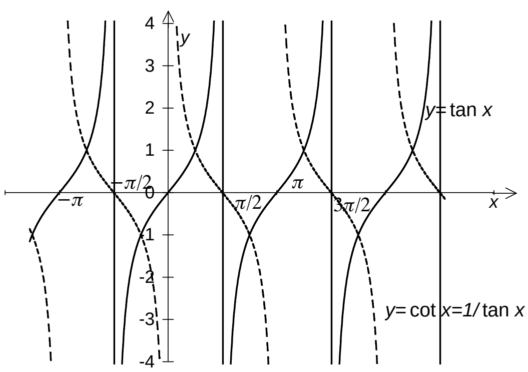
$\tan 45^\circ = 1$.

Analog $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ etc. s. Übung 12.

(C) Graphen der trigonometrischen Funktionen:



Periode 2π, d.h.
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

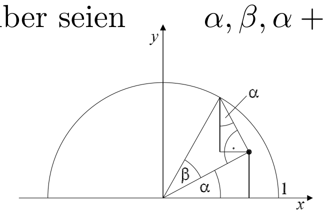


Periode π, d.h.
$\tan(x + \pi) = \tan x$
$\cot(x + \pi) = \cot x$

Die Summensätze: $\boxed{\begin{array}{l} 1)\,\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ 2)\,\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{array}}$

Beweis von 1) (zu 2) siehe Übungen 13, 14)

Der Einfachheit halber seien $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in\,]0, \frac{\pi}{2}[$



$$\left.\begin{array}{l} \}\ \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \}\ \cos\beta\cdot\sin\alpha \end{array}\right\} \quad \sin(\alpha+\beta)$$

3) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta} \overset{:\cos\alpha\,\cos\beta}{=} \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}.$

Verdoppelungsformeln: $\boxed{\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{array}}$

2.5 EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN, UMKEHRFUNKTION

Def.: Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$ bzgl. 0 symmetrisch (d.h. $D = \{-x : x \in D\}$). Dann heißt

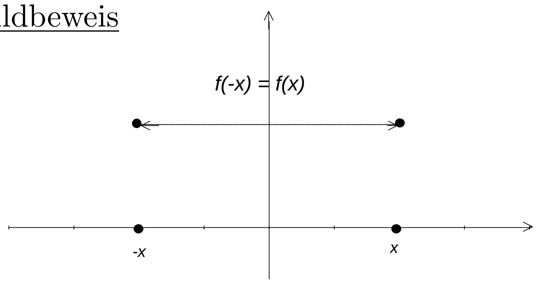
a) f gerade $\iff \forall x \in D : f(-x) = f(x)$

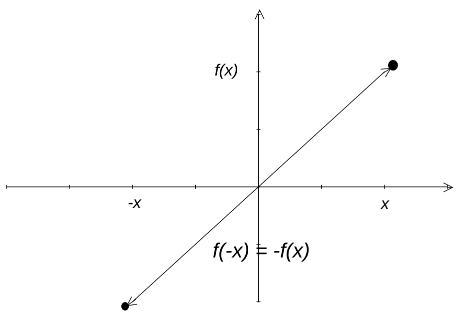
b) f ungerade $\iff \forall x \in D : f(-x) = -f(x)$.

Satz: $f \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$

$\iff$ der Graph von f ist spiegelsymmetrisch bzgl. $\begin{Bmatrix} \text{der } y\text{-Achse} \\ \text{des Ursprungs} \end{Bmatrix}$

Bildbeweis





Bsp.:

1) $\cos(-x) = \cos(x) \Longrightarrow \cos$ ist gerade.

2) $\sin(-x) = -\sin(x) \Longrightarrow \sin$ ist ungerade.

3) $f(x) = 2x+3 \Longrightarrow f(-x) = -2x+3;\ \exists x : f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade.

vgl. auch Übung 15.

Bsp.: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x+1$ bzw. kurz $y = 2x+1$ ist eine Gerade. Wenn wir fragen, welches x zu einem gegebenen y gehört, so ist die Lösung: $y = 2x+1 \Longrightarrow y-1 = 2x \Longrightarrow x = \frac{y-1}{2}$. Dies liefert die "Umkehrfunktion" $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \frac{y-1}{2}$. Die unabhängige Variable wird wieder x genannt und dann ist $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Zu jedem y gehört hier genau ein $x-$Wert; die Funktion f ist "umkehrbar". Das folgt daraus, daß sie "monoton steigend" ist.

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$.

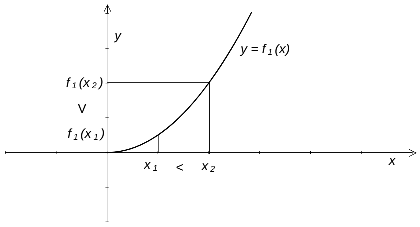
$$f \text{ heißt monoton } \left\{\begin{matrix} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D \text{ mit } x_1 < x_2 : \left\{\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{matrix}\right\}$$

Bsp.:

$f_1 : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

$0 \leq x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^2 < x_2^2$

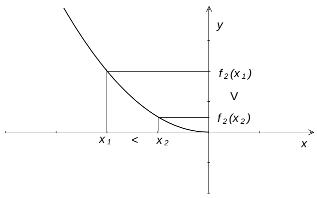
Also ist f_1 monoton steigend



$f_2 :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

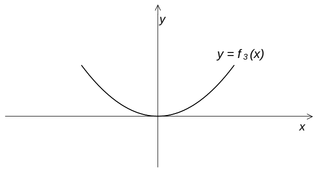
$x_1 < x_2 \leq 0 \Longrightarrow x_1^2 > x_2^2$

Also ist f_2 monoton fallend



$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

ist weder noch, denn z.B. $-1 < 1$, aber $(-1)^2 = 1^2$



Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$.

a) f heißt umkehrbar (injektiv, invertierbar)

$$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D \text{ mit } x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$$

b) Die Menge $B = \{f(x) : x \in D\}$ heißt Bildmenge (oder Wertemenge) von f.

Beachte f monoton (steigend bzw. fallend) $\Longrightarrow f$ umkehrbar.

$$\text{Denn } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \text{ entweder } x_1 < x_2 \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \text{ bzw.} \\ f(x_1) > f(x_2) \end{matrix}\right.$$

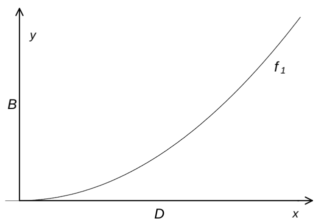
$$\text{oder} \quad x_2 < x_1 \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_2) < f(x_1) \text{ bzw.} \\ f(x_2) > f(x_1) \end{matrix}\right.$$

$\Longrightarrow$ jedenfalls $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Bsp.: $f_1 : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

ist monoton steigend, also umkehrbar;

$B = \{f_1(x) : x \in D\} = \{x^2 : x \in [0, \infty[\} = [0, \infty[$



<u>Def.:</u> $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar, $B = \{f(x) : x \in D\}$.

$f^{-1} : B \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) \longmapsto x$

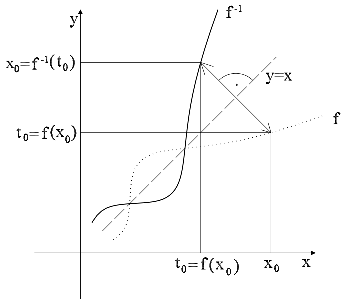
heißt <u>Umkehrfunktion</u> von f.

Somit: $\forall x \in D : f^{-1} \circ f(x) = x$ und $\forall y \in B : f \circ f^{-1}(y) = y$.

<u>Vorsicht:</u> Unterscheide f^{-1} und $\frac{1}{f}$!

<u>Konkret</u> Wenn $y = f(x)$, so ist $x = f^{-1}(y)$. Um f^{-1} zu finden, rechnet man also x aus der Gleichung $y = f(x)$ aus. Damit die unabh. Variable wieder x und die abhängige Variable wieder y heißt, vertauscht man dann x und y.

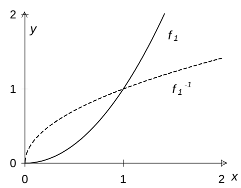
Graphisch: Der Graph von f^{-1} entsteht aus dem von f durch Spiegelung an der 1. Mediane $y = x$:



<u>Bsp.:</u> $f_1 : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2;\ y = f_1(x) = x^2$,

$x \geq 0 \Longrightarrow x = \sqrt{y}$; Vertauschung: $y = \sqrt{x}$, d.h.

$f_1^{-1} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x}$



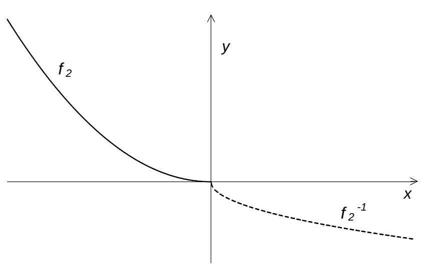
Ebenso $f_2 :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2;\ y = f_2(x) = x^2$,

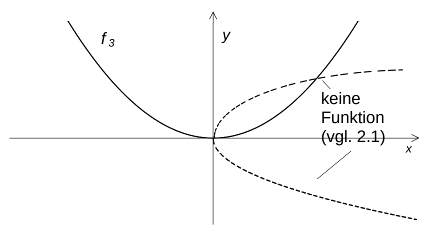
$x \leq 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{y}$; Vertauschung: $y = -\sqrt{x}$, d.h.

$\Longrightarrow f_2^{-1} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -\sqrt{x}$

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$ nicht umkehrbar, da $f_3(-1) = f_3(1)$.

Die Spiegelung des Graphen von f_3 an $y = x$ ist keine Funktion.





2.6 <u>ARCUS-FUNKTIONEN</u>

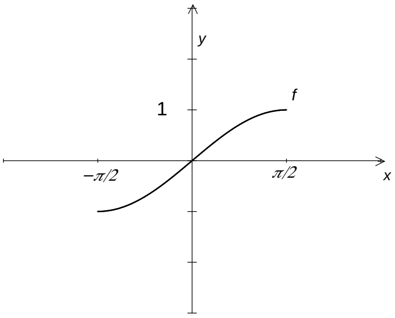
So heißen die Umkehrfunktionen von gewissen Teilen von $\sin, \cos, \tan, \cot$.

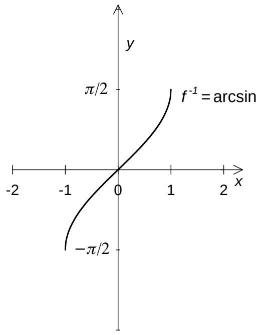
<u>Def.:</u>

1) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ ist monoton steigend und daher umkehrbar.

f^{-1} heißt <u>arcsin</u>.

Graphen:





Wertemenge von $f : [-1, 1]$

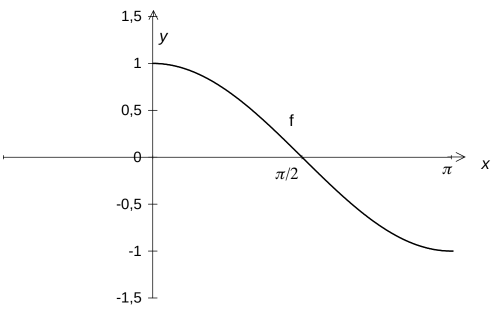
Also: $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : \sin x \longmapsto \underbrace{x}_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

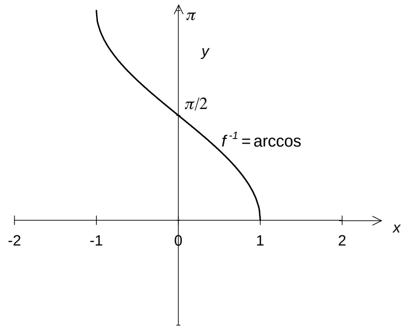
Eigenschaften: monoton steigend und ungerade

Werte: $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

2) $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$ ist monoton fallend. f^{-1} heißt <u>arccos</u>.

Graphen:



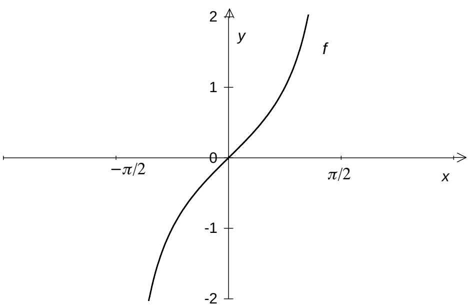


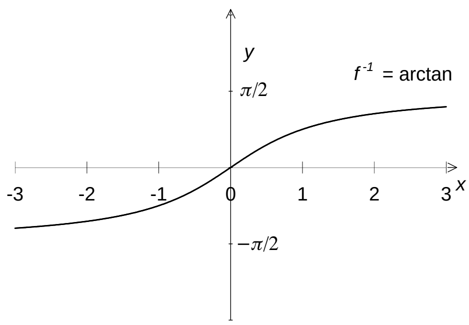
Wertemenge von $f : [-1, 1]$ Eigenschaft: monoton fallend

Also: $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ Werte: $\arccos(-1) = \pi, \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \arccos 1 = 0$

3) $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x$ ist monoton steigend. f^{-1} heißt <u>arctan</u>.

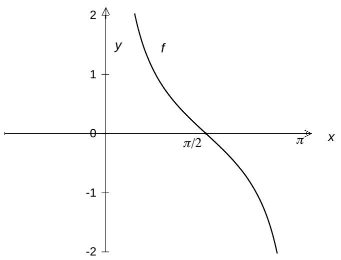
Graphen:

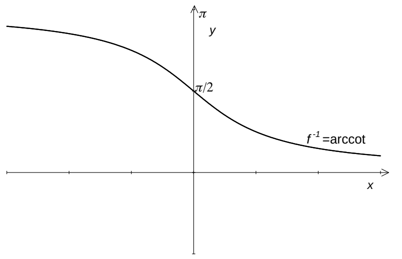




monoton steigend und ungerade

4) <u>arccot</u> ist f^{-1} zu $f:]\,0,\pi\,[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cot x$



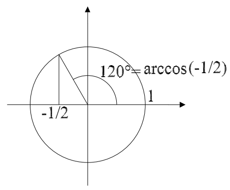


monoton fallend

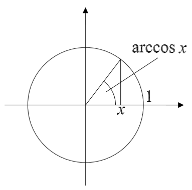
<u>Bsp.:</u> 1) Gesucht

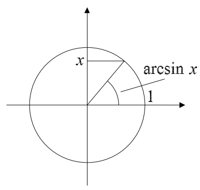
$\alpha = \arccos(-\frac{1}{2})$. D.h. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\alpha \in [0,\pi]$

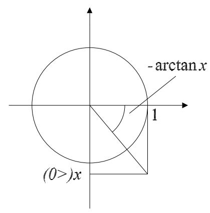
$\Longrightarrow \alpha = 120° = \frac{2\pi}{3}$.



Allgemein:

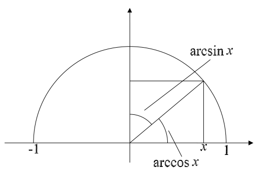


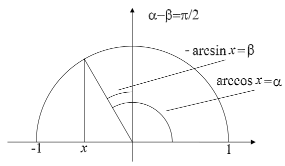




2) $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} = 90°$.

Beweis: für $x \in [0,1]$; für $x \in [-1,0]$



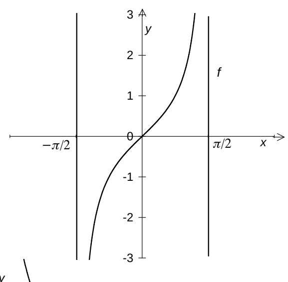


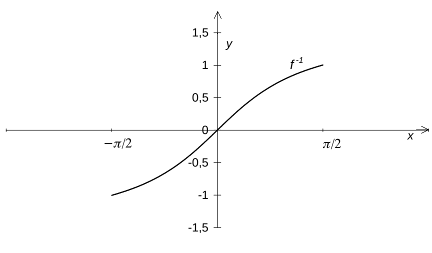
siehe auch Übung 17.

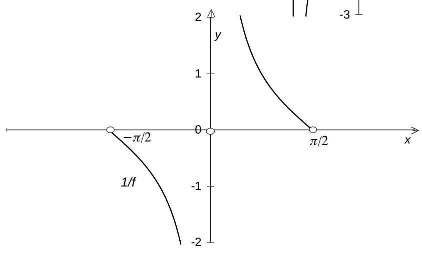
3) <u>Vorsicht:</u> Unterscheide $\frac{1}{f}$ und f^{-1}. Z.B.

$f:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x; f^{-1} = \arctan$

$\frac{1}{f} : \{x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[: x \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{\tan x} = \cot x$







<u>Vorsicht:</u> Für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0 : \dfrac{1}{a} = a^{-1}$.

Aber für eine Funktion f ist die Bezeichnung f^{-1} reserviert für die Umkehrfunktion.

4) Allgemein: $\forall x \in D : f^{-1}(f(x)) = x; \quad \forall x \in B : f(f^{-1}(x)) = x.$

arcsin etc. sind die Umkehrfunktionen von sin etc. in den ausgewählten Intervallen!

Es gilt also z.B.
a) $\sin(\arcsin x) = x$ für $x \in [-1, 1]$
b) $\arcsin(\sin x) = x$ für $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$

Wenn in a) $x \notin [-1, 1]$, so ist $\arcsin x$ nicht definiert,

wenn in b) $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, so ist die Gleichung falsch.

z.B. $\arcsin(\underbrace{\sin \pi}_{0}) = \arcsin 0 = 0$. $\arcsin(\sin \pi) \neq \pi$ aus demselben Grunde wie $\sqrt{(-1)^2} \neq -1$.

5) Genauere Untersuchung für arctan :

Wenn $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, so ist $\arctan(\tan x) = x$;

wenn $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, so ist $\arctan(\tan x) \underbrace{=}_{\text{tan periodisch}} \arctan(\tan(x-\pi)) \underbrace{=}_{\text{weil } x-\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} x - \pi$.

Allgemein: $\arctan(\tan x) = x + k\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ so, daß $x + k\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Vergleiche auch Übung 18.

6) Summensatz für arctan :

$\arctan x + \arctan y = \arctan(\dfrac{x+y}{1-xy})$ falls $xy < 1$.

(für den anderen Fall siehe Übung Z3)

Beweis:

a) Es seien $\alpha = \arctan x, \beta = \arctan y \Longrightarrow \tan(\alpha + \beta) \underset{(2.4)}{=} \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy} \Longrightarrow \underbrace{\arctan(\tan(\alpha+\beta))}_{=\alpha+\beta=\arctan x + \arctan y} = \arctan\Big(\dfrac{x+y}{1-xy}\Big)$

falls $\alpha + \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Wenn $x > 0, y < 0$, so ist $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\Longrightarrow \alpha + \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ebenso für $x < 0, y > 0$.

Wenn $x, y > 0$ und $xy < 1$, so ist $y < \frac{1}{x} \Longrightarrow \beta = \arctan y < \arctan \frac{1}{x} \underset{\text{s.Üb.17}}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{\pi}{2} - \alpha \Longrightarrow \alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha + \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ebenso für $x, y < 0, xy < 1$. $\square$

§3: Grenzwerte (Limites)

3.1 GRENZWERTE VON FOLGEN

Bsp.:

1)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{n}$
2)	$3, 3, 3, \ldots$	$a_n = 3$
3)	$0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \ldots$	$a_n = \frac{n-1}{n+2}$
4)	$1, -1, 1, -1, \ldots$	$a_n = (-1)^{n-1}$
5)	$1, 2, 3, \ldots$	$a_n = n$

Def.: Eine Folge ist eine Funktion auf der Definitionsmenge $\mathbb{N}$, d.h. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : n \longmapsto f(n)$.

Schreibweise: Statt f, g, etc. verwendet man die Buchstaben a, b, etc. und statt $a(n)$ schreibt man a_n.

Verhalten für $n \to \infty$:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$

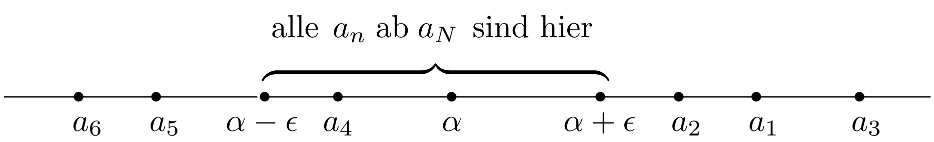
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ existiert nicht

5) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

"Anschauliche Definition": Für $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$: a_n nähert sich α mehr und mehr, wenn n größer und größer wird. D.h. für jedes $\epsilon > 0 : |a_n - \alpha| < \epsilon$ bzw. $a_n \in]\,\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon\,[$ für n groß genug, d.h. $\forall n \geq N$.

Bild:



Def.: a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Folge.

1) $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert (Limes) von $a_n \iff$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \epsilon \qquad (*)$$

2) Wenn a_n, $n \in \mathbb{N}$, einen Grenzwert hat, so heißt die Folge konvergent, sonst divergent.

<u>Schreibweise:</u> Wenn α Grenzwert von $a_n,\ n \in \mathbb{N}$ ist, schreibt man

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ oder $a_n \to \alpha$ für $n \to \infty$.

<u>$(*)$ in Worten:</u> Für jedes positive ϵ existiert eine natürliche Zahl N, sodaß alle Folgenglieder ab a_N von α weniger als ϵ entfernt sind.

<u>Beachte</u> Je kleiner ϵ, umso größer wird man i.a. N wählen müssen.

<u>Bsp.:</u> 1) $a_n = \dfrac{1}{n}$

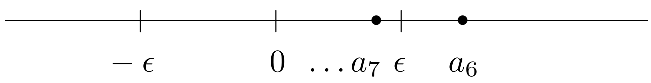
<u>Anschaulich:</u> $\dfrac{1}{n}$ nähert sich 0. Also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \overset{?}{=} 0$.

<u>Exakt:</u> Für $\epsilon > 0$ ist zu zeigen, daß $\exists N \in \mathbb{N} : [\forall n \geq N : |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon]$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow [\frac{1}{n} < \epsilon \text{ für } n \geq N] \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{N} < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow N > \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

So ein N existiert. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. (Wenn z.B. $\epsilon = 0.147$, kann $N = 10$ gewählt werden; das kleinstmögliche N ist 7, da $\dfrac{1}{0.147} = 6.8\ldots$. Wir müssen nur zeigen, daß <u>zumindest ein</u> N existiert.

Bild:



Zahlengerade

2) $a_n = 3$. Wegen $|a_n - 3| = 0 < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$
kann für jedes ϵ $N = 1$ gewählt werden.

3) <u>Anschaulich:</u> Für großes n ist $\dfrac{n-1}{n+2} \approx 1$, d.h. $\lim \dfrac{n-1}{n+2} \overset{?}{=} 1$.

<u>Exakt:</u> $(*)$ $\left|\dfrac{n-1}{n+2} - 1\right| < \epsilon \Longleftrightarrow \left|\dfrac{\cancel{n} - 1 - (\cancel{n} + 2)}{n+2}\right| < \epsilon \Longleftrightarrow \dfrac{3}{n+2} < \epsilon \Longleftrightarrow n+2 > \dfrac{3}{\epsilon} \Longleftrightarrow n > \dfrac{3}{\epsilon} - 2$, d.h. wähle $N > \dfrac{3}{\epsilon} - 2$. Dann gilt $(*)$ $\forall n \geq N$.

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Vgl. auch Übung 19.

Was passiert, wenn wir den Limes falsch raten?

Probiere z.B.: $\lim \dfrac{n-1}{n+2} \overset{?}{=} 0$. Es sei $\epsilon < 1$.

(∗) $\left|\frac{n-1}{n+2}-0\right| < \epsilon \iff \frac{n-1}{n+2} < \epsilon \iff n-1 < \epsilon(n+2) \iff n(1-\epsilon) < 1+2\epsilon \iff$ $n < \frac{2\epsilon+1}{1-\epsilon}$.

(∗) gilt also <u>nicht</u> $\forall n \geq N$ sondern nur für kleine n.

Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+2} \neq 0$.

Allgemein:

<u>Satz:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta \Longrightarrow \alpha = \beta$

<u>Beweis</u> Für $\epsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \epsilon$ und $|a_n - \beta| < \epsilon \Longrightarrow |\alpha - \beta| = |\alpha - a_n + a_n - \beta| \underset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| < 2\epsilon$

Also gilt $|\alpha - \beta| < 2\epsilon$ für jedes $\epsilon > 0 \Longrightarrow \alpha = \beta$. □

Somit: Wenn ein Limes existiert, ist er eindeutig.

4) $a_n = (-1)^{n-1}$

<u>Anschaulich:</u> Die Folge divergiert, da es keine Zahl α gibt, der sich die a_n nähern.

<u>Exakt:</u> Annahme: $\lim a_n = \alpha$

Es sei $\epsilon = 1$ und $|a_n - \alpha| < \epsilon = 1 \qquad$ für $n \geq N$

$\Longrightarrow |a_N - \alpha| < 1, \quad |a_{N+1} - \alpha| < 1$

$\Longrightarrow |1 - \alpha| < 1, \underbrace{|-1-\alpha|}_{=|1+\alpha|} < 1$

$\Longrightarrow 2 > |1-\alpha| + |1+\alpha| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\geq} |1 - \alpha + 1 + \alpha| = 2 \qquad$ Widerspruch

5) $a_n = n$ divergiert. Beweis wie im Beispiel 4).

Die Folge $a_n = n$ divergiert in ganz spezieller Weise.

<u>Def.:</u> a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Folge.

1) a_n <u>divergiert gegen ∞</u> $\iff \forall M \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > M$

2) a_n <u>divergiert gegen $-\infty$</u> $\iff \forall M \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < -M$

<u>Schreibweisen:</u>

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ bzw. $a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$

Vergleiche auch Übung 20.

<u>Bsp.:</u> 6) Für $c > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = \infty$.

Wir brauchen dafür den folgenden

Hilfssatz	$h > 0, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (1+h)^n \geq 1 + nh$
Beweis	$(1+h)^n = \underbrace{(1+h)\cdots(1+h)}_{n-\text{mal}} = 1 + nh + \cdots \quad \square$

$h = c - 1 > 0 \Longrightarrow c^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$

$\Longrightarrow c^n > M$ für $n \geq N$, wenn $1 + nh > M$ für $n \geq N$ d.h. wenn $N > \dfrac{M-1}{h}$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = \infty$.

Bemerkung: Damit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ definiert ist, genügt es, a_n für große n zu kennen. a_n braucht für kleine n gar nicht definiert zu sein.

Z.B.: gesucht $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n}{2n^3-3n^2+1}$ $\curvearrowleft$ definiert für $n \geq 2$

3.2 GRENZWERTSÄTZE (GWS)

Um $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ zu zeigen, haben wir bisher α erraten und die Definition (mit ϵ, N, n) verwendet. Beides ist unbefriedigend.

Satz 1: Es seien $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, zwei konvergente Folgen, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:

1) a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$.

2) a) Falls $\beta \neq 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$; (Beachte: $\dfrac{a_n}{b_n}$ ist definiert, wenn $b_n \neq 0$. Für genügend großes n ist das der Fall, da $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$.)

   b) falls $\beta = 0, \alpha > 0$ und $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : b_n > 0$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

(Ähnlich für $\alpha > 0$ und $\forall n \geq N : b_n < 0 :$ Ergebnis $-\infty$; etc.)

Beweis

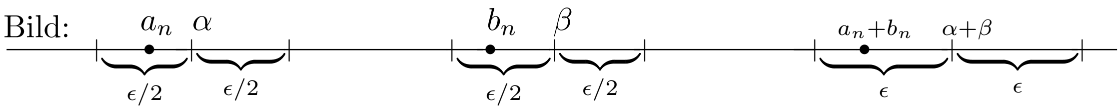
1) a) Es seien $\epsilon > 0$ und $|a_n - \alpha| < \dfrac{\epsilon}{2}, |b_n - \beta| < \dfrac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N$. Dann gilt $\forall n \geq N :$

$$|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| \underset{\uparrow}{\leq} |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\triangle$–Ungl.

und
$$|a_n - b_n - (\alpha - \beta)| \overset{\downarrow}{\leq} |a_n - \alpha| + |\beta - b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dies ergibt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$.

Bild: 

b) Es seien $\epsilon > 0$ und $C > |\alpha|, |\beta|, 1, \epsilon$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N$: $|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{3C}, |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{3C}$ Dann gilt $\forall n \geq N$:

$$|b_n| = |\beta + b_n - \beta| \leq |\beta| + |b_n - \beta| \leq C + \tfrac{\epsilon}{3C} \leq C + \tfrac{1}{3} \leq 2C$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow |a_n b_n - \alpha\beta| &= |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta| \\ &< \tfrac{\epsilon}{3C} \cdot 2C + C \cdot \tfrac{\epsilon}{3C} = \epsilon \end{aligned}$$

2) a) Es genügt, wenn wir $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ zeigen und 1b) verwenden.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0, \epsilon = \frac{|\beta|}{2} \Longrightarrow \exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2} \Longrightarrow \forall n \geq N_1 : |b_n| \geq ||\beta| - |b_n - \beta|| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2}.$

Es sei nun $\epsilon > 0 \Longrightarrow \exists N \geq N_1 : \forall n \geq N : |\beta - b_n| < \frac{\epsilon|\beta|^2}{2} \Longrightarrow \forall n \geq \mathbb{N} : \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| \leq \frac{|b_n - \beta|}{|b_n \cdot \beta|} \leq \frac{\epsilon|\beta|^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{|\beta|}{2} \cdot |\beta|} = \epsilon.$

b) Für $M \in \mathbb{N}$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit

$\forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$ und $|b_n| < \frac{\alpha}{2M}$ und $b_n > 0$

$\Longrightarrow \forall n \geq N : a_n > \frac{\alpha}{2}$ und $0 < b_n < \frac{\alpha}{2M}$

$\Longrightarrow \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} > \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha}{2M}} = M.$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ $\square$

<u>Bsp.:</u> $\lim \frac{n^3 + n}{2n^3 - 3n^2 + 1} \overset{:n^3}{=} \lim \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} \overset{2a)}{=}$

$$\frac{\lim(1 + \frac{1}{n^2})}{\lim(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3})} \overset{1)}{=} \frac{\lim 1 + \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n}}{\lim 2 - 3 \cdot \lim \frac{1}{n} + (\lim \frac{1}{n})^3} = \frac{1 + 0 \cdot 0}{2 - 3 \cdot 0 + 0^3} = \frac{1}{2}.$$

$\nearrow 0$

Abgekürzt; $\lim \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \underset{\downarrow\, 0}{\frac{3}{n}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{2}.$ Vgl. auch Übung 22.

Problem: Was passiert z.B. für $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$?

Satz 2: Es seien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

1) $\alpha = \infty, \beta \neq -\infty \implies \lim(a_n + b_n) = \infty;$

2) $\alpha = \infty, \beta \neq \infty \implies \lim(a_n - b_n) = \infty;$

3) $\alpha = \infty, \beta \neq 0 \implies \lim(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty & : \beta > 0 \vee \beta = \infty, \\ -\infty & : \beta < 0 \vee \beta = -\infty; \end{cases}$

4) $\alpha = \infty, \beta \neq 0, \beta \neq \pm\infty \implies \lim \dfrac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \infty & : \beta > 0, \\ -\infty & : \beta < 0; \end{cases}$

5) $\alpha \neq \pm\infty, \beta = \pm\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0.$

Beweis: Ähnlich wie bei Satz 1.
Einige Fälle bleiben übrig.
Def.:

Wenn	so heißt die Folge	vom Typ
$\alpha = \infty, \beta = \infty$	$a_n - b_n$	"$\infty - \infty$"
$\alpha = \infty, \beta = 0$	$a_n \cdot b_n$	"$\infty \cdot 0$"
$\alpha = \infty, \beta = \infty$	$\dfrac{a_n}{b_n}$	"$\dfrac{\infty}{\infty}$"
$\alpha = 0, \beta = 0$	$\dfrac{a_n}{b_n}$	"$\dfrac{0}{0}$"
$\alpha = 1, \beta = \infty$	$a_n^{b_n}$	"1^∞"

In diesen Fällen läßt sich von vornherein nicht sagen, ob der Limes existiert, und, wenn ja, was er gibt.

Bsp.: 1) Die folgenden Folgen sind alle vom

Typ $\frac{\infty}{\infty}$:	$\frac{n^3+n}{2n^3-3n^2+1}$	$\frac{n}{n}$	$\frac{n^2}{n}$	$\frac{n}{n^2}$	$\frac{2n+n(-1)^n}{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty}$	$\frac{1}{2}$	1	∞	0	existiert nicht

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n})$ Typ: "$\infty - \infty$"

$$\overset{\cdot(\sqrt{}+\sqrt{})}{=} \text{(weil } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2\text{)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}} \qquad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{:n}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{2}{n}}}+\sqrt{1-\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}}}} = \frac{3}{2}$$

Numerisch:

$n=1$	$n=10$	$n=100$
$\sqrt{3}\approx 1.73$	$\sqrt{120}-\sqrt{90}\approx 1.47$	$\sqrt{10200}-\sqrt{9900}\approx 1.496$

(Genaugenommen verwenden wir hier außer Satz 1 noch, daß

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\tfrac{2}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{2}{n})},$$

d.h. daß man $\sqrt{\ }$ und lim vertauschen kann. Dies wird in 4.2 näher begründet.)

Satz 3: (Einschließungssatz) Es seien a_n, b_n, c_n 3 Folgen mit $\exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N:$ $a_n\leq b_n\leq c_n$. Weiters sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$. Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$.

Beweis: Für $n\geq N$ sei $|a_n-\alpha|<\epsilon, |c_n-\alpha|<\epsilon$ und $a_n\leq b_n\leq c_n \Longrightarrow \alpha-\epsilon<$ $a_n\leq b_n\leq c_n<\alpha+\epsilon\Longrightarrow |b_n-\alpha|<\epsilon$ $\square$

Bemerkung: Ebenso sieht man:

$[\alpha=\lim a_n,\ \beta=\lim b_n,\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N: a_n\leq b_n]\Longrightarrow \alpha\leq\beta.$

Bsp.:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=?$ $-1\leq\sin n\leq 1$; setze also $a_n=-\dfrac{1}{n}, b_n=\dfrac{\sin n}{n}, c_n=\dfrac{1}{n}\Longrightarrow\forall n:$ $a_n\leq b_n\leq c_n; \lim a_n=\lim c_n=0\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n+5^n}=?$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 6}}{a_n=6}<b_n=\sqrt[n]{6^n+5^n}<\sqrt[n]{2\cdot 6^n}=\underset{\substack{\downarrow\\ 6}}{6\cdot\sqrt[n]{2}=c_n}\quad \text{siehe Hilfssatz}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n+5^n}=6.$

Numerisch: $n=1:11,\ n=2:\sqrt{61}\approx 7.21,\ n=10:\ \sqrt[10]{6^{10}+5^{10}}\approx 6.6$

Vorsicht: Auch wenn $\forall n: a_n<b_n$, so kann doch $\lim a_n=\lim b_n$ sein.

Hilfssatz $d>0\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{d}=1.$

Beweis: 1. Fall: $d=1\surd$

2. Fall: $d>1$.

Für $\epsilon>0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}(\overbrace{1+\epsilon}^{c\text{ in }3.1})^n=\infty$ (s. Bsp. in 3.1)

$\Longrightarrow \exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N: d<(1+\epsilon)^n$

$\Longrightarrow 1<\sqrt[n]{d}<1+\epsilon\Longrightarrow |\sqrt[n]{d}-1|<\epsilon.$ Also $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{d}=1.$

3. Fall: $0<d<1$. Dann gilt

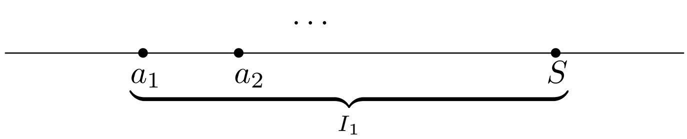
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{d}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{1/d}}_{>1}}\overset{\text{Satz 1}}{=}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/d}}\overset{\text{2.Fall}}{=}\frac{1}{1}=1.\qquad\square$$

<u>Def.:</u> 1) Eine Folge $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, heißt <u>schwach monoton</u> $\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{steigend}}\\ \underline{\text{fallend}}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}:$ $\left\{\begin{array}{l} a_n \le a_{n+1} \\ a_n \ge a_{n+1}\end{array}\right\}$.

2) Eine Folge $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, heißt <u>nach</u> $\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{oben}}\\ \underline{\text{unten}}\end{array}\right\}$ <u>beschränkt</u> $\Longleftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}:$ $\left\{\begin{array}{l} a_n < S \\ a_n > S\end{array}\right\}$.

<u>Satz 4:</u> Wenn die Folge $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, schwach monoton $\left\{\begin{array}{l}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{array}\right\}$ und nach $\left\{\begin{array}{l}\text{oben}\\ \text{unten}\end{array}\right\}$ beschränkt ist, so konvergiert sie.

<u>Beweis:</u> Z.B. für steigend und nach oben beschränkt.
Bild:



Es sei $I_1 = [a_1, S]$. Wir teilen I_1 in die 2 Intervalle $[a_1, \frac{a_1+S}{2}]$ und $[\frac{a_1+S}{2}, S]$ und setzen

$$I_2 = \begin{cases} [\frac{a_1+S}{2}, S] & \text{falls dieses Intervall ein } a_n \text{ enthält, d.h. falls } \exists n : a_n \ge \dfrac{a_1+S}{2}; \\ [a_1, \frac{a_1+S}{2}] & \text{sonst, d.h. falls } \forall n : a_n < \dfrac{a_1+S}{2} \end{cases}$$

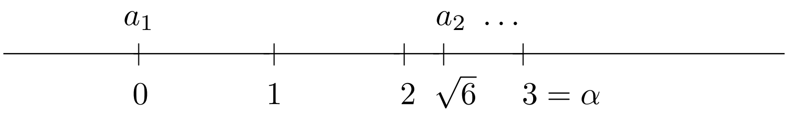
Weil a_n schwach monoton steigend ist, liegen dann ab einem gewissen N alle a_n in I_2, d.h. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : a_n \in I_2$.
Es sei $I_2 = [l_2, r_2]$ und

$$I_3 = \begin{cases} [\dfrac{l_2+r_2}{2}, r_2] & \text{falls ein } a_n \text{ hier enthalten ist;} \\ [l_2, \dfrac{l_2+r_2}{2}] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wieder gilt $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : a_n \in I_3$.
Wenn wir so fortfahren, erhalten wir eine "Intervallschachtelung" $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$. Das Intervall I_k hat die Länge $(S - a_1) \cdot 2^{1-k} \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow \infty \Longrightarrow$ es gibt genau eine reelle Zahl α mit $\forall k : \alpha \in I_k$. (Dies ist die sogenannte "Vollständigkeit" von $\mathbb{R}$.)
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, denn

$\forall \epsilon > 0 : \exists k : (S - a_1)2^{1-k} < \epsilon$ und für dieses k:
$\exists N : \forall n \geq N : a_n \in I_k \Longrightarrow$ für dieses $N : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \epsilon$. $\square$

<u>Bsp.:</u> 1) Es sei $a_1 = 0, a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{6}, a_3 = \sqrt{6 + a_2} = \sqrt{6 + \sqrt{6}}$ etc., d.h. $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ für $n = 1, 2, \ldots$



a) a_n ist nach oben beschränkt, denn $a_1 < 3, a_2 = \sqrt{6} < 3, \ldots,$ wenn $a_n < 3$, so ist $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$. Also $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 3$.

b) a_n ist monoton steigend, denn $a_n < a_{n+1} \Longleftrightarrow a_n < \sqrt{6 + a_n} \overset{(\text{weil } a_n \geq 0)}{\Longleftrightarrow} a_n^2 < 6 + a_n \Longleftrightarrow (a_n + 2)(a_n - 3) < 0 \Longleftrightarrow -2 < a_n < 3 \checkmark$

c) Nach Satz 4 existiert $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

d) Dann ist $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{6 + a_n} \overset{(\S 4)}{=} \sqrt{6 + \lim\limits_{n \to \infty} a_n} = \sqrt{6 + \alpha} \Longrightarrow \alpha^2 = 6 + \alpha \Longrightarrow \alpha \in \{-2, 3\} \Longrightarrow$ (weil α positiv sein muß) $\alpha = 3$.

2) So kann u^v für $u > 0, v \in \mathbb{R}$ definiert werden. Wenn z.B. $u > 1$ und $p_1 < p_2 < \cdots, p_n \in \mathbb{Q}$, mit $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = v > 0$ und $v < q \in \mathbb{Q}$, so ist $\underbrace{u^{p_1}}_{a_1} < \underbrace{u^{p_2}}_{a_2} < \cdots < \underbrace{u^q}_{S} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u^{p_n}$ existiert und definiert u^v (Man zeigt leicht, daß die Auswahl der p_n keine Rolle spielt.) Z.B.: $2^{\sqrt{2}} : p_1 = 1 < p_2 = 1.4 < p_3 = 1.41 \Longrightarrow a_1 = 2, a_2 = 2^{1.4} = \sqrt[10]{2^{14}}, a_3 = 2^{1.41} = \sqrt[100]{2^{141}}$ etc., $2^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Dann gelten die üblichen Rechenregeln, wie etwa
(i) $(a \cdot b)^v = a^v \cdot b^v$;
(ii) $a^{v+w} = a^v \cdot a^w$
(iii) $(a^v)^w = a^{v \cdot w}$
(iv) $0 < a < b \wedge v > 0 \Longrightarrow a^v < b^v$
Wir beweisen z.B. (i).
<u>1. Fall</u> $v = n \in \mathbb{N}$:
$(a \cdot b)^n = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b) = a^n \cdot b^n$, da die Multiplikation in $\mathbb{R}$ assoziativ und kommutativ ist.
<u>2. Fall</u> $v = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$:
$(a \cdot b)^v = \sqrt[n]{a \cdot b} =$ Zahl, deren $n-$te Potenz $a \cdot b$ ist; $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$ nach dem 1. Fall, d.h. $(a \cdot b)^v = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^v \cdot b^v$.
<u>3. Fall</u> $v = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{N}$:

$(a \cdot b)^v = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^v \cdot b^v$ nach den ersten beiden Fällen.

<u>4. Fall</u> $v \in \mathbb{Q},\ v < 0:$

$(a \cdot b)^v = \dfrac{1}{(a \cdot b)^{-v}} = \dfrac{1}{a^{-v}} \cdot \dfrac{1}{b^{-v}} = a^v \cdot b^v$ nach dem 3. Fall.

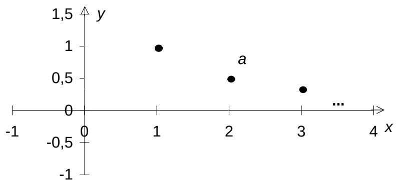
<u>5. Fall</u> $v \in \mathbb{R},\ p_n \in \mathbb{Q},\ p_n \to v$ für $n \to \infty:$

$(a \cdot b)^v = \lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot b)^{p_n} = (4. \text{ Fall}) = \lim\limits_{n\to\infty} (a^{p_n} \cdot b^{p_n}) = (\text{GWS}) = a^v \cdot b^v.$

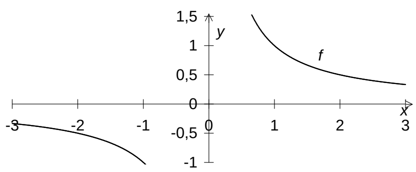
3.3 GRENZWERTE BEI FUNKTIONEN

<u>Bsp.:</u> Die Folge $a_n = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, ist eigentlich die Funktion $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : n \longmapsto \dfrac{1}{n}$.

Graph:



Vergleich mit $f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$



Gefühlsmäßig gilt auch $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

<u>Def. 1:</u> Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, und D enthalte beliebig große x (d.h. $\forall N \in \mathbb{N} : \exists x \in D : x \geq N$).

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha \iff \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in D$ mit $x \geq N : |f(x) - \alpha| < \epsilon$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \left\{\begin{matrix} \infty \\ -\infty \end{matrix}\right\} \iff \forall M \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in D$ mit $x \geq N : \left\{\begin{matrix} f(x) > M \\ f(x) < -M \end{matrix}\right\}$

(Analog $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

(Vergleich zu Folgen $(*)$ in 3.1:

$$\ldots \forall n \geq N : \quad |a_n - \alpha| < \epsilon$$

$$\text{bzw.} \quad \begin{cases} a_n > M \\ a_n < -M \end{cases}$$

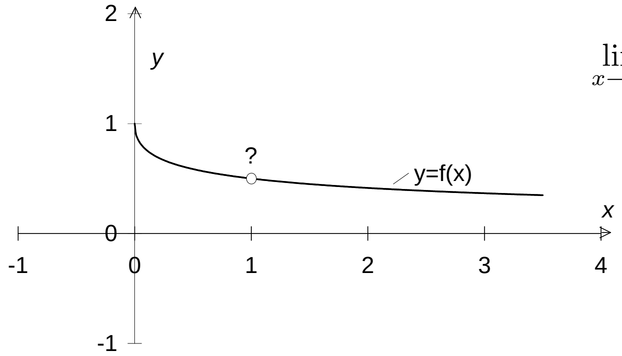
Statt n kommt x, statt a_n $f(x)$.)

<u>Bsp.:</u> $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} -x = -\infty.$

Anders als bei Folgen kann man bei Funktionen auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ definieren.

<u>Bsp.:</u> $f : \{x \in [0,\infty[\, : x \neq 1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(2) &= \sqrt{2}-1 \approx 0.414 \\ f(3) &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \approx 0.366 \\ f(4) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\sqrt{x}} - \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\sqrt{x}+1}} \underset{\text{(genauer später)}}{=} \frac{1}{2}$$

<u>Def. 2:</u> Es seien $x_0, \alpha \in \mathbb{R}, f : D \longrightarrow \mathbb{R}, D$ enthalte beliebig nahe bei x_0 Punkte $x \neq x_0$ (d.h. $\forall \delta > 0 : \exists x \in D : 0 < |x-x_0| < \delta$).

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \iff$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } 0 < |x-x_0| < \delta : |f(x)-\alpha| < \epsilon \qquad (\star)$$

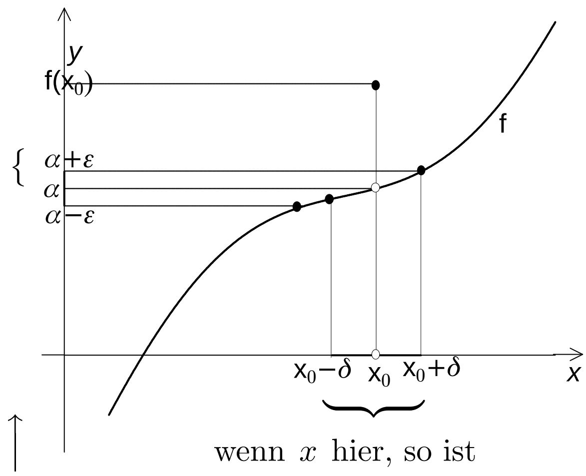
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \begin{Bmatrix} \infty \\ -\infty \end{Bmatrix} \iff$

$$\forall M \in \mathbb{N} : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } 0 < |x-x_0| < \delta : \begin{cases} f(x) > M \\ f(x) < -M \end{cases}$$

$(\star)$ <u>anschaulich</u> Wenn x nahe bei x_0, so ist $f(x)$ nahe bei α.

$(\star)$ <u>in Worten:</u> Für jedes positive ϵ existiert ein positives δ, sodaß für alle $x \neq x_0$, die von x_0 weniger als δ entfernt sind und in D liegen, gilt, daß $f(x)$ von α weniger als ϵ entfernt ist.

($\star$) im Bild
Was $f(x_0)$ ist,
ist für $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
unwichtig!
x_0 muß gar
nicht in D liegen
(vgl. Bsp. oben)



wenn x hier, so ist

$|f(x) - \alpha| < \epsilon$, d.h. $f(x)$ dort.

(Bemerkung: Wenn D Punkte $x \neq x_0$ beliebig nahe bei x_0 enthält, heißt x_0 ein Häufungspunkt von D. Z.B. für $D =]1,2[\cup \{3\}$ sind alle $x \in [1,2]$ Häufungspunkte. Wenn x_0 kein Häufungspunkt von D ist, hat das Symbol $\lim\limits_{x\to x_0}$ keinen Sinn. Z.B. hat $\lim\limits_{n\to n_0} a_n$ keinen Sinn.)

Bsp.: Wir wollen mit Def. 2 $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$ zeigen.

Hier ist $x_0 = 1, \alpha = 1$ und es ist $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$ für $|x - 1| < \delta$ zu zeigen.

Wir setzen $0 < \epsilon < 1$ voraus (wenn ($\star$) für kleine ϵ gilt, dann auch für große).

$|\sqrt{x} - 1| < \epsilon \iff 1 - \epsilon < \sqrt{x} < 1 + \epsilon \iff$ (alles > 0)

$(1-\epsilon)^2 < x < (1+\epsilon)^2 \iff 1 - 2\epsilon + \epsilon^2 < x < 1 + 2\epsilon + \epsilon^2$

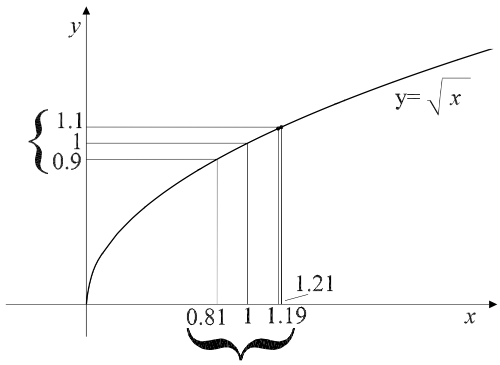
$\iff -2\epsilon + \epsilon^2 < x - 1 < 2\epsilon + \epsilon^2$

$\iff -\epsilon(2-\epsilon) < x - 1 < \epsilon(2+\epsilon)$.

Es ist $0 < \epsilon(2-\epsilon) < \epsilon(2+\epsilon)$.

Wir setzen daher $\delta = \epsilon(2-\epsilon)$. Dann gilt ($\star$), d.h. $|x-1| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x} - 1| < \epsilon$.

Z.B. für $\epsilon = 0.1$ ist $\delta = 0.1 \cdot 1.9 = 0.19$



wenn x hier

so ist $\sqrt{x}$ dort.

Vgl. auch Übung 26.

Die Grenzwertsätze gelten auch für Funktionen:

Satz: Es seien $D \subset \mathbb{R},\ f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \beta$. Dann gilt:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \overset{\pm}{\cdot} g(x)) = \alpha \overset{\pm}{\cdot} \beta$.

2) a) Wenn $\beta \neq 0$, so ist $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$;

b) wenn $\beta = 0$ und $\alpha > 0$ und $g(x) > 0$ für $x_0 \neq x$ bei x_0, so ist $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

3) Wenn $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für ein $\delta > 0$ und alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$, und $\alpha = \beta$, so ist auch $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \alpha$.

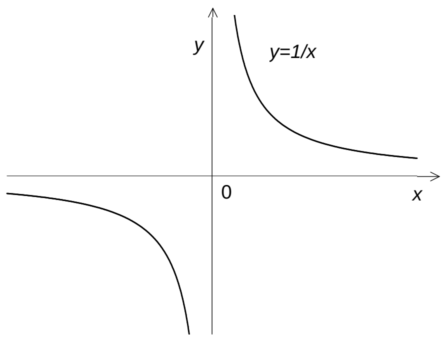
Beweis: Analog zu 3.2

Bsp.:

1) $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \overset{\text{Satz 2)a)}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x} + 1)} \overset{\text{Satz 1)}}{=} \frac{1}{(\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x}) + 1} \overset{\text{voriges Beispiel}}{=} \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = \infty$, da $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ nach 2) b)

Vorsicht: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ existiert nicht.



Wenn $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{1}{x},\ g :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, so ist $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$.

Um das auch aus der ursprünglichen Funktion $\dfrac{1}{x}$ zu erhalten, machen wir

Def. 3: Es seien $x_0, \alpha \in \mathbb{R},\ f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D$ enthalte beliebig nahe bei x_0 Punkte $x > x_0$.

1) $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: |f(x) - \alpha| < \epsilon$.

2) $$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases} \Longleftrightarrow \forall M \in \mathbb{N} : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \begin{cases} f(x) > M \\ f(x) < -M \end{cases}$$

Andere Schreibweisen: $\lim\limits_{x \downarrow x_0}$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}$.

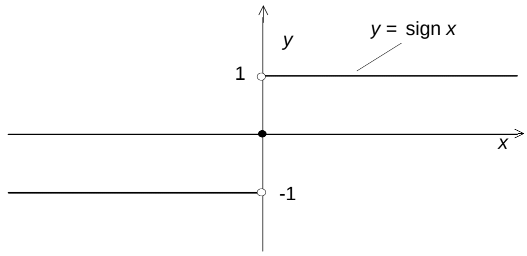
Analog $\lim\limits_{x \nearrow x_0}$, vgl. Übung 30.

<u>Beachte</u> Wenn D ein Intervall um x_0 enthält, so gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\iff$ $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ existieren und sind gleich.

<u>Bsp.:</u> 1) $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, denn $\forall x \in \left]0, \underbrace{\tfrac{1}{M}}_{=\delta}\right[: f(x) = \dfrac{1}{x} > M$.

(hier $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$).

2) $$\operatorname{sign} x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sign} x = 1$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sign} x = -1$$

Vergleich der Definitionen:

	Symbol	Bedingung an $x \in D$	Bedeutung
Def. 1	$\lim\limits_{x \to \infty}$	$x \geq N$	x groß genug
Def. 2	$\lim\limits_{x \to x_0}$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$x \neq x_0$, x nahe bei x_0
Def. 3	$\lim\limits_{x \searrow x_0}$	$x_0 < x < x_0 + \delta$	$x > x_0$, x nahe bei x_0

§4: Stetigkeit

4.1 DEFINITIONEN UND BEISPIELE

Bsp.: Wir haben gezeigt, daß $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1 \quad (= \sqrt{1})$

Allgemein gilt für eine *stetige* Funktion $f: \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ wenn $x_0 \in D$.

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$.
f heißt stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Genauer heißt das:

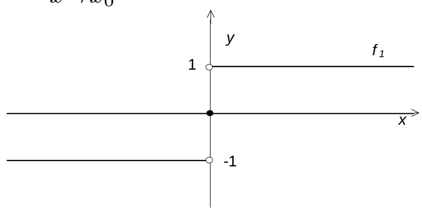
a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert;

b) $f(x_0)$ existiert, d.h. $x_0 \in D$;

c) die zwei sind gleich.

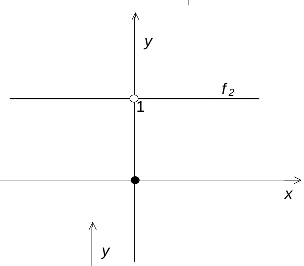
(Bemerkung: In einem Punkt $x_0 \in D$, der kein Häufungspunkt ist (ein sogenannter *isolierter* Punkt), nennt man f auch stetig, obwohl $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nicht sinnvoll ist. Dieser Fall spielt bei uns keine Rolle.)

Bsp.: Es sei $x_0 = 0$.



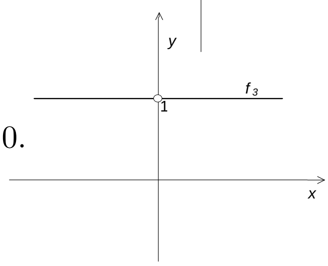
$$f_1 = \operatorname{sign} x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

hier ist a) nicht erfüllt



$$f_2 = \operatorname{sign}^2 x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 : x \neq 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

hier ist c) nicht erfüllt



$f_3 : \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 1$

hier ist b) nicht erfüllt

$f_4 = 1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 1$ ist stetig in 0.

Anschaulich: "In x_0 stetig" heißt, wir müssen beim Zeichnen nicht absetzen in x_0.
Mit $\epsilon\,\delta$: Wenn wir $\alpha = f(x_0)$ in der Definition von $\lim\limits_{x\to x_0}$ setzen, ergibt sich:

$$f \text{ stetig in } x_0 \iff x_0 \in D \wedge \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff x_0 \in D \wedge$$
$$\forall \epsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad (\diamond)$$

$(\diamond)$ heißt: Zu $\epsilon > 0$ kann $\delta > 0$ gefunden werden mit

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig (schlechthin) $\iff \forall x_0 \in D : f$ in x_0 stetig.

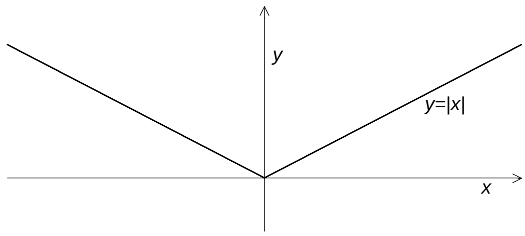
Bsp.: 1) $f(x) = x$ ist stetig, denn:

$$|x - x_0| < \delta \overset{?}{\Longrightarrow} |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \epsilon$$

Setze z.B. $\delta = \epsilon$ (aber $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ ist auch möglich).

2) $f(x) = |x|$ ist stetig, denn:

$$|x - x_0| < \delta \overset{?}{\Longrightarrow} ||x| - |x_0|| < \epsilon$$



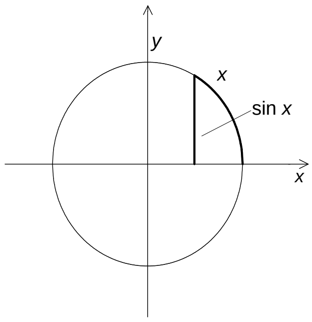
§1, 1.4, Übung 5 sagt: $||x| - |x_0|| \le |x - x_0|$. Also ist $\delta = \epsilon$ möglich.

Beachte: Stetige Funktionen dürfen einen Knick haben, aber keinen Sprung.

3) $f(x) = \sin x$ ist stetig.

Hilfssatz $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \le |x|$

Beweis



$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall x \in [0, \pi] : 0 \le \sin x \le x \\ \forall x \in [-\pi, 0] : 0 \ge \sin x \ge x \end{cases}$$

Allgemein daher $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \le |x|$. $\square$

Beweis, daß $f(x) = \sin x$ stetig ist:
Zu zeigen ist

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\sin x - \sin x_0| < \epsilon \qquad (\diamond)$$

Setze wieder $\delta = \epsilon$. Dann gilt $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow$

$$|\sin x - \sin x_0| \underset{\text{vgl. Üb. 14}}{=} 2 \underbrace{|\sin \frac{x - x_0}{2}|}_{\le \frac{|x - x_0|}{2}} \cdot \underbrace{|\cos \frac{x + x_0}{2}|}_{\le 1} \le |x - x_0| < \epsilon$$

4) $f(x) = \cos x$ ist stetig: siehe Übung 31.

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist stetig (d.h. in allen $x_0 \in D = \{x \in \mathbb{R} : x \ne 0\}$)

denn: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} x} = \frac{1}{x_0}$ für $x_0 \ne 0$

Def.: Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \notin D$. f läßt sich in x_0 stetig fortsetzen $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und $\ne \pm\infty$.

Bemerkung: Die Funktion $\widetilde{f} : D \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} f(x) & : x \ne x_0, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & : x = x_0 \end{cases}$

heißt dann die stetige Fortsetzung von f in x_0. $\widetilde{f}$ ist stetig in x_0.

(Wir setzen hier voraus, daß x_0 ein Häufungspunkt von D ist.)

Bsp.: 1) $\dfrac{1}{x}$ läßt sich nicht stetig in 0 fortsetzen. ($\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht.)

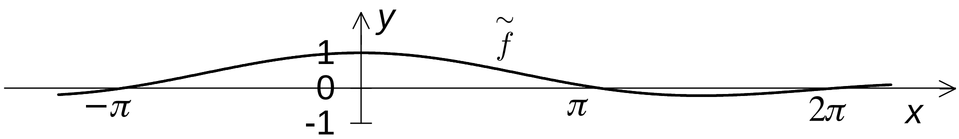
2) $f : \{x \in [0,\infty[\, : x \neq 1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ läßt sich in 1 stetig fortsetzen. Hier ist

$$\tilde{f} : [0,\infty[\,\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

3) $f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ läßt sich in 0 stetig fortsetzen durch

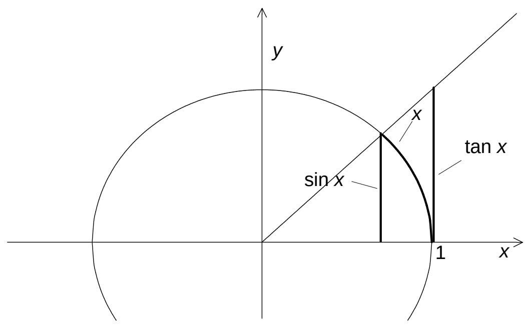
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$$

Bild:



Zeige dazu $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

Beweis:



$\Longrightarrow \forall x \in\,]0, \frac{\pi}{2}[:\ 0 < \sin x < x < \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad / : \sin x$

(Die hintere Ungleichung folgt aus einem Flächenvergleich des größeren Dreiecks mit dem Kreissektor.)

$\Longrightarrow \forall x \in\,]0, \frac{\pi}{2}[: 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

$\dfrac{-x}{\sin(-x)} = \dfrac{x}{\sin x}$, $\cos(-x) = \cos x \Longrightarrow$

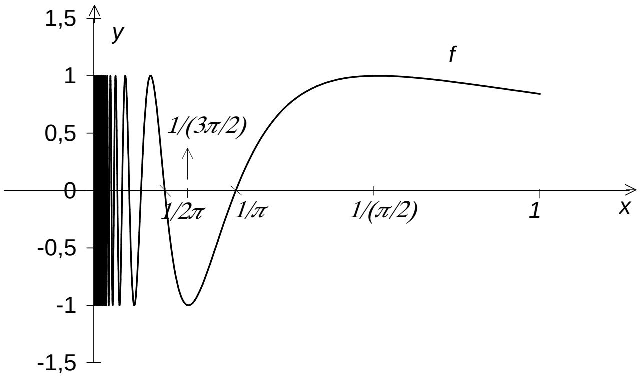
$\forall\, 0 \neq x \in\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Longrightarrow \forall\, 0 \neq x \in\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x;$

cos ist stetig $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nach dem Einschließungssatz.

$\square$

Vorsicht: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ gilt nur, wenn x in Radiant genommen wird. Daher muß in der Differential-/Integralrechnung bei Winkelfunktionen immer in Radiant gerechnet werden. Sonst ist z.B. $(\sin x)' = \cos x$ falsch.

4) $f:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto \sin(\frac{1}{x})$ läßt sich in 0 nicht stetig fortsetzen.
Anschaulich:



4.2 SÄTZE ZUR STETIGKEIT

Satz 1: Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ bzw. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \alpha$ und f sei definiert in einem Intervall um α und stetig in α.
Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha) \qquad (= f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n))$
bzw. $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\alpha) \qquad (= f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)))$.
In Worten: f läßt sich mit "lim" vertauschen.

Beweis Z.B. für Folgen. Es sei $\epsilon > 0$. f stetig in $\alpha \Longrightarrow [\exists\,\delta > 0 : |x-\alpha| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \epsilon]$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow$ zu $\delta : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \delta$;
für dieses N folgt: $\forall n \geq N : |f(a_n) - f(\alpha)| < \epsilon$
Somit: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$. □

Bsp.: 1) $\sqrt{x}$ stetig in $1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})} = \sqrt{1} = 1$

2) Satz 1 rechtfertigt die Substitution in Limites:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\alpha) \overset{(f \text{ stetig in } \alpha)}{=} \lim_{t\to\alpha} f(t). \text{ Z.B. } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1, \text{ wobei}$$

$$x_0 = 0,\ \alpha = 0,\ g(x) = 2x, \text{ und } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : x \neq 0, \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\tan(\frac{\pi x}{2})$ — Typ "$0 \cdot \pm\infty$"

$$= \lim_{t\to 0} t \cdot \tan\underbrace{\left(\frac{\pi(t+1)}{2}\right)}_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}} \qquad t = x-1,\quad x = t+1$$

$$\left(\text{NR: } \tan(\tfrac{\pi}{2}+u) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+u)}{\cos(\frac{\pi}{2}+u)} = \frac{\cos u}{-\sin u} = -\cot u\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} t\cdot(-\cot(\tfrac{\pi t}{2})) = -\lim_{t\to 0} t \cdot \frac{\cos(\frac{\pi t}{2})}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \qquad v = \frac{\pi t}{2},\quad t = \frac{2v}{\pi}$$

$$= -\lim_{v\to 0}\frac{2v}{\pi}\cdot\frac{\cos v}{\sin v} = -\frac{2}{\pi}\underbrace{\lim_{v\to 0}\cos v}_{\cos 0=1}\cdot\underbrace{\lim_{v\to 0}\frac{v}{\sin v}}_{=1} = -\frac{2}{\pi}.$$

<u>Satz 2:</u> 1) $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in $x_0 \in D$. Dann gilt: $f \pm g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) sind stetig in x_0.

2) g stetig in $x_0, \alpha = g(x_0), f$ sei definiert in einem Intervall um α und stetig in α. Dann ist $f \circ g$ stetig in x_0.

<u>Beweis:</u> Wir können annehmen, daß x_0 ein Häufungspunkt von D ist. (Sonst sind die betrachteten Funktionen sowieso in x_0 stetig.)

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) \underset{\text{(GWS)}}{=} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \underset{f,g \text{ stetig in } x_0}{=} f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$ Ebenso für $-, \cdot, :$.

2) g stetig in $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \alpha = g(x_0) \underset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\alpha) = f(g(x_0)) \Longrightarrow$ $f \circ g$ stetig in x_0 $\square$

<u>Bsp.:</u> $\sin x, \cos x$ stetig $\Longrightarrow \sin x \dot{\pm} \cos x$ stetig, $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ stetig (wo definiert), $\sin(\cos x)$ stetig.

<u>Satz 3</u> (ohne Beweis): Wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und monoton ist und $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, so ist auch f^{-1} stetig.
<u>Bsp.:</u> $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ stetig, monoton $\Longrightarrow$ arcsin stetig.

<u>Satz 4:</u> Für $v \in \mathbb{R}$ ist $]\,0, \infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^v$ stetig.

<u>Beweis:</u> a) Es genügt $v \geq 0$ zu betrachten, da man dann auf $x^{-v} = \frac{1}{x^v}$ Satz 2 anwenden kann.
b) Wenn $v \in \mathbb{N}$, so ist $x^v = \underbrace{x \cdots x}_{v-\text{mal}}$ nach Satz 2 stetig.
c) Es sei $0 \leq v \leq n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$$\begin{array}{ll} \forall x \geq 1: & 1 \leq x^v \leq x^n \\ \forall x \leq 1: & 1 \geq x^v \geq x^n \end{array}$$

Der Einschließungssatz liefert daher $\lim\limits_{x\searrow 1} x^v = 1$ und $\lim\limits_{x\nearrow 1} x^v = 1$.
Daher ist $\lim\limits_{x\to 1} x^v = 1$ und x^v stetig in 1.
d) Es sei $x_0 > 0$, $\underbrace{g(x) = \frac{x}{x_0}}_{\text{stetig}}$, $\underbrace{f(x) = x^v}_{\text{stetig in } 1=g(x_0)=\alpha}$ $\Longrightarrow$ (nach Satz 2) $\Longrightarrow f \circ g$ ist stetig in x_0 (hier $\alpha = g(x_0) = 1$).
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{x_0}) = \frac{x^v}{x_0^v} \Longrightarrow \frac{x^v}{x_0^v}$ stetig in $x_0 \Longrightarrow f = x^v$ ist stetig in x_0. $\square$

Bemerkungen:
1) Für $v \geq 0$ ist x^v auch stetig bei $x_0 = 0$. (Beweis ähnlich).
2) Für $u > 0$ ist auch u^x stetig. Dies folgt aus $\lim\limits_{x\to 0} u^x = 1$, vgl. den Hilfssatz in 3.2.

Bsp.: Die Funktionen $\sqrt{x}$, $x^{\sqrt{2}}$, und 2^x sind stetig.

Ergebnis: Polynome, rationale Funktionen, $|x|$, sin, cos, tan, cot, arcsin, arccos, arctan, $x^v, u^x, {}^u\log x$, und Zusammensetzungen mit $+, -, \cdot, :, \circ$ sind alles stetige Funktionen dort, wo sie definiert sind. Z.B.: $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^x \circ x^2$ ist stetig; $\sqrt{x} - \cot(x^2+1)$ ist stetig, wo definiert, d.h. für $x \geq 0$ und $x^2 + 1 \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Speziell: Bei allen diesen Funktionen kann für $x_0 \in D$ $\lim\limits_{x\to x_0}$ durch Einsetzen gefunden werden (denn f in x_0 stetig $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

Also z.B.: $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$

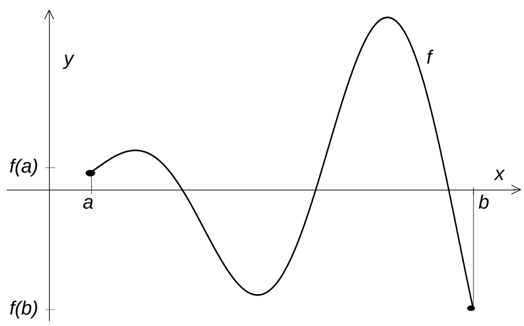
$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{x\to 5} \arctan(x^2 - 2x) = \arctan(15)$$

Aber: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \neq \dfrac{0}{0}$ weil $0 \notin D$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x}_{\text{existiert nicht}} \neq \operatorname{sign} 0 = 0, \text{ weil sign nicht stetig.}$$

Satz 5: (Bolzano, 1781-1848) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gilt: $\exists\, \alpha \in\,]\,a, b\,[\, : f(\alpha) = 0$.
Bild:



hier: 3 mögliche α

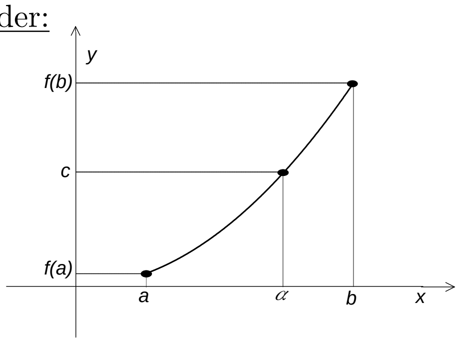
(Beachte: $f(a) \cdot f(b) < 0 \Longleftrightarrow f(a), f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen)

Beweis Es sei $f(a) > 0, f(b) < 0$ (Der andere Fall geht analog; oder Übergang von f zu $-f$.) $I_1 = [a, b]$
1. Fall: $f(\frac{a+b}{2}) = 0$; setze $\alpha = \frac{a+b}{2}$; fertig
2. Fall: $f(\frac{a+b}{2}) > 0$; setze $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$
3. Fall: $f(\frac{a+b}{2}) < 0$; setze $I_2 = [a, \frac{a+b}{2}]$

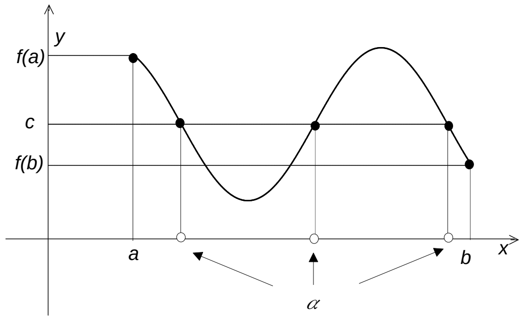
Wenn $I_2 = [l_2, r_2]$, so gilt wieder $f(l_2) > 0, f(r_2) < 0$. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir entweder ein α mit $f(\alpha) = 0$ (d.h. irgendwann 1. Fall) oder eine Intervallschachtelung $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n = [l_n, r_n] \supset \ldots$ (d.h. immer 2. oder 3. Fall), wobei $\forall n : f(l_n) > 0, f(r_n) < 0$. Wie in Satz 4, §3, p. 30, $\exists$ genau ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} l_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

$$f \text{ stetig} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(l_n)}_{\geq 0} \geq 0 \\ f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(r_n)}_{\leq 0} \leq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow f(\alpha) = 0. \qquad \square$$

Folgerung (Zwischenwertsatz) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, $\left\{ \begin{array}{r} f(a) < c < f(b) \\ \text{bzw. } f(a) > c > f(b) \end{array} \right\}$.
Dann gilt: $\exists\, \alpha \in]\, a, b\, [: f(\alpha) = c$.
Bilder:



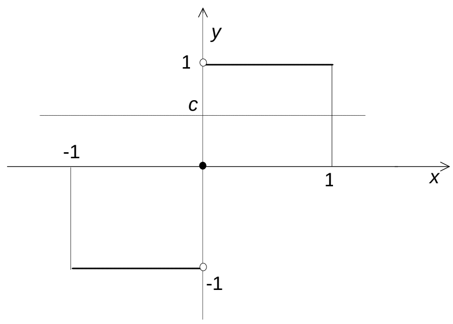
hier: nur 1 mögliches α



3 mögliche α

Beweis: $g(x) = f(x) - c \Longrightarrow g(a) \cdot g(b) = (f(a) - c)(f(b) - c) < 0 \underset{\text{Satz 5}}{\Longrightarrow} \exists\, \alpha : g(\alpha) = 0 \Longrightarrow \exists\, \alpha : f(\alpha) = c$. $\square$

Bsp.: 1) Wenn f nicht stetig ist, läßt sich der ZWS nicht anwenden.
Z.B.: $f : [\underbrace{-1}_{a}, \underbrace{1}_{b}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{sign} x$

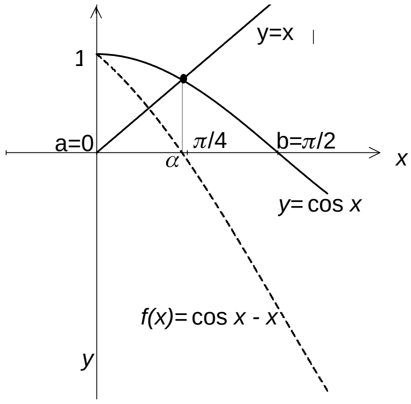


Speziell: $-1 = f(a) < c = \dfrac{1}{2} < 1 = f(b)$ es existiert kein α

aber $\nexists\, \alpha : f(\alpha) = \dfrac{1}{2}$

2) Aufgabe: Bestimme $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos\alpha = \alpha$.
Trick: Setze $f(x) = \cos x - x$
$f(0) = 1 > 0, f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0 \Longrightarrow$ (Satz 5) $\Longrightarrow \exists\, \alpha \in]\, 0, \frac{\pi}{2}\, [: f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \exists\, \alpha \in\,]\, 0, \frac{\pi}{2}\, [: \cos\alpha = \alpha$

Bild:



Bestimmung von α wie im Beweis (Intervallschachtelung): $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \approx -0.078 < 0 \Longrightarrow I_2 = [0, \frac{\pi}{4}]$

$f(\dfrac{\pi}{8}) = 0.53\cdots > 0 \Longrightarrow I_3 = [\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}]$

$f(\dfrac{3\pi}{16}) = 0.24\cdots > 0 \Longrightarrow I_4 = [\dfrac{3\pi}{16}, \dfrac{\pi}{4}]$

etc. $\quad\quad \cdots$

$$I_9 = [\frac{15\pi}{64}, \frac{121\pi}{512}] \approx [0.736, 0.742]$$

$\Longrightarrow \exists\, \alpha \in I_9$ mit $\cos\alpha = \alpha$

Wahrer Wert: $\alpha = 0.739085133\ldots$ (siehe 8.1)

Satz 6 (Weierstraß, 1815-1897)

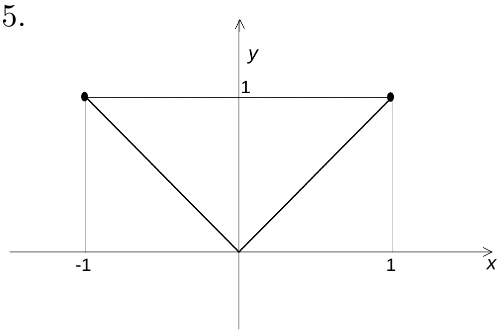
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann $\exists\, \alpha, \beta \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

In Worten: Eine stetige Funktion nimmt auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall ein globales Maximum und ein globales Minimum an.

Beweis: Intervallschachtelung ähnlich Satz 5.

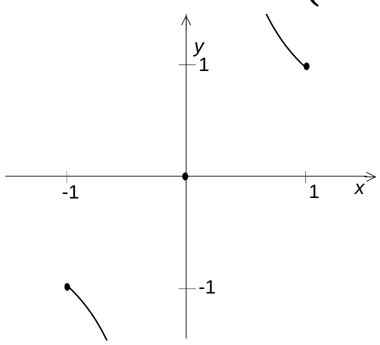
Bsp.: 1) $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$

$\alpha = 0, \beta = 1$ oder $\beta = -1$.



2 mögliche $\beta-$s

2) $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} : x \neq 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$



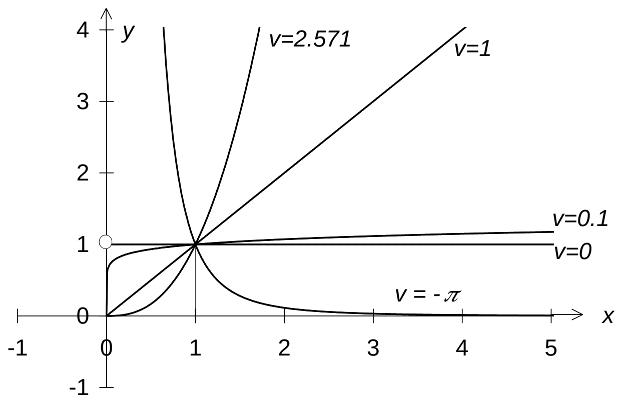
f ist nicht stetig

f hat weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum.

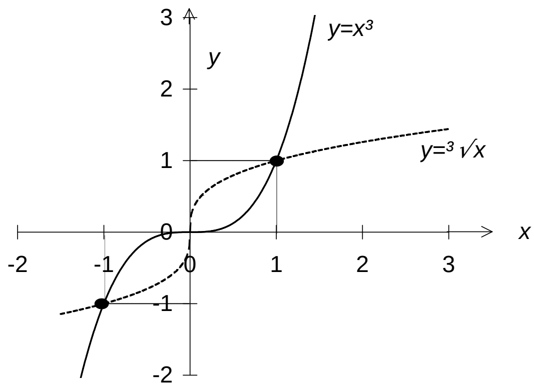
§5: Die Exponentialfunktion

5.1 VERGLEICH POTENZEN UND EXPONENTIALFUNKTION

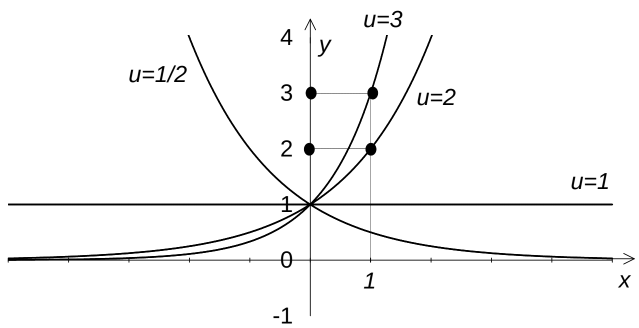
Wiederhole: Für $u > 0$ und $v \in \mathbb{R}$ ist u^v definiert (vgl. 3.2, Seite 31).
$v \in \mathbb{R}$ fest liefert die Potenzfunktionen $]\,0, \infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^v$
Bild:
$v > 0$: monoton steigend
$v < 0$: monoton fallend

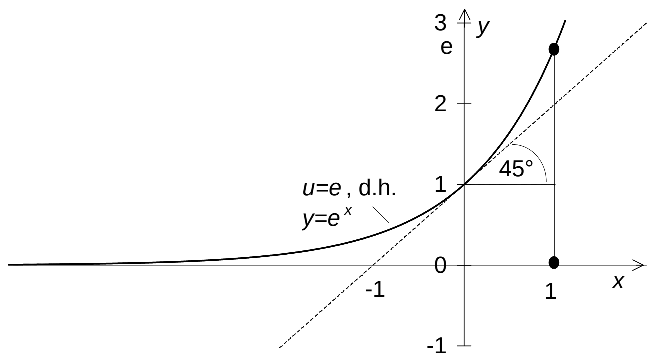


Beachte: Für $v \in \mathbb{Z}$ oder $v = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \ldots, \pm\frac{1}{5}, \ldots$ etc. ist die Potenz x^v auch für $x < 0$ definiert.
Z.B.: $v = 3$ und $v = \frac{1}{3}$

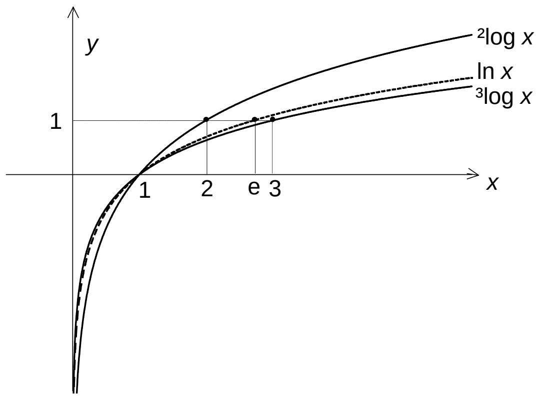


$u > 0$ fest liefert Exponentialfunktionen: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto u^x$
Bild: (für $u > 1$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} u^x = \infty$, vgl. 3.1; speziell für $u = \mathrm{e} = 2.7182\ldots$ (s. 5.2) hat $y = \mathrm{e}^x$ genau Anstieg 1 bei $x = 0$, s. 5.2)





Def.: 1) Die Umkehrfunktion zu $y = u^x$ heißt ${}^u\log x$.
2) $\ln x = {}^{\mathrm{e}}\log x$ ("logarithmus naturalis")
Also gilt: $u^{{}^u\log x} = x,\ {}^u\log(u^x) = x,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x,\ \ln \mathrm{e}^x = x$
Bild:



Rechenregeln: (Setze $a = u^x$, d.h. $x = {}^u\log a$, und in 1) $b = u^y$)
1) $u^{x+y} = u^x \cdot u^y \Longrightarrow {}^u\log(a\cdot b) = {}^u\log a + {}^u\log b$
2) $(u^x)^y = u^{x\cdot y} \quad \Longrightarrow {}^u\log(a^y) = y \cdot {}^u\log a$
3) $u^x = \mathrm{e}^{x \ln u} \quad \Longrightarrow {}^u\log a = \dfrac{\ln a}{\ln u}$
Vorsicht: $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$.

5.2 DIE ZAHL e

Bsp.: Ein Kapital K werde mit dem Faktor $x = (x \cdot 100)\%$ pro Jahr verzinst (z.B. $x = 0.05$ heißt 5%).

Ergebnis nach 1 Jahr	bei ... er Verzinsung
$K\,(1+x)$	jährlich
$K\,(1+\frac{x}{2})^2$	halbjährlich
$K\,(1+\frac{x}{4})^4$	vierteljährlich
$K\,(1+\frac{x}{12})^{12}$	monatlich
$K\,(1+\frac{x}{365})^{365}$	täglich
$K\,\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$	dauernd

Typ des Limes: "1^∞".

Satz 1: Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $a_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Hilfssatz 1: Für $0 \neq x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $a_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, monoton steigend, sobald $n > -x$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n > -x : a_n < a_{n+1}$.

Beweis: Zeige: $a_{n+1} - a_n > 0$, d.h. $\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n > 0$ sobald $n > -x$.

Es seien $u = 1 + \dfrac{x}{n+1},\ v = 1 + \dfrac{x}{n}$.

$$n > -x \Longrightarrow n + x > 0 \Longrightarrow u = \frac{n+x+1}{n+1} > 0,\ v = \frac{n+x}{n} > 0$$

Weiters ist

$$(*) \qquad n(v-u) = n\Big(\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1}\Big) = n\frac{x}{n(n+1)} = \frac{x}{n+1} = u - 1$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow a_{n+1} - a_n = u^{n+1} - v^n &= uu^n - uv^n + uv^n - v^n \\
&= u(u^n - v^n) + v^n(u-1) \\
&= u(u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + v^{n-1}) + v^n n(v-u) \\
&= (u-v)[\underbrace{u^n + u^{n-1}v + \cdots + uv^{n-1} - nv^n}_{\mathrm{Z}}]
\end{aligned}$$

(hier wurde zweierlei verwendet: $(*)$, d.h. $n(v-u) = u-1$ und $u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + u^{n-3}v^2 + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$)

1. Fall: $u = v$: geht nicht, weil $x \neq 0$;

2. Fall: $u > v \Longrightarrow u^n + u^{n-1}v + \cdots + uv^{n-1} > v^n + v^n + \cdots + v^n = nv^n \Longrightarrow Z > 0$;

3. Fall: $u < v \Longrightarrow u^n + u^{n-1}v + \cdots + uv^{n-1} < v^n + v^n + \cdots + v^n = nv^n \Longrightarrow Z < 0$

In jedem Fall ist $a_{n+1} - a_n = (u-v) \cdot Z > 0$. $\square$

<u>Hilfssatz 2:</u> Für $x < 0$ konvergiert $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ und ist $0 < \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 1$.

<u>Beweis:</u> Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $n_0 > -x$. Die Folge $a_n,\ n \geq n_0$, ist

(a) monoton wachsend (Hilfssatz 1),

(b) nach oben beschränkt durch 1, denn $\forall n \geq n_0$:

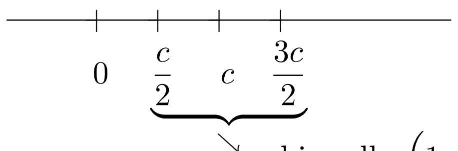
$$\left.\begin{aligned}
&x < 0 \Longrightarrow 1 + \frac{x}{n} < 1 \\
&n \geq n_0 > -x \Longrightarrow 1 > -\frac{x}{n} \Longrightarrow 1 + \frac{x}{n} > 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow a_n \in]\,0,1\,[$$

Nach Satz 4 in 3.2 (p. 30) konvergiert a_n. Dann ist $1 \geq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq a_{n_0} > 0$. $\square$

<u>Hilfssatz 3:</u> Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$.

<u>Beweis:</u> Nach Hilfssatz 2 ist $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{m}\right)^m = c$ mit $c \in]\,0,1]$

$$\Longrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N : \frac{c}{2} < \left(1 - \frac{x^2}{m}\right)^m < \frac{3c}{2}$$



hier alle $\left(1 - \frac{x^2}{m}\right)^m$ für $m \geq N$

$$\Longrightarrow \forall n \geq \sqrt{N} : \frac{c}{2} < \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} < \frac{3c}{2}$$

$$\forall n \geq \sqrt{N} : \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{\frac{c}{2}}} \leq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{\frac{3c}{2}}}$$

(siehe Hilfssatz in 3.2, p. 29)

$\Longrightarrow$ nach dem Einschließungssatz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1.$ $\square$

Beweis von Satz 1:
1. Fall: $x<0:$ Hilfssatz 2
2. Fall: $x=0:$ $\surd$
3. Fall: $x>0:$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

nach GWS und den Hilfssätzen 2 und 3. $\square$

Def.: $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

Bemerkung: Dieser Limes konvergiert sehr langsam:

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2.5937$$
$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2.7048$$
$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2.7169$$

Man rechnet besser mit der Formel

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots$$

(siehe später). Das liefert $\mathrm{e} = 2.71828182845904 58\ldots$

Satz 2: Es gilt $\mathrm{e} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$. (Hier ist $t\in\mathbb{R}$ und $\lim\limits_{t\to\infty}$ wie in Def. 1, 3.3.)

Beweis: Wenn $t\in\mathbb{R}, t>1$ und $n\in\mathbb{N}$ mit $n\le t\le n+1$, so ist $1+\frac{1}{n+1}\le 1+\frac{1}{t}\le 1+\frac{1}{n} \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$

Für $t\longrightarrow\infty$ geht $n\longrightarrow\infty$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}\longrightarrow \mathrm{e}}{\left.1+\frac{1}{n+1}\right\}\longrightarrow 1} = \mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to\mathrm{e}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} = \mathrm{e}$$

Daher ist auch $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e}$ (eine Variante des Einschließungssatzes). $\square$

<u>Satz 3:</u> $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$

<u>Beweis:</u> Beachte x ist fest, z.B. $x = 4$.

1. Fall: $x = 0$ $\quad\surd$ (alles ist 1)

2. Fall: $x > 0$

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{t}{x}}\right)^{t/x}\right)^x =$(Substitution: $\frac{t}{x} = u$, $t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$) $=$

$\lim\limits_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)^x =$ (4.2, Sätze 1 und 4)$= \left(\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)^x \underset{\text{Satz 2}}{=} \mathrm{e}^x.$

Die Gleichung $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = \mathrm{e}^x$ heißt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, t \geq N : \left|\left(1+\frac{x}{t}\right)^t - \mathrm{e}^x\right| < \epsilon$$

Dann gilt auch $\forall \epsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall \underset{\in\mathbb{N}}{n} \geq N : \left|\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{a_n} - \mathrm{e}^x\right| < \epsilon,$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

3. Fall: $x < 0$. Nach dem Beweis von Satz 1 ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$

$\underset{(-x>0,\ 2.\text{Fall})}{=} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^x$ $\square$

<u>Satz 4:</u> 1) $\forall x \in]-1,1[: 1 + x \leq \mathrm{e}^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ $\quad$ 2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1}$

<u>Beweis:</u> 1) a) Nach Hilfssatz 1 ist $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ monoton steigend, sobald $n > -x$ (für $x \neq 0$).

Wenn $x \in]-1,1[$ und $x \neq 0$, so ist $1 > -x \implies \underbrace{a_1}_{1+x} < a_2 < \cdots < \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^x$

$\implies 1 + x < \mathrm{e}^x$ $\qquad$ (für $x = 0$: " $=$")

b) $\forall x \in]-1,1[: \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} \leq \dfrac{1}{1-x}$, denn $0 < 1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$ nach a).

2) $\forall x \in]-1,1[: 1 + x \leq \mathrm{e}^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ $\qquad / - 1$

$\implies x \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq \dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{1-1+x}{1-x} = \dfrac{x}{1-x}$ $\qquad / : x$

Für $0 < x < 1$ folgt: $1 \leq \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$

Für $-1 < x < 0$ folgt: $1 \geq \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \geq \dfrac{1}{1-x}$.

Der Einschließungssatz gibt:

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1 \text{ und } \lim_{x\nearrow 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1, \text{ d.h. } \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1. \qquad \square$$

Bild zu 1):

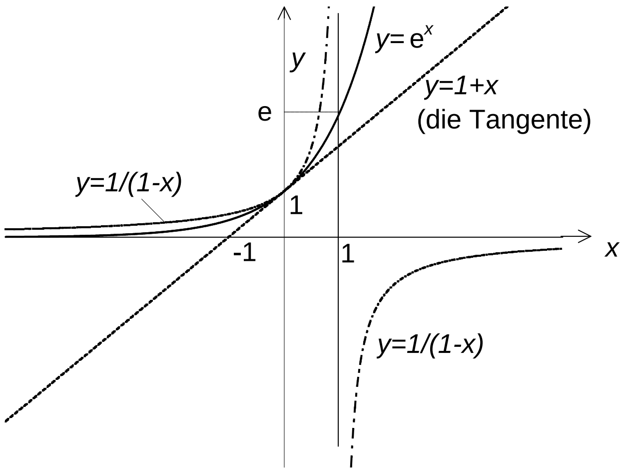
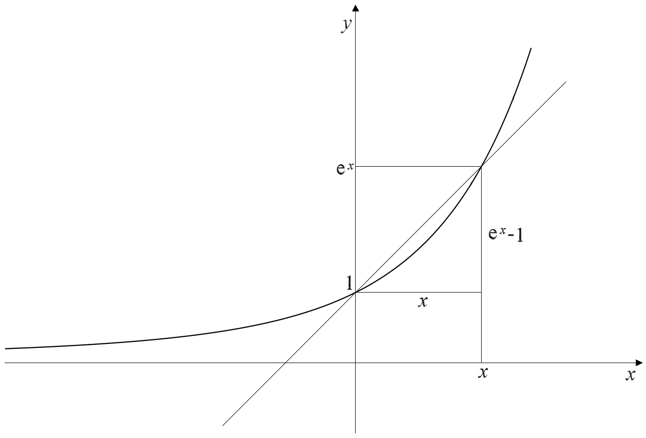


Bild zu 2):



Diese Sekante hat Anstieg $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

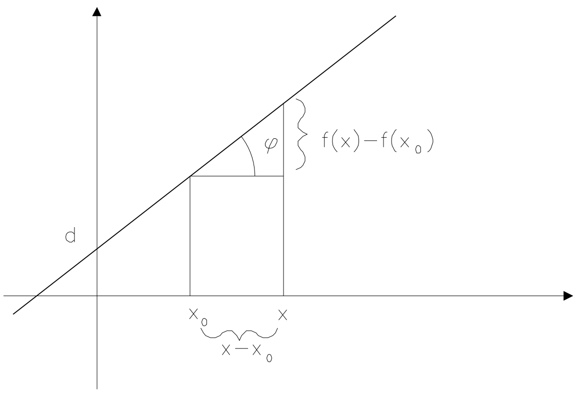
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=$ Anstieg der Tangente.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$ heißt, daß die Tangente in (0,1) den Winkel 45° zur x-Achse hat.
Das gilt nur für e^x, nicht aber für $y=2^x$ oder $y=10^x$ oder irgendeine Exponentialfunktion $y=u^x$ mit $u\neq \mathrm{e}$.

KAPITEL II: DIFFERENTIALRECHNUNG

§6: Die 1. Ableitung

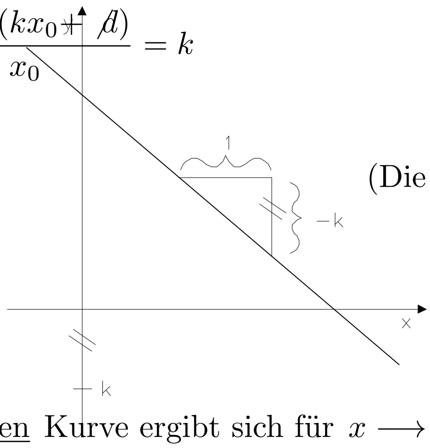
Def.: Für eine Gerade $y = f(x) = kx + d$ wird k als Anstieg oder Steigung bezeichnet.



Es gilt $\tan\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{kx + \cancel{d} - (kx_0 + \cancel{d})}{x - x_0} = k$

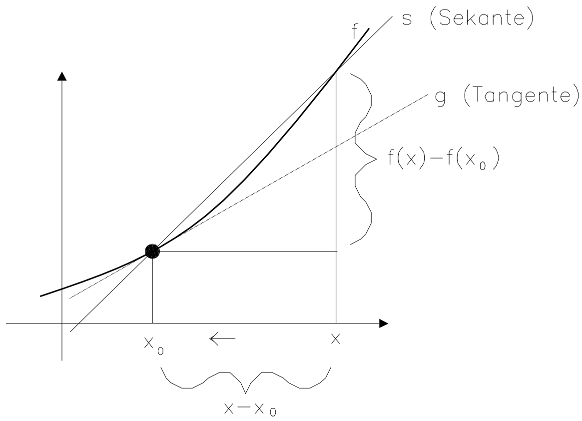
Speziell $k = f(x_0 + 1) - f(x_0)$.

Für $k < 0$ ist die Gerade monoton fallend



(Die Länge der Strecke ist $|k| = -k$)

Der Anstieg k im Punkt x_0 einer krummen Kurve ergibt sich für $x \longrightarrow x_0$:



$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = Anstieg der Sekante s durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k =$ Anstieg der Tangente g

Beachte: Anders als bei Geraden hängt k hier von x_0 ab. Schreibweise: $k = f'(x_0)$.

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x_0 \in D \subset \mathbb{R}$.

1) f heißt in x_0 differenzierbar $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ existiert und $\neq \pm\infty$

2) f heißt (schlechthin) differenzierbar $\Longleftrightarrow \forall x_0 \in D : f$ in x_0 differenzierbar.
$f' : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f'(x)$ heißt 1. Ableitung von f.

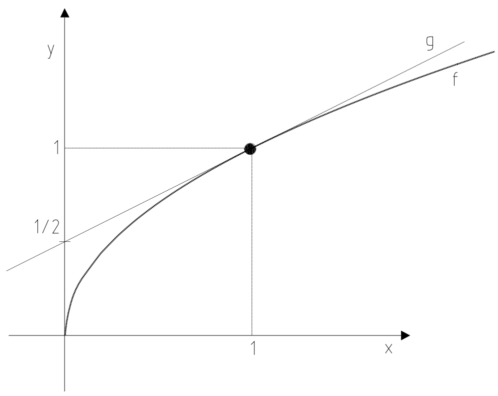
3) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so heißt die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ die Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
Gleichung der Tangente: $y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Bsp.: 1) $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} & : x_0 > 0 \\ \infty & : x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{(Vgl. Übung 29)}$$

f ist also differenzierbar in allen $x_0 > 0$ und dort ist $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Für $x_0 = 1 : f(1) = 1,\ f'(1) = \dfrac{1}{2}$

Tangente: $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$



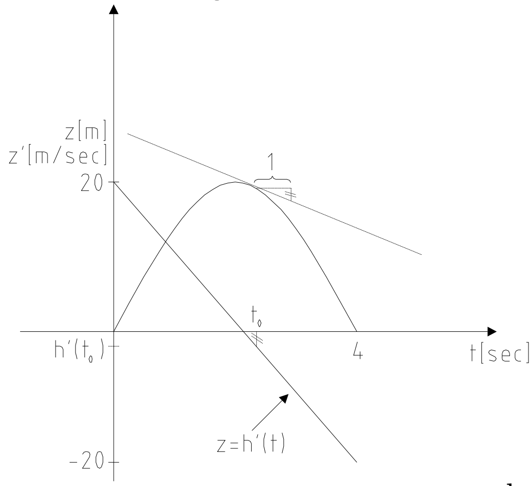
In $x_0 = 0$ wird die Tangente senkrecht. Dort ist f nicht differenzierbar!

2) (Vgl. 2.1, p. 10) $h : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto -5t^2 + 20t$
$z = h(t) =$ Höhe zur Zeit t

$$h'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{-5t^2+20t-(-5t_0^2+20t_0)}{t-t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{-5(t^2-t_0^2)+20(t-t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}[-5(t+t_0)+20] = -10t_0+20$$

Also: $h'(t) =$ Geschwindigkeit zur Zeit $t = -10t + 20\,[\text{m/sec}]$
Bild:



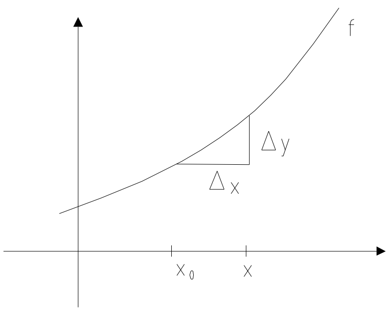
(genau bei Anfangsgeschwindigkeit $2g \approx 20$ ist das Max. von h gleich dem von h')

$$\left.\begin{array}{l} h' > 0 \\ h' = 0 \\ h' < 0 \end{array}\right\} \text{heißt, die Geschwindigkeit} \left\{\begin{array}{l} = \text{ nach oben} \\ = 0 \\ = \text{ nach unten,} \end{array}\right. \quad \text{d.h. } h \left\{\begin{array}{l} \text{ist wachsend} \\ \text{hat waagrechte Tangente} \\ \text{ist fallend} \end{array}\right.$$

<u>Andere Schreibweisen:</u>

1) Oft setzt man $x = x_0 + h$. (Dieses h hat nichts mit dem vorigen $h(t)$ zu tun!) Dann ist $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

2) Oft setzt man $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$. Dann ist $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



Die Sekantensteigung $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nennt man auch <u>Differenzenquotient</u>.

3) Für f' schreibt man auch $y', f(x)', \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (wenn die unabhängige Variable x und die abhängige Variable y heißt: im letzten Beispiel stattdessen $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ oder $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$). Man nennt $f' = y' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ auch Differentialquotient.

Vorsicht: a) Die Buchstaben Δ und d haben alleine keinen Sinn, d.h. $\Delta x \neq \Delta \cdot x$, $\mathrm{d}x \neq \mathrm{d} \cdot x$. Δx und $\mathrm{d}x$ sind Gesamtsymbole.

b) Auch $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}f$ haben zunächst allein keinen Sinn, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist ein Gesamtsymbol für f'. In §11 wird $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}f$ ein Sinn verliehen, so daß tatsächlich $f' = \mathrm{d}f : \mathrm{d}x$.

c) Wenn man y' oder $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ schreibt, so bezieht man sich auf eine zuvor festgelegte Funktion $y = f(x)$.

Satz 1: f in x_0 differenzierbar $\Longrightarrow$ f in x_0 stetig.

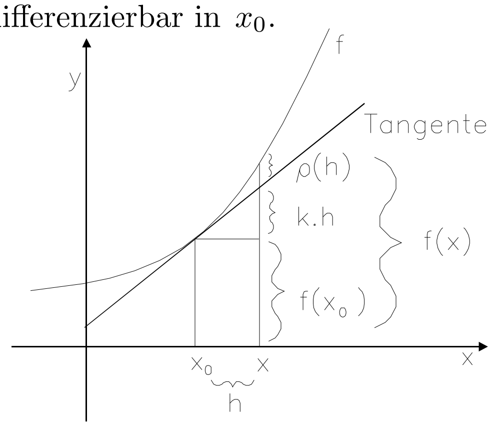
Beweis: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)]$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)\right] \underset{\text{GWS}}{=} f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{f(x_0)}_{\text{Konstante!}} = f(x_0) \Longrightarrow f \text{ stetig in } x_0. \qquad \square$$

Bsp.: $f(x) = |x|$ ist stetig (siehe 4.1, p. 38) aber in 0 nicht differenzierbar, denn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ existiert nicht (vgl. 3.3, p. 36).

Was ist der Unterschied zwischen stetig und differenzierbar?
Anschaulich: Stetige Funktionen dürfen Ecken haben, differenzierbare nicht.
Genauer: f sei differenzierbar in x_0.
Bild:
Setze $h = x - x_0$
$k = f'(x_0)$



$\varrho(h)$ sei wie im Bild $\Longrightarrow$ $f(x) = f(x_0+h) = f(x_0) + k \cdot h + \varrho(h)$

f differenzierbar in $x_0 \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = k$

$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)-kh}^{\varrho(h)}}{h} = 0$$

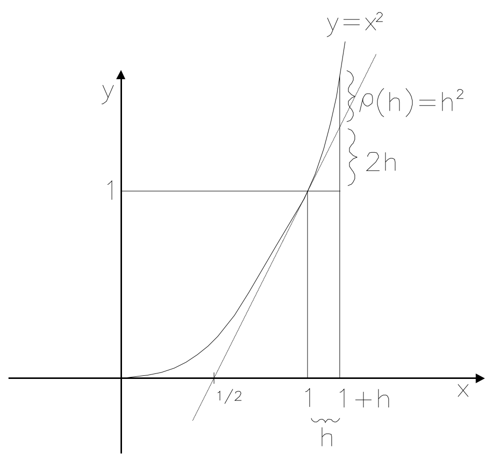
$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \exists \varrho(h) : f(x_0+h) = f(x_0) + kh + \varrho(h) \wedge \lim_{h\to 0} \frac{\varrho(h)}{h} = 0.$$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho(h)}{h} = 0$ heißt, daß $\varrho(h)$ für $h \longrightarrow 0$ schneller als linear gegen 0 geht.
Beachte: ϱ hängt natürlich auch von x_0 ab. Wir halten x_0 im Moment fest.

Def.: Eine Funktion $\varrho(h)$ heißt vom Typ $o(h)$ $\Longleftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \varrho(h)/h = 0$.

Ergebnis:
Satz 2: f ist in x_0 differenzierbar $\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \exists\, \varrho(h)$ vom Typ $o(h) : f(x_0+h) = f(x_0) + k \cdot h + \varrho(h)$.

Bsp.: $f(x) = x^2,\ x_0 = 1,\ f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 = k$
$\varrho(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - k \cdot h = (1+h)^2 - 1 - 2 \cdot h = h^2$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0 \checkmark$
$\varrho(h)$ ist also vom Typ $o(h)$.



§7: Die Technik des Differenzierens

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Bsp.: 1) $f(x) = c$ (eine Konstante) $\Longrightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c-c}{x-x_0} = 0$. Also: $(c)' = 0$.

2) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1$. Also: $x' = 1$

3) $f(x) = x^n, n\in\mathbb{N} \Longrightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^n - x_0^n}{x-x_0} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0} \quad \text{(vgl. Übung 38)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} (\underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\cdots+x_0^{n-1}}_{n \text{ Terme}}) = n\,x_0^{n-1}$$

Also: $(x^n)' = n\,x^{n-1}$.

4) $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} =$ (Übung 14)

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\underbrace{\frac{x-x_0}{2}}_{s}} \cdot \lim_{x\to x_0} \cos\underbrace{\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{t} = \text{(siehe 4.2,}$$

Satz 1) $= \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\sin s}{s} \cdot \lim\limits_{t\to x_0} \cos t = 1\cdot\cos x_0 = \cos x_0$.

Also $(\sin x)' = \cos x$.

5) $(\cos x)' = -\sin x$, siehe Übung 40.

6) $f(x) = \mathrm{e}^x \Longrightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0}}{x-x_0} = = \lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^{x_0} \dfrac{\mathrm{e}^{x-x_0}-1}{x-x_0} = \mathrm{e}^{x_0} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} =$
$\mathrm{e}^{x_0}\cdot 1 = \mathrm{e}^{x_0}$ nach 5.2, Satz 4, p. 49.

Also gilt $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Um $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$ zu berechnen, beweisen wir die Quotientenregel.

Satz 1: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, g: D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D \subset \mathbb{R}, f, g$ seien in x_0 differenzierbar, $c\in\mathbb{R}$.
Dann gilt: $f\pm g, cf, f\cdot g$ und $\dfrac{f}{g}$ (falls $g(x_0)\neq 0$) sind in x_0 differenzierbar und

a) $$\begin{aligned}(f\pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0)\\ (cf)'(x_0) &= c\cdot f'(x_0)\end{aligned} \qquad \text{(“die Ableitung ist linear”)}$$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ("Produktregel")

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ ("Quotientenregel")

Beweis: a) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}$

$\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] \underset{\text{GWS}}{=} f'(x_0) + g'(x_0)$

Ebenso für $f - g,\ c \cdot f$.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x)\right] + \lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x_0) \cdot \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]$

$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. (Hier wurde §6, Satz 1 verwendet!)

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} \overbrace{=}^{\cdot g(x) \cdot g(x_0)} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$

$= \dfrac{1}{g(x_0)^2} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x_0) \dfrac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\right]$

$= \dfrac{1}{g(x_0)^2} [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)(-g'(x_0))]$. □

Bemerkungen: 1) Wenn wir (x_0) weglassen, gilt kurz $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

2) Zusammenhang zwischen Produkt- und Quotientenregel:

$$f = \frac{f}{g} \cdot g \Longrightarrow f' = \left(\frac{f}{g} \cdot g\right)' = \left(\frac{f}{g}\right)' g + \frac{f}{g} \cdot g' \Longrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' - \frac{f}{g} g'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Bsp.: 7) $y = x \sin x \Longrightarrow y' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x \cdot \cos x$

8) $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Longrightarrow y' = \dfrac{\sin' x \cdot \cos x - \cos' x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Ebenso: $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, siehe Übung 41.

9) $y = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow y' = \left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{1'x^n - 1\cdot(x^n)'}{x^{2n}} = \dfrac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

<u>Also:</u> $\forall m \in \mathbb{Z} : (x^m)' = m \cdot x^{m-1}$. Um $(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})'$ zu berechnen, beweisen wir zuerst die Kettenregel.

<u>Satz 2</u> (Kettenregel) g sei in x_0 differenzierbar, f sei definiert in einem Intervall um $t_0 = g(x_0)$ und sei differenzierbar in t_0. Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(t_0)\cdot g'(x_0) = \underbrace{f'\big(g(x_0)\big)}_{\text{„äußere Abl."}} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{\text{„innere Abl."}}$$

In x statt x_0 geschrieben: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

<u>Beweis:</u> $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{(f\circ g)(x) - (f\circ g)(x_0)}{x - x_0} = = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]$

$\displaystyle= \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(t_0)\cdot g'(x_0).$

(Zur Substitution $t = g(x)$ wird Satz 1, 4.2, p. 40 verwendet, d.h. $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f_1(g(x)) =$

$\displaystyle f_1(t_0) = \lim_{t\to t_0} f_1(t)$, wobei $f_1(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} & : t \neq t_0, \\ f'(t_0) & : t = t_0.) \end{cases}$ □

<u>Bemerkung:</u> Quotientenregel aus der Kettenregel + Produktregel:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \underbrace{-\frac{1}{g^2}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{g'}_{\text{innere}} = -\frac{g'}{g^2}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} \ \checkmark$$

10) Anwendung der Kettenregel:

a)

f	g	$y = f\circ g = f(g(x))$	$y' = \begin{cases} f'(g(x))\cdot g'(x) \\ \text{außen} \cdot \text{innen} \end{cases}$
$\sin x$	x^2	$y = \sin(x^2)$	$y' = \cos(x^2)\cdot 2x$
x^2	$\sin x$	$y = \sin^2 x = (\sin x)^2$	$y' = 2\sin x \cdot \cos x$
e^x	$\sin x$	$y = \mathrm{e}^{\sin x}$	$y' = \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x$
$\sin x$	e^x	$y = \sin(\mathrm{e}^x)$	$y' = \cos(\mathrm{e}^x)\cdot \mathrm{e}^x$
f	$\cos x$	$y = f(\cos x)$	$y' = f'(\cos x)\cdot(-\sin x)$
x^5	$g(x)$	$y = g(x)^5$	$y' = 5g(x)^4\cdot g'(x)$
$\sqrt{x}$	$\sin x$	$y = \sqrt{\sin x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x$

$((\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, siehe §6, Beispiel 1)

b) Bei mehr Verknüpfungen wird die Kettenregel öfters angewendet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{\sin(x^2)} \underset{\text{1.mal Kett.}}{=} \underbrace{\mathrm{e}^{\sin(x^2)}}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{(\sin(x^2))'}_{\text{innen}} \underset{\text{2.mal Kett.}}{=} \mathrm{e}^{\sin(x^2)} \cdot \underbrace{\cos(x^2)}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{innen}}$$

Kurz: $(\mathrm{e}^{\sin(x^2)})' = \underbrace{\mathrm{e}^{\sin(x^2)}}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{\cos x^2}_{\text{Mitte}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{innen}}$

Oder: $(\tan(\mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}}))' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2(\mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}})}}_{\text{ganz außen}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}}}_{\text{weiter innen}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}}_{\text{noch weiter innen}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\text{ganz innen}}$

Bsp.: 11) $y = a^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\mathrm{e}^{x\cdot\ln a}}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{\ln a}_{\text{innen}} = a^x \cdot \ln a$

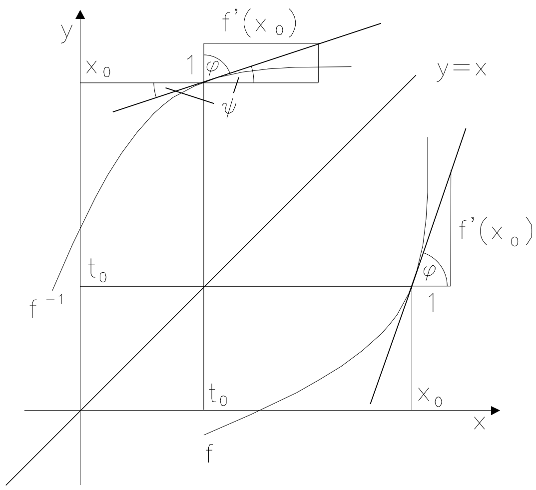
Also: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Um $\arccos'$ zu berechnen, beweisen wir erst

Satz 3: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei monoton und stetig, $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in D$, $t_0 = f(x_0)$, f sei in x_0 differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in t_0 differenzierbar und $\boxed{(f^{-1})'(t_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$

1. Beweis: (Bild)

$$(f^{-1})'(t_0) = \tan\psi = \frac{1}{f'(x_0)}$$



2. Beweis: (rechnerisch)

$0 \neq f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$ (Substitution $f(x) = t$, $x = f^{-1}(t)$, $x \to x_0 \Rightarrow t = f(x) \to f(x_0) = t_0$) $= \lim\limits_{t\to t_0} \frac{t-t_0}{f^{-1}(t)-f^{-1}(t_0)} \implies (f^{-1})'(t_0) =$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(t_0)}{t-t_0} \overset{\text{(GWS)}}{=} \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

Bemerkung: Zusammenhang zwischen Kettenregel und Umkehrfunktionsregel:

$f^{-1}(f(x)) = x \implies$ (Kettenregel)

$$\implies (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = x'(x_0) = 1 \implies (f^{-1})'(t_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

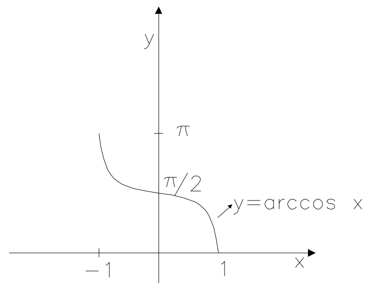
Bsp.: 12) $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x \Longrightarrow f^{-1} = \arccos;$
$x_0 \in]\, 0, \pi\, [\Longrightarrow t_0 = f(x_0) = \cos x_0 \wedge f'(x_0) = -\sin x_0 \neq 0$

$$\Longrightarrow \arccos'(t_0) = \frac{1}{\cos'(x_0)} = \frac{1}{-\sin x_0} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x_0}} = -\frac{1}{\sqrt{1-t_0^2}}$$

(Beachte: für $x_0 \in [0, \pi]$ ist $\sin x_0 = +\sqrt{1-\cos^2 x_0}$)

Also: $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beachte: In $x_0 = \pm 1$ ist arccos nicht differenzierbar, die Tangente ist senkrecht.
(Funktion fallend $\Longrightarrow y' < 0$)



Ebenso:

$y = \arcsin x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in]-1, 1[$,

(folgt auch aus $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$)

$y = \arctan x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$: siehe Übung 44.

13) $f(x) = e^x \Longrightarrow f^{-1}(x) = \ln x; \quad e^{x_0} = t_0 \Longrightarrow \ln'(t_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{e^{x_0}} = \dfrac{1}{t_0}.$

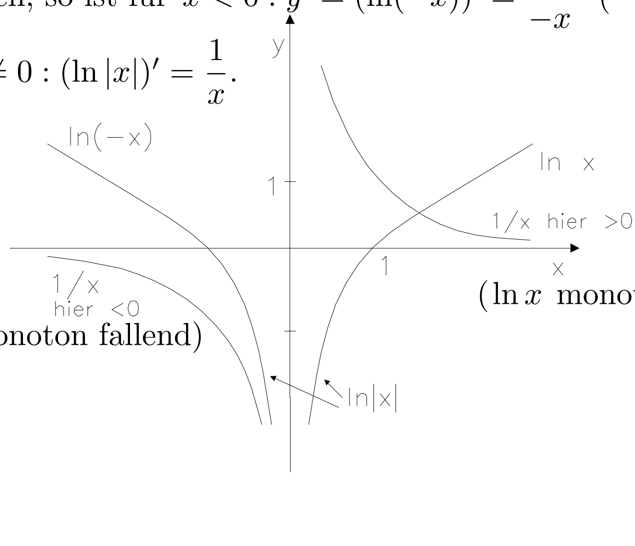
Also: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

Dies gilt für $x > 0$, da $\ln x$ nur für $x > 0$ definiert ist.

Wenn wir $y = \ln |x|$ setzen, so ist für $x < 0 : y' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}.$

Also gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0 : (\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}.$

Bild:



(ln x monoton steigend)

(ln$(-x)$ monoton fallend)

14) Für $r \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ sei $y = x^r = \mathrm{e}^{r \ln x} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\mathrm{e}^{r \ln x})' = \underbrace{\mathrm{e}^{r \ln x}}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{\dfrac{r}{x}}_{\text{innen}} = x^r \cdot \dfrac{r}{x} =$

rx^{r-1}, vgl. Bsp. 3 und 9.

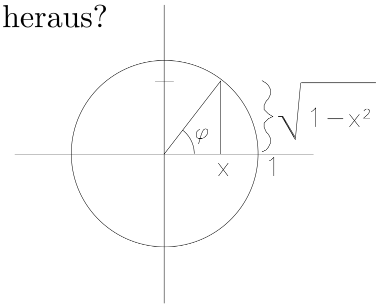
15) $y = {}^u\!\log x = \dfrac{\ln x}{\ln u} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln u}$.

16) $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big)$, $|x| < 1$,

$$x \neq 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1 + \frac{1-x^2}{x^2}} \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) - 1 \cdot \sqrt{1-x^2}}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + 1 - x^2} \cdot \frac{-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{-x^2 - (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos'(x)$$

Warum kommt $f' = \arccos'$ heraus?
Bild:

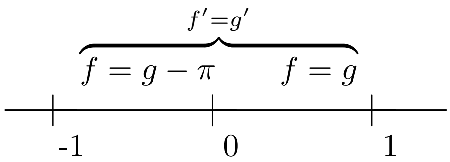


$$\varphi = \arccos x$$
$$= \arctan\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big)$$
für $x \in \,]\,0, 1]$

Vorsicht: Für $x \in [-1, 0\,[$ ist $-\pi + \underbrace{\arccos x}_{g(x)} = \underbrace{\arctan\Big(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big)}_{=f(x)}$

Aber in beiden Fällen ist $f'(x) = (\arccos x)'$.
Allgemein gilt: $f' = g'$ auf einem Intervall $\Longleftrightarrow f = g +$ Konstante
(siehe §8, Satz 4)

Bild ($g = \arccos$)



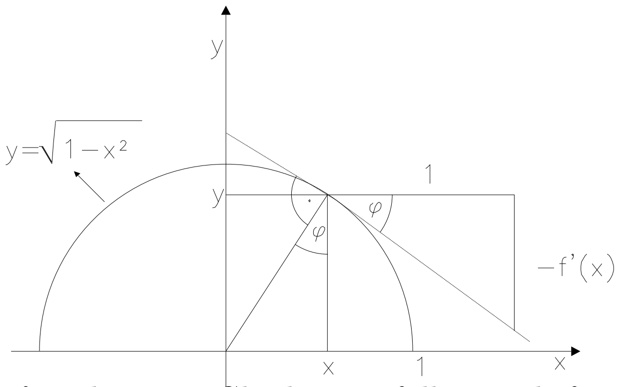
17) $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow y' = f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{y}$

Eleganter so: $x^2 + f(x)^2 = 1 \qquad \Big/ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\Longrightarrow 2x + \underbrace{2f(x)}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innen}} = 0 \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)} = -\dfrac{x}{y}$

Dies nennt man implizites Differenzieren. Vgl. auch Übung 45.

Geometrisch:



$$\Longrightarrow \frac{f'(x)}{1} = -\frac{x}{y}$$

18) Wenn 2 Funktionen f und g eine Gleichung erfüllen, so liefert das Differenzieren der Gleichung nach x eine lineare Beziehung zwischen $f'(x)$ und $g'(x)$.

Z.B.: Aus einem kugelförmigen Gasballon entweicht zur Zeit t_0 Gas mit der Geschwindigkeit $2\,\mathrm{l/min} = 2\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{min}$. Mit welcher Geschwindigkeit verringert sich seine Oberfläche zur Zeit t_0, wenn der Radius des Ballons zu diesem Zeitpunkt $5\,\mathrm{m}$ ist?

Unabhängige Variable: t

Abhängige Variable: Radius $r(t)$, Volumen $V(t)$, Oberfläche $F(t)$

1. Gleichung (Formel für Kugelvolumen) $V(t) = \dfrac{4\pi r(t)^3}{3}$ (s. 13.2)

2. Gleichung (Formel für Kugeloberfläche) $F(t) = 4\pi r(t)^2$ (s. 13.4)

Def.: Bei Differentiation nach der Zeit wird gewöhnlich $\dot{}$ statt $'$ (d.h. z.B. $\dot{r}$ statt r') geschrieben.

Die 1. Gleichung gibt $\dot{V}(t) = \dfrac{4\pi}{3} \cdot 3r(t)^2 \cdot \dot{r}(t)$,

Die 2. Gleichung gibt $\dot{F}(t) = 4\pi \cdot 2r(t) \cdot \dot{r}(t)$.

Wenn $\dot{V}(t_0) = -2\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{min}$, $r(t_0) = 50\,\mathrm{dm}$, so folgt $-2 = 4\pi \cdot 50^2 \cdot \dot{r}(t_0) \Longrightarrow \dot{r}(t_0) = \dfrac{-2}{4\pi \cdot 50^2}\,\dfrac{\mathrm{dm}}{\mathrm{min}} \Longrightarrow \dot{F}(t_0) = 4\pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot \dfrac{-2}{4\pi \cdot 50^2} = \dfrac{-4}{50} = -0.08\,\dfrac{\mathrm{dm}^2}{\mathrm{min}} = -8\,\dfrac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{min}}$.

Ergebnis: Zum Zeitpunkt t_0 schrumpft die Oberfläche mit der Geschwindigkeit $8\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$. Vgl. auch Übung 46.

Tabelle

y	c	x	$x^r,\ r \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	e^x	$\ln\lvert x\rvert$
y'	0	1	$r\,x^{r-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$	e^x	$1/x$

y	a^x	${}^a\log x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\operatorname{arccot} x$
y'	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

§8: Anwendungen der 1. Ableitung

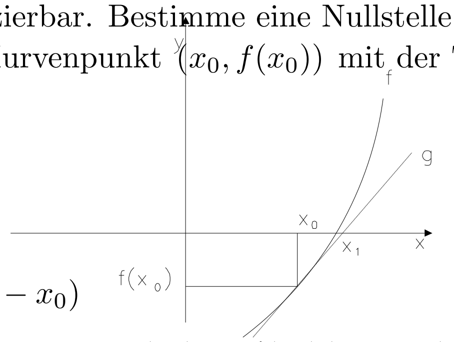
8.1 DIE NEWTON'SCHE NÄHERUNGSMETHODE

Isaac Newton lebte von 1642 bis 1727.

Problem: f sei differenzierbar. Bestimme eine Nullstelle, d.h. x mit $f(x) = 0$.

Idee: Gehe von einem Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Tangente zur $x-$Achse.

Bild:



$g =$ Tangente
$x_0 =$ Startwert
$x_1 =$nächste Näherung

$g : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$g \cap x-$Achse$= \{(x_1, 0)\} \Longrightarrow 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Longrightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Iteration(= Wiederholung) $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ etc.

Allgemein: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

Vorsicht: Bei waagrechter Tangente, d.h. $f'(x_n) = 0$, Startpunkt ändern!

Beachte: Wenn x_n bereits eine Nullstelle ist, d.h. $f(x_n) = 0$, so ändert es sich im nächsten Schritt nicht mehr, d.h. $x_{n+1} = x_n$.

Bsp.: 1) $f(x) = \cos x - x$ (vgl. 4.2, p. 44), $f'(x) = -\sin x - 1$

Setze $x_0 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 - \dfrac{f(0)}{f'(0)} = -\dfrac{1}{-1} = 1$,

$x_2 = 1 - \dfrac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \dfrac{\cos 1 - 1}{-\sin 1 - 1} \approx 0.750364$

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.739113, \qquad x_4 \approx 0.7390851334$

Dies stimmt bereits auf 8 Stellen. Vgl. Üb. 47, 48.

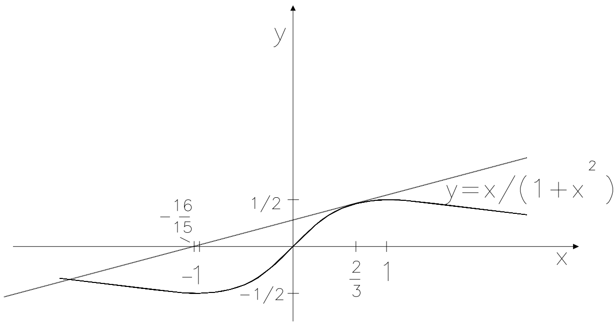
"Quadratische Konvergenz": die Anzahl der richtigen Stellen verdoppelt sich jedesmal in etwa.

2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ Einzige Nullstelle: $x = 0$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$, $f'(0) = 1$, $f'(\pm 1) = 0$, $f(\pm 1) = \pm\dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Was passiert bei verschiedenen Startwerten x_0? Bild:



$x_0 = \pm 1$ sind verboten (da $f'(\pm 1) = 0$)
$x_0 > 1$ liefert keine Nullstelle, da $x_n \longrightarrow \infty$
$x_0 < -1$ liefert keine Nullstelle, da $x_n \longrightarrow -\infty$
Aber auch, wenn wir mit $x_0 < 1$ aber x_0 nahe bei 1 starten, finden wir keine Nullstellen, da dann $x_1 < -1$. Z.B. $x_0 = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow x_1 = -\dfrac{16}{15}$, $x_n \longrightarrow -\infty$.

Somit: Das Newton-Verfahren liefert nur dann *sicher* eine Nullstelle, wenn man genügend nahe daran startet.

8.2 EXTREMA

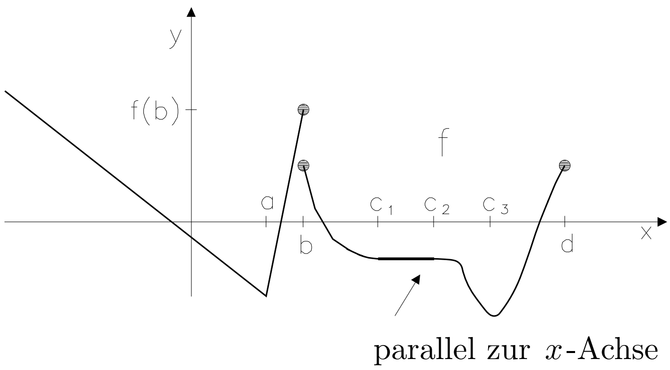
Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D \subset \mathbb{R}$.

1) f hat in x_0 ein globales $\left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \forall x \in D : \left\{\begin{matrix} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{matrix}\right\}$

2) f hat in x_0 ein lokales $\left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow f$ hat in x_0 ein Extremum

$$\Longleftrightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \left\{\begin{matrix} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{matrix}\right\}$$

Bsp.:



$D =]-\infty, d]$

f hat kein globales Maximum. f hat dafür in

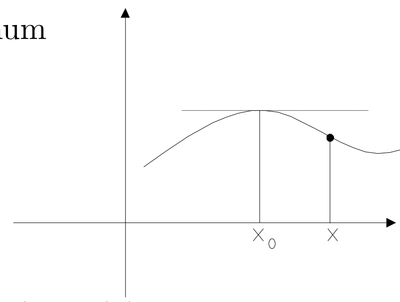
a : ein lokales Minimum
b : ein lokales Maximum
c_1 : ein lokales Minimum
$]\,c_1, c_2\,[$: sowohl lokale Minima als auch lokale Maxima
c_2 : ein lokales Maximum
c_3 : ein globales Minimum
d : ein lokales Maximum

Mit Differenzieren finden wir in diesem Beispiel nur c_3 und die Punkte in $[c_1, c_2]$.

Wiederholung: 4.2, Satz 6 (Weierstraß), p. 44:
Eine stetige Funktion auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall hat (zumindest) ein globales Minimum und ein globales Maximum.

Satz 1: Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]\,a, b\,[$ und f sei in x_0 differenzierbar. Dann gilt: f hat in x_0 ein Extremum $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$ (d.h. die Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ist waagrecht).

Beweis: f habe z.B. in x_0 ein lokales Maximum



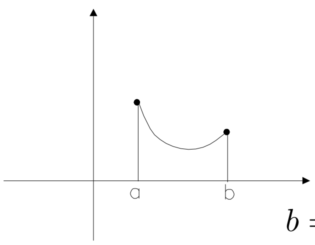
$$\Longrightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x \in [a, b] \text{ mit } |x - x_0| < \delta : f(x_0) \ge f(x)$$

$$\Longrightarrow f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{array}{l} \} \le 0 \\ \} \ge 0 \end{array} \qquad \le 0$$

$$\text{und } f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{array}{l} \} \le 0 \\ \} \le 0 \end{array} \qquad \ge 0$$

$$\Longrightarrow f'(x_0) = 0.$$ □

Vorsicht: 1) Wenn x_0 am Rand von $[a, b]$ liegt (d.h. $x_0 = a \vee x_0 = b$), dann gilt der Satz nicht. Der Beweis versagt, weil entweder $\lim\limits_{x \searrow x_0}$ oder $\lim\limits_{x \nearrow x_0}$ nicht definiert sind.



$b = x_0$ ist ein lokales Maximum, aber $f'(b) \neq 0$.

2) Die Umkehrung von Satz 1 gilt nicht, d.h. $\exists f : \exists x_0 : f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow f$ hat in x_0 Extremum. (Z.B. ist $(x^3)'(0) = 0$, aber x^3 hat in 0 kein Extremum)

Ergebnis von Satz 1: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$.

$$f \text{ hat in } x_0 \text{ ein Extremum} \Longrightarrow \begin{cases} (x_0 \text{ im Innern}) \wedge (f \text{ in } x_0 \text{ diffb.}) \wedge (f'(x_0) = 0) \\ \text{oder: } x_0 \text{ am Rand (d.h. } x_0 = a \vee x_0 = b) \\ \text{oder: } f \text{ in } x_0 \text{ nicht differenzierbar} \end{cases}$$

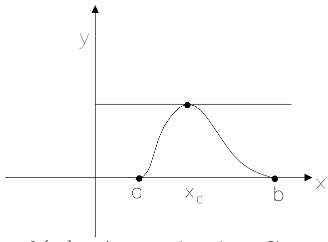
Satz 2 (Rolle) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in $]\,a, b\,[$ differenzierbar, $f(a) = f(b) = 0$. Dann gilt: $\exists x_0 \in]\,a, b\,[: f'(x_0) = 0$

Beweis: Nach 4.2, Satz 6 (Weierstraß) hat f in $[a, b]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum.

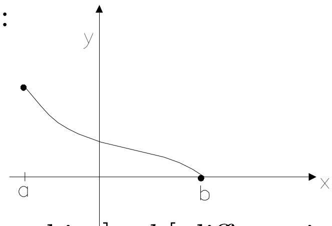
1. Fall: $\forall x \in [a, b] : f(x) = 0$. Dann: $\forall x : f'(x) = 0 \checkmark$

2. Fall: $\exists x \in [a, b] : f(x) \neq 0$. Dann $\exists$ (globales) Maximum oder Minimum x_0 in $]\,a, b\,[\Longrightarrow$ (Satz 1) $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$. $\square$

Bild:

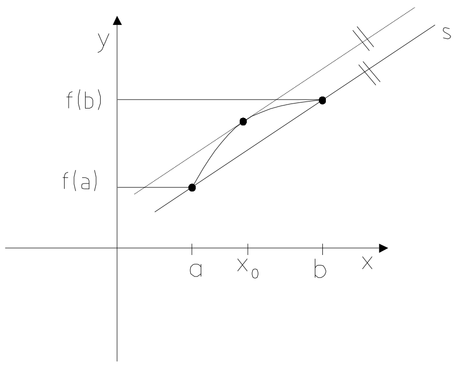


Vorsicht: Wenn z.B. $f(a) \neq 0$ gilt der Satz nicht:



Satz 3 (Mittelwertsatz) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in $]\,a, b\,[$ differenzierbar. Dann gilt: $\exists x_0 \in]\,a, b\,[: f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $(*)$

Bild:



$(*)$ heißt: In x_0 ist die Steigung der Tangente gleich der Steigung der Sekante s durch $(a, f(a)), (b, f(b))$.

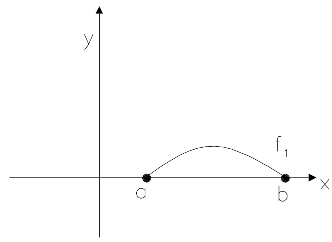
Beweis: (Idee: Wende Satz 2 auf $f_1 = f - s$ an.)

Es sei $f_1(x) = f(x) - s(x) = f(x) - \left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$

$\Longrightarrow f_1(a) = 0 = f_1(b)$

$\Longrightarrow$ (Satz 2) $\exists\, x_0 \in\,]\,a,b\,[: f_1'(x_0) = 0$

$\Longrightarrow f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$ $\square$



Satz 4 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]\,a,b\,[$ differenzierbar. Es gilt:

1) $\forall x \in\,]\,a,b\,[: f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ monoton steigend
2) $\forall x \in\,]\,a,b\,[: f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ monoton fallend
3) $\forall x \in\,]\,a,b\,[: f'(x) = 0 \Longrightarrow f$ konstant

Beweis: Wenn $a \le x_1 < x_2 \le b$, so ist nach Satz 3:

$$\exists\, x_0 \in\,]\,x_1,x_2\,[: \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0) \begin{cases} >0 \\ <0 \\ =0 \end{cases} \Longrightarrow f(x_2) \begin{cases} > f(x_1) \\ < f(x_1) \\ = f(x_1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f \begin{cases} \text{monoton steigend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{konstant} \end{cases}$$ $\square$

Speziell gilt auf einem Intervall: $f' = g' \Longleftrightarrow (f-g)' = 0 \underset{\text{Satz 4}}{\Longleftrightarrow} f - g = \text{konstant}$ $\Longleftrightarrow f = g + \text{Konstante}$, vgl. §7, Bsp. 16.

Satz 5 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in [a,b]$, f differenzierbar in $]\,a,b\,[$ außer eventuell in x_0. Dann gilt:

1) $(\forall x \in\,]\,a,x_0\,[: f'(x) > 0 \wedge \forall x \in\,]\,x_0,b\,[: f'(x) < 0) \Longrightarrow f$ hat in x_0 ein Maximum
2) $(\forall x \in\,]\,a,x_0\,[: f'(x) < 0 \wedge \forall x \in\,]\,x_0,b\,[: f'(x) > 0) \Longrightarrow f$ hat in x_0 ein Minimum

Beweis: 1) Nach Satz 4 ist f monoton steigend in $[a,x_0]$ und monoton fallend in $[x_0,b]$

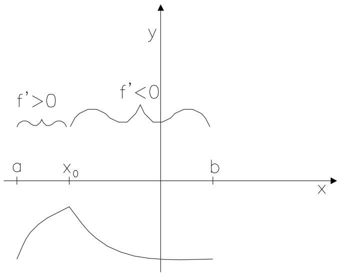
$\Longrightarrow \forall x \in [a,x_0\,[: x < x_0$ und daher $f(x) < f(x_0)$

$\forall x \in\,]\,x_0,b] : x_0 < x$ und daher $f(x_0) > f(x)$

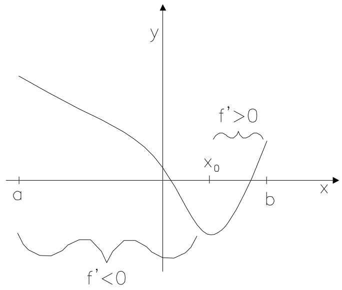
Also: $\forall x \in [a,b] : f(x_0) \ge f(x) \Longrightarrow f$ hat in x_0 ein Maximum.

2) ebenso. $\square$

Bild: 1)



2)



<u>Bsp.</u>: $f = x^4,\ f' = 4x^3,\ f'(x) < 0$ für $x < 0,\ f'(x) > 0$ für $x > 0$

$\underset{\text{Satz 5}}{\Longrightarrow}$ f hat in 0 ein Minimum.

Vorsicht: Der Test mit der 2. Ableitung (siehe §9) versagt hier.

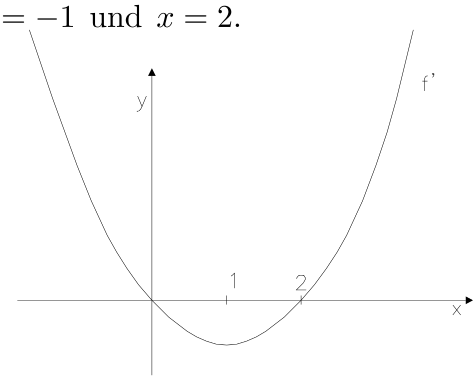
8.3 <u>KURVENDISKUSSION</u>

<u>Bsp.</u>: 1) $f : [-2,3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$ (vgl. 2.3, p. 15)

Die Nullstellen sind offenbar $x = -1$ und $x = 2$.

Untersuchung von f' :

$f' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$



Kandidaten für Extrema: $f' = 0 \lor$ am Rand $\lor$ f nicht differenzierbar.

Also: $\{\underbrace{0,2}_{f'=0},\ \underbrace{-2,3}_{\text{am Rand}}\}$

$f' > 0 \Longleftrightarrow x \in [-2,0[\,\cup\,]2,3]$

$f' < 0 \Longleftrightarrow x \in\,]0,2[$

Satz 4 sagt:

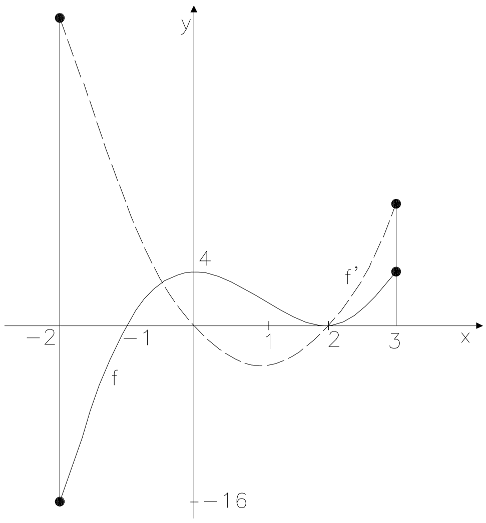
f ist monoton steigend in den Intervallen

$[-2,0]$ und $[2,3]$

f ist monoton fallend in $[0,2]$

Satz 4:		steigt		fällt		steigt		f
	-2		0		2		3	
	$\uparrow$	$+$	$\uparrow$	$-$	$\uparrow$	$+$	$\uparrow$	f'
Satz 5:	Min.		Max.		Min.		Max.	

Bild:



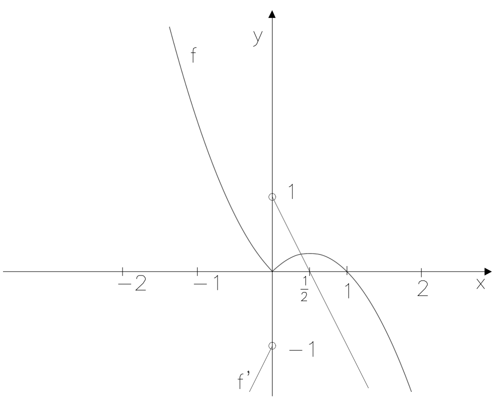
Extrema: $-2:$ globales Minimum
$0:$ globales Maximum
$2:$ lokales Minimum
$3:$ globales Maximum

Vgl. auch Übung 49!

2) $f = |x| \cdot (1-x),\ -2 \leq x \leq 2$ Nullstellen: $0, 1$
Untersuchung von $f' : |x|$ in 0 nicht differenzierbar (§6)
1. Fall: $x > 0 : f = x(1-x) = -x^2 + x \Longrightarrow f' = -2x + 1$
2. Fall: $x < 0 : f = -x(1-x) = x^2 - x \Longrightarrow f' = \ 2x - 1$
Kandidaten für Extrema: $\{\frac{1}{2}, -2, 2, 0\}$
$f' > 0 \Longleftrightarrow (x > 0 \wedge \underbrace{-2x + 1 > 0}_{x<1/2}) \vee (\underbrace{x < 0 \wedge 2x - 1 > 0}_{\{\}}) \Longleftrightarrow x \in \,]\,0, \frac{1}{2}\,[$

	fällt		steigt		fällt			f
-2		0		$\frac{1}{2}$		2		
$\uparrow$ Max.	$-$	$\uparrow$ Min.	$+$	$\uparrow$ Max.	$-$	$\uparrow$ Min.		f'

Bild:



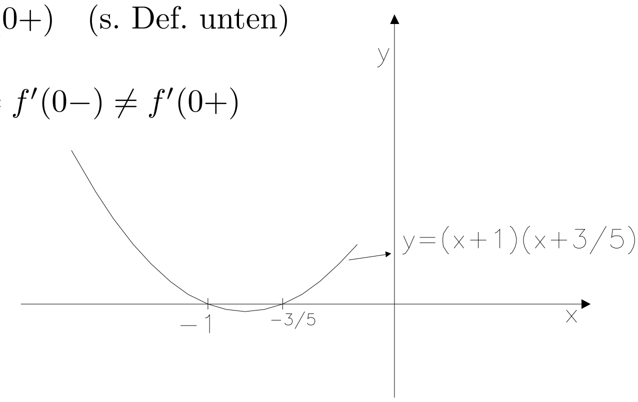
Extrema: $-2:$ globales Maximum
$0:$ lokales Minimum
$\frac{1}{2}:$ lokales Maximum
$2:$ globales Minimum

Vgl. auch Übung 50!

In 0 ist f nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x(1-x)}{x} = 1 = f'(0+) \quad \text{(s. Def. unten)}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x(1-x)}{x} = -1 = f'(0-) \neq f'(0+)$$



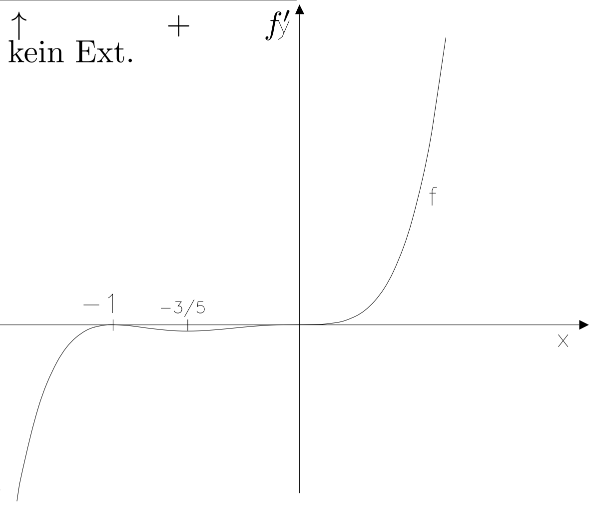
3) $f(x) = x^3(x+1)^2,\ x \in \mathbb{R}$

$$f' = 3x^2(x+1)^2 + x^3 \cdot 2(x+1)$$
$$= x^2(x+1)[\underbrace{3(x+1)+2x}_{5x+3}]$$
$$= \underbrace{5x^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x+1)\cdot(x+\frac{3}{5})}_{\text{s. Bild}}$$

$f' = 0 \Longleftrightarrow x \in \{0, -1, -\frac{3}{5}\}$. Das sind die Kandidaten für Extrema.

steigt		fällt		steigt		steigt	f
	-1		$-\frac{3}{5}$		0		
$+$	$\uparrow$ Max.	$-$	$\uparrow$ Min.	$+$	$\uparrow$ kein Ext.	$+$	f'

Bild:



Extrema: -1 : lokales Maximum

$-\frac{3}{5}$: lokales Minimum

Vgl. auch Übung 51!

Def.: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x_0 \in]\,a,b\,[$.

f heißt in x_0 linksseitig differenzierbar $\Longleftrightarrow f'(x_0-) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert und $\neq \pm\infty$.

Analog rechtsseitig: $f'(x_0+) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

<u>Satz 6:</u> $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x_0 \in]\,a,b\,[$

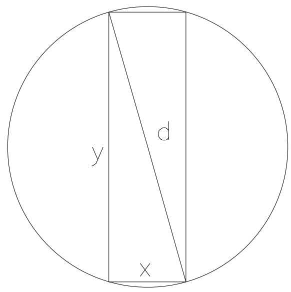
$$\begin{aligned} f \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar } \iff & \text{ a) } f \text{ linksseitig differenzierbar} \\ & \wedge \text{ b) } f \text{ rechtsseitig differenzierbar} \\ & \wedge \text{ c) } f'(x_0+) = f'(x_0-) \end{aligned}$$

8.4 <u>EXTREMWERTAUFGABEN</u>

<u>Bsp.:</u> Aus einem Stamm vom Durchmesser d soll ein Balken maximaler Tragfähigkeit T geschnitten werden.

Festigkeitslehre: $T = cxy^2$

Pythagoras: $y = \sqrt{d^2 - x^2}$



Also $f(x) = cx(d^2 - x^2),\ x \in [0,d] = D$

a) f stetig $\Longrightarrow f$ hat ein globales Maximum in D (Weierstraß)

b) f differenzierbar $\Longrightarrow$ (Satz 1) entweder ist dieses Maximum am Rand von D oder bei $f'(x) = 0$. Am Rand ist $f = 0 \Longrightarrow$ das Maximum ist dort, wo $f'(x) = 0$

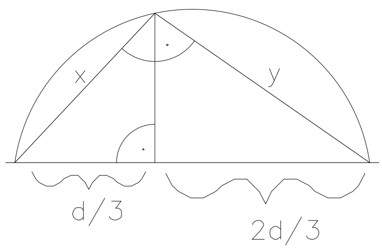
c) Rechnung: $f = c(d^2x - x^3) \Longrightarrow f'(x) = c(d^2 - 3x^2)$

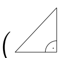
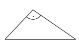
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}} \Longrightarrow y = \sqrt{d^2 - \tfrac{d^2}{3}} = d\sqrt{\tfrac{2}{3}} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{2}$$

d) Konstruktion:

$$\text{denn } \frac{d/3}{x} = \frac{x}{d}$$

$$\text{für } x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$



(Zimmermannsregel) ( und  sind kongruent)

Vgl. auch Übung 52!

8.5 DIE REGEL VON L'HÔPITAL

Kurzfassung: $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ vom Typ "$\dfrac{0}{0}$" oder "$\dfrac{\infty}{\infty}$" (und $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert) $\Longrightarrow$

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Satz 7 (erweiterter MWS) $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und differenzierbar in $]\,a,b\,[$. Außerdem sei $\forall x \in\,]\,a,b\,[: g'(x) > 0$ (oder $\forall x \in\,]\,a,b\,[: g'(x) < 0$). Dann gilt:

$$\exists\, x_0 \in\,]\,a,b\,[: \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Beweis: (Vgl. Satz 3; dort ist $g(x) = x$) Nach Satz 4 ist g monoton $\Longrightarrow g(a) \neq g(b)$; setze $f_1(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a)) \Longrightarrow f_1(a) = f_1(b) = 0 \Longrightarrow$ (Satz 2) $\exists\, x_0 \in\,]\,a,b\,[: f_1'(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x_0) = 0.$ $\square$

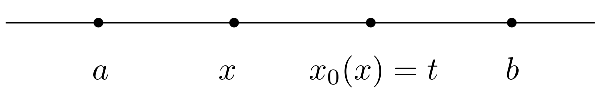
Satz 8 (l'Hôpital) $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und in $]\,a,b\,[$ differenzierbar und $\forall x \in\,]\,a,b\,[: g'(x) > 0$ (oder < 0). Weiters sei:

(α) $f(b) = g(b) = 0$ (d.h. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ist vom Typ "$\dfrac{0}{0}$") (β) $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Dann existiert auch $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\boxed{\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$ $(*)$

(Analog für $x \to a$, $x \to c$, $x \searrow c$, $x \nearrow c$ (wobei $c \in\,]\,a,b\,[$), $x \to \infty$, $x \to -\infty$, statt $x \to b$)

Beweis: Nach Satz 7 gilt $\forall x \in\,]\,a,b\,[: \exists x_0 \in\,]\,x,b\,[: \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{\overbrace{f(b)}^{0} - f(x)}{\underbrace{g(b)}_{0} - g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$



Substitution $t = x_0(x)$
$x \to b \Rightarrow t \to b$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t\to b} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}.$ $\square$

Vorsicht: $(*)$ heißt: Oben und unten differenzieren, nicht Quotientenregel!

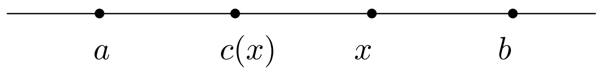
Bsp.: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\pi\cos(\pi x)}{\frac{1}{x}} = -\pi.$

Hier $b = 1$, $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = \ln x$, $(\alpha), (\beta)$ sind erfüllt. Vgl. auch Üb. 55, 56.

Satz 9 (l'Hôpital) Satz 8 gilt auch, wenn statt (α) vorausgesetzt wird

$(\alpha)'$ $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to b} g(x)$ (d.h. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ist vom Typ "$\dfrac{\infty}{\infty}$")

<u>Beweis:</u> Für $x \in\,]a,b[$ sei $c(x) \in [a,x[$ so, daß $\lim\limits_{x\to b} c(x) = b$ und $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{g(c(x))}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(c(x))}{g(x)} = 0$



Das geht wegen $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \infty$ (Z.B.: sei $c_n = b - \dfrac{b-a}{n}$ und $c(x) = c_n$, sobald $x > c_n$ und $[\forall y > x : g(y) > ng(c_n),\ g(y) > nf(c_n)]$) Nach Satz 7

$$\exists\, x_0 \in\,]c(x), x[: \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x) - f(c(x))}{g(x) - g(c(x))} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \overbrace{\frac{f(c(x))}{g(x)}}^{\nearrow 0}}{1 - \underbrace{\frac{g(c(x))}{g(x)}}_{\searrow 0}}$$

Substitution $t = x_0(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t\to b} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$. $\square$

<u>Bsp.:</u> 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{Satz 9}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\searrow\infty}} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{Satz 9}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x} = 0$ etc. $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$

Also: e^x steigt schneller als jedes Polynom.

2) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$ ist vom Typ "$0 \cdot \infty$" geht nicht direkt mit Hôpital. Trick: Doppelbruch

1. Versuch: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}}$ — Typ "$\dfrac{0}{0}$"

$\overset{\text{Hôp. (Satz 8)}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} (-x \ln^2 x)$ — wieder "$0 \cdot \infty$"

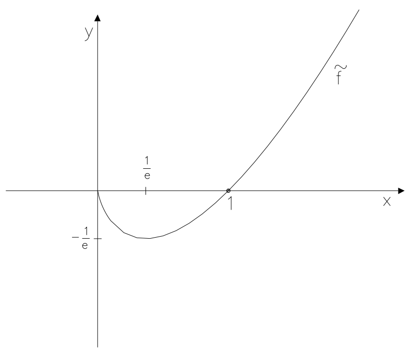
So gehts nicht!

2. Versuch: $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ — Typ "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

$\overset{\text{Hôp. (Satz 9)}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$

Daher ist $\tilde{f} : [0,\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & : x = 0, \\ x \ln x & : x > 0 \end{cases}$ die stetige Fortsetzung von $x \ln x$.

Bild:



Tangente in 0 senkrecht, denn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{x \ln x}^{\tilde{f}(x)} - \overbrace{0}^{\tilde{f}(0)}}{x - 0} = -\infty$

§9: Die 2. Ableitung

9.1 DEFINITION UND BEISPIELE

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$

1) Wenn f' in x_0 differenzierbar ist (d.h. $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ existiert und $\neq \pm\infty$), so heißt f in x_0 2−mal differenzierbar.
2) Wenn f' (schlechthin) differenzierbar ist, so heißt f zweimal differenzierbar und $f'' : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (f')'(x)$ heißt die 2. Ableitung.

(Bei Ableitungen nach der Zeit schreibt man $\ddot{f}$.)

Bsp.: 1) $f(x) = x|x|$ ist differenzierbar, aber in 0 nicht zweimal differenzierbar.

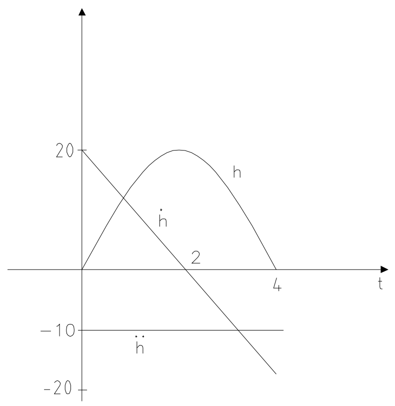
2) $(\tan x)'' = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)' = \dfrac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ (wo $\cos x \neq 0$),

$(\ln|x|)'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ (für $x \neq 0$)

3) $h : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto -5t^2 + 20t$,

$\dot{h}(t) = -10t + 20 =$ Geschwindigkeit zur Zeit t,

$\ddot{h}(t) = -10 =$ Beschleunigung $(\text{m/sec}^2) = -g$



$\ddot{h} < 0$ bedeutet, daß $\dot{h}$ monoton fallend ist (vgl. 8.2, Satz 4).

Def.: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $x_0 \in\,]a,b[$.

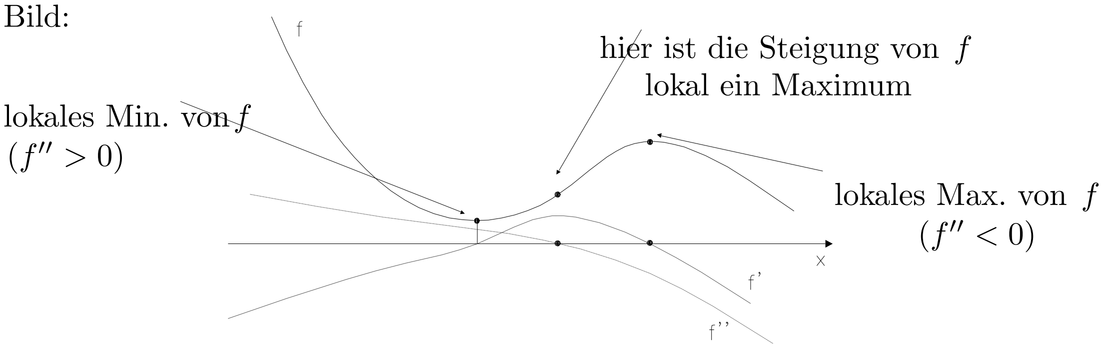
x_0 heißt Wendepunkt von $f \iff f'$ hat ein Extremum in $x_0 \iff$ die Steigung von f hat in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum.

Bemerkung: Nach 8.2, Satz 1 gilt: x_0 Wendepunkt von $f \Longrightarrow f''(x_0) = 0$ (falls f in x_0 2-mal differenzierbar).

Das umgekehrte gilt nicht: $\exists\, f : \exists\, x_0 : f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ WP,

z. B.: $f = x^4$, $f''(0) = 0$, aber 0 ist kein WP.

Bild:



Satz 1: f sei in x_0 2-mal differenzierbar. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$ so hat f in x_0 ein lokales $\begin{Bmatrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{Bmatrix}$.

Beweis: $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{0}}{x - x_0} > 0 \Longrightarrow \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ für x nahe bei x_0

$\Longrightarrow f'(x) > 0$ für $x > x_0,\ x$ nahe bei x_0

$\quad f'(x) < 0$ für $x < x_0,\ x$ nahe bei x_0

$\Longrightarrow$ (nach 8.2, Satz 5) f hat in x_0 ein lokales Minimum.

Der Fall $f''(x_0) < 0$ geht ebenso. □

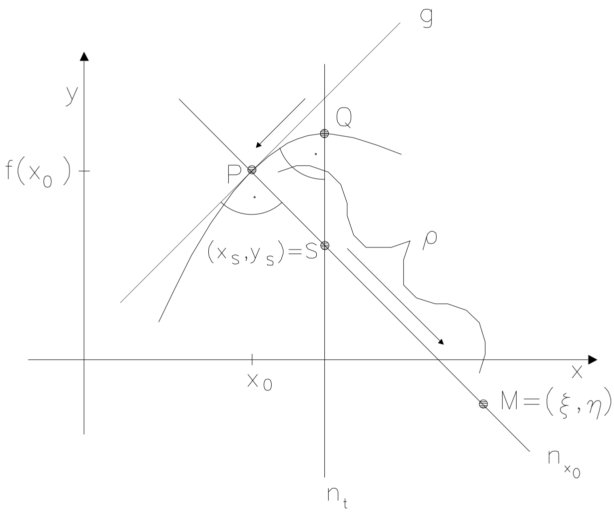
Beachte: Wenn $f''(x_0) = 0$ oder f in x_0 nicht 2-mal differenzierbar ist, so läßt sich Satz 1 nicht anwenden. Satz 5 in 8.2 läßt sich aber meistens noch anwenden.

9.2 DIE KRÜMMUNG

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $x_0 \in D,\ P = (x_0, f(x_0))$

1) Die Gerade n_{x_0} durch P senkrecht auf die Tangente heißt Normale in P.
2) Der Grenzwert $M = (\xi, \eta)$ des Schnittpunktes von n_t und n_{x_0} für $t \to x_0$ heißt (falls er existiert) Krümmungsmittelpunkt zu P. Sein Abstand von P, d.h. $\varrho = \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - f(x_0))^2}$, heißt Krümmungsradius. $\kappa = \dfrac{1}{\varrho}$ heißt Krümmung von f in P.

Bild:



Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius ϱ heißt <u>Krümmungskreis</u> an P. (Das ist <u>der</u> Kreis, der die Kurve bei P am besten approximiert.)

<u>Berechnung:</u>

Tangente g an $P: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

I: $n_{x_0} : y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0) + f(x_0)$

II: $n_t : y = -\dfrac{1}{f'(t)}\,(x - t) + f(t)$

Für $S = n_{x_0} \cap n_t = \{(x_S, y_S)\}$ gelten I und II

$$\Longrightarrow \text{I}-\text{II: } 0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x_S - x_0) + f(x_0) + \frac{1}{f'(t)}\,(x_S - t) - f(t)$$

$$\Longrightarrow 0 = x_S\Big(\frac{1}{f'(t)} - \frac{1}{f'(x_0)}\Big) + \frac{x_0}{f'(x_0)} + f(x_0) - \frac{t}{f'(t)} - f(t)$$

$$\Longrightarrow x_S = \frac{\frac{t}{f'(t)} + f(t) - \frac{x_0}{f'(x_0)} - f(x_0)}{\frac{1}{f'(t)} - \frac{1}{f'(x_0)}} \quad \underbrace{\cdot f'(t)\cdot f'(x_0)}_{=}$$

$$= \frac{tf'(x_0) + f(t)f'(x_0)f'(t) - x_0 f'(t) - f(x_0)f'(x_0)f'(t)}{f'(x_0) - f'(t)}$$

$$\Longrightarrow \xi = \lim_{t\to x_0} x_S \overset{\text{l'Hôp.(Typ}\frac{0}{0})}{=}$$

$$= \lim_{t\to x_0} \frac{f'(x_0) + f'(x_0)f'(t)^2 + f(t)f'(x_0)f''(t) - x_0 f''(t) - f(x_0)f'(x_0)f''(t)}{-f''(t)}$$

$$= \frac{f'(x_0) + f'(x_0)^3 + f(x_0)f'(x_0)f''(x_0) - x_0 f''(x_0) - f(x_0)f'(x_0)f''(x_0)}{-f''(x_0)}$$

$$= x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}\,(1 + f'(x_0)^2);$$

$(\xi,\eta) \in n_{x_0} \Longrightarrow \eta = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}\ (\xi - x_0) = f(x_0) + \dfrac{1}{f''(x_0)}\ (1 + f'(x_0)^2)$

Abkürzung: $y_0 = f(x_0),\ y_0' = f'(x_0),\ y_0'' = f''(x_0)$

$\Longrightarrow M = (\xi,\eta) = \Big(x_0 - \dfrac{y_0'}{y_0''}\ (1 + {y_0'}^2),\ y_0 + \dfrac{1}{y_0''}\ (1 + {y_0'}^2)\Big)$

$\Longrightarrow \vec{PM} = M - P = \text{Spitze} - \text{Schaft} = \dfrac{1 + {y_0'}^2}{y_0''} \begin{pmatrix} -y_0' \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \varrho = |\vec{PM}| = \dfrac{1 + {y_0'}^2}{|y_0''|} \left|\begin{pmatrix} -y_0' \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \dfrac{1 + {y_0'}^2}{|y_0''|} \sqrt{1 + {y_0'}^2} = \dfrac{(1 + {y_0'}^2)^{3/2}}{|y_0''|}$

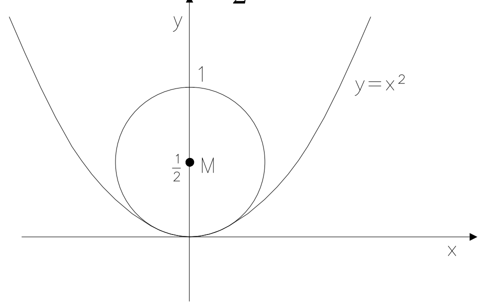
$\Longrightarrow \kappa = \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{|y_0''|}{(1 + {y_0'}^2)^{3/2}}.$

Nun ersetzen wir x_0 durch x etc. $\Longrightarrow$

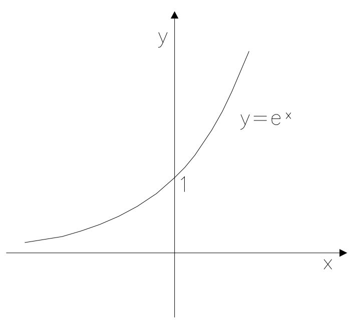
Satz 2: Wenn f in x 2-mal differenzierbar, $P = (x, f(x)),\ y = f(x),\ y' = f'(x)$, $y'' = f''(x) \neq 0$, so gilt $M = P + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\kappa = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$.

Bsp.: 1) $y = x^2,\ y' = 2x,\ y'' = 2 \Longrightarrow \kappa = \dfrac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$

Speziell: $x = 0 \Longrightarrow \varrho = \dfrac{1}{2},\ M = (0, \frac{1}{2})$



2) Wo ist κ maximal für $f(x) = \mathrm{e}^x$?



$\kappa(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^{2x})^{3/2}}$

$$\lim_{x\to\infty} \kappa(x) \overset{:\mathrm{e}^{3x}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\mathrm{e}^{-2x}}^{\to 0}}{\underbrace{(\mathrm{e}^{-2x} + 1)^{3/2}}_{\to 1}} = 0 \qquad (\mathrm{e}^{3x} = (\mathrm{e}^{2x})^{3/2})$$

$$\lim_{x\to-\infty} \kappa(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\mathrm{e}^{x}}^{\to 0}}{\underbrace{(1 + \mathrm{e}^{2x})^{3/2}}_{\to 1}} = 0$$

$\kappa(x)$ muß also irgendwo ein globales Maximum haben! Dort ist $\kappa'(x) = 0$ nach 8.2, Satz 1.

$$\kappa'(x) = \frac{(1+\mathrm{e}^{2x})^{3/2}\cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \cdot \frac{3}{2}(1+\mathrm{e}^{2x})^{1/2}\cdot \mathrm{e}^{2x}\cdot 2}{(1+\mathrm{e}^{2x})^3} = 0$$

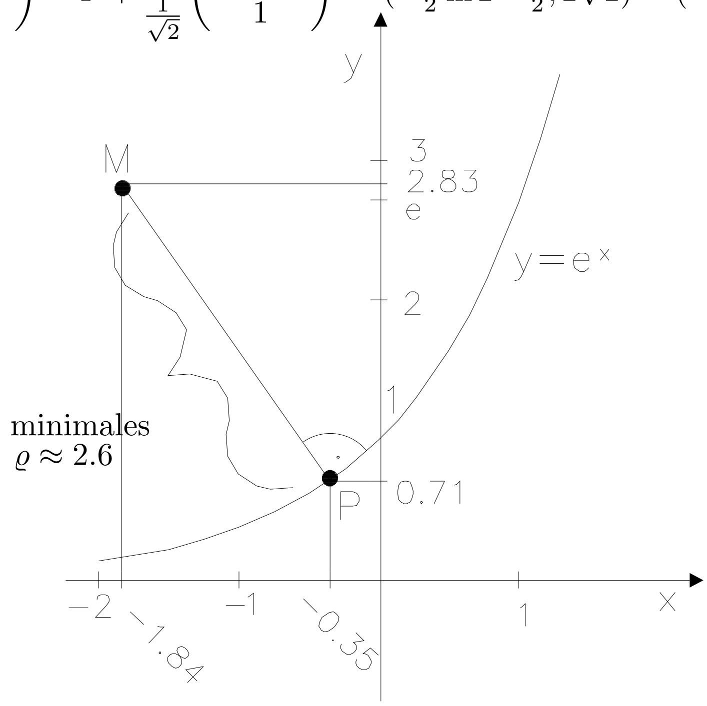
$$\Longrightarrow 1+\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow 1 = 2\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2},$$

$$2x = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2, \quad x = -\tfrac{1}{2}\ln 2 \approx -0.35$$

$$y = \mathrm{e}^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71, \quad \kappa = \frac{1/\sqrt{2}}{(1+\frac{1}{2})^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{2^{3/2}}{3^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$$\varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$$

$$M = P + \frac{1+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^x\\ 1\end{pmatrix} = P + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{3}{2}, 2\sqrt{2}) \approx (-1.84, 2.83)$$



Vgl. auch Übung 60.

<u>Def.:</u> Analog zur 2. Ableitung schreibt man f''' bzw. $\dddot{f}$ bzw. $f^{(3)}$ für die 3. Ableitung, f^{iv} bzw. $f^{(4)}$ für die 4. Ableitung und $f^{(n)}$ für die n−te Ableitung.

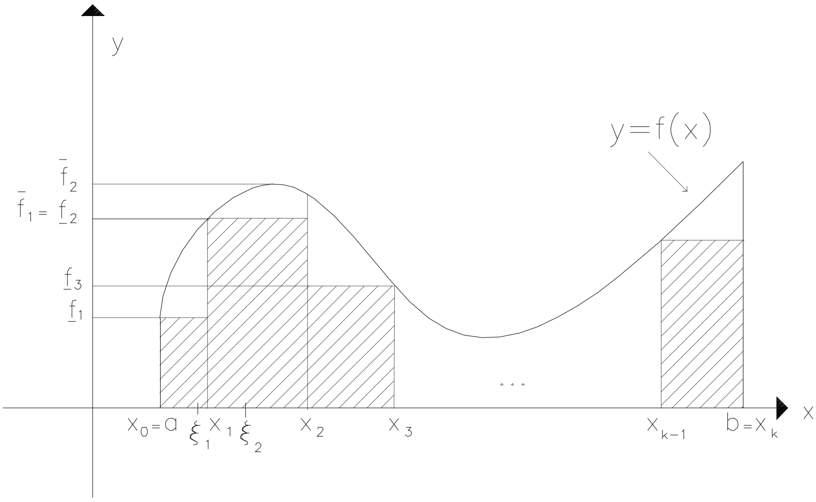
<u>Bsp.:</u> $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\sin x)'' = -\sin x,\ (\sin x)''' = -\cos x$ etc.

$$\Rightarrow (\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x: & n \text{ durch 4 teilbar} \\ \cos x: & n/4 \text{ hat Rest 1} \\ -\sin x: & n/4 \text{ hat Rest 2} \\ -\cos x: & n/4 \text{ hat Rest 3} \end{cases}$$

Kap. III: INTEGRALRECHNUNG

§10: Das Integral

10.1 DAS BESTIMMTE INTEGRAL



schraffierte Fläche $= UD(Z)$

Def.: 1) Wenn $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, so schreibt man $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i$ für $c_1+c_2+\cdots+c_k$. Der Summationsbuchstabe (hier i) ist unwichtig, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j$. $\Big($Vgl.: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}$; Bsp.: $\sum\limits_{i=1}^{3} i = \sum\limits_{n=1}^{3} n = 1+2+3 = 6\Big)$

2) Wenn $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$, so heißt die Menge $Z = \{x_0, \ldots, x_k\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

3) Wenn $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und Z wie in 2) eine Zerlegung von $[a, b]$ ist, so sei $\underline{f}_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\bar{f}_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
d.h. $\underline{f}_i$ bzw. $\bar{f}_i$ sind der kleinste bzw. der größte Funktionswert von f auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i], i \in \{1, \ldots, k\}$ (siehe 4.2, Satz 6, p. 44). Dann heißen

$$\left.\begin{aligned} UD(Z) &= \sum_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \ \underline{\text{untere}} \\ OD(Z) &= \sum_{i=1}^{k} \bar{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \ \underline{\text{obere}} \end{aligned}\right\} \underline{\text{Darbouxsumme}} \text{ von } f \text{ zur Zerlegung } Z.$$

4) Wenn außerdem $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so heißt

$$R(Z, \Xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

die Riemannsumme von f zur Zerlegung Z und den Zwischenpunkten Ξ.
Bemerkung: $\underline{f}_i \leq f(\xi_i) \leq \bar{f}_i \Longrightarrow UD(Z) \leq R(Z, \Xi) \leq OD(Z)$

Idee: Wenn wir Zerlegungen $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots$ nehmen, die immer "feiner" werden, so haben $UD(Z^{(n)})$ und $OD(Z^{(n)})$ und daher auch $R(Z^{(n)}, \Xi^{(n)})$ denselben Grenzwert.

Def.: Für eine Zerlegung Z mit $a = x_0 < \cdots < x_k = b$ heißt die größte der Zahlen $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_{k-1}$ die Feinheit $\varphi(Z)$ von Z.

Satz 1: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

$$\exists\, F \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} UD(Z^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} OD(Z^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} R(Z^{(n)}, \Xi^{(n)}) = F$$

wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(Z^{(n)}) = 0$ und $\Xi^{(n)}$ beliebige Zwischenpunkte zur Zerlegung $Z^{(n)}$ sind.

Beweis: Anschaulich klar, exakt zu schwierig.

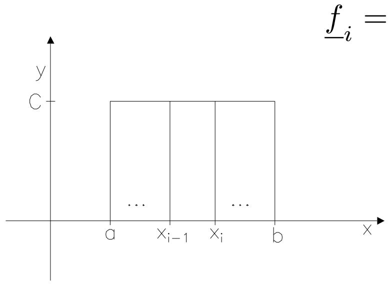
Beachte: $Z^{(n)} = \{\overbrace{x_0^{(n)}}^{a}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}, \overbrace{x_k^{(n)}}^{b}\}$. Die Zahl k und die Punkte $x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}$ können für jedes n verschieden sein.

Def.: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Für F aus Satz 1 schreibt man $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Diese Zahl heißt bestimmtes Integral oder Riemannintegral von f. Der Name der Integrationsvariablen ist egal, d.h. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ etc.

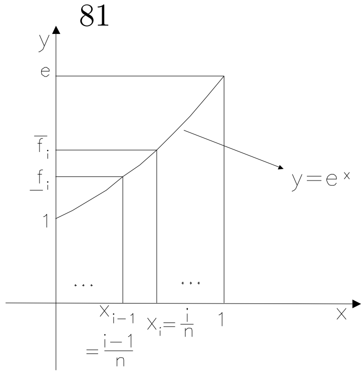
Bsp.: 1) $f =$ konstant $= C$ auf $[a, b] \Longrightarrow UD(Z) = OD(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} C(x_i - x_{i-1}) = C(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_k - x_{k-1}) = C(x_k - x_0) = C(b - a)$

Also: $\int\limits_a^b C\,\mathrm{d}x = C \cdot (b - a)$.

$\underline{f}_i = \bar{f}_i = C$



2) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \mathrm{e}^x$
Es sei $Z^{(n)} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}$.



Hier ist also $k = n,\ x_i^{(n)} = \dfrac{i}{n}$, und $\varphi(Z^{(n)}) = \dfrac{1}{n}$.
$\underline{f}_i = \min\{\mathrm{e}^x : x \in [x_{i-1}, x_i] = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\} = \mathrm{e}^{(i-1)/n}$. Ebenso gilt $\overline{f}_i = \mathrm{e}^{i/n}$.
Es sei $q = \mathrm{e}^{1/n}$.

$$UD(Z^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(i-1)/n} \underbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)}_{1/n}$$

$$= \frac{1}{n}(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{1/n} + \cdots + \mathrm{e}^{(n-1)/n}) = \frac{1}{n}(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \overset{\text{Üb. 38}}{=}$$

$$= \frac{q^n - 1}{n(q-1)} = \frac{\mathrm{e} - 1}{n(\mathrm{e}^{1/n} - 1)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} UD(Z^{(n)}) = (\mathrm{e} - 1) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\mathrm{e}^{1/n} - 1} = (\mathrm{e} - 1) \lim_{t\to 0} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \overset{\text{l'Hôp.}}{=}$$

$$(\mathrm{e} - 1) \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e} - 1$$

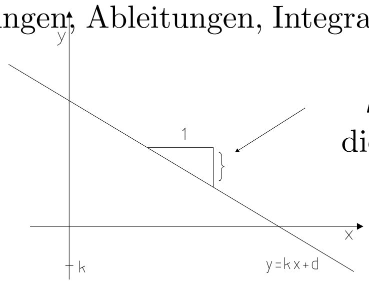
Somit $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1 \approx 1.72$. Dies wird später einfacher berechnet.

Vgl. auch Übung 63.

10.2 EIGENSCHAFTEN DES BESTIMMTEN INTEGRALS

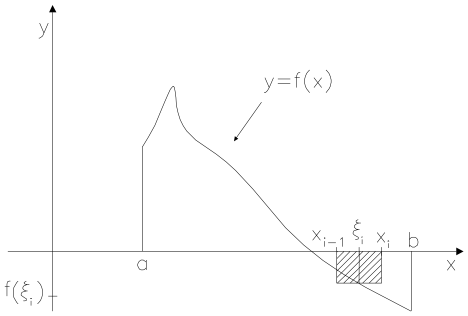
1) Zusammenhang mit Flächen
Beachte: Winkel, Längen, Flächen, Volumina sind immer ≥ 0.
Aber: Funktionswerte, Steigungen, Ableitungen, Integrale können auch negativ sein.

Z.B. bei der Steigung:



$k = (-1)\cdot$
diese Länge

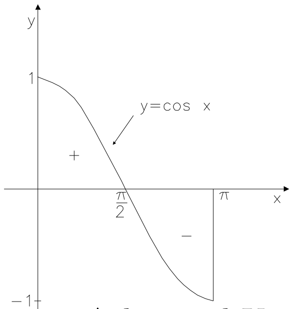
Beim bestimmten Integral:



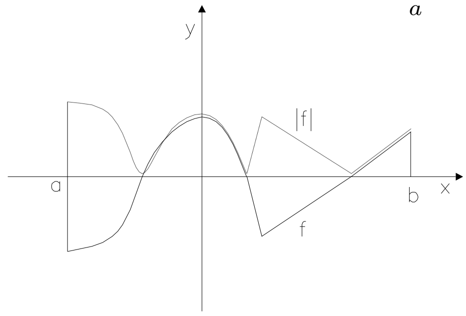
$f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$
$= (-1)\cdot$ schraffierte Fläche

Für die i, für die $f(\xi_i) < 0$, sind die entsprechenden Summanden in $R(Z, \Xi)$ gleich $(-1)\cdot$Rechteckfläche. Im Limes folgt: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$ [Fläche zwischen $x-$Achse und Kurve, wo $f(x) > 0$] $-$ [Fläche zwischen $x-$Achse und Kurve, wo $f(x) < 0$].

Z.B.: $\int\limits_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = 0,$ denn



(Bemerkung: Gesamtfläche zwischen $x-$Achse und Kurve $= \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$:



)

2) <u>Das Integral ist linear</u>

Es seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und Ξ eine Menge von Zwischenpunkten zu Z. Dann ist

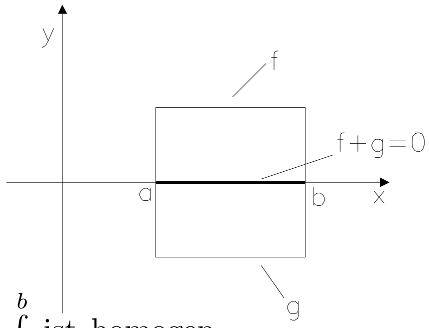
$$\sum_{i=1}^{k} (f+g)(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

d.h. $R(Z, \Xi)_{\text{zu } f+g} = R(Z, \Xi)_{\text{zu } f} + R(Z, \Xi)_{\text{zu } g}$.

Im Limes folgt:

$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, d.h. das $\int\limits_a^b$ ist <u>additiv</u>.

(Beachte: Wenn im $\int$ alle Flächen positiv gerechnet würden, wäre die Additivität nicht erfüllt.
Z.B.



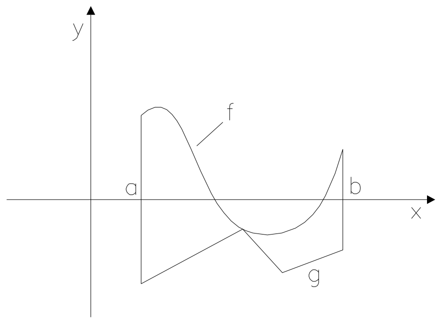
)

Ebenso für $c \in \mathbb{R}$:
$\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, d.h. das $\int\limits_a^b$ ist <u>homogen</u>.
Wenn etwas additiv und homogen ist, nennt man es <u>linear</u>.

Also: $\int\limits_a^b$ ist linear.

3) <u>Das Integral ist monoton</u>

Es seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq g(x)$.
Z, Ξ wie immer. Bild:



$\Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum\limits_{i=1}^{k} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$
$\Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
Speziell:

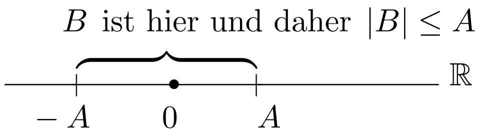
a) $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$
Anschaulich: f oberhalb der $x-$Achse $\Longrightarrow \int =$ Fläche ≥ 0.

b) Es gilt $\forall x \in [a,b] : -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\text{Also} \quad \underbrace{\int_a^b -|f(x)|\,\mathrm{d}x}_{=-\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -A} \quad \leq \quad \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{B}} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\text{A}}$$

$\Longrightarrow |B| \leq A$, d.h. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Bild:



c) Wenn $\forall x \in [a,b] : |f(x)| \le C$, so gilt $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b C\,\mathrm{d}x = C(b-a)$

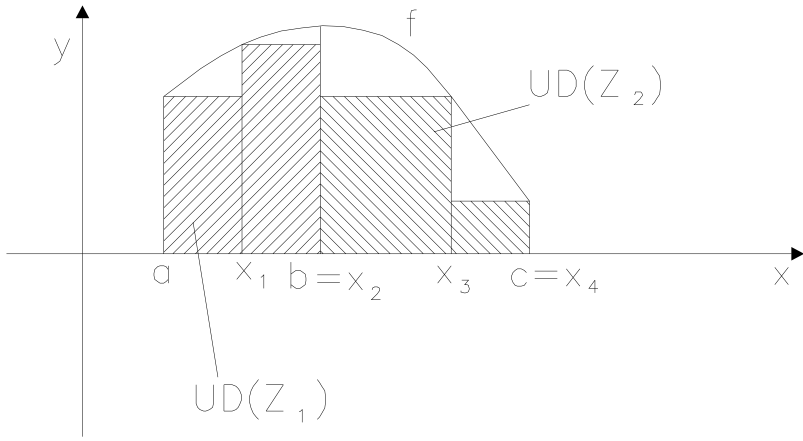
4) <u>Intervallzerlegung</u>

Es seien $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a < b < c$

Wenn $Z = \{x_0, \ldots, x_k\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b < x_{m+1} < \cdots < x_k = c$, so ist $Z = Z_1 \cup Z_2$, $Z_1 = \{x_0, \ldots, x_m\}$, $Z_2 = \{x_m, \ldots, x_k\}$ und

$UD(Z_1) = \sum\limits_{i=1}^{m} \underline{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, $UD(Z_2) = \sum\limits_{i=m+1}^{k} \underline{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1})$,

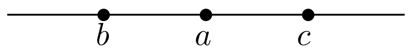
$UD(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = UD(Z_1) + UD(Z_2)$



Im Limes folgt:

$$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

Was passiert für $b < a$?



Nach $(*)$ gilt $\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, d.h.

$$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Damit $(*)$ in der alten Fassung weiter gilt, machen wir die

<u>Def.:</u> Für $b < a$ sei $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dann gilt $(*)$ immer, egal wie a, b, c liegen.

5) Stückweise stetige Funktionen

Def.: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig
$\Longleftrightarrow$ (a) f ist beschränkt (d.h. $\exists\, M \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$);
(b) f ist stetig außer in endlich vielen Punkten.

Bsp.: $f : [-1, 5] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{sign} x$

und $g : [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} : x \neq 0, \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

sind stückweise stetig.
Für stückweise stetige Funktionen geht alles ähnlich wie in 10.1.

Einziger Unterschied: $\left.\begin{matrix} \underline{f}_i \\ \bar{f}_i \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \inf \\ \sup \end{matrix}\right\} \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

d.h. $\underline{f}_i$ bzw. $\bar{f}_i$ sind die größte untere bzw. kleinste obere Schranke der Menge $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. (Weil f nicht stetig sein muß auf $[x_{i-1}, x_i]$, existiert möglicherweise kein Minimum oder kein Maximum.)

Es gilt wieder Satz 1, d.h. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist definiert, und alles bisherige gilt.

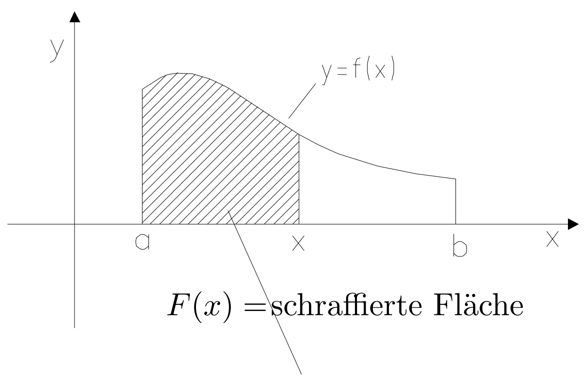
Bsp.: $\int\limits_{-1}^{5} \operatorname{sign} x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \operatorname{sign} x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{5} \operatorname{sign} x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} -1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{5} 1\,\mathrm{d}x = -1 + 5 = 4.$

10.3 DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Wir bilden die neue Funktion

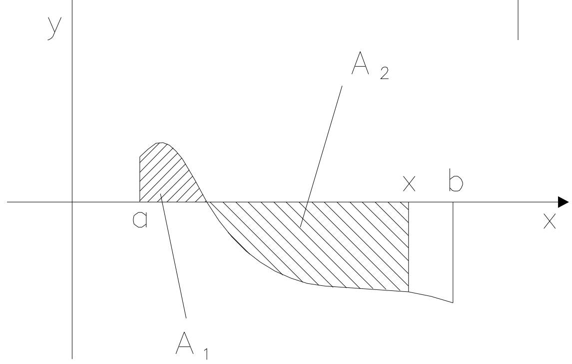
$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Bilder:



$F(x) =$ schraffierte Fläche

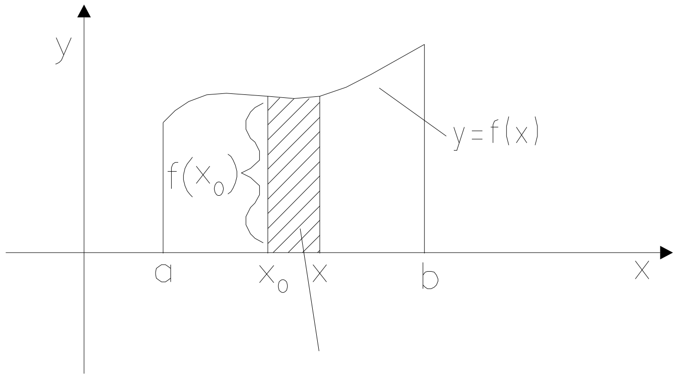
oder z.B.
$F(x) =$
$A_1 - A_2$



Satz 2 (Hauptsatz der Integralrechnung) F ist differenzierbar und $F' = f$.

(Ausführlich: $\forall x_0 \in [a,b] : \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$)

1. Beweis: (anschaulich)



$$F(x) - F(x_0) \approx f(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{“}\Longrightarrow\text{”} \quad \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow f(x_0) \text{ für } x \to x_0$$

2. Beweis (exakt)

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-x_0}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^x \big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x \big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t + (x-x_0)f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^x \big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t}{x-x_0} + f(x_0)$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \frac{\left|\int_{x_0}^x \big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\right|}{|x-x_0|} \le \frac{\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right|}{|x-x_0|}$$

($\le$ nach Eig. 3 in 10.2; der äußere Betrag ist nötig, weil auch $x < x_0$ sein kann)

f stetig in $x_0 \Longrightarrow$

$\forall \epsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall t \in [a,b]$ mit $|t - x_0| < \delta : |f(t) - f(x_0)| < \epsilon$.

Daher gilt $\forall \epsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall x \in [a,b]$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{\left|\int_{x_0}^x \epsilon\,\mathrm{d}t\right|}{|x-x_0|} = \frac{\epsilon|x-x_0|}{|x-x_0|} = \epsilon,$$

d.h. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, d.h. $F'(x_0) = f(x_0)$ □

Bemerkungen:

1) Dieser Satz ist die Brücke zwischen Differential- und Integralrechnung!
2) Ähnlich zeigt man, daß $F(x)$ für stückweise stetiges f zumindest noch stetig ist (im allgemeinen aber nicht mehr differenzierbar).

Def.: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

1) $\Phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f \Longleftrightarrow \Phi' = f$.
2) Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt unbestimmtes Integral von f.
   Schreibweise dafür: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (oder $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ etc.)

Satz 3 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

1) $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist eine Stammfunktion von f.
2) Wenn Φ_1, Φ_2 2 Stammfunktionen von f sind, so gilt: $\exists C \in \mathbb{R} : \Phi_1 = \Phi_2 + C$, d.h. Φ_1, Φ_2 unterscheiden sich nur um eine Konstante.
3) Wenn Φ eine beliebige Stammfunktion von f ist, so gilt
   (α) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a)$ (β) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\Phi + C : C \in \mathbb{R}\}$.

Beweis: 1) gilt nach Satz 2.

2) $\Phi_1' = \Phi_2' = f \Longrightarrow$ (s. Satz 4, 8.2, p. 67) $\Longrightarrow \Phi_1 = \Phi_2 + C$.
3) (α) Nach 2) ist $F = \Phi + C$;

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \Phi(a) + C = 0 \Longrightarrow C = -\Phi(a)$$

$$\Longrightarrow \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a).$$

(β) folgt aus 2). □

Schreibweisen:

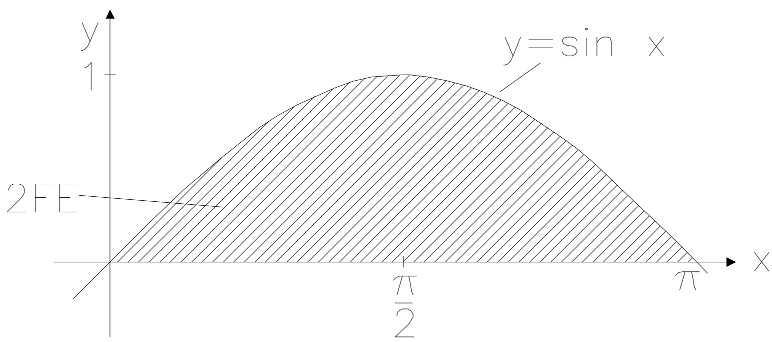
1) Für $\Phi(b) - \Phi(a)$ schreibt man $\Phi(x)\Big|_a^b$ oder $\Phi(x)\Big|_{x=a}^b$.
2) Für $\{\Phi + C : C \in \mathbb{R}\}$ schreibt man $\Phi + C$.

Bsp.: Es sei $f(x) = \sin x$.

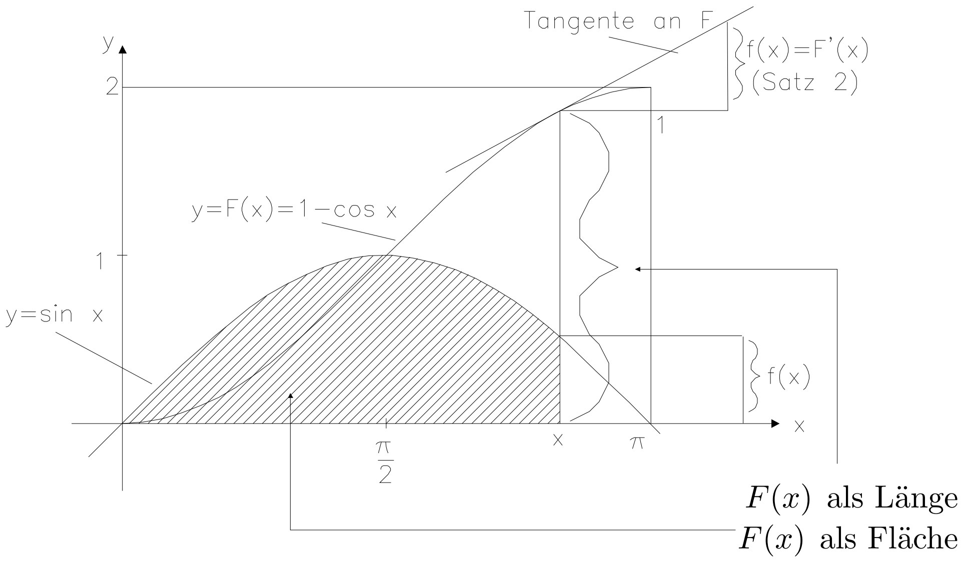
Wegen $(-\cos x)' = \sin x$ ist $\Phi(x) = -\cos x$ eine Stammfunktion.

Nach Satz 3, (3β) ist dann $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$ das unbestimmte Integral von $\sin x$. Weiters ist nach Satz 3, (3α)

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \Phi(\pi) - \Phi(0) = (-\cos x)\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

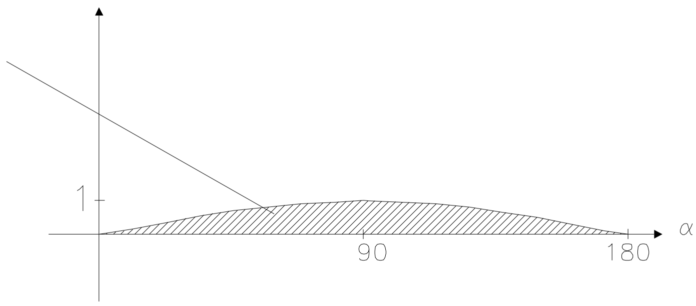


Auch $F(x) = \int\limits_0^x \sin t \, \mathrm{d}t = (-\cos t)\Big|_{t=0}^{x} = -\cos x - (-1) = 1 - \cos x$ ist eine Stammfunktion von f, da $F' = \sin x$ (wie es nach Satz 2 sein muß).
Bild:



Vorsicht: Das gilt nur in Radiant. In Grad wären die Flächen viel größer:

$\int\limits_0^{180} \sin \alpha^\circ \, \mathrm{d}\alpha = 2 \cdot \dfrac{180}{\pi} \approx 114.6 \; FE$



Zusammenfassung

1) $\int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \ldots$ "bestimmtes Integral" ... eine Zahl
2) $\Phi \ldots$ "Stammfunktion" ... eine Funktion
3) $\int f(x) \, \mathrm{d}x \ldots$ "unbestimmtes Integral" ... eine Menge von Funktionen
4) $f \ldots$ "Integrand" ... eine Funktion

Zusammenhang:

1-2: $\int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a)$

1-3: $\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^x f(t) \, \mathrm{d}t + C$

2-3: $\int f(x) \, \mathrm{d}x = \Phi + C$

1-4: $\int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x =$ "Fläche oben $-$ Fläche unten" (vgl. 10.2, Eigenschaft 1)

2-4: $\Phi' = f$

3-4: $\int f(x) \, \mathrm{d}x =$ Menge aller Funktionen, deren Ableitung f ist.

§11: Die Technik des Integrierens

11.1 GRUNDINTEGRALE

Wenn $\Phi' = f$, so gilt $\int f \, \mathrm{d}x = \Phi + C$ (10.3, Satz 3)

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int 1 \, \mathrm{d}x &= x + C \\
\int x^r \, \mathrm{d}x &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad \text{für } r \neq -1 \\
\int x^{-1} \, \mathrm{d}x &= \ln|x| + C = \begin{cases} \ln x + C_1 : x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 : x < 0 \end{cases} \\
\int \sin x \, \mathrm{d}x &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, \mathrm{d}x &= \sin x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \qquad \text{(vgl. Übung 43)} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \arctan x + C \\
\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x + C
\end{aligned}$$

Allgemeine Regeln:

$$\begin{aligned}
\int (f+g) \, \mathrm{d}x &= \int f \, \mathrm{d}x + \int g \, \mathrm{d}x \\
\int c \cdot f \, \mathrm{d}x &= c \int f \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

11.2 PARTIELLES INTEGRIEREN

Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

$\Longrightarrow fg + C = \int (f \cdot g)' \, \mathrm{d}x = \int f'g \, \mathrm{d}x + \int fg' \, \mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \boxed{\int f'g \, \mathrm{d}x = f \cdot g - \int fg' \, \mathrm{d}x}$$

(Das C ist überflüssig, da auf beiden Seiten unbestimmte Integrale stehen.)

Bsp.: 1) $\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{g} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f} \, \mathrm{d}x$ $\qquad \Big\| \; f' = \mathrm{e}^x \text{ „}\Longrightarrow\text{“ } f = \mathrm{e}^x$, $\; g = x \Longrightarrow g' = 1$

$$= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

Die umgekehrte Besetzung von f' und g führt nicht zum Ziel:

$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g'} \, \mathrm{d}x$ ist schwieriger als das Ausgangsintegral.

2) $I = \int \underbrace{\mathrm{e}^{ax}}_{f'} \underbrace{\sin bx}_{g} \, \mathrm{d}x$ $\qquad \Big\| \; \boxed{\text{1.mal}}$ $\; f' = \mathrm{e}^{ax} \text{ „}\Longrightarrow\text{“ } f = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$, $\; g = \sin bx \Longrightarrow g' = b\cos bx$

$= \underbrace{\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}}_{f} \underbrace{\sin bx}_{g} - \int \underbrace{\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}}_{f} \cdot \underbrace{b\cos bx}_{g'} \, \mathrm{d}x$ $\qquad \Big\| \; \boxed{\text{2.mal}}$ $\; f' = \mathrm{e}^{ax} \text{ „}\Longrightarrow\text{“ } f = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$, $\; g = \cos bx \Longrightarrow g' = -b\sin bx$

$$= \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int \underbrace{\mathrm{e}^{ax}}_{f'} \cdot \underbrace{\cos bx}_{g} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\Big[\underbrace{\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}}_{f} \underbrace{\cos bx}_{g} - \underbrace{\int \underbrace{\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}}_{f}(\underbrace{-b\sin bx}_{g'}) \, \mathrm{d}x}_{-\frac{b}{a}I}\Big]$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\,I \qquad \Big/ + \frac{b^2}{a^2}\,I$$

$$\Longrightarrow \Big(1 + \frac{b^2}{a^2}\Big) I = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C \qquad \Big/ : \underbrace{\Big(1 + \frac{b^2}{a^2}\Big)}_{=\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

$$\Longrightarrow I = \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

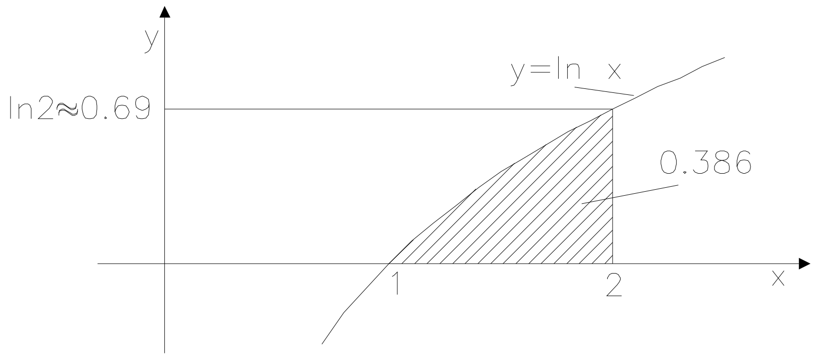
Vgl. auch Übung 65.

3) $\int\limits_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, \mathrm{d}x$ $\qquad \Big\| \; f' = 1 \text{ „}\Longrightarrow\text{“ } f = x$, $\; g = \ln x \Longrightarrow g' = \frac{1}{x}$

$$= \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\ln x}_{g}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \, \mathrm{d}x$$

$$= 2\ln 2 - 1\underbrace{\ln 1}_{0} - \int\limits_1^2 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1 = \ln\Big(\frac{4}{\mathrm{e}}\Big) \approx 0.386.$$

Bild:



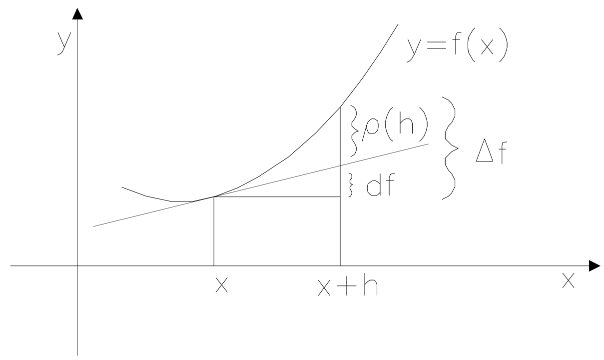
11.3 <u>DIFFERENTIALE</u>

<u>Def.:</u> Eine <u>Funktion von 2 Variablen</u> ordnet 2 Zahlen eine Zahl zu. Z.B. $z(x,y) = x+2y$ heißt etwa $x=1, y=5 \Longrightarrow z=11$ etc. oder $z(x,h) = \mathrm{e}^x \cdot \sin h$ heißt etwa $x=1, h=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow z=\mathrm{e}$ etc.

<u>Def.:</u> f sei eine differenzierbare Funktion. Dann heißt die Funktion $z(x,h) = f'(x) \cdot h$ in den 2 Variablen x und h das <u>Differential</u> von f.

<u>Schreibweise:</u> Statt z schreibt man hier $\mathrm{d}f$, d.h. $\mathrm{d}f(x,h) = \mathrm{d}f = f'(x) \cdot h$.

<u>Bild:</u>



<u>Beachte:</u> $\mathrm{d}f$ hängt von x und von h ab.

<u>Speziell:</u> Für $f = x$ gilt $\mathrm{d}x = (x') \cdot h = h$. Daher schreibt man oft $\mathrm{d}x$ statt h, d.h. $\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$. (Dann gilt $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ = ein Quotient von Differentialen = ein "Differentialquotient".) Aus dem Bild sieht man $f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}f + \varrho(h)$ (vgl. §6). In erster Näherung gilt daher für kleines h

$f(x+h) \approx f(x) + \mathrm{d}f = f(x) + f'(x) \cdot h$

<u>Vorsicht:</u> Das $\mathrm{d}x$ in $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ist vorläufig nur <u>symbolisch</u> und kann auf der augenblicklichen Stufe des Verständnisses nicht als <u>Differential</u> aufgefaßt werden.

<u>Bsp.:</u> 1) Nähere $\sin(31°)$ von $\sin(30°)$ aus an! Dann ist $x = 30°$, $\mathrm{d}x = 1°$.

Weil differenziert wird, Umrechnung in rad: $x = \dfrac{\pi}{6}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{180}$

$$\Longrightarrow \sin(31°) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\Big(\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{x}\Big) + \underbrace{\underbrace{\frac{\pi}{180}}_{\mathrm{d}x} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{f'(x)}}_{=\mathrm{d}f} \overset{\text{Üb. 12}}{=} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 0.51511\ldots$$

Exakt: $\sin(31°) = 0.515038\ldots$ Der Fehler $0.000076\ldots$ ist das $\varrho(\mathrm{d}x)$.

2) Approximiere $\sqrt{1+h}$ für kleines h!

$f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1 \Longrightarrow \mathrm{d}f = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h = \dfrac{h}{2} \Longrightarrow \sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$

(mit Fehler vom Typ $o(h)$).

3) Partiell integrieren mit Differentialen:

$\int f' \cdot g \, \mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g' \, \mathrm{d}x$ ergibt

$\int g \, \mathrm{d}f = f \cdot g - \int f \, \mathrm{d}g$

Z.B.: $\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}f} = \underbrace{x}_{g} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}g}$

$\Bigg\| \begin{array}{l} \mathrm{d}f = \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \text{ “}\Longrightarrow\text{” } f = \mathrm{e}^x \\ g = x \Longrightarrow \mathrm{d}g = \mathrm{d}x \end{array}$

11.4 SUBSTITUTION

Kettenregel: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Longrightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(g(x)) + C$

(Kontrolle: rechte Seite$'$=Integrand)

Bsp.: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \int \underbrace{\mathrm{e}^{\overbrace{\arctan x}^{g(x)}}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'(x)} \, \mathrm{d}x$

$= \underbrace{\mathrm{e}^{\arctan x}}_{f(g(x))} + C$

(Kontrolle: rechte Seite$'$ $=$ $(\mathrm{e}^{\arctan x} + C)'$ $=$ (Kettenregel) $=$ $\mathrm{e}^{\arctan x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$ $=$ Integrand)

Formulierung mit Substitution

$$\begin{aligned} \int f'(g(x))\, g'(x) \, \mathrm{d}x &= f(g(x)) + C \\ &= f(t) + C \qquad \text{mit } t = g(x) \\ &= \int f'(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{mit } t = g(x) \end{aligned}$$

“Rücksubstitution”

Nun schreiben wir $h(t)$ für $f'(t)$ (das hat mit dem h von 11.3 nichts zu tun). Dann folgt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int h(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = \int h(t) \, \mathrm{d}t \\ \text{mit Rücksubstitution } t = g(x) \\ \text{nach dem Integrieren.} \end{array}}$$

<u>Beachte:</u>

1) Dies entspricht genau dem Rechnen mit Differentialen: $t = g(x) \Longrightarrow \mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x$
2) Substituiere $t = g(x)$ dann, wenn $g'(x)$ im Integral als Faktor vorkommt.

<u>Bsp.:</u> 1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$

$= \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{\arctan x} + C$

$$\left\| \begin{array}{l} t = \arctan x = g(x) \\ \Longrightarrow \mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \end{array}\right.$$

2) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle= \int \frac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

$$\left\| \begin{array}{l} t = \cos x \\ \Longrightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

3) $\int \sin(\underbrace{x+4}_{t})\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}t} = \int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t + C = -\cos(x+4) + C$

4) (a) $\int \mathrm{e}^{x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \cdot \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + C$

$$\left\| \begin{array}{l} t = x^2 \\ \Longrightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2} \end{array}\right.$$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \cdot \frac{1}{\pm 2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ läßt sich nicht ausrechnen

$$\left\| \mathrm{d}x = \tfrac{\mathrm{d}t}{2x} = \tfrac{\mathrm{d}t}{\pm 2\sqrt{t}} \right.$$

5) $\int\limits_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\arctan x}_{g}\,\mathrm{d}x =$ (partiell)

$\displaystyle= \big(x\cdot\arctan x\big)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (*)$

$$\left\| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \Longrightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

$\displaystyle= 1\cdot\arctan 1 - 0 - \int\limits_{x=0}^{1} \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{x=0}^{1} =$

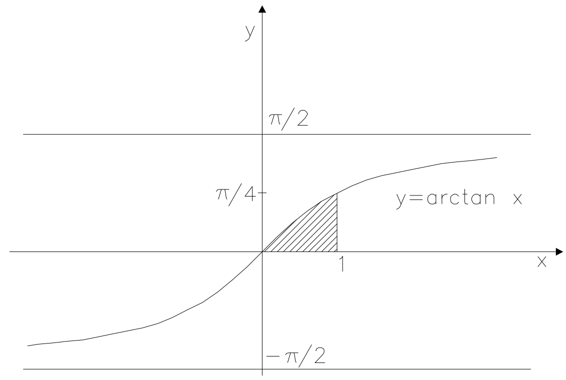
$\displaystyle= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

Wir sind schneller, wenn wir auch die Grenzen substituieren:

$$t = 1+x^2: \qquad \begin{array}{l} x = 0 \Longrightarrow t = 1 \\ x = 1 \Longrightarrow t = 2 \end{array}$$

Also: $\displaystyle\quad (*) = 1\arctan 1 - 0 - \int\limits_1^2 \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{t=1}^{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.439$

Bild:



11.5 PARTIALBRUCHZERLEGUNG

Bsp.: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3} = ?$

$x^2-4x+3 = (x-3)(x-1) \Longrightarrow \dfrac{1}{x^2-4x+3} = \dfrac{1}{(x-3)(x-1)}$

Wir versuchen, ob wir das in der Form $\dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-1}$ darstellen können. Dazu muß sein: $\forall x$ mit $x \neq 1,3$: $\dfrac{1}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-1} \iff \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1,3 : 1 = A(x-1) + B(x-3)$ $\boxed{*}$

Aus Stetigkeit muß $\boxed{*}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ gelten.

$\boxed{*} \iff \forall x \in \mathbb{R} : 1 = (A+B)x - A - 3B$

$$\begin{array}{rl} \text{Das stimmt } \forall x \text{ falls} & \left.\begin{array}{r} A + B = 0 \\ \underline{-A - 3B = 1} \end{array}\right\} + \\ \text{(“Koeffizientenvergleich”)} & \end{array}$$

$$-2B = 1 \Longrightarrow B = -\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Also: $\dfrac{1}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{1/2}{x-3} - \dfrac{1/2}{x-1}$

(Schnelle Methode: $\boxed{*}$ muß $\forall x$ gelten, auch $x = 1, x = 3$

Speziell: $x = 1 \Longrightarrow 1 = B(1-3) \Longrightarrow B = -\dfrac{1}{2}$

$x = 3 \Longrightarrow 1 = A(3-1) \Longrightarrow A = \dfrac{1}{2}$)

Zurück zum $\int$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x-1)} &= \int \Big(\frac{1/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x-3}{x-1}\Big| + C. \end{aligned}$$

11.6 QUADRATISCH ERGÄNZEN

Bsp.: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = ?$

$x^2-4x+7=0 \Longrightarrow \ {}_1x_2 = 2 \pm \sqrt{4-7} \notin \mathbb{R}$

$x^2-4x+7 = \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{2\cdot 2\cdot x}_{2ab} + \underbrace{4}_{b^2} \underbrace{-4+7}_{=3} = (x-2)^2+3$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+3} \qquad \left\| \begin{array}{l} t = x-2 \\ x = t+2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 \Longrightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \int \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{3(u^2+1)} \qquad \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{3}\,u \\ u = t/\sqrt{3} \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \sqrt{3} \Longrightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u \end{array}\right.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan u + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\Big) + C$$

Bemerkung: Ähnlich 11.5, 11.6 läßt sich jede rationale Funktion integrieren, vgl. auch die Übungen 70 und Z9.

11.7 WINKELFUNKTIONEN SUBSTITUIEREN

Bsp.: 1) $\int \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \left\| \begin{array}{l} x = R\sin t,\, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ t = \arcsin \dfrac{x}{R} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R\cos t \Longrightarrow \mathrm{d}x = R\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$

$$= \int \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{R^2\cos^2 t}\cdot R\cos t\,\mathrm{d}t$$

(NR: in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist $\cos t \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$)

$= \int R^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$$\left(\text{NR: } \left.\begin{array}{l} \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \end{array}\right\} + \Longrightarrow \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}\right)$$

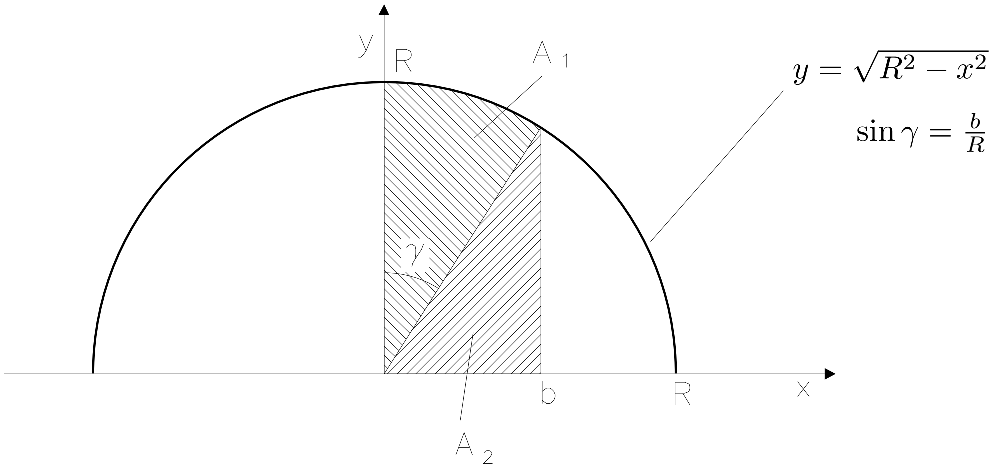
$$= \frac{R^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{R^2}{2}\Big(t + \frac{\sin 2t}{2}\Big) + C$$

(NR: $\sin 2t = 2\sin t\,\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\dfrac{x}{R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{R^2}} = \dfrac{2}{R^2}x\sqrt{R^2-x^2}$)

$= \dfrac{R^2}{2} \arcsin\Big(\dfrac{x}{R}\Big) + \dfrac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + C$

Speziell: $\int\limits_0^b \sqrt{R^2 - u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{R^2}{2} \arcsin\Big(\dfrac{b}{R}\Big) + \dfrac{b}{2}\sqrt{R^2 - b^2}$.

Kontrolle:



$$\int\limits_0^b \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2 = \frac{R^2}{2} \cdot \gamma + \frac{1}{2} b\sqrt{R^2 - b^2} = \frac{R^2}{2} \arcsin\Big(\frac{b}{R}\Big) + \frac{b}{2}\sqrt{R^2 - b^2}$$

(NR: Fläche Kreissektor: $A_1 = C\gamma$; $\gamma = 2\pi \Longrightarrow A_1 = R^2\pi$; also $C = \dfrac{R^2}{2}$)

2) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x} = ?$

Bei rationalen Funktionen von Winkelfunktionen macht man folgende Substitution:
$t = \tan \frac{x}{2} \Longrightarrow x = 2 \arctan t$;

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos \tfrac{x}{2} = 2 \tan \tfrac{x}{2} \cdot \underbrace{\cos^2 \tfrac{x}{2}}_{\dfrac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{(s. Übung 44);}$$

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{x}{2} - \underbrace{\sin^2 \tfrac{x}{2}}_{1 - \cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \cos^2 \tfrac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2 \arctan t) = \frac{2}{1 + t^2} \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2}.$$

Also: $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x} =$ $\qquad \| x = \pm\frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \tan(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm 1$

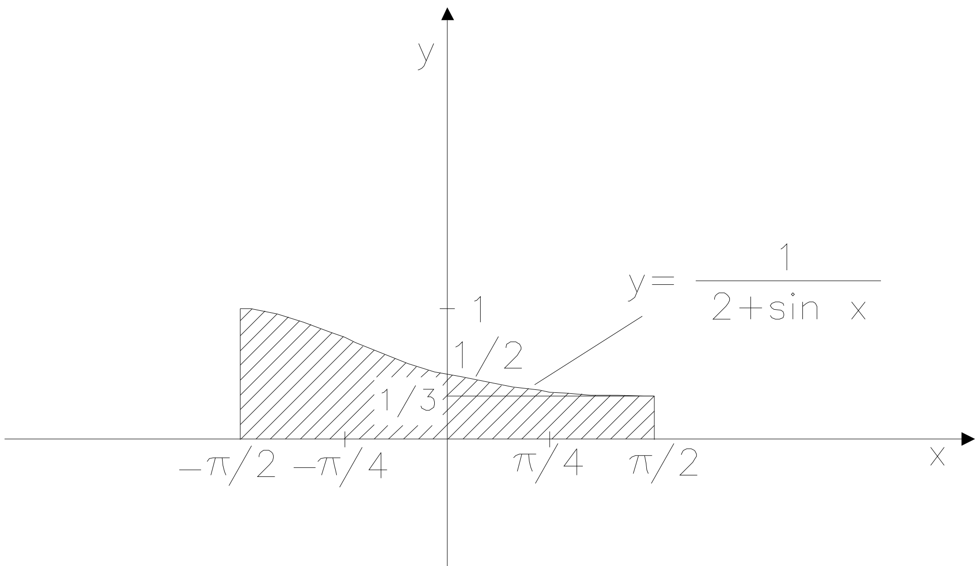
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{\cancel{2}\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\cancel{2} + \frac{\cancel{2}t}{1+t^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = (11.6)$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\underbrace{(t+\frac{1}{2})^2}_{t^2+t+\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + 1} \qquad \left\Vert \begin{array}{l} u = t + \frac{1}{2} \\ t = u - \frac{1}{2},\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \\ t = 1 \Longrightarrow u = \frac{3}{2} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

$$= \int_{-1/2}^{3/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \frac{3}{4}} \qquad \left\Vert \begin{array}{l} u = \frac{\sqrt{3}}{2} v,\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}v \\ u = -\frac{1}{2} \Longrightarrow v = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

$$= \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}v}{\frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \arctan v \Big|_{v=-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} (\underbrace{\arctan \sqrt{3}}_{\pi/3} - \underbrace{\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})}_{-\pi/6}) \underset{\text{(s. Üb. 12)}}{=} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.8138$$



11.8 $\int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

a) Rechnung: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \Longrightarrow A = \int\limits_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x =$

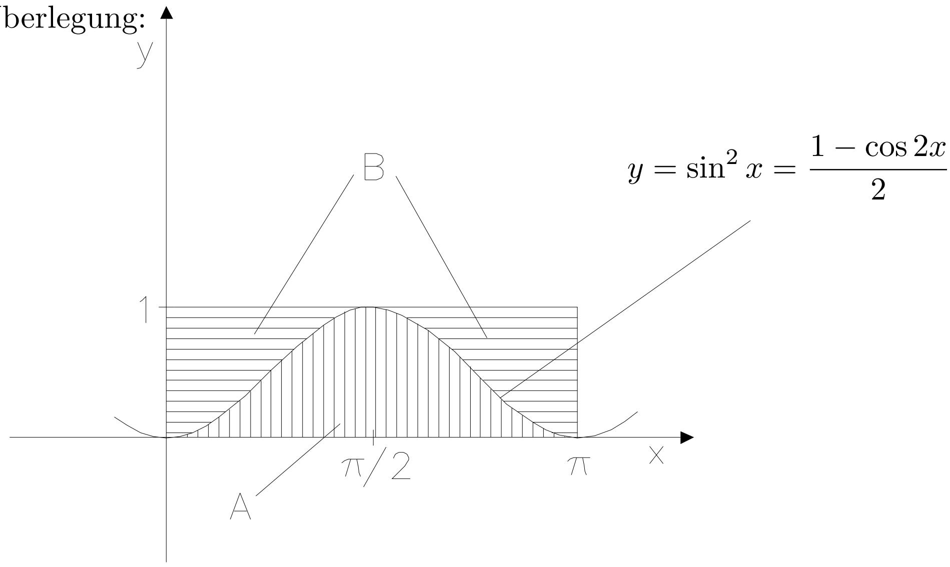
$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{r} (\mathrm{NR}_1:\ 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{array}\right\} - \Longrightarrow 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\mathrm{NR}_2: \int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(u) \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u \qquad \left\Vert \begin{array}{l} u = 2x,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C)$$

b) geometrische Überlegung:



$A = B$ (Symmetrie), $A + B = \pi \Longrightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$

Also: $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ etc. ergeben jeweils die <u>halbe Intervalllänge</u>. Vorsicht: Bei $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ oder allgemein $\int\limits_0^{x} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$ stimmt das nicht, da die Symmetrie für diese Intervalle nicht gegeben ist.

11.9 HYPERBELFUNKTIONEN

<u>Bsp.:</u> $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = ?$

<u>Def.:</u> $\cosh x = \operatorname{ch} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (“Cosinus hyperbolicus”)

$\sinh x = \operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (“Sinus hyperbolicus”)

$\tanh x = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ (“Tangens hyperbolicus”)

<u>Eigenschaften:</u>

$\forall x : \operatorname{ch}(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \operatorname{ch} x \Longrightarrow \operatorname{ch}$ gerade

$\forall x : \operatorname{sh}(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = -\operatorname{sh} x \Longrightarrow \operatorname{sh}$ ungerade

$\forall x : \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x \Longrightarrow \operatorname{th}$ ungerade

$\forall x : \operatorname{ch}(x) > 0$; $\quad \forall x > 0 : \operatorname{sh} x > 0$

$\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})' = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \operatorname{sh} x$

$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{ch}\, x$$

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \text{ (vgl. Üb. 73a)}$$

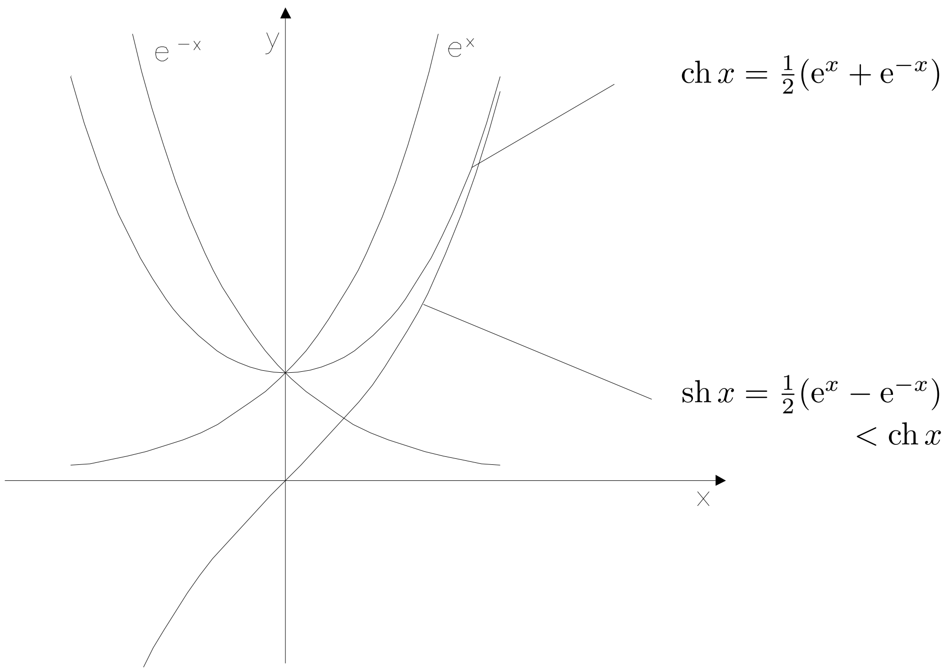
$$\Longrightarrow \forall x : \mathrm{sh}'(x) > 0 \Longrightarrow \mathrm{sh} \text{ monoton steigend}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{sh} \text{ umkehrbar}$$

$$\forall x > 0 : \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) > 0 \Longrightarrow \mathrm{ch} \text{ auf } [0, \infty[\text{ umkehrbar}$$

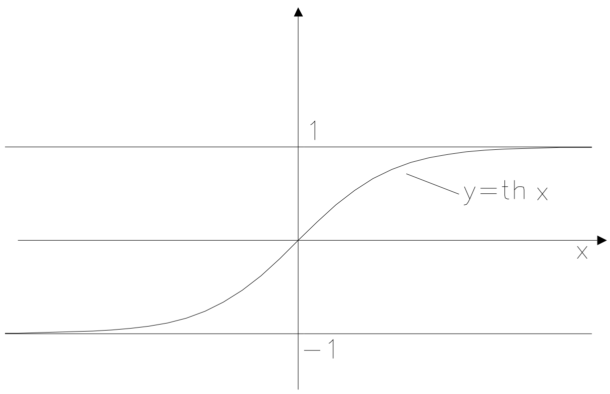
$$\forall x : \mathrm{th}'(x) > 0 \Longrightarrow \mathrm{th} \text{ umkehrbar}$$

<u>Bilder:</u>



$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{th}\, x = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

$$\overset{:\mathrm{e}^x}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \overbrace{\mathrm{e}^{-2x}}^{\nearrow 0}}{1 + \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{\searrow 0}} = 1$$



Summensätze: 1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

Beweis: z.B. von 2):

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})$$
$$= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y} + \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{-x+y} - \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x-y}\right]$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}) = \operatorname{ch}(x+y) \qquad \square$$

Für $y = -x$ ist $1 = \operatorname{ch} 0 = \operatorname{ch}(x-x) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch}(-x) + \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(-x) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$

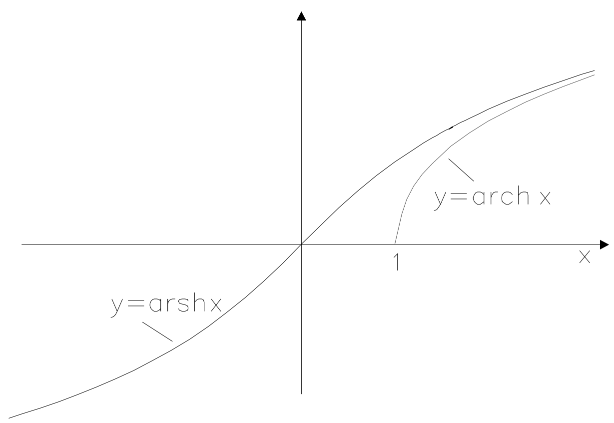
Also: $\boxed{\forall x : 1 = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}$

$y = x$ in den Summensätzen gibt die Verdoppelungsformeln:
$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

Zurück zum Bsp.:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \| x = \operatorname{sh} t,\ \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{\operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{\underbrace{\operatorname{sh}^2 t + 1}_{\operatorname{ch}^2 t}}} \underset{(\operatorname{ch} t > 0)}{=} \int \mathrm{d}t = t + C$$

Def.: 1) Die Umkehrfunktion von sh heißt arsinh oder arsh.
2) Die Umkehrfunktion von $[0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{ch} x$ heißt arcosh oder arch.
Man nennt diese Funktionen Areafunktionen.



Satz $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,
$\forall x \in [1, \infty[: \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Beweis: Z.B. für $\operatorname{arsh} x$:
$\forall x : f \circ f^{-1}(x) = x \Longrightarrow \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = x \Longrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\operatorname{arsh} x} - \mathrm{e}^{-\operatorname{arsh} x}) = x.$

Es sei $u = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} x}$
$\Longrightarrow \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u}) = x \Longrightarrow u - \frac{1}{u} = 2x \Longrightarrow u^2 - 1 = 2xu \Longrightarrow u^2 - 2xu - 1 = 0 \Longrightarrow u = x \pm \sqrt{x^2+1}$
$u > 0 \Longrightarrow u = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} x} = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).\square$

Ende des Bsp.:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = t + C = \operatorname{arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

Kontrolle: $\ln(x + \sqrt{x^2+1})' = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \underbrace{\cdot\sqrt{x^2+1}}_{=}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \checkmark$$

Bemerkung: $P(x)$ sei ein quadratisches Polynom. Dann wird in einem $\int$ mit $\sqrt{P(x)}$ zuerst quadratisch ergänzt und dann

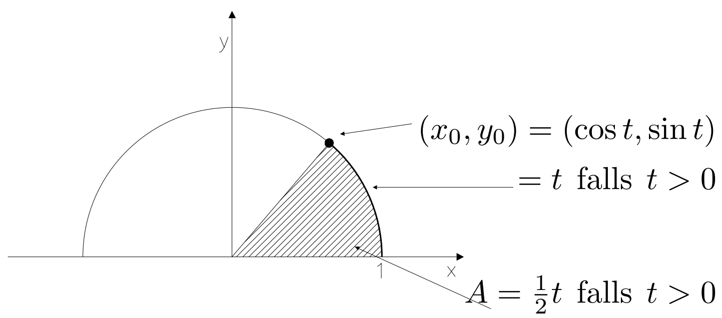
$$\left\{\begin{array}{l} t = \sin u \\ t = \operatorname{sh} u \\ t = \operatorname{ch} u \end{array}\right. \text{ substituiert, wenn in der } \sqrt{} \left\{\begin{array}{l} 1 - t^2 \\ t^2 + 1 \\ t^2 - 1 \end{array}\right\} \text{ steht.}$$

Zusammenhang von sh, ch mit der Einheitshyperbel

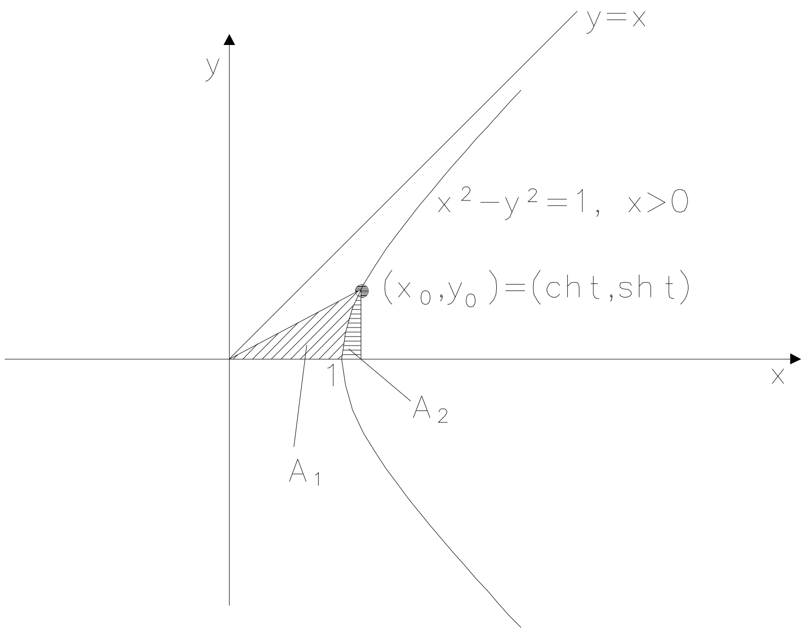
a) sin, cos :

$\forall t \in \mathbb{R} : \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Longrightarrow$
$\quad \forall t \in \mathbb{R} : (\cos t, \sin t) \in$ Einheitskreis $= \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Bedeutung von t :
1) $t =$ Winkel in rad $= \pm$ Bogenlänge von (1,0) aus
2) $t = \pm 2 \cdot$ Sektorfläche A
(beides mal ist $-$ bei Drehen im Uhrzeigersinn zu nehmen.)
2) gilt, denn für $t > 0$ ist A proportional t, d.h. $A = Ct$; $t = 2\pi \Longrightarrow A = \pi$. Also $C = \frac{1}{2}$, d.h. $A = \frac{1}{2}t$.



b) <u>sinh, cosh :</u>
$\forall t \in \mathbb{R} : \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,\ \operatorname{ch} t > 0 \Longrightarrow$
$\forall t \in \mathbb{R} : (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \in$ Einheitshyperbel, rechter Ast
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$
Hier ist 1) falsch, d.h. $t \neq \pm$ Bogenlänge (siehe später), aber es gilt wiederum
2) $t = \pm 2 \cdot$ Sektorfläche $= \pm 2A_1$.
denn falls $t > 0$, so ist
$A = A_1 + A_2 =$ Dreiecksfläche
$= \frac{1}{2} x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh} t$



und $A_2 = \int\limits_{x=1}^{x_0} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \left\| \begin{array}{l} x = \operatorname{ch} u,\ \mathrm{d}x = \operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u \\ x = x_0 = \operatorname{ch} t \Longrightarrow u = t \\ x = 1 \Longrightarrow u = 0 \end{array} \right.$

$$= \int\limits_{u=0}^{t} \sqrt{\underbrace{\operatorname{ch}^2 u - 1}_{\operatorname{sh}^2 u}}\ \operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u$$

$$= \int\limits_0^t \operatorname{sh}^2 u\,\mathrm{d}u$$

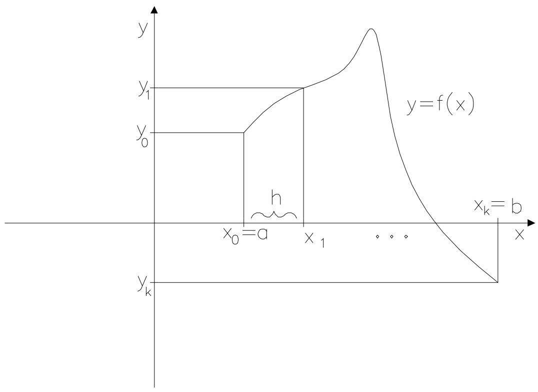
$\left\| \begin{array}{r} \text{NR: } \operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u \\ 1 = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u \\ \Longrightarrow \operatorname{sh}^2 u = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2u - 1) \end{array} \right.$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^t \operatorname{ch}(2u) - 1\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}(2u)}{2} - u\right)\Bigg|_{u=0}^{t}$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2} = \frac{2\operatorname{sh} t\ \operatorname{ch} t}{4} - \frac{t}{2} = A - \frac{t}{2}$$
$$\Longrightarrow \text{Sektorfläche} = A_1 = A - A_2 = \frac{t}{2}$$ □

§12: Numerische Integration

Anders als beim Differenzieren sind viele unbestimmte Integrale von elementar transzendenten Funktionen keine elementar transzendenten Funktionen mehr, z.B. ist $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Si}(x)$ eine neue Funktion. Man braucht daher numerische Verfahren.
Wir verwenden "äquidistante" Zerlegungen.

Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $h = \dfrac{b-a}{k}$, $Z = \{x_0, \ldots, x_k\}$ wobei $x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h, \ldots,\ x_k = a+kh = b$.
Weiters sei $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots,\ y_k = f(b)$.

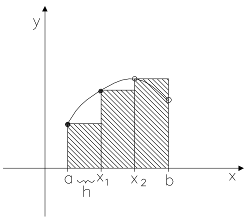


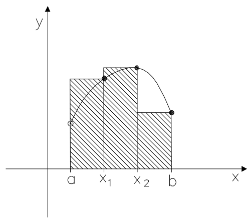
Def.: 1) Wenn $\Xi = \{\overbrace{x_0}^{\xi_1}, \overbrace{x_1}^{\xi_2}, \ldots, x_{k-1}\}$, so heißt $L_k = R(Z,\Xi) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_{i-1}) \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h} = h \sum\limits_{i=1}^{k} y_{i-1} = h(y_0 + \cdots + y_{k-1})$ die Näherung von I nach der Linksregel.

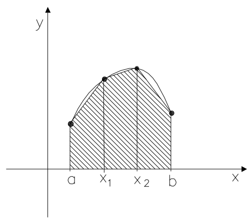
2) Wenn $\Xi = \{\underbrace{x_1}_{\xi_1}, x_2, \ldots, x_k\}$, so heißt $R_k = R(Z,\Xi) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = h \sum\limits_{i=1}^{k} y_i = h(y_1 + \cdots + y_k)$ die Näherung von I nach der Rechtsregel.

3) $T_k = \dfrac{1}{2}(L_k + R_k)$ heißt Näherung von I nach der Trapezregel.
Nach §10, Satz 1, gilt $I = \lim\limits_{k\to\infty} L_k = \lim\limits_{k\to\infty} R_k = \lim\limits_{k\to\infty} T_k$

Bilder:



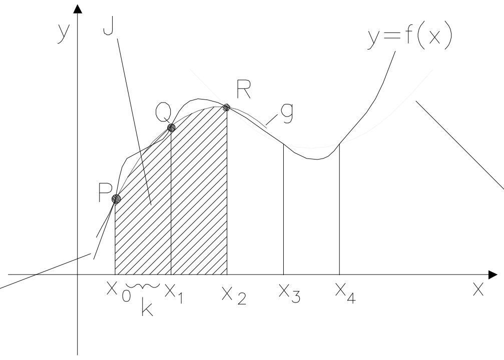




$L_3 = h(y_0 + y_1 + y_2)$ $\qquad R_3 = h(y_1 + y_2 + y_3)$ $\qquad T_3 = \dfrac{1}{2}(R_3 + L_3)$

Bei T_k wird f durch Geradenstücke angenähert.
Noch bessere Approximation: "Simpsonregel"
Idee: Approximiere f durch Parabelbögen!
Bild:

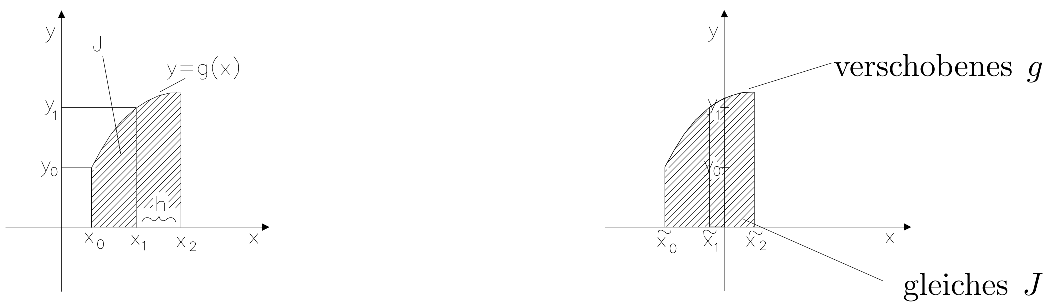
1. Parabel g approximiert f von x_0 bis x_2



2. Parabel approximiert f von x_2 bis x_4

Rechnung: Wir betrachten die erste Parabel. Sie hat eine Gleichung der Form $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ und muß durch $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$, $R = (x_2, y_2)$ gehen, d.h. $g(x_0) = y_0$, $g(x_1) = y_1$, $g(x_2) = y_2$. Wir wollen $J = \int\limits_{x_0}^{x_2} g(x)\,\mathrm{d}x$ durch $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$ ausdrücken.

1) J bleibt gleich, wenn x_0, x_1, x_2 verschoben werden, d.h. J hängt nur von h, y_0, y_1, y_2 ab:



2) Es sei nach Verschiebung $x_1 = 0 \Longrightarrow x_0 = -h,\ x_2 = h$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y_0 = g(-h) = \alpha h^2 - \beta h + \gamma \\ \text{II} & y_1 = g(0) \quad = \qquad\qquad \gamma \\ \text{III} & y_2 = g(h) \quad = \alpha h^2 + \beta h + \gamma \end{array}$$

$$\Longrightarrow \gamma = y_1 \text{ und } \text{I} + \text{III} : 2\alpha h^2 + 2\gamma = y_0 + y_2 \Longrightarrow \alpha = \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}$$

$$\Longrightarrow J = \int\limits_{-h}^{h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{d}x = \left(\alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2} + \gamma x\right)\Bigg|_{x=-h}^{h} = \frac{2\alpha h^3}{3} + 2\gamma h$$

$$= \frac{\cancel{2}h^{\cancel{3}}}{3} \cdot \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{\cancel{2}\ \cancel{h^2}} + 2y_1 h = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Das liefert die Näherung von I nach der Simpsonregel (k muß gerade sein!)

$$S_k = \frac{h}{3}\cdot\Big(\underbrace{y_0+4y_1+y_2}_{\int \text{ vom 1. Parabelbogen}} + \underbrace{y_2+4y_3+y_4}_{\int \text{ vom 2. Parabelbogen}} + \dots\Big)$$

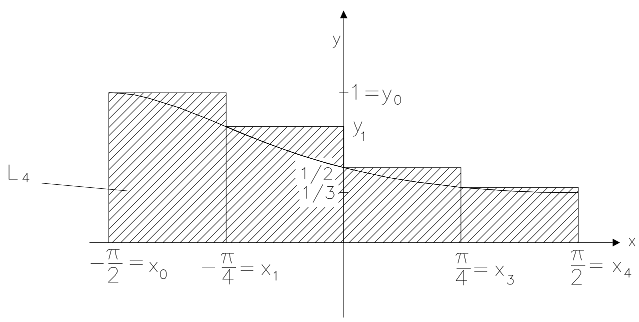
$$= \frac{h}{3}\cdot(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+4y_{k-1}+y_k)$$

Tabelle

	Gesamtfaktor	Faktoren vor y_0	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_{k-2}	y_{k-1}	y_k
L_k	h	1	1	1	1	$\dots$	1	1	0
R_k	h	0	1	1	1	$\dots$	1	1	1
T_k	$h/2$	1	2	2	2	$\dots$	2	2	1
(k gerade!) S_k	$h/3$	1	4	2	4	$\dots$	2	4	1

Bsp.: $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.8138$ (vgl. 11.7, p. 97)

Numerisch: Es sei $k=4$, $h=\dfrac{b-a}{k}=\dfrac{\pi}{4}$, $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$, $x_1=-\dfrac{\pi}{4},\dots,$ $x_4=\dfrac{\pi}{2}$;
$y_0 = \dfrac{1}{2+\sin(-\frac{\pi}{2})} = 1$, $y_1 = \dfrac{1}{2+\sin(-\frac{\pi}{4})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \approx 0.77$, $y_2=\dfrac{1}{2}$, $y_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1} \approx 0.37$, $y_4 = \dfrac{1}{2+\sin(\frac{\pi}{2})} = \dfrac{1}{3}$



$L_4 = \dfrac{\pi}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3) = \dfrac{37\pi}{56} \approx 2.0757$ (Hier ist $L=OD$)
$R_4 = \dfrac{\pi}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4) = \dfrac{83\pi}{168} \approx 1.5521$ (Hier ist $R=UD$)
$T_4 = \dfrac{1}{2}(L_4+R_4) = \dfrac{97\pi}{168} \approx 1.8139$
$S_4 = \dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4) = \dfrac{145\pi}{252} \approx 1.8077.$ (Vgl. auch Üb. 76.)
Hier stimmt zufällig die Trapezregel am besten. Für $k\longrightarrow\infty$ gilt aber:
$\exists\, C : |I-T_k| < \dfrac{C}{k^2}$, $\quad |I-S_k| < \dfrac{C}{k^4}$ (falls f 5-mal stetig differenzierbar ist).

§13: Anwendungen des Integrals

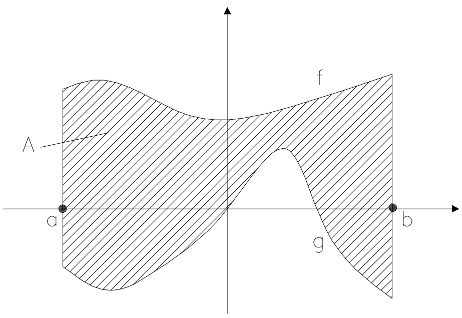
Im folgenden setzen wir bei Riemannsummen immer $\xi_i = x_{i-1}$, d.h. wir nehmen die Linksregel.

13.1 FLÄCHEN

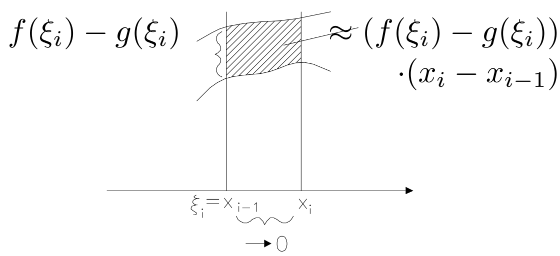
Es seien $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq g(x)$. Dann ist die Fläche A über $[a,b]$ zwischen f und g gegeben durch

$A = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$

Bilder:



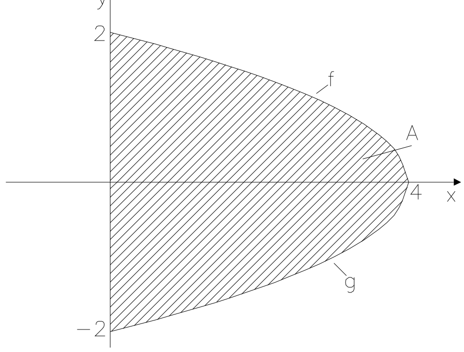
Gesamt



Ausschnitt

$$\Longrightarrow A = \lim_{\varphi(Z)\to 0}\Big[\sum_{i=1}^{k}(f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1})\Big] = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Bsp.: Bestimme die Fläche A, die von der Parabel $x = 4 - y^2$ und der y–Achse begrenzt wird.



a) Integration nach x :

$x = 4 - y^2 \Longrightarrow y^2 = 4 - x \Longrightarrow y = \pm\sqrt{4-x}$,

d.h. $f = \sqrt{4-x},\ g = -\sqrt{4-x}$

$$A = \int\limits_0^4 \big[\underbrace{\sqrt{4-x}}_{f(x)} - (\underbrace{-\sqrt{4-x}}_{g(x)})\big]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 2(\underbrace{4-x}_{u})^{1/2}\,\mathrm{d}x \qquad \left\| \begin{array}{r} u = 4-x \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \\ x = 4 \Longrightarrow u = 0 \end{array} \right.$$

$$= 2\int\limits_4^0 u^{1/2}(-\mathrm{d}u) = -2\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_{u=4}^{0} = -2\cdot\frac{2}{3}(\underbrace{0-4^{3/2}}_{-8}) = \frac{32}{3} = 10.\dot{6}$$

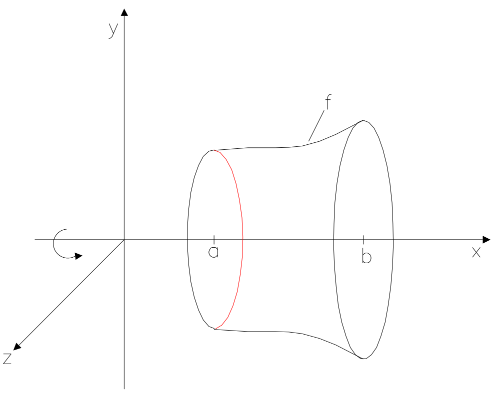
b) Integration nach y :

Nehme y als unabhängige Variable $\Longrightarrow A = \int\limits_{-2}^{2}(4-y^2)\,\mathrm{d}y = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=-2}^{2} = \frac{32}{3}.$

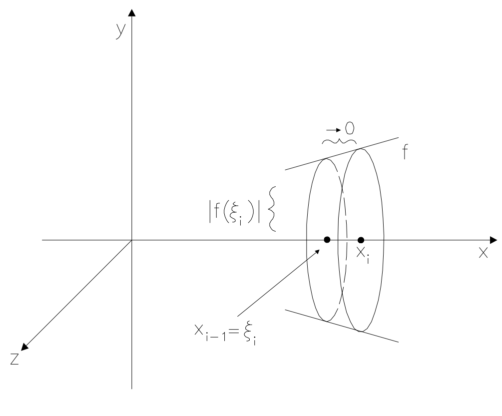
13.2 VOLUMINA VON DREHKÖRPERN

Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Wenn die Kurve $y = f(x)$ um die $x-$Achse rotiert, so hat der entstehende Körper das Volumen $\pi \int\limits_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$.

Bilder:



Ausschnitt



Gesamt

$$\begin{array}{r} \text{Volumen der Scheibe} \\ \approx [\text{Volumen eines Zylinders} \\ \text{mit Grundfläche } f(\xi_i)^2\pi \\ \text{und Höhe } (x_i - x_{i-1})] \\ = f(\xi_i)^2\pi\cdot(x_i - x_{i-1}) \end{array}$$

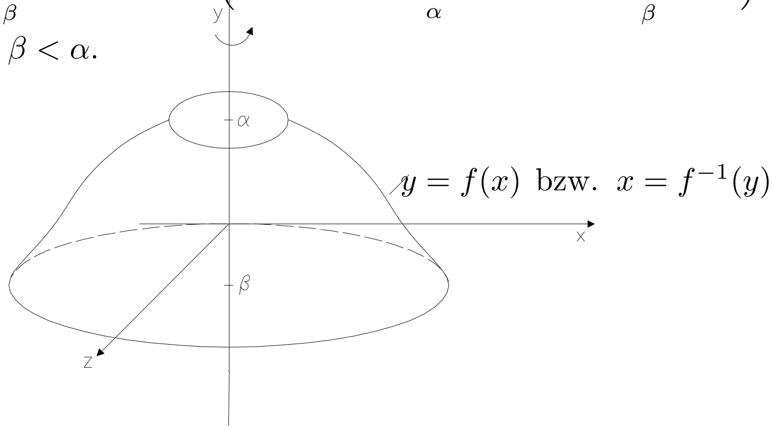
$$\Longrightarrow V = \lim_{\varphi(Z)\to 0}\left[\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)^2\pi\cdot(x_i - x_{i-1})\right] = \pi\cdot\int\limits_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

(Kurz: $V = \pi \int\limits_a^b y^2 \, \mathrm{d}x$)

Ebenso: Wenn $f(x)$ monoton, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, und $y = f(x)$ rotiert um die $y-$Achse, so ist

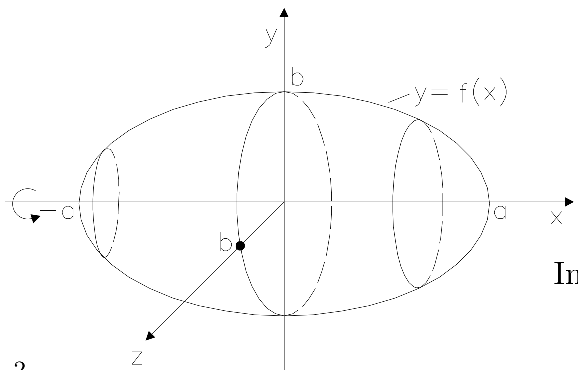
$V = \pi \int\limits_\alpha^\beta f^{-1}(y)^2 \, \mathrm{d}y$ bzw. $\pi \int\limits_\beta^\alpha f^{-1}(y)^2 \, \mathrm{d}y$ $\Big($Kurz: $V = \pi \int\limits_\alpha^\beta x^2 \, \mathrm{d}y$ bzw. $\pi \int\limits_\beta^\alpha x^2 \, \mathrm{d}y\Big)$

je nachdem, ob $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$.



Bsp.: Rotationsellipsoid.

Die Halbellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y > 0$, rotiere um die $x-$Achse.



Hier gilt:
Intervall $= [\underbrace{-a}_{\text{früheres } a}, \underbrace{a}_{\text{früheres } b}]$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},\ y > 0 \Longrightarrow y^2 = b^2\left(1 - \tfrac{x^2}{a^2}\right),\ y = b\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}} = f(x)$$

$$\Longrightarrow V = \pi \int_{-a}^{a} b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big) \, \mathrm{d}x = \pi b^2 \Big(x - \frac{x^3}{3a^2}\Big)\Big|_{x=-a}^{a}$$

$$= \pi b^2 \Big[\underbrace{\Big(a - \frac{a^3}{3a^2}\Big)}_{\frac{2a}{3}} - \underbrace{\Big(-a - \frac{(-a)^3}{3a^2}\Big)}_{-\frac{2a}{3}}\Big] = \frac{4\pi b^2 a}{3}$$

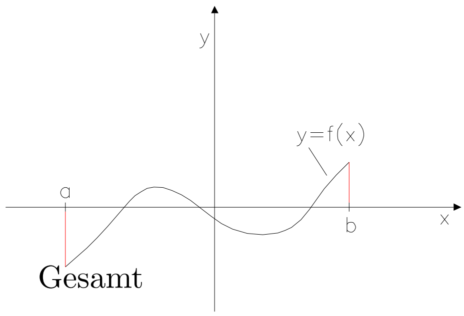
Speziell bei der Kugel ist $a = b = R \Longrightarrow V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

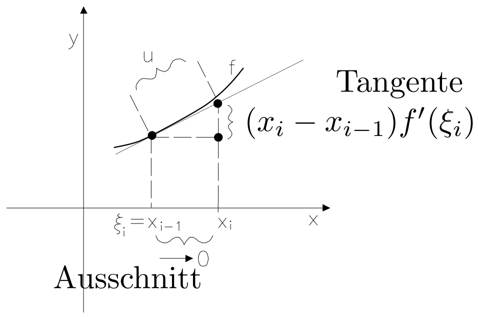
13.3 BOGENLÄNGE

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und f' sei stückweise stetig. Dann hat der Graph von f die Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\text{Kurz: } L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Bilder:





Länge des Kurvenstückes über $[x_{i-1}, x_i]$

$$\approx u \underset{\text{Pythagoras}}{=} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 f'(\xi_i)^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}$$

$$\Longrightarrow L = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\cdot(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Bsp.: Länge des Parabelbogens $y = x^2$ über $[0,b]$.

$y = f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x$

$$\Longrightarrow L = \int_0^b \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \left\|\ \begin{array}{c} t = 2x,\ x = t/2 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2},\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x = b \Longrightarrow t = 2b \\ x = 0 \Longrightarrow t = 0 \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2b} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \left\|\ \begin{array}{c} t = \operatorname{sh} u \text{ (s.11.9)} \\ u = \operatorname{arsh} t \\ \mathrm{d}t = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsh} 2b} \underbrace{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}}_{\operatorname{ch} u}\cdot \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u \qquad \left\|\ \begin{array}{l} \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \\ \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u = \operatorname{ch}(2u) \\ \qquad \Longrightarrow \operatorname{ch}^2 u = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}(2u)) \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsh} 2b} \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2u)\,\mathrm{d}u$$

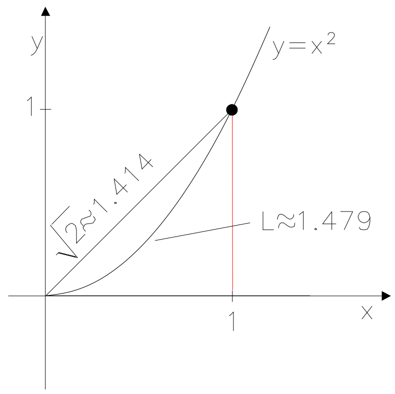
$$= \frac{1}{4}\Big(u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2}\Big)\Big|_{u=0}^{\operatorname{arsh}(2b)}$$

$$\Big\| \quad \operatorname{sh}(2u) = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2\operatorname{sh} u\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}$$

$$= \frac{1}{4}\big(\operatorname{arsh}(2b) + 2b\cdot\sqrt{1+4b^2}\,\big)$$

$$= \frac{b}{2}\sqrt{1+4b^2} + \frac{1}{4}\ln(2b+\sqrt{1+4b^2}) \quad \text{(siehe 11.9)}$$

Z.B.: $b = 1 \Longrightarrow L = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \approx 1.479$

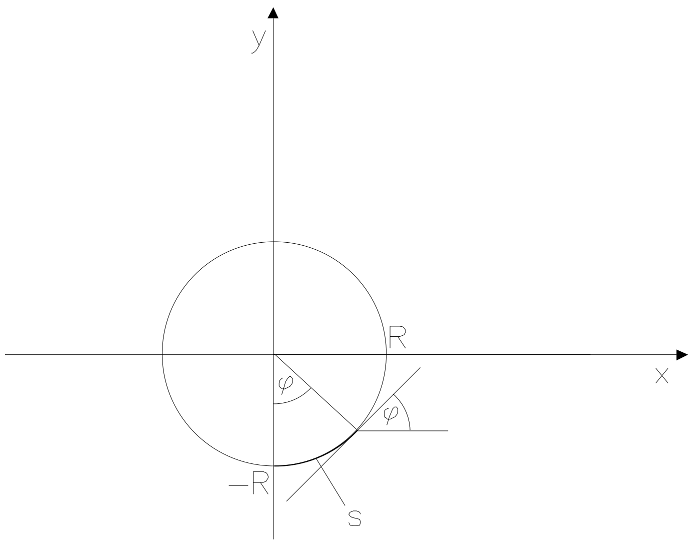


13.4 $\underline{\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|}$

<u>Bsp.:</u> Kreis mit Radius R :
$\varphi = \measuredangle$ Tangente zu x–Achse,
$s =$ Bogenlänge von $(0,-R)$ aus

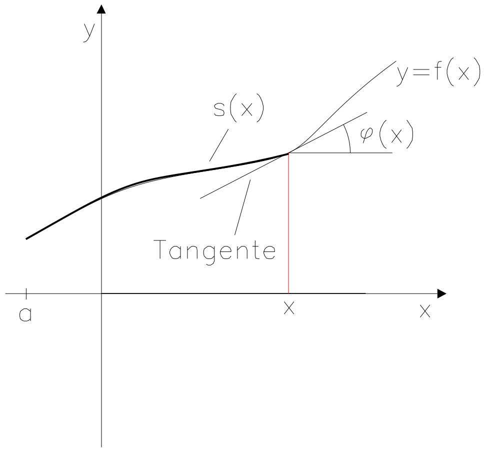
$$\Longrightarrow s = R\cdot\varphi \Longrightarrow \varphi = \frac{s}{R}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R} = \kappa$$



Allgemein:
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und f' sei stetig.

Definiere $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_a^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$ d.h. $s(x)$ ist die Bogenlänge von a bis x.
Bild:



$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \Big(\int\limits_a^x \underbrace{\sqrt{1+f'(t)^2}}_{h(t)}\,\mathrm{d}t\Big)' = (\text{§10, Satz 2 (Hauptsatz)}) = h(x) = \sqrt{1+f'(x)^2} > 0$$

$\Longrightarrow s$ ist monoton steigend $\Longrightarrow s$ ist umkehrbar. Wir können daher x als Funktion von s betrachten und auch $\varphi(x) = \arctan f'(x)$ als Funktion von s betrachten.

Satz: $\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|$

In Worten: Die Krümmung ist die Änderungsgeschwindigkeit des Winkels bezüglich der Bogenlänge.

Beweis: $\varphi = \arctan y' \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+y'^2}\cdot y''$;

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = (\text{§7, Satz 3 (Ableitung der Umkehrfunktion)}) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{(s.oben)}$$

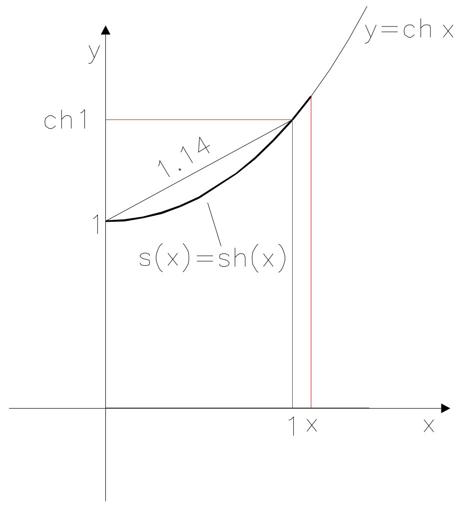
$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = (\text{Kettenregel}) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{y''}{1+y'^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \Longrightarrow \kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|. \qquad \square$$

Bsp.: $y = f(x) = \operatorname{ch} x$

Es sei $a = 0 \Longrightarrow s(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \int\limits_0^x \sqrt{\underbrace{1+\operatorname{sh}^2 t}_{\operatorname{ch}^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sh} t\Big|_{t=0}^{x} = \operatorname{sh} x$$

Bild:



Z.B.: $x = 1$,
$\operatorname{ch} 1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1}) \approx 1.54$
$\operatorname{sh} 1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 1.18$
(gerader Weg:
$\sqrt{1+(\operatorname{ch} 1 - 1)^2} \approx 1.14$)

$$\varphi = \arctan y' = \arctan(\operatorname{sh} x) = \arctan(s) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{1+s^2} \Longrightarrow \kappa \underset{\text{Satz}}{=} \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{1}{1+s^2} = \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Kontrolle des Ergebnisses mit der früheren Formel:

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\operatorname{ch} x}{(\underbrace{1+\operatorname{sh}^2 x}_{\operatorname{ch}^2 x})^{3/2}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\checkmark$$

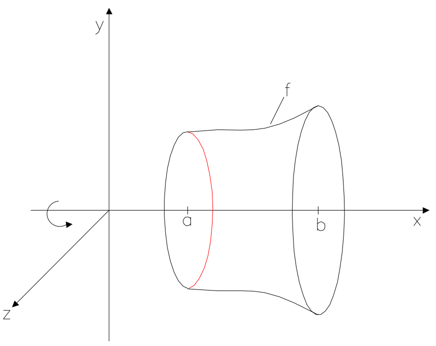
13.5 OBERFLÄCHEN VON ROTATIONSKÖRPERN

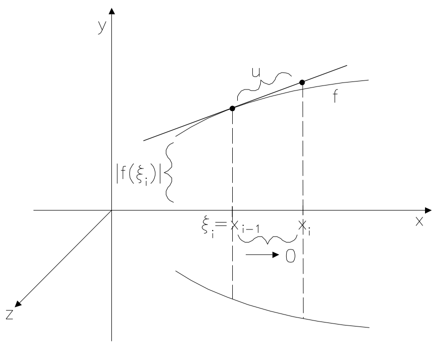
Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und f' sei stückweise stetig. Wenn die Kurve $y = f(x)$ um die $x-$Achse rotiert, so hat der entstehende Körper die Oberfläche

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Bilder:

Ausschnitt





Gesamt

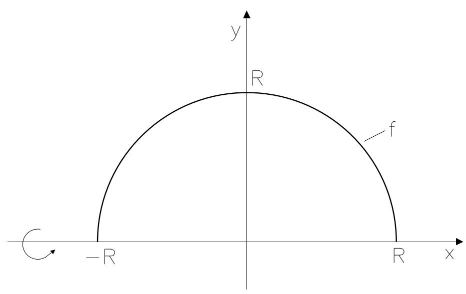
Oberfläche der Scheibe $\approx u \cdot 2\pi|f(\xi_i)|$

$u = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}$ (s. 13.3)

$$\Longrightarrow S = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1+f'(\xi_i)^2} \cdot 2\pi|f(\xi_i)| = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Bsp.: Kugeloberfläche

$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$



$$f' = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad 1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2},\quad \sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\Longrightarrow S = 2\pi \int_{-R}^{R} |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

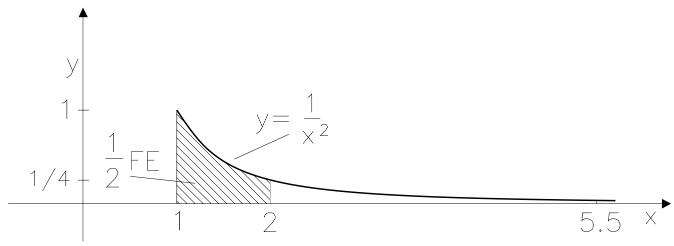
$$= 2\pi R \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$

(Beachte: Eigentlich ist hier f' nicht stückweise stetig, da f' bei $\pm R$ nicht beschränkt ist. Wenn man auch uneigentliche Integrale (siehe §14) zuläßt, kann man diese Voraussetzung weglassen.)

§14: Uneigentliche Integrale

14.1 UNEIGENTLICHE INTEGRALE 1. ART

Bsp.: $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$



$$\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_1^b x^{-2}\,\mathrm{d}x = \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=1}^{b} = -\frac{1}{b} - (-1) = 1 - \frac{1}{b}$$

$\Longrightarrow$ Fläche von 1 bis	2	:	$1 - \frac{1}{2}$	$=$	$\frac{1}{2}$
-"-	5.5	:	$1 - \frac{1}{5.5}$	$=$	$0.818\ldots$
-"-	10	:	$1 - \frac{1}{10}$	$=$	0.9
-"-	100	:	$1 - \frac{1}{100}$	$=$	0.99
-"-	∞	:	$\lim\limits_{b\to\infty}(1 - \frac{1}{b})$	$=$	1

Def.: $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sei stückweise stetig. Dann heißt f über $[a, \infty[$

(Riemann-) integrierbar $\Longleftrightarrow \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und $\neq \pm\infty$.

Schreibweise: $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Analog: $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

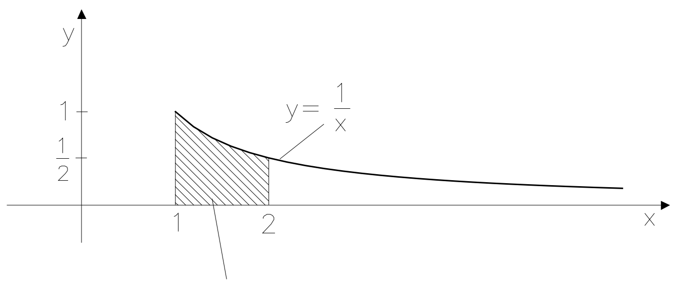
(falls die Limites existieren und in $\mathbb{R}$ sind). Diese Integrale (eigentlich Grenzwerte von Integralen) heißen uneigentliche Integrale 1. Art.

Bsp.: 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{b}\Big) = 1$

(Kurz: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_1^\infty = 0 - (-1) = 1.$)

2) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln x)\Big|_{x=1}^{b} = \lim_{b\to\infty} (\underbrace{\ln b}_{\to\infty} - \underbrace{\ln 1}_{=0}) = \infty$

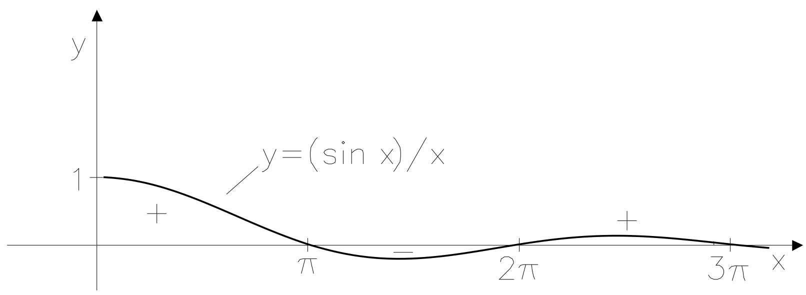
Also ist $\dfrac{1}{x}$ <u>nicht integrierbar</u> über $[1, \infty[$.



∞ viel Fläche zwischen Kurve und x-Achse

Fläche von 1 bis	2	:	$\ln 2$	$\approx$	0.69
-"-	5.5	:	$\ln 5.5$	$\approx$	1.7
-"-	10	:	$\ln 10$	$\approx$	2.3
-"-	100	:	$\ln 100$	$\approx$	4.6
-"-	10^{1000}	:	$\ln(10^{1000})$	$=$	$1000 \cdot \ln 10 \approx 2302.6$
-"-	∞	:	$\lim\limits_{b\to\infty} \ln b$	$=$	∞

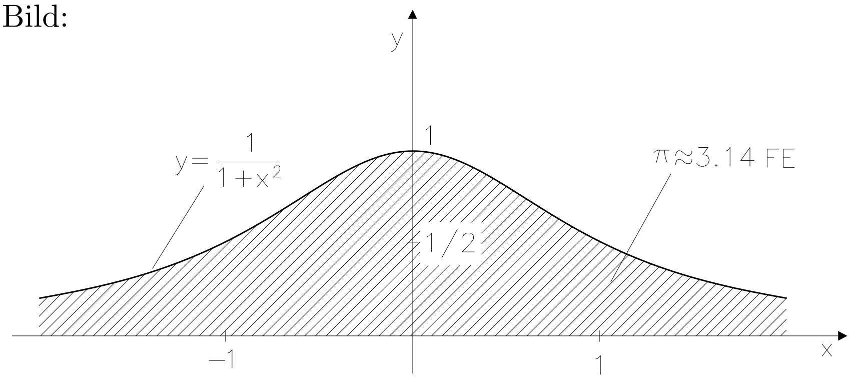
<u>Bemerkung:</u> Es gibt auch den Fall, daß sich Flächen über und unter der $x-$Achse aufheben, z.B. $\dfrac{\sin x}{x}$ ist integrierbar über $[0, \infty[$ $\left(\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\right)$, aber insgesamt ist ∞ viel Fläche da, d.h. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$.



3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} (\arctan x)\Big|_a^b$

$\displaystyle = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} (\underbrace{\arctan b}_{\to\pi/2} - \underbrace{\arctan a}_{\to-\pi/2}) = \pi$

Bild:

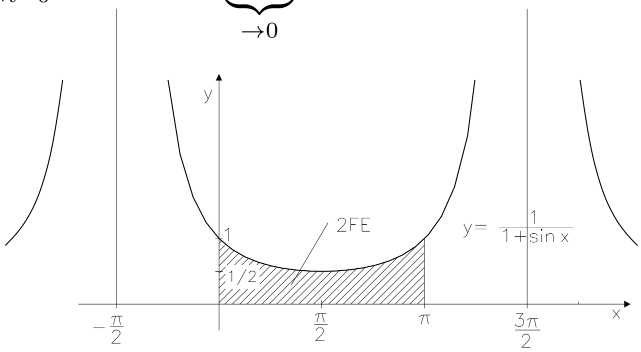


4) $$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^\infty \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\left\| \begin{array}{l} t=\tan\frac{x}{2},\ \text{s. } 11.7 \\ x=0 \Longrightarrow t=0 \\ x\nearrow \pi \Longrightarrow t\to\infty \end{array}\right.$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+2t+t^2} = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{1+t}\right)\Big|_{t=0}^b = 2\lim_{b\to\infty}\Big(-\underbrace{\frac{1}{1+b}}_{\to 0} - \Big(-\frac{1}{1}\Big)\Big) = 2$$



Beachte: Durch Substitution kann ein Integral uneigentlich werden.

Vorsicht: Wenn man mit der Substitution $t=\tan\frac{x}{2}$ über $x=\pi$ (oder $-\pi, 3\pi$ etc.) darüber geht, muß man das Integral zerlegen: Z.B.:

$$\int_0^{5\pi/4} \frac{dx}{1+\sin x} = \underbrace{\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x}}_{\text{s. oben}} + \underbrace{\int_\pi^{5\pi/4} \frac{dx}{1+\sin x}}_{t=\tan\frac{x}{2},\ \text{aber } x=2\pi+2\arctan t}$$

Def.: $\int_a^\infty f(x)\,dx \begin{Bmatrix}\underline{\text{konvergent}}\\ \underline{\text{divergent}}\end{Bmatrix} \Longleftrightarrow f(x)$ ist über $[a,\infty[$ $\begin{Bmatrix}\text{integrierbar}\\ \text{nicht integrierbar}\end{Bmatrix}$.

Analog für $\int_{-\infty}^b$, $\int_{-\infty}^\infty$.

<u>Satz 1:</u> $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

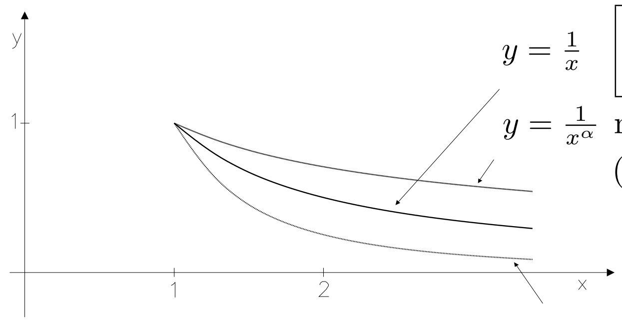
<u>Beweis:</u> $y = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$

<u>1. Fall:</u> $\alpha = 1$ siehe Beispiel 2

<u>2. Fall:</u> $\alpha \neq 1$

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=1}^{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty : \alpha < 1, \\ -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} : \alpha > 1 \end{cases} \qquad \square$$

Bild:



$y = \frac{1}{x}$ $\boxed{\int \text{ divergent}}$

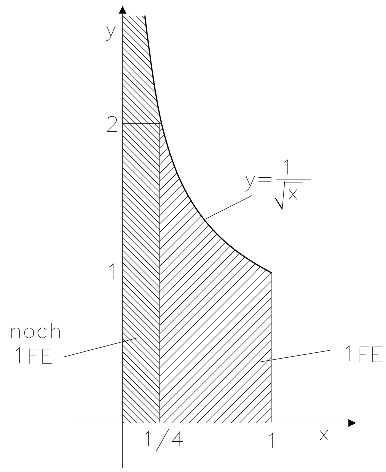
$y = \frac{1}{x^\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$ (Z.B. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$)

$y = \frac{1}{x^\alpha}$ mit $\alpha > 1$ (Z.B. $y = \frac{1}{x^2}$)

$\boxed{\int \text{ konvergent}}$

14.2 <u>UNEIGENTLICHE INTEGRALE 2. ART</u>

<u>Bsp.:</u> $f :]\,0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$



$$\text{Für } a > 0 \text{ ist } \int\limits_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int\limits_a^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_{x=a}^{1} = \frac{1}{1/2} - \frac{a^{1/2}}{1/2} = 2(1-\sqrt{a})$$

$$\Longrightarrow \text{Fläche von } \begin{array}{llllll} \frac14 & \text{bis} & 1 & : & 2(1 - \frac12) & = 1 \\ \frac19 & \text{bis} & 1 & : & 2(1 - \frac13) & = \frac43 \\ \frac{1}{100} & \text{bis} & 1 & : & 2(1 - \frac{1}{10}) & = 1.8 \\ 0 & \text{bis} & 1 & : & \lim\limits_{a\searrow 0} 2(1-\sqrt{a}) & = 2 \end{array}$$

<u>Def.:</u> $f:]\,c,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann heißt f <u>über $[c,b]$ integrierbar</u> bzw. $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ <u>konvergent</u> $\iff \lim\limits_{a\searrow c} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und $\neq \pm\infty$.

<u>Schreibweise:</u> $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\searrow c} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

<u>Analog für:</u> α) $f: [a,c\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und

β) $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f stetig außer in $c \in\,]\,a,b\,[$. In diesem Fall ist

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ falls <u>beide</u> Integrale konvergent sind.

<u>Bsp.:</u> 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\searrow 0} \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\searrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\searrow 0}(2 - 2\sqrt{a}) = 2.$

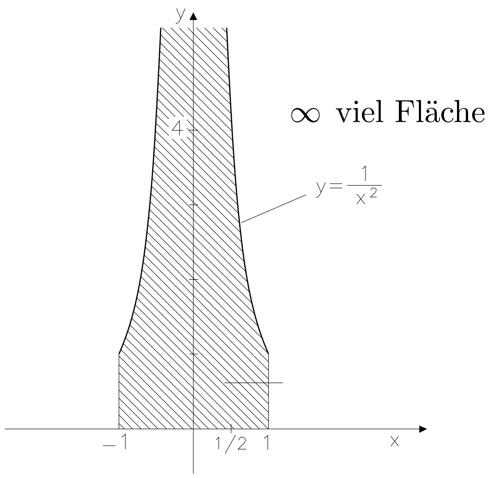
(Kurz: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{x=0}^1 = 2 - 0 = 2$; vgl. auch Bsp. 1 in 14.1: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ist die Umkehrfunktion zu $\dfrac{1}{x^2}$)

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$. $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ wird ∞ bei $x = 0$. Also: $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$;

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{a\searrow 0} \int_a^1 x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\searrow 0} \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{x=a}^1 = \lim_{a\searrow 0}\Big(-1 + \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to\infty}\Big) = \infty$$

Also ist hier ∞ viel Fläche enthalten.

$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ist divergent.



<u>Vorsicht:</u> Die kurze Methode versagt hier.

<u>Kurz, aber falsch:</u> $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=-1}^1 = -1 - \Big(-\frac{1}{-1}\Big) = -2$ Unsinn!

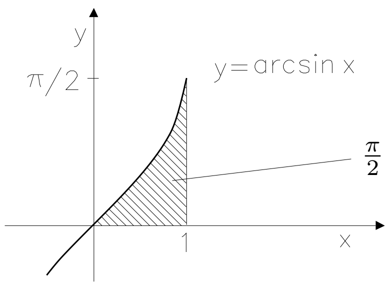
Satz 3 (3α) in §10 ist nicht anwendbar, da f nicht stetig auf $[-1,1]$ ist.

3) $$\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{g} \,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$$

$$= 1 \cdot \frac{\pi}{2} - \int_1^0 \frac{-\mathrm{d}t/2}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \underset{\text{(Bsp. 1)}}{=} \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57$$

$$\left\| \begin{aligned} t &= 1 - x^2 \\ \tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} &= -2x \\ x\,\mathrm{d}x &= -\tfrac{\mathrm{d}t}{2} \\ x = 0 &\Longrightarrow t = 1 \\ x = 1 &\Longrightarrow t = 0 \end{aligned} \right.$$



$\frac{\pi}{2} - 1\ FE$ (vgl. auch Übung 68b)

Beachte: $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ wird ∞ bei $x = 1$, d.h. auch durch partielles Integrieren können aus eigentlichen Integralen uneigentliche werden.

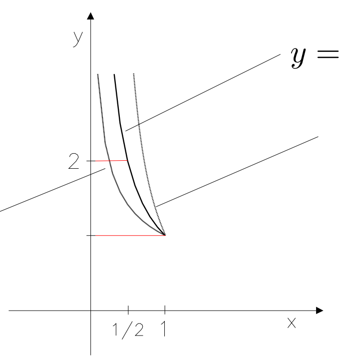
Satz 2: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ ist konvergent $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

Beweis: 1. Fall: $\alpha = 1 : \displaystyle\lim_{a \searrow 0} \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{a \searrow 0} \ln x \Big|_{x=a}^1 = \lim_{a \searrow 0} (\underbrace{\ln 1}_{0} - \underbrace{\ln a}_{\to -\infty}) = +\infty$

2. Fall: $\alpha \neq 1 : \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{a \searrow 0} \int_a^1 x^{-\alpha} \,\mathrm{d}x$

$$= \lim_{a \searrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=a}^1 = \lim_{a \searrow 0} \frac{1 - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty : 1 - \alpha < 0, \text{ d.h. } \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} : 1 - \alpha > 0, \text{ d.h. } \alpha < 1 \end{cases} \qquad \square$$

Bild:



$y = \frac{1}{x}$ $\boxed{\int \text{ divergent}}$

$y = \frac{1}{x^\alpha}$ mit $\alpha > 1$ (z.B. $y = \frac{1}{x^2}$)

$y = \frac{1}{x^\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$ (z.B. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$)

$\boxed{\int \text{ konvergent}}$

KAP. IV: DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, $\mathbb{C}$

§15: Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

15.1 RECHENBEISPIELE

Schreibweise: Statt $f(x)$ wird bei Differentialgleichungen meist $y(x)$ geschrieben.
Bsp.: 1) Bestimme die Funktionen $y(x)$, die $\forall x$ (in der Definitionsmenge) $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$ erfüllen, d.h. "löse die Differentialgleichung $y' = -\dfrac{x}{y}$".

Beachte: Gleichung ... gesucht: Zahl,
Differentialgleichung ... gesucht: Funktion

a) Rechenmethode:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Longrightarrow$$

$$y^2 + x^2 = C, \qquad y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

Ergebnis: Kreise mit Mittelpunkt $(0,0)$.

b) Kontrolle (vgl. §7, Bsp. 17, p. 61)

α) Direkt: $\quad y' = \pm\dfrac{-2x}{2\sqrt{C-x^2}} = -\dfrac{x}{y}$

β) Implizit: $y^2 + x^2 = C \qquad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\Longrightarrow 2y \cdot y' + 2x = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Begründung der Rechenmethode:

Es seien 2 Funktionen $g(x), h(y)$ gegeben und Funktionen $y(x)$ gesucht, die $\forall x : y'(x) = \dfrac{g(x)}{h(y(x))}$ erfüllen, kurz: $y' = \dfrac{g(x)}{h(y)}$

G bzw. H seien Stammfunktionen zu g bzw. h (d.h. $G' = g,\ H' = h$).

Die Rechenmethode ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{h(y)} \Longrightarrow h(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int h(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow H(y) = G(x) + C$$

Kontrolle dieser Lösung durch implizites Differenzieren:

$H(y(x)) = G(x) + C \qquad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\Longrightarrow H'(y(x)) \cdot y'(x) = G'(x) \Longrightarrow h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x) \Longrightarrow y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))} \checkmark$$

Def.: 1) Eine Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine Gleichung der Form (abhängige Variable)$'$ oder $\dot{}$

= Funktion (unabhängige Variable, abhängige Variable)

Bsp.:

Differentialgl.	unabh. Var.	abh. Var.	Funktion	Parameter
$y' = -\dfrac{x}{y}$	x	y	$D(x,y) = -\dfrac{x}{y}$	–
$\dot{x} = a\,x$	t	x	$D(t,x) = ax$	a
$\dot{x} = \dfrac{a}{S}x(S-x)$	t	x	$D(t,x) = \dfrac{a}{S}x(S-x)$	a, S
$m\dot{v} = mg - av^2$	t	v	$D(t,v) = g - \dfrac{a}{m}v^2$	g, a, m

2) Wenn $D(x,y)$ in der Form $\dfrac{g(x)}{h(y)}$ geschrieben werden kann, so heißt $y' = D(x,y)$ Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.
Bsp.: Alle Differentialgleichungen in der Tabelle sind mit trennbaren Variablen;

$$y' = x \cdot \sin y = \frac{\left. x \right\}\, g}{\left. \frac{1}{\sin y} \right\}\, h} \qquad \text{trennbar}$$

$$y' = x + y \qquad \text{nicht trennbar}$$

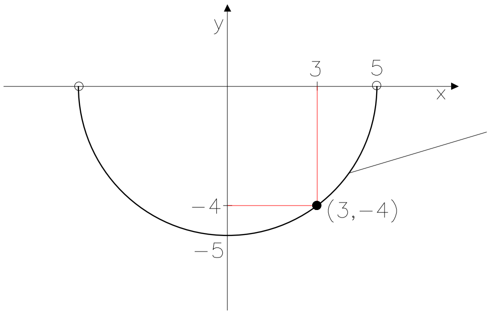
3) $y : \text{Def} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto y(x)$ heißt Lösung der Differentialgleichung $y' = D(x,y) \Longleftrightarrow$ $\forall x \in$ Def: $y'(x) = D(x, y(x))$

4) Durch eine zusätzliche Bedingung der Form $y(x_0) = y_0$ ist die Funktion y im allgemeinen eindeutig bestimmt. Man nennt dies "Angabe eines Anfangswertes".

Bsp.: 1) $y' = -\dfrac{x}{y}, \quad y(3) = -4$

$x^2 + y^2 = C, \quad x = 3 \Longrightarrow y = -4 \Longrightarrow C = 9 + 16 = 25 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 25$

$\Longrightarrow y(x) = -\sqrt{25 - x^2}$



Lösung
(einzige Kurve durch (3,-4))

Bei $y = 0$ ist die Differentialgleichung nicht definiert.
Also: Def $=]-5, 5[$

2) <u>Die Wachstumsgleichung</u>

$t \ldots$ Zeit, $\quad x(t) \ldots$ Größe, die proportional zu ihrem Wert wächst bzw. fällt, d.h. $x(t) \approx x(t_0) + a x(t_0)(t - t_0)$ für t bei t_0, bzw. $\dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \to a x(t_0)$ für $t \to t_0$, d.h. $\underline{\dot{x} = a x}$ (a heißt "Wachstumsrate")

Z.B.: $x(t)$	= Restmenge bei radioaktivem Zerfall:	$a < 0$	($a = -\alpha$ in Üb. 36)
oder $x(t)$	= Temperaturdifferenz eines Körpers zur Umgebung:	$a < 0$	($a = -\alpha$ in Aufg. 1, 2. Kl.)
oder $x(t)$	= Bevölkerungsanzahl:	$a > 0$	
oder $x(t)$	= Guthaben bei kontinuierlicher Verzinsung:	$a > 0$	($a = x$ in 5.2.)

<u>Lösung:</u> $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a x, \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = a\,\mathrm{d}t, \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int a\,\mathrm{d}t$

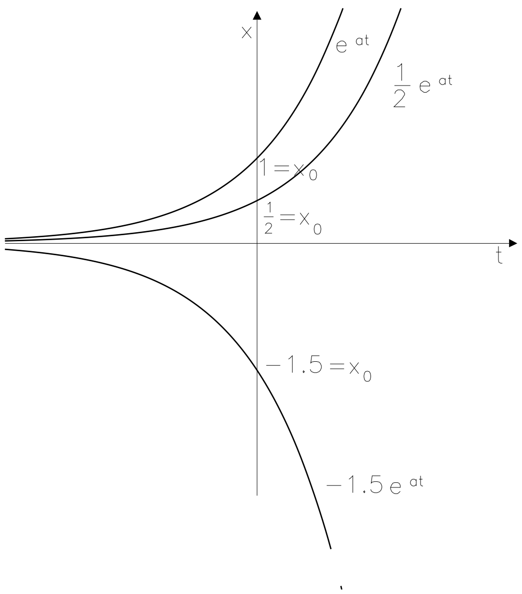
$\ln|x| = at + C_1, \quad |x| = \mathrm{e}^{at + C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{at} \Longrightarrow x = \underbrace{\pm \mathrm{e}^{C_1}}_{C} \cdot \mathrm{e}^{at}, \quad x = C\,\mathrm{e}^{at}$

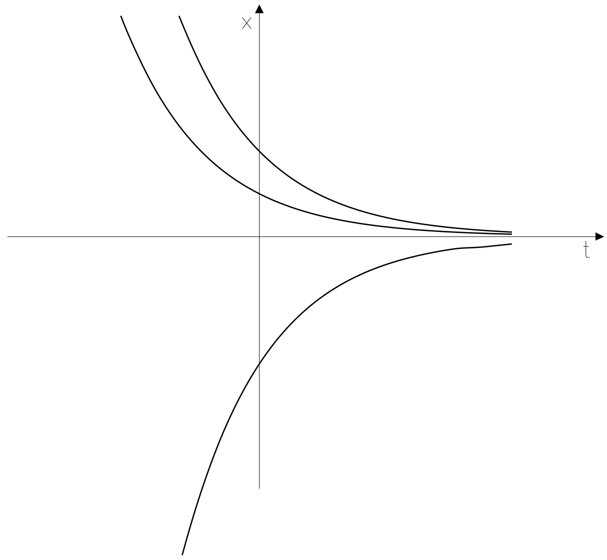
<u>Kontrolle:</u> $\dot{x} = C \cdot a\mathrm{e}^{at} = a x \checkmark$

<u>Beachte:</u> $C = 0$ kommt zunächst nicht heraus, liefert aber auch eine Lösung, nämlich $x(t) = 0$ für alle t $\quad (\Longrightarrow \dot{x}(t) = 0, \ \dot{x} = a x)$

<u>Anfangswert:</u> $x(0) = x_0 \Longrightarrow C = x_0, \quad x(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{at}$

Bilder: $\boxed{a > 0}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{a < 0}$





3) Die logistische Differentialgleichung

$$\begin{array}{lll} \text{Wachstumsrate} \longrightarrow a > 0 & \text{für} & x \longrightarrow 0 \\ \text{Wachstumsrate} \longrightarrow 0 & \text{für} & x \longrightarrow S > 0 \quad (\text{“Sättigungsniveau”}) \end{array}$$

Nehme $\dot{x} = \overbrace{a(1 - \frac{x}{S})}^{\text{eine von } x \text{ abhängige Wachstumsrate!}} \cdot x = \frac{a}{S}(S - x) \cdot x$

Lösung: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{S}(S-x) \cdot x \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x(S-x)} = \int \frac{a}{S}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{S} \cdot t + C_1$;

$$\frac{1}{x(S-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{S-x} \Longleftrightarrow 1 = A(S-x) + Bx$$

$x = S: \qquad 1 = BS, \qquad B = \frac{1}{S}$

$x = 0: \qquad 1 = AS, \qquad A = \frac{1}{S}$

Also: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(S-x)} = \frac{1}{S}\Big(\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{S-x}\Big) = \frac{1}{S}(\ln|x| - \ln|S-x|) = \frac{1}{S} \ln\Big|\frac{x}{S-x}\Big|$

$$\Longrightarrow \Big|\frac{x}{S-x}\Big| = \mathrm{e}^{at + C_1 S}, \quad \frac{x}{S-x} = \underbrace{\pm\mathrm{e}^{C_1 S}}_{C}\mathrm{e}^{at} \qquad / \cdot (S-x)$$

$$\Longrightarrow x = CS\mathrm{e}^{at} - Cx\mathrm{e}^{at} \Longrightarrow x(1 + C\mathrm{e}^{at}) = CS\mathrm{e}^{at}, \qquad x(t) = \frac{CS\mathrm{e}^{at}}{1 + C\mathrm{e}^{at}}$$

Anfangswert: $x(0) = x_0$

$$\Longrightarrow x_0 = \frac{CS}{1+C} \Longrightarrow CS = x_0(1+C) \Longrightarrow C(S - x_0) = x_0 \Longrightarrow C = \frac{x_0}{S - x_0}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{\frac{x_0}{S-x_0} S\mathrm{e}^{at}}{1 + \frac{x_0}{S-x_0}\mathrm{e}^{at}} \Longrightarrow x(t) = \frac{x_0 S\mathrm{e}^{at}}{S - x_0 + x_0\mathrm{e}^{at}}$$

Speziell: 1) $x_0 = 0 \Longrightarrow \forall t : x(t) = 0$;

2) $x_0 = S \Longrightarrow \forall t : x(t) = S$;

3) $0 < x_0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) \overset{(\cdot \mathrm{e}^{-at})}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{x_0 S}{\underbrace{(S - x_0)\mathrm{e}^{-at}}_{\to 0} + x_0} = S$;

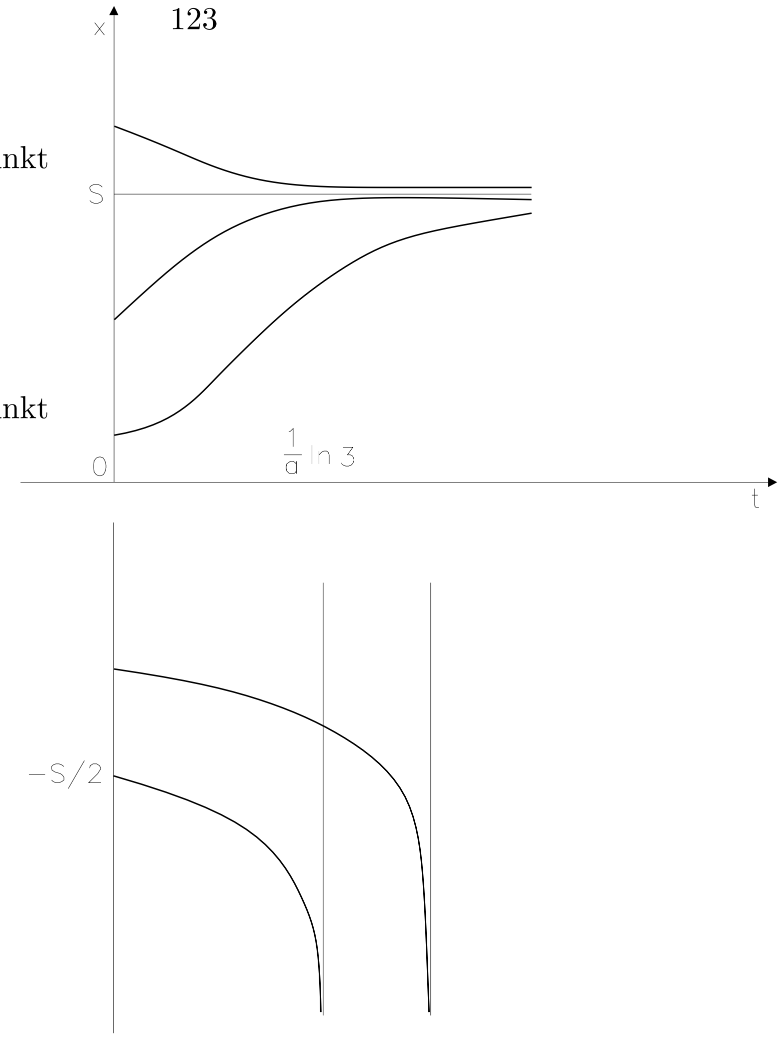
4) $x_0 < 0$ (im Bevölkerungsmodell unmöglich): Hier wird $x(t) = -\infty$ für $S - x_0 + x_0\mathrm{e}^{at} = 0 \Longleftrightarrow x_0\mathrm{e}^{at} = x_0 - S \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{at} = 1 - \frac{S}{x_0} \Longleftrightarrow t = \frac{1}{a}\ln\Big(1 - \frac{S}{x_0}\Big)$.

Beachte: Bei nicht-linearen Differentialgleichungen wie dieser kann die Lösung schon zu endlichen Zeiten ∞ (man sagt “singulär”) werden. (“Blow-up”)

Bild:

stabiler
Gleichgewichtspunkt

instabiler
Gleichgewichtspunkt



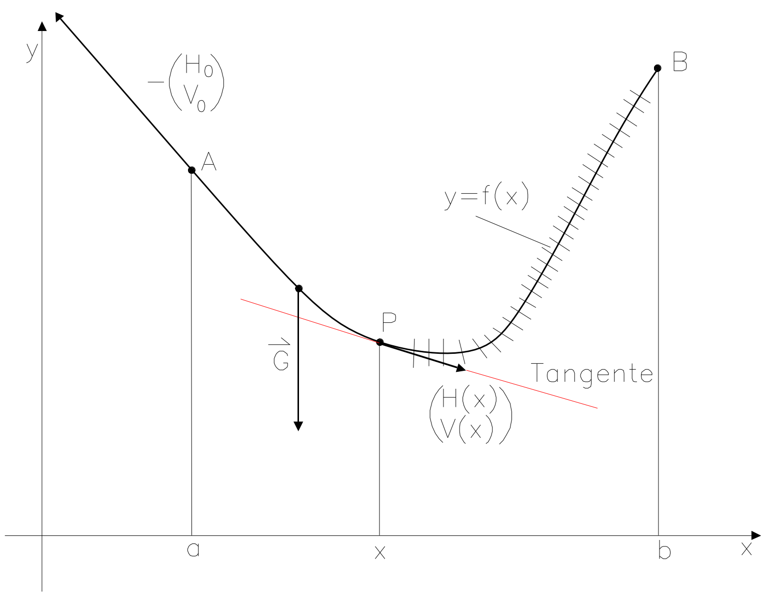
4) Kettenlinie:

Problem: Wie hängt ein Seil oder eine Kette zwischen 2 Stützen durch? (Idealerweise sollte also keine Biegesteifigkeit vorhanden sein, näherungsweise ist das aber auch für das Seil einer Seilbahn oder für ein Stromkabel erfüllt.)

Es sei $\sigma =$ Gewicht des Seiles/Längeneinheit (z.B. in N/m)

Die Kurve sei $y = f(x)$.

Bild:



$$
\begin{array}{lcl}
-\begin{pmatrix} H_0 \\ V_0 \end{pmatrix} & = & \text{Kraft in der Stütze } A \\
\begin{pmatrix} H(x) \\ V(x) \end{pmatrix} & = & \text{“Ersatzkraft” bei } x = \text{Kraft, mit der man in } P \text{ halten müßte,} \\
 & & \text{wenn das Seilstück } PB \text{ fehlte} \\
s(x) & = & \text{Länge des Seils von } a \text{ bis } x \\
\Longrightarrow\ \vec{G} & = & \text{auf das Seilstück } AP \text{ wirkende Gewichtskraft } = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma s(x) \end{pmatrix} \\
\text{Newton: } \vec{0} & = & \text{Summe aller auf das Seilstück } AP \text{ wirkenden Kräfte} \\
 & = & -\begin{pmatrix} H_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma s(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H(x) \\ V(x) \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

$\sum$ Horizontalkräfte $= 0 \Longrightarrow H(x) - H_0 = 0$
$\Longrightarrow \forall x : H(x) = H_0 = H$ (zur Abkürzung)

$\sum$ Vertikalkräfte $= 0 \Longrightarrow V(x) - V_0 - \sigma s(x) = 0;$

Biegesteifigkeit $= 0 \Longrightarrow$ die Ersatzkraft geht in Richtung der Tangente

$$\Longrightarrow \frac{V(x)}{H(x)} = f'(x) \Longrightarrow V(x) = H \cdot f'(x)$$

$$\Longrightarrow Hf'(x) - V_0 - \sigma s(x) = 0 \qquad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\Longrightarrow Hf''(x) = \sigma \cdot s'(x) = \text{ (siehe 13.4) } = \sigma\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Für die Funktion $z = f'(x)$ folgt die Differentialgleichung

$$z' = \frac{\sigma}{H}\sqrt{1+z^2} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\sigma}{H}\sqrt{1+z^2} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\sigma}{H}\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\sigma}{H}\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{H}x + C_1$$

(Substitution $z = \operatorname{sh} u,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \operatorname{ch} u,\ \mathrm{d}z = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \mathrm{d}u$)

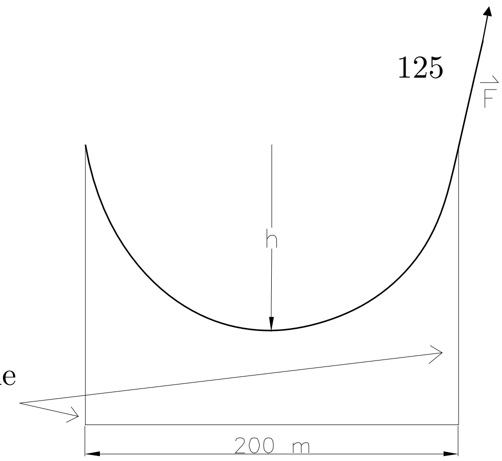
$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \int \mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arsh} z + C \qquad \text{(vgl. auch 11.9)}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{arsh} z = \frac{\sigma}{H}x + C_1, \quad z = \operatorname{sh}\Big(\frac{\sigma}{H}x + C_1\Big)$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \operatorname{sh}\Big(\frac{\sigma}{H}x + C_1\Big) \Longrightarrow f(x) = \int \operatorname{sh}\Big(\frac{\sigma}{H}x + C_1\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{H}{\sigma}\operatorname{ch}\Big(\frac{\sigma}{H}x + C_1\Big) + C_2}}$$

<u>Bsp.:</u>



Seil, Länge $L = 300\,\mathrm{m}$
$\sigma = 3\,\mathrm{N/m}$

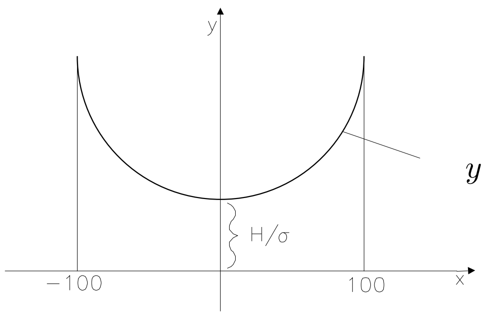
gleich hohe Stützen

Gesucht: a) Kraft $\vec{F}$ in den Stützen
b) Durchhang h

<u>Lösung:</u> Wähle Koordinaten so, daß $C_1 = C_2 = 0$
(C_1 : Verschiebung links/rechts, C_2 : Verschiebung auf/ab)

$$\Longrightarrow y = \frac{H}{\sigma}\,\mathrm{ch}\Big(\frac{\sigma}{H}x\Big),$$

H noch unbekannt



$$y = \frac{H}{\sigma}\,\mathrm{ch}\Big(\frac{\sigma}{H}x\Big)$$

<u>1. Weg</u> (direkt):

$$y' = \mathrm{sh}\Big(\frac{\sigma}{H}x\Big) \Longrightarrow L = 2\int_0^{100}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{100}\sqrt{\underbrace{1+\mathrm{sh}^2\Big(\frac{\sigma}{H}x\Big)}_{\mathrm{ch}^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{100}\mathrm{ch}\Big(\frac{\sigma}{H}x\Big)\,\mathrm{d}x = 2\frac{H}{\sigma}\,\mathrm{sh}\Big(\frac{\sigma}{H}100\Big) \overset{(!)}{=} 300$$

$$\Longrightarrow H\,\mathrm{sh}\Big(\frac{300}{H}\Big) = \frac{300\cdot\sigma}{2} = 450 \qquad (\text{wegen } \sigma = 3)$$

Trick: $f(H) = H\,\mathrm{sh}\Big(\dfrac{300}{H}\Big) - 450 = 0$

Newton liefert mit $H_0 = 200 : H_1 \approx 182.7$ und schließlich $H = 184.94188\ldots$

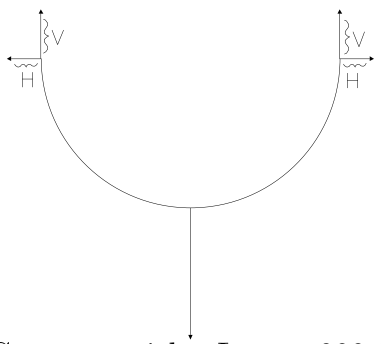
(<u>Vorsicht:</u> $H_0 = 1 \Rightarrow$ Abbruch, $H_0 = 300 \Rightarrow H_1 \approx 35$; vgl. auch 8.1, Bsp. 2)

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}, \quad \dfrac{V}{H} = y'(100) = \mathrm{sh}\Big(\dfrac{\sigma}{H}\cdot 100\Big) = \mathrm{sh}\Big(\dfrac{300}{H}\Big) = \dfrac{450}{H}$

$$\Longrightarrow V = 450 \Longrightarrow |\vec{F}| = \sqrt{H^2+V^2} \approx 487\mathrm{N}$$

b) $h = y(100) - y(0) = \dfrac{H}{\sigma}\Big(\mathrm{ch}\Big(\dfrac{\sigma}{H}\cdot 100\Big) - 1\Big) \approx 101\,\mathrm{m}$

<u>2. Weg</u> (Trick, ohne Längenberechnung):



Gesamtgewicht $L \cdot \sigma = 900$ N

$$\Longrightarrow V = \frac{1}{2} L \cdot \sigma = 450\,\mathrm{N}$$

$$\frac{V}{H} = y'(100) = \mathrm{sh}\Big(\frac{\sigma}{H} \cdot 100\Big)$$

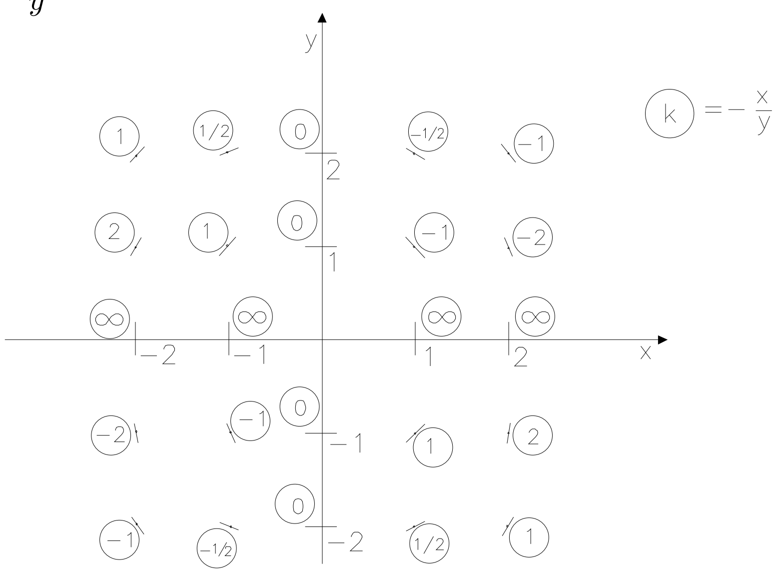
$$\Longrightarrow \frac{450}{H} = \mathrm{sh}\Big(\frac{300}{H}\Big)$$

Dann wieder Newton etc.
Vgl. auch die Übungen 89 und Z 12.

15.2 GRAPHISCHE DARSTELLUNG VON DGL. 1. ORDNUNG

<u>Aufgabe:</u> Mache ein Bild von $y' = D(x, y)$

<u>Bsp.:</u> $y' = -\dfrac{x}{y}$ heißt: Die Lösungskurven haben im Punkt (x, y) die Steigung $k = -\dfrac{x}{y}$.

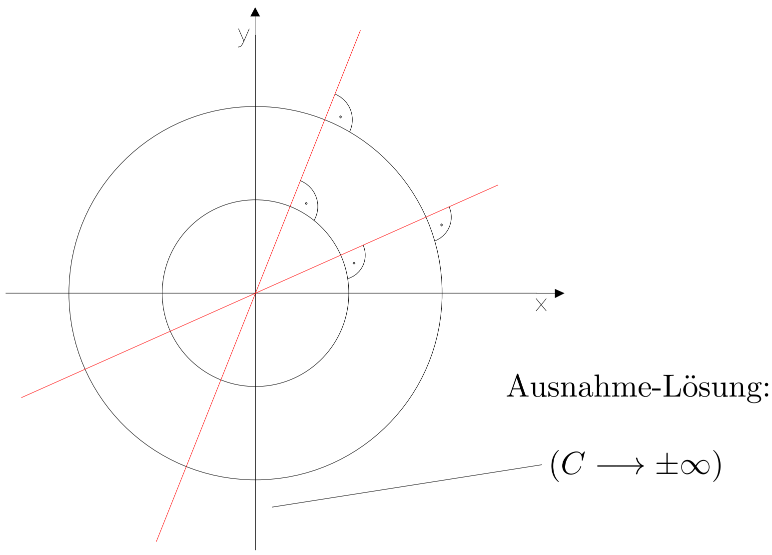


<u>Def.:</u> Eine solche graphische Darstellung einer Differentialgleichung heißt <u>Richtungsfeld</u>.

<u>Beachte:</u> Die Lösungskurven verlaufen tangential an das Richtungsfeld!

<u>Aufgabe:</u> Gegeben: Eine Menge A von differenzierbaren Funktionen, sodaß durch jeden Punkt (in einem Gebiet von $\mathbb{R}^2$) genau eine Kurve geht.
Gesucht: Alle Funktionen (B), deren Kurven jede Kurve in A, die sie schneiden, senkrecht schneiden.
<u>Def.:</u> Die Funktionen in B heißen <u>Orthogonaltrajektorien</u> zu A.

Bsp.: 1) $A =$ Menge der Kreise mit Mittelpunkt $(0,0)$,
d.h. $A = \{y = \pm\sqrt{C - x^2} : C > 0\}$.
Dann muß $B =$ Menge der Geraden durch 0 sein,
d.h. $B = \{y = Cx : C \in \mathbb{R}\}$.

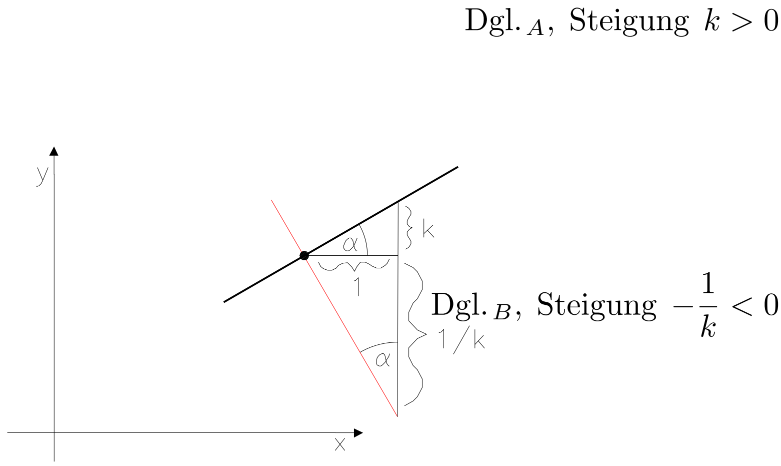


Rechnerisch:

a) $A \rightsquigarrow$ Dgl.$_A$: Hier Dgl.$_A : y' = -\dfrac{x}{y}$ (siehe 15.1)

b) Dgl.$_A \rightsquigarrow$ Dgl.$_B$: Die Dgl.$_B$ hat ihr Richtungsfeld senkrecht zu dem von Dgl.$_A$.

Z.B.: $k > 0$



$$k = -\frac{x}{y} \Longrightarrow -\frac{1}{k} = -\frac{1}{-\frac{x}{y}} = \frac{y}{x} \qquad \text{Also Dgl.}_B : y' = \frac{y}{x}$$

c) Dgl.$_B \rightsquigarrow B$: $y' = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \ln|y| = \ln|x| + C_1$

$$\Longrightarrow |y| = \mathrm{e}^{\ln|x| + C_1} = \mathrm{e}^{C_1} \cdot |x| \Longrightarrow y = \underbrace{\pm\mathrm{e}^{C_1}}_{C} \cdot x \Longrightarrow y = Cx \checkmark$$

Allgemein:

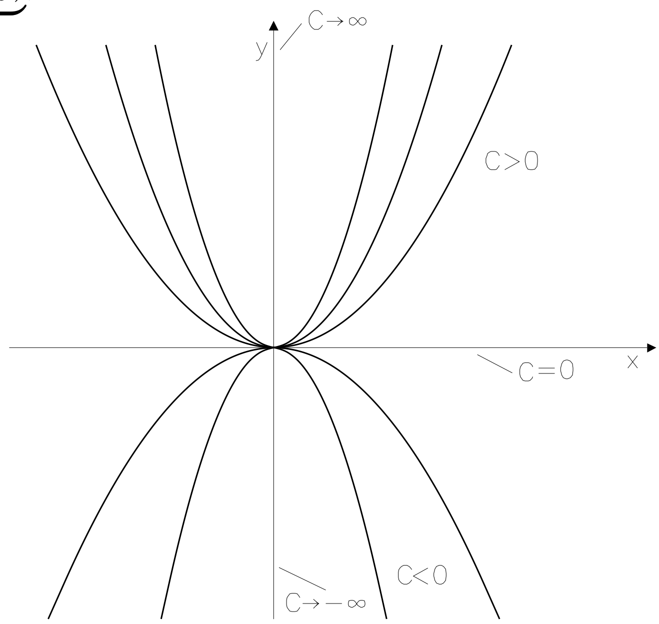
a) $\underline{A \rightsquigarrow \text{ Dgl.}_A:}$ Bringe C allein auf eine Seite und differenziere implizit!

b) $\underline{\text{Dgl.}_A \rightsquigarrow \text{ Dgl.}_B:}$ Wenn Dgl.$_A$ $: y' = \underbrace{D(x,y)}_{k}$,

so ist Dgl.$_B$ $: y' = -\dfrac{1}{D(x,y)} \quad \left(= -\dfrac{1}{k}\right)$

c) $\underline{\text{Dgl.}_B \rightsquigarrow B:}$ Muß man lösen

<u>Bsp.:</u> 2) $A = \{y = Cx^2 : C \in \mathbb{R}\}$



a) $\underline{A \rightsquigarrow \text{ Dgl.}_A:}$ $y = Cx^2 \Longrightarrow \dfrac{y}{x^2} = C \qquad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\Longrightarrow \dfrac{y'}{x^2} - \dfrac{2y}{x^3} = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{2y}{x}$

b) $\underline{\text{Dgl.}_A \rightsquigarrow \text{ Dgl.}_B:}$ $y' = -\dfrac{x}{2y}$

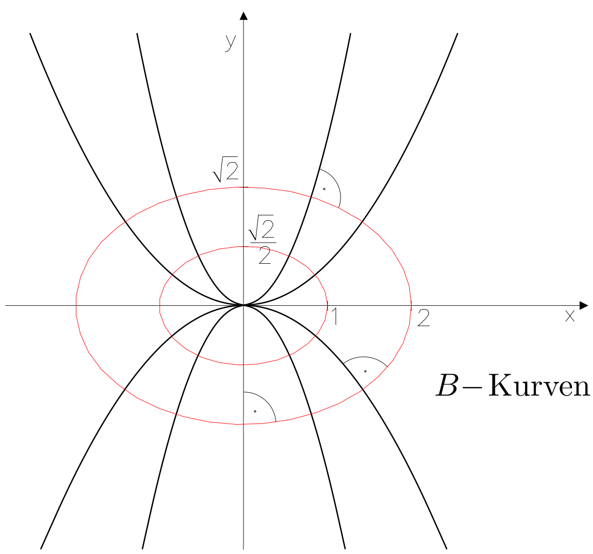
c) $\underline{\text{Dgl.}_B \rightsquigarrow B:}$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{2y} \Longrightarrow 2y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow y^2 = -\dfrac{x^2}{2} + C \Longrightarrow B = \{y^2 + \dfrac{x^2}{2} = C : C > 0\}$, eine Ellipsenschar.

Allgemeine Ellipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Hier $a^2 = 2C,\ b^2 = C,\ \dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$

Bild:

$A-$Kurven



$B-$Kurven

§16: Die komplexen Zahlen

16.1 GRUNDLAGEN

Zahlbereich	möglich	problematisch	Beispiel dafür
$1, 2, \ldots, 10$	Zählen an den Fingern	$n > 10$	11
$\mathbb{N}$	$+$	$-$	$1-2$
$\mathbb{Z}$	$+, -, \cdot$	$:$	$1:2$
$\mathbb{Q}$	$+, -, \cdot, :$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; Satz 4 in 3.2 gilt in $\mathbb{Q}$ nicht	$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	$+, -, \cdot, :, \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	Linearfaktor-zerlegung	x^2+1
$\mathbb{C}$	$+, -, \cdot, :, \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und Linearfaktor-zerlegung		

Gesetze bezüglich $+, -, \cdot$

$$\forall u, v: \quad \left.\begin{array}{l} u+v=v+u \\ u\cdot v = v\cdot u \end{array}\right\} \quad \text{kommutativ}$$

$$\forall u, v, w: \quad \left.\begin{array}{l} u+(v+w)=(u+v)+w \\ u\cdot(v\cdot w) = (u\cdot v)\cdot w \end{array}\right\} \quad \text{assoziativ}$$

$$u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w \quad \text{distributiv}$$

$$\exists\, 0, 1 : \forall u: \quad u+0=u,\ u\cdot 1 = u \quad \text{neutrale Elemente}$$

$$\forall u : \exists -u: \quad u+(-u)=0;\ \forall u \neq 0 : \exists \tfrac{1}{u} : u\cdot\tfrac{1}{u} = 1 \quad \text{inverse Elemente}$$

Das soll in $\mathbb{C}$ auch gelten. Weiters soll $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ nicht "zu groß" sein. Man kann zeigen, daß es dann nur eine Möglichkeit gibt:

Def.: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ mit
der Vektoraddition: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
und der Multiplikation: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

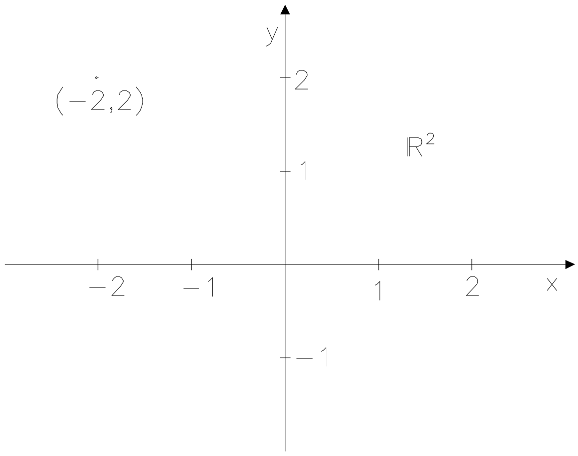
Beachte: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$
und $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$
d.h. die komplexen Zahlen $(x, 0)$ verhalten sich wie $x \in \mathbb{R}$.

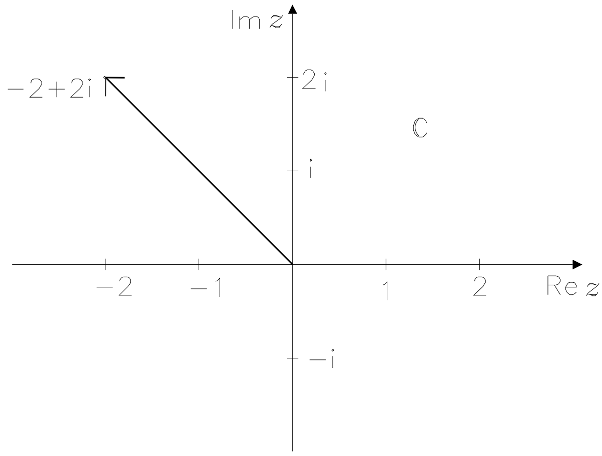
Schreibweisen:

1) Statt $\left\{\begin{array}{c} (x,0) \\ (0,y) \end{array}\right\}$ schreibt man $\left\{\begin{array}{c} x \\ \mathrm{i}y \end{array}\right\}$.

Daher $(x, y) = x + \mathrm{i}y$. (Bei Zahlen steht i hinten, also z.B.: $7 + 9\mathrm{i}$.)

2) Statt x, y oft a, b, statt $x + \mathrm{i}y$ oft z.
Also $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Bei dieser Schreibweise ist immer $a, b \in \mathbb{R}$ vorausgesetzt.
Statt ... zeichnet man





Def.: Es sei $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$.

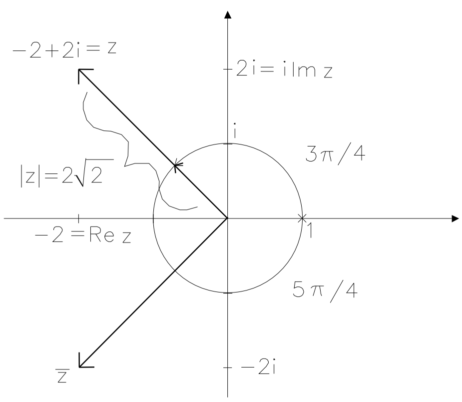
Zahl	Name	Schreibweise
a	Realteil von z	$\operatorname{Re} z$
b	Imaginärteil von z	$\operatorname{Im} z$
$a - \mathrm{i}b$	konjugiert komplexe Zahl zu z	$\bar{z}$
$\sqrt{a^2 + b^2}$	Betrag von z	$\lvert z\rvert$
$\pm\measuredangle$ (positive x–Achse, z–Vektor) $+$: Gegenuhrzeigersinn $-$: Uhrzeigersinn	Argument von z	$\arg z$

Beachte: 1) $\operatorname{Im} z$ ist eine reelle Zahl!
2) $\arg z$ ist nur auf Vielfache von 2π bestimmt.

Schreibweise: $\arg z = \cdots + 2k\pi$ (wie beim unbestimmten $\int$)

Eigentlich $\arg z = \{\cdots + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Für $z = 0$ ist $\arg z$ unbestimmt.

Bsp.:
$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(-2+2\mathrm{i}) &= -2,\\
\operatorname{Im}(-2+2\mathrm{i}) &= 2 \quad (\text{nicht } 2\mathrm{i}!!),\\
\overline{-2+2\mathrm{i}} &= -2-2\mathrm{i},\\
|-2+2\mathrm{i}| &= \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},\\
\arg(-2+2\mathrm{i}) &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\\
&= -\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\\
&= 135^\circ + k\cdot 360^\circ \text{ etc.}
\end{aligned}$$



(Eigentlich: $\arg(-2+2\mathrm{i}) = \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$)

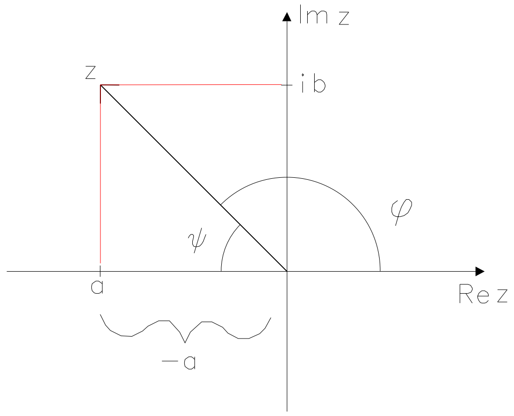
Formeln:

$$1)\ z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} \Longrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \arg z = 2k\pi + \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) : a > 0 & \text{(I.+IV. Qu.)} \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) : a < 0 & \text{(II.+III. Qu.)} \\ \dfrac{\pi}{2} : a = 0, b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} : a = 0, b < 0 \\ \text{nicht definiert} : z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

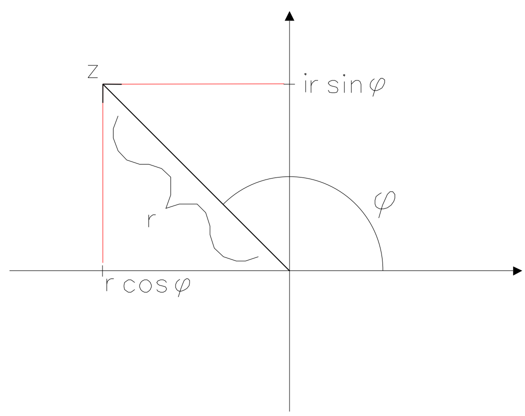
2) Umgekehrt: $|z| = r, \arg z = \varphi + 2k\pi \Longleftrightarrow z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$

Bilder: Z.B. für den II. Quadranten:

1)



2)



$$\psi = \arctan\left(\frac{b}{-a}\right)$$

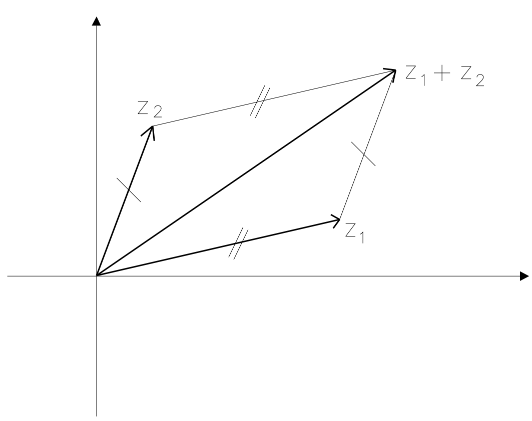
$$\varphi = \pi - \psi = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

Addition: $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1, \quad z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$

$\Longrightarrow z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$

Speziell: $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$



<u>Multiplikation:</u>

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = (\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{1}_{y_1})\cdot(\underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{1}_{y_2}) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\quad 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow z_1\cdot z_2 &= (a_1+\mathrm{i}b_1)\cdot(a_2+\mathrm{i}b_2)\\ &= a_1a_2 + \mathrm{i}b_1a_2 + \mathrm{i}a_1b_2 + \mathrm{i}^2 b_1b_2\\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + \mathrm{i}(b_1a_2 + a_1b_2)\end{aligned}$$

Wenn $r_1 = |z_1|, \quad r_2 = |z_2|$ und $\arg z_1 = \varphi_1 + 2k\pi, \quad \arg z_2 = \varphi_2 + 2k\pi$, so gilt:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)\\ &= r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)]\\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)],\end{aligned}$$

d.h. $|z_1\cdot z_2| = r_1r_2, \quad \arg(z_1\cdot z_2) = \varphi_1+\varphi_2+2k\pi.$

<u>Satz 1:</u> 1) $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \quad$ falls $z_2 \neq 0$

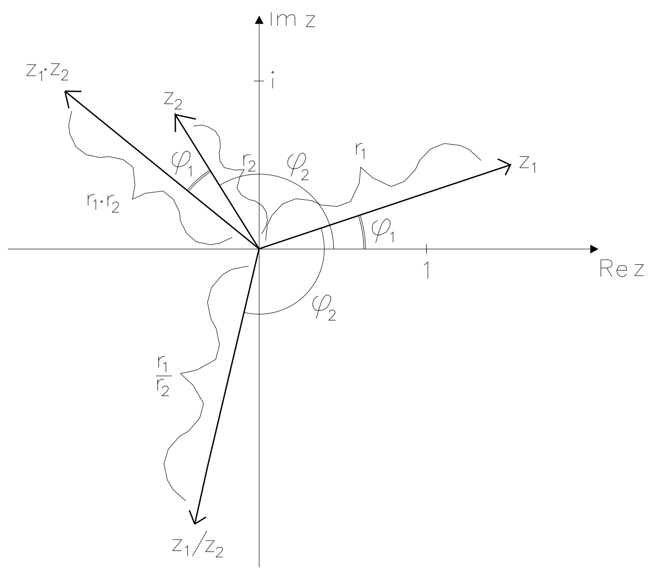
<u>In Worten:</u> Multiplizieren in $\mathbb{C}$: Beträge multiplizieren, Argumente addieren
Dividieren in $\mathbb{C}$: Beträge dividieren, Argumente subtrahieren
(<u>Beachte:</u> $\arg z_1 + \arg z_2 = \{\varphi_1 + 2k\pi : k\in\mathbb{Z}\} + \{\varphi_2 + 2l\pi : l\in\mathbb{Z}\}$
$= \{\varphi_1+\varphi_2+2k\pi+2l\pi : k,l\in\mathbb{Z}\}) = \{\varphi_1+\varphi_2+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\})$

<u>Beweis:</u> 1) siehe oben

2) $$\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2 = z_1 \overset{\text{nach 1)}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2| = |z_1| \Longrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg z_2 = \arg z_1 \Longrightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2\end{cases}$$

$\square$

Bild:



Division: $z = a + \mathrm{i}b \Longrightarrow z \cdot \bar{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

Trick: Man dividiert durch Erweitern mit $\overline{\text{Nenner}}$: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

Speziell: Man kann durch jedes $0 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ dividieren!
Bsp.: $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$
$\Longrightarrow z_1 + z_2 = 3 + 5\mathrm{i}$
$z_1 \cdot z_2 = (1+2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}) = 2 + 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 6\underbrace{\mathrm{i}^2}_{-1} = -4 + 7\mathrm{i}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} \overset{(2-3\mathrm{i})}{=} \frac{(1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{\underbrace{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}_{|2+3\mathrm{i}|^2=4+9=13}} = \frac{8+\mathrm{i}}{13} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}\mathrm{i}$$

Kontrolle: $\left(\frac{8}{13} + \frac{1}{13}\mathrm{i}\right)(2+3\mathrm{i}) = \frac{16}{13} - \frac{3}{13} + \mathrm{i}\left(\frac{2}{13} + \frac{24}{13}\right) = 1 + 2\mathrm{i}\checkmark$

16.2 DIE FUNKTION e^z

Wiederhole: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$

Bsp.: Was ist $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n}_{z_n}$?

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}$$

$$z_2 = \left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 = 1 + 2\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} + \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

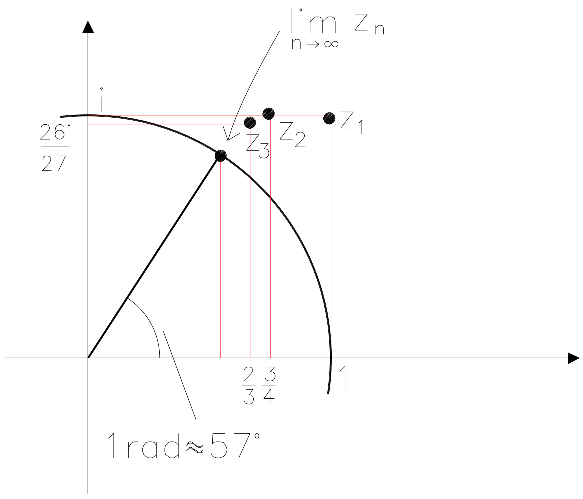
$$= 1 + \mathrm{i} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \mathrm{i}$$

$$z_3 = \left(1+\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^3 = 1 + 3\frac{\mathrm{i}}{3} + 3\left(\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^3 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= 1 + \mathrm{i} - \frac{1}{3} - \frac{\mathrm{i}}{27} = \frac{2}{3} + \frac{26\mathrm{i}}{27}$$

Wir werden unten sehen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \cos 1 + \mathrm{i}\sin 1 \approx 0.54 + \mathrm{i}\,0.84$

Bild:



<u>Def.:</u> 1) Eine <u>komplexe Folge</u> ist eine komplexwertige Funktion auf $\mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : n \longmapsto z_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = u \iff z_n \to u$ (für $n \to \infty$)

$$\iff \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |z_n - u| < \epsilon$$

<u>Bemerkungen:</u> 1) Auch für komplexe Folgen gilt Satz 1 in 3.2., d.h.
$z_n \to u,\ w_n \to v \Longrightarrow z_n \pm w_n \to u \pm v,\ z_n/w_n \to u/v$ falls $v \neq 0$.

2) Es gilt $z_n \to u \iff \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} u \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} u$

(wobei $\operatorname{Re} z_n$ und $\operatorname{Im} z_n$ Folgen in $\mathbb{R}$ sind)

denn $|z_n - u| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} u)^2}$ und daher

$$|z_n - u| < \epsilon \quad \Longrightarrow |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} u| < \epsilon \wedge |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} u| < \epsilon$$
$$|z_n - u| < \sqrt{2}\,\epsilon \quad \Longleftarrow |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} u| < \epsilon \wedge |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} u| < \epsilon$$

3) Es seien $|z_n| = r_n,\ \arg z_n = \varphi_n + 2k\pi$

(im Bsp. oben: $z_1 = 1 + \mathrm{i} \Longrightarrow r_1 = \sqrt{2},\ \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$

$$z_2 = \frac{3}{4} + \mathrm{i} \Longrightarrow r_2 = \sqrt{1 + \frac{9}{16}},\ \varphi_2 = \arctan\Big(\frac{4}{3}\Big)$$

etc.)

Wenn $r_n \to r$ und $\varphi_n \to \varphi$, so folgt

$$z_n = r_n \cos\varphi_n + \mathrm{i} r_n \sin\varphi_n \underset{(\text{GWS, } \cos,\sin \text{ stetig})}{\longrightarrow} r\cos\varphi + \mathrm{i} r \sin\varphi$$

Satz 2: Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Beweis: Es sei $z_n = \left(1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{n}\right)^n, \quad |z_n| = r_n, \quad \arg z_n = \varphi_n + 2k\pi.$

a) $r_n = \left|\left(1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{n}\right)^n\right| \underset{\text{Satz 1}}{=} \left|1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{n}\right|^n = \left(\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}\right)^n$

$= \left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2} = \left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/(2n)}$

Nach Hilfssatz 1 in 5.2 ist die Folge $\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n^2}$ monoton steigend und daher $\leq$ dem Grenzwert e^{φ^2}.

$\Longrightarrow 1 \leq r_n \leq (\mathrm{e}^{\varphi^2})^{1/(2n)} = \sqrt[n]{\mathrm{e}^{\varphi^2/2}} \longrightarrow 1$

für $n \to \infty$ nach dem Hilfssatz in 3.2. Der Einschließungssatz liefert $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$.

b) $\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right) \underset{\text{(I.od.IV.Qu.)}}{=} \arctan\frac{\varphi}{n} + 2k\pi \underset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} \arg z_n = \underbrace{n\arctan\frac{\varphi}{n}}_{\varphi_n} + 2k\pi;$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{t\to\infty} t\arctan\frac{\varphi}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\arctan(\frac{\varphi}{t})}{\frac{1}{t}} \underset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{(\varphi/t)^2+1}\cdot\left(-\frac{\varphi}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}} = \varphi$$

(Beachte: Wenn $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \alpha$, so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \alpha$, vgl. z.B. Fall 2 im Beweis von Satz 3, 5.2. Das Umgekehrte ist nicht immer richtig.)

Nach Bemerkung 3 oben ist also

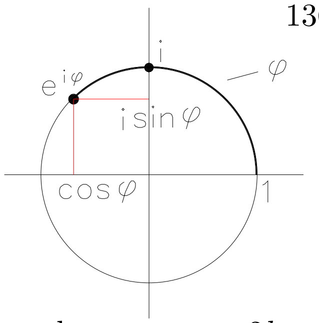
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{n}\right)^n = 1\cdot(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$ $\square$

Def.: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{n}\right)^n.$

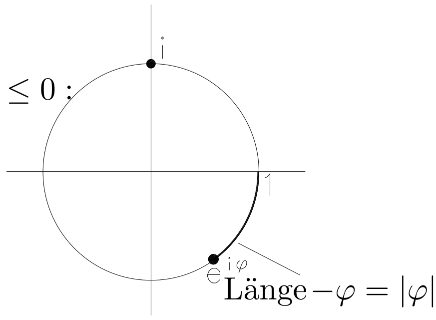
Ergebnis: 1) (Euler'sche Formel)

$\forall\varphi\in\mathbb{R}:\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ = komplexe Zahl am Einheitskreis mit Argument $\varphi + 2k\pi$

Bild: $\varphi \geq 0:$



$\varphi \leq 0:$



2) $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ und $\arg z = \varphi + 2k\pi$
$\Longrightarrow z \underset{(16.1)}{=} r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

Bsp.: 1) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -1,$

$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1 = \mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}},\ k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}} = -1,\ \mathrm{e}^{19\pi\mathrm{i}/2} = -\mathrm{i},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $z = 3 + 4\mathrm{i} \Longrightarrow |z| = 5,\ \varphi = \arctan\frac{4}{3} \approx 0.927$

$$\Longrightarrow z = 5 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\frac{4}{3}} \approx 5 \cdot \mathrm{e}^{0.927\mathrm{i}}$$

Satz 3: Für $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ gilt $\lim\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$

Beweis: Ähnlich wie bei Satz 2 aber etwas schwieriger.

Def.: Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\mathrm{e}^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$

Zusammenfassung:

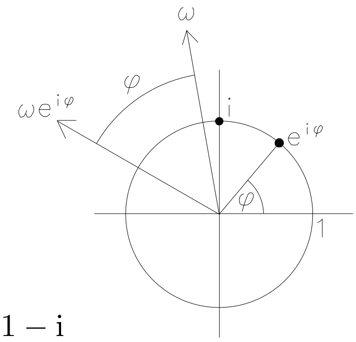
1) $z = a + \mathrm{i}b \Longrightarrow \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} \underset{(\text{Satz } 3)}{=} \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b) \underset{(\text{Satz } 2)}{=} \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$
$\Longrightarrow |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a,\ \arg(\mathrm{e}^z) = b + 2k\pi$

2) $\forall z, w \in \mathbb{C}: \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$
Denn: $z = a + \mathrm{i}b,\ w = c + \mathrm{i}d \Longrightarrow z + w = a + c + \mathrm{i}(b + d)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w| \underset{(\text{Satz } 1)}{=} |\mathrm{e}^z| \cdot |\mathrm{e}^w| \underset{1)}{=} \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^c = \mathrm{e}^{a+c} \underset{1)}{=} |\mathrm{e}^{z+w}| \\ \arg(\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w) \underset{(\text{Satz } 1)}{=} \arg(\mathrm{e}^z) + \arg(\mathrm{e}^w) \underset{1)}{=} b + d + 2k\pi \underset{1)}{=} \arg(\mathrm{e}^{z+w}) \end{cases}$$

3) $$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} &= \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi) = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \pm$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) \\ \sin\varphi &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) \end{aligned}} \qquad \text{Vergleiche } \begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix}$$



4) Für $w \in \mathbb{C}$ entsteht $w\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ aus w durch Drehung von w um 0 um den Winkel $|\varphi|$

im $\begin{cases} \text{Gegenuhrzeigersinn: } \varphi > 0 \\ \text{Uhrzeigersinn: } \varphi < 0 \end{cases}$

Bsp.: 1) $\mathrm{e}^{2+\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^2$,

$$\mathrm{e}^{-1-\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{-1} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{-1}\Big(\underbrace{\cos\Big(\frac{\pi}{4}\Big)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \mathrm{i}\underbrace{\sin\Big(\frac{\pi}{4}\Big)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big) = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}}.$$

2) Euler'sche Formel $\rightsquigarrow$ Summensätze:

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$

$= \cos x\cos y - \sin x \sin y + \mathrm{i}(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$

$\Longrightarrow \cos(x+y) = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

und $\sin(x+y) = \mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

3) Euler'sche Formel $\rightsquigarrow$ Potenzen von sin, cos :

a) $\cos^2\varphi = (\cos\varphi)^2 = \Big(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\Big)^2$

$$= \frac{1}{4}(\underbrace{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^2}_{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}} + 2\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}_{\mathrm{e}^0=1} + \underbrace{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})^2}_{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}}) = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$$

$2\cos 2\varphi$

b) $\sin^4\varphi = (\sin\varphi)^4 = \Big(\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\Big)^4$;

$(u-v)^4 = u^4 - 4u^3v + 6u^2v^2 - 4uv^3 + v^4$

$$\Longrightarrow \sin^4\varphi = \frac{1}{16\underbrace{\mathrm{i}^4}_{1}}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\varphi} - 4\underbrace{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}_{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}} + 6\underbrace{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}}_{1} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\varphi})$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4\varphi - 8\cos 2\varphi + 6) = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

Speziell: $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int\big(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\Big(\frac{\sin 4x}{4} - 2\sin 2x + 3x\Big) + C$

Z.B.: $\int\limits_0^\pi \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\Big(\frac{\sin 4x}{4} - 2\sin 2x + 3x\Big)\Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{8}$

Eine Verallgemeinerung dieser Rechnungen gibt

Satz 4: $\sin^n x$ und $\cos^n x$ lassen sich durch $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ darstellen.

4) Ableitung von e-Funktionen:

Wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{R}$, so definieren wir $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\operatorname{Re} f(x) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Re} f(x_0) - \mathrm{i} \operatorname{Im} f(x_0)}{x - x_0}$
$= (\operatorname{Re} f)'(x_0) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)'(x_0)$ (falls die Limites existieren).

Speziell sei $\lambda = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ und $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i} \sin bx)$
Dann ist
$f'(x) = (\mathrm{e}^{\lambda x})' = (\mathrm{e}^{ax} \cos bx)' + \mathrm{i}(\mathrm{e}^{ax} \sin bx)'$
$= a\mathrm{e}^{ax} \cos bx - \mathrm{e}^{ax} b \sin bx + \mathrm{i}a\mathrm{e}^{ax} \sin bx + \mathrm{i}\mathrm{e}^{ax} b \cos bx$
$= \mathrm{e}^{ax}((a + \mathrm{i}b) \cos bx + \mathrm{i}(a + \mathrm{i}b) \sin bx)$
$= (a + \mathrm{i}b)\, \mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$
Auch Integrale werden wie in §10 eingeführt und die Sätze von §10 gelten.

Speziell: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{Re} f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int \operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Z.B.: $\int \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i} \sin bx)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + C = \dfrac{1}{|\lambda|^2} \cdot \bar{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + C$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2}(a - \mathrm{i}b)\mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i} \sin bx) + \overbrace{C}^{=C_1 + \mathrm{i}C_2}$$

$$= \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C_1}_{= \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx\,\mathrm{d}x} + \mathrm{i}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C_2\right]}_{= \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,\mathrm{d}x}$$

$\Longrightarrow$

Vgl. 11.2, Bsp. 2, und Übung 82

16.3 POLYNOME ÜBER $\mathbb{C}$

1) Wurzelziehen in $\mathbb{C}$

Gegeben $w \in \mathbb{C}$, gesucht $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = w$

Lösung: $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ w = \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \begin{pmatrix} \varrho, \psi \text{ bekannt} \\ r, \varphi \text{ gesucht} \end{pmatrix}$;

$z^2 = w \Longrightarrow r^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} = \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \Longrightarrow r^2 = \varrho$ und $2\varphi = \psi + 2k\pi$

$\Longrightarrow r = \sqrt{\varrho}$ und $\varphi = \dfrac{\psi}{2} + k\pi$

$k = 0 : \varphi = \dfrac{\psi}{2} \Longrightarrow z_0 = \sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}$

$k=1: \varphi = \dfrac{\psi}{2} + \pi \Longrightarrow z_1 = \sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi/2+\pi)} = \sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}_{-1} = -\sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}$

$k=2: \varphi = \dfrac{\psi}{2} + 2\pi \Longrightarrow z_2 = \sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi/2+2\pi)} = \sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}_{1} = z_0$

... ...

$k = \pm 2, \pm 4, \ldots$ geben z_0

$k = -1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ geben z_1

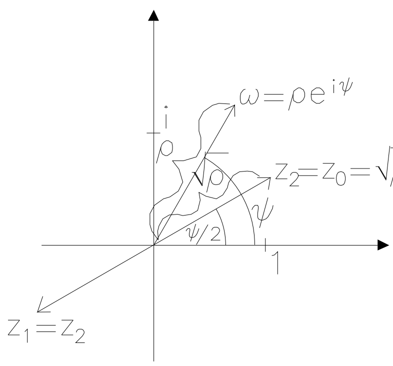
Also Lösungen: ${}_1z_2 = \pm\sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}$

Schreibweise: ${}_1z_2 = \pm\sqrt{w}$

Vorsicht: Was z_1 ist, hängt davon ab, was ψ ist. Wenn $\psi \pm 2\pi$ statt ψ genommen wird, so wechseln z_1, z_2 den Platz. Daher hat "$\sqrt{w}$" ohne $\pm$ nur für $w \in \mathbb{R}, w > 0$, Sinn. (Oft schreibt man trotzdem $\sqrt{-1}$ für i. Korrekt ist eigentlich $\pm\sqrt{-1} = \pm$i.)
Bild:

$|w| = \varrho$

$\arg w = \psi + 2k\pi$



In Worten: Wurzelziehen in $\mathbb{C}$:
beim Betrag Wurzel ziehen
beim Argument halbieren

Bsp.: $w = -3 - 2\mathrm{i}, \quad \varrho = |w| = \sqrt{13}$

$\arg w \underset{\text{III. Qu.}}{=} \pi + \arctan\left(\dfrac{-2}{-3}\right) + 2k\pi \approx \underbrace{3.7296}_{\psi} + 2k\pi$, d.h. $w = \sqrt{13}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 3.7296}$

$\Longrightarrow\ {}_1z_2 = \pm\sqrt{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2} \approx \pm\sqrt{\sqrt{13}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 3.7296/2} = \pm\sqrt[4]{13}\Big(\cos\Big(\dfrac{3.7296}{2}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\dfrac{3.7296}{2}\Big)\Big)$

$\approx \pm(-0.55025 + 1.81735\mathrm{i}) = \pm\sqrt{-3-2\mathrm{i}}$

Kontrolle: $({}_1z_2)^2 \approx 0.55025^2 - 1.81735^2 - 2\mathrm{i}\cdot 0.55025 \cdot 1.81735 \approx -3 - 2\mathrm{i}$

2) Quadratische Polynome über $\mathbb{C}$

Gegeben $p, q \in \mathbb{C}$, gesucht $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + pz + q = 0$

Lösung: $z^2 + pz + q = 0 \Longleftrightarrow \left(z + \dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4} = 0$

$$\Longleftrightarrow \left(z+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \Longleftrightarrow \ {}_1z_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q}$$

Ergebnis: In $\mathbb{C}$ hat jedes quadratische Polynom (mit Vielfachheit) 2 Nullstellen.

Bsp.: $z^2 + \underbrace{6\mathrm{i}}_{p}\, z \underbrace{-6+2\mathrm{i}}_{q} = 0$

$$\Longrightarrow z = \underbrace{-3\mathrm{i}}_{-\frac{p}{2}} \pm \sqrt{\underbrace{-9}_{\frac{p^2}{4}} + \underbrace{6-2\mathrm{i}}_{-q}} = -3\mathrm{i} \underbrace{\pm\sqrt{-3-2\mathrm{i}}}_{\text{siehe oben}}$$

3) n –te Wurzel ziehen in $\mathbb{C}$

Gegeben $w \in \mathbb{C}$, gesucht $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$

Lösung: $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ w = \varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$;

$z^n = w \Longrightarrow r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$

$\Longrightarrow r^n = \varrho$ und $n\varphi = \psi + 2k\pi$

$\Longrightarrow r = \sqrt[n]{\varrho}$ und $\varphi = \dfrac{\psi + 2k\pi}{n}$

$$\begin{aligned}
k &= 0 &&: \varphi = \frac{\psi}{n},\ z_0 = \sqrt[n]{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/n}\\
k &= 1 &&: \varphi = \frac{\psi+2\pi}{n},\ z_1 = \sqrt[n]{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi+2\pi)/n} = z_0 \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}\\
& &&\ \ \dots\\
k &= n-1 &&: \varphi = \frac{\psi+2(n-1)\pi}{n},\ z_{n-1} = \sqrt[n]{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi+2(n-1)\pi)/n} = z_0 \cdot \mathrm{e}^{2(n-1)\pi\mathrm{i}/n}\\
k &= n &&: \varphi = \frac{\psi}{n} + 2\pi,\ z_n = \sqrt[n]{\varrho}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/n} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}_{=1} = z_0 \text{ nichts Neues!}\\
k &= -1 &&: \dots\ z_{-1} = z_{n-1} \text{ nichts Neues, etc.}
\end{aligned}$$

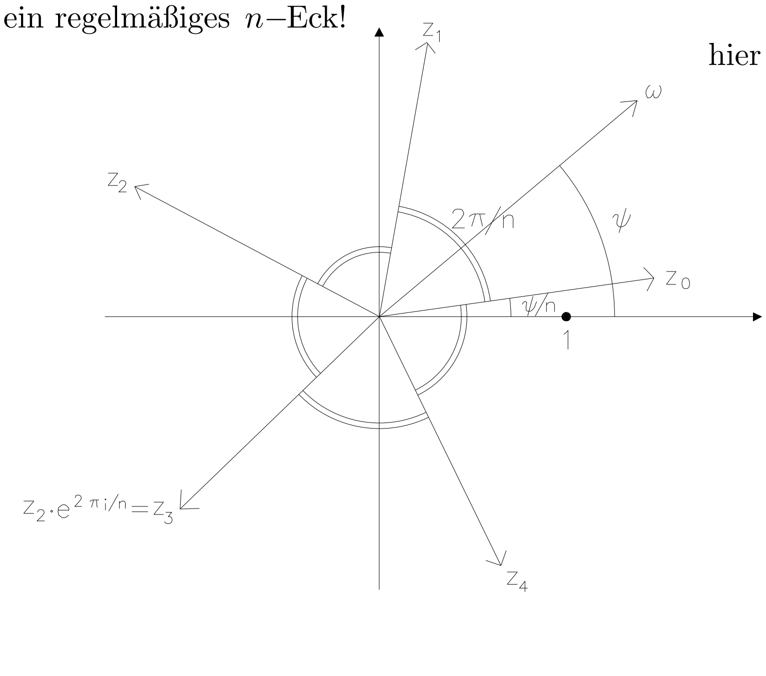
Vorsicht: Was z_0 ist, hängt wieder von der Wahl von ψ ab, ist also relativ. Nur die Menge aller Nullstellen $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ ist durch w festgelegt.

Ergebnis: Das Polynom $z^n - w$ hat n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (für $w \neq 0$ alle verschieden).

Bild:

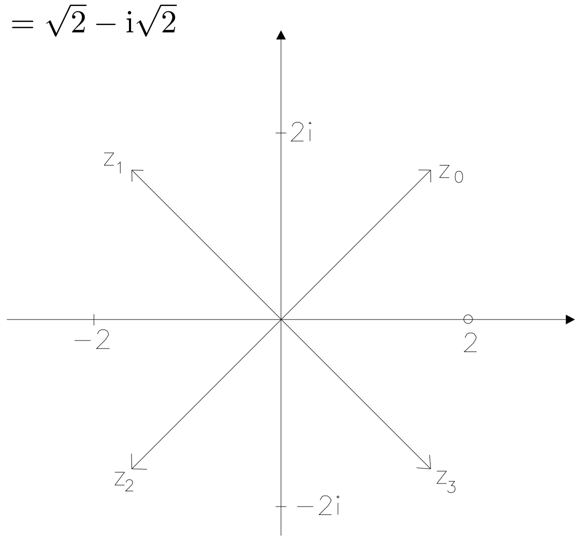
Die Nullstellen bilden ein regelmäßiges n–Eck!

hier $n = 5$



Bsp.: $z^4 = \underbrace{-16}_{w} = \underbrace{16}_{\varrho} \cdot e^{i\overset{(\psi)}{\pi}}, \quad \sqrt[4]{\varrho} = 2$

$$\Longrightarrow z_0 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z_1 = 2e^{i(\pi+2\pi)/4} = 2e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z_2 = 2 \cdot e^{5i\pi/4} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ und } z_3 = 2 \cdot e^{7i\pi/4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$



Allgemein gilt:

Satz 5 (Hauptsatz der Algebra, Gauß)

Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat in $\mathbb{C}$ (zumindest) eine Nullstelle.

Beweis: zu schwierig.

(Bemerkung: Polynom vom Grad $0 =$ Konstante)

Ebenso wie in $\mathbb{R}$ kann man auch in $\mathbb{C}$ mit dem euklidischen Algorithmus Polynome dividieren.

Z.B.: $(z^2 + z + 1) : (z + 2i) = z + 1 - 2i$

$$\begin{array}{l} \underline{-[z^2 + 2iz] \downarrow} \\ \quad (1-2i)z + 1 \\ \underline{-[(1-2i)z + 2i + 4]} \\ \qquad\qquad -3 - 2i \text{ Rest} \end{array}$$

Allgemein: $\underline{P : (z - z_0) = Q}$

$$\ddots \qquad r \text{ Rest}$$

$$\Longrightarrow P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z) + r \Longrightarrow P(z_0) = r$$

(Im Beispiel oben: $z_0 = -2i$, $P(z_0) = (-2i)^2 - 2i + 1 = -3 - 2i \checkmark$)

Folgerung zu Satz 5: Es sei $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$.

1) Wenn P durch $z - z_0$ dividiert wird, so ist der Rest gleich $P(z_0)$.
2) P ist durch $z - z_0$ teilbar, d.h. Rest $= 0 \Longleftrightarrow P(z_0) = 0$, d.h. z_0 ist Nullstelle (auch "Wurzel" genannt) von P.
3) P läßt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) in der Form $P(z) = a_n(z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_{n-1})$ schreiben.

Beweis von 3): Nach Satz 5 $\exists$ Nullstelle z_0 von $P \underset{\text{nach 2)}}{\Longrightarrow} P = (z - z_0) \cdot \underbrace{Q}_{\text{Grad } n-1}$

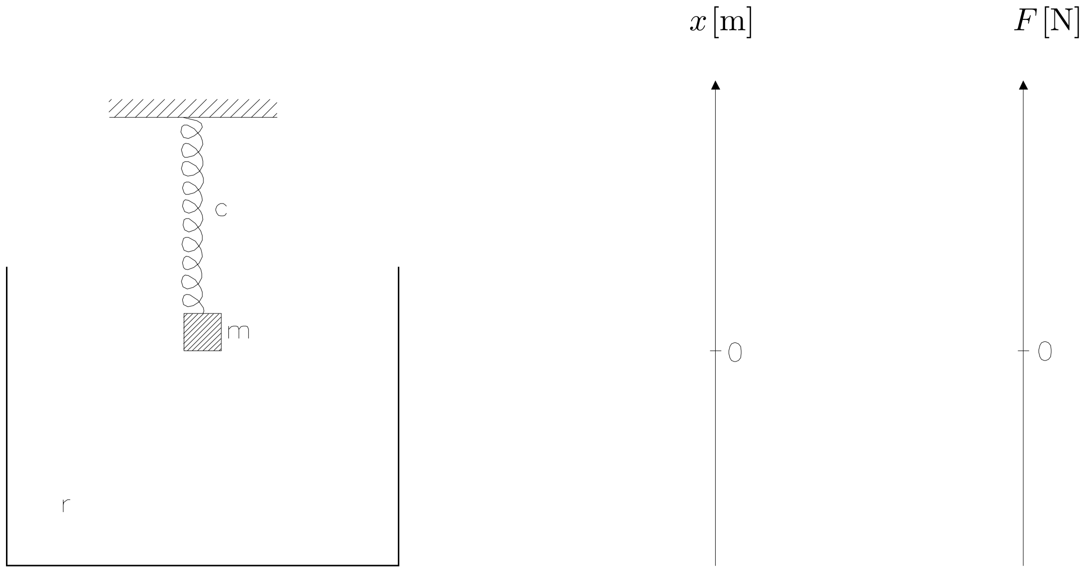
Nach Satz 5 $\exists$ Nullstelle z_1 von $Q \underset{\text{nach 2)}}{\Longrightarrow} Q = (z - z_1) \cdot \underbrace{R}_{\text{Grad } n-2} \Longrightarrow$ usw.

$P = (z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_{n-1}) \cdot$ Konstante

Die Konstante muß a_n sein, damit $P = a_n z^n + \ldots$ $\square$

§17: Die Schwingungsgleichung

17.1 PHYSIKALISCHES MODELL



t	Zeit [sec]
$x(t)$..........	Auslenkung von der Ruhelage zur Zeit t [m]
$\dot{x}(t) = v(t)$...	Geschwindigkeit zur Zeit t [m/sec]
$\ddot{x}(t) = a(t)$...	Beschleunigung zur Zeit t [m/sec^2]
m	Masse [kg]
c.............	Federkonstante [N/m]=[kg/sec^2] (d.h. die Rückstellkraft der Feder ist $-cx(t)$)
r	Dämpfungskonstante $\left[\frac{\text{N}}{\text{m/sec}}\right]$ = [kg/sec] (d.h. die/das umgebende Flüssigkeit/Gas etc. übt die Reibungskraft $-rv(t)$ aus)
$F(t)$.........	äußere Kraft zur Zeit t [N] ($F > 0 : F$ in positive $x-$Richtung, $F < 0 : F$ in negative $x-$Richtung)

Newton: Masse $\times$ Beschleunigung = $\sum$ angreifende Kräfte
$\Longrightarrow m\ddot{x}(t) = -cx(t) - r\dot{x}(t) + F(t)$
Das ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.
Allgemeine Form der Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y'' = D(x, y, y'), \text{ d.h.}$$

abhängige Variable$''$ =Funktion (unabh. Var., abh. Var., abh. Var.$'$)

Zur eindeutigen Bestimmung der Bewegung brauchen wir 2 Anfangsbedingungen:
a) $x(0) = x_0 =$ Anfangsauslenkung [m]
b) $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 =$ Anfangsgeschwindigkeit [m/sec]

17.2 DIE FREIE SCHWINGUNG

Die Schwingungsgleichung ist linear.

Def.: 1) Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat die Form
$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$.

2) Eine lineare Differentialgleichung heißt homogen $\iff g(x) = 0, \forall x$.

Satz 1: $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ sei eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit stetigen f_0, f_1.

1) Wenn $y_1(x), y_2(x)$ 2 Lösungen sind, so sind y_1+y_2 und $C\,y_1$ ($C \in \mathbb{C}$) auch Lösungen. (Die Lösungen bilden einen "Vektorraum"; "Superpositionsprinzip")

2) Wenn y_1, y_2 2 Lösungen sind, sodaß nicht $y_1 = C\,y_2$ oder $y_2 = C\,y_1$ für ein $C \in \mathbb{C}$, so hat jede Lösung die Form $C_1y_1 + C_2y_2$ (mit geeigneten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$)
(Der Lösungsraum hat "Dimension 2")

Beweis von 1): I: $y_1'' + f_1(x)y_1' + f_0(x)y_1 = 0$
II: $y_2'' + f_1(x)y_2' + f_0(x)y_2 = 0$

I+II $\Longrightarrow (y_1+y_2)'' + f_1(x)(y_1+y_2)' + f_0(x)(y_1+y_2) = 0 \Longrightarrow y_1+y_2$ ist auch Lösung; ebenso für $C \cdot y_1$.

2) zu schwierig □

Bsp.: 1) $y'' + 2(\tan x)y' - y = 0$ ist linear und homogen.
$y_1 = \sin x$ ist eine Lösung, denn
$y_1'' + 2(\tan x)y_1' - y_1 = -\sin x + 2\tan x \cdot \cos x - \sin x = 0$
$y_2 = x\sin x + \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung, denn
$y_2' = x\cos x,\ y_2'' = \cos x - x\sin x$
$\Longrightarrow y_2'' + 2\tan x \cdot y_2' - y_2 = \cos x - x\sin x + 2x\sin x - x\sin x - \cos x = 0$
$y_2 \neq C\,y_1, \quad y_1 \neq C\,y_2 \underset{\text{Satz 1, 2)}}{\Longrightarrow}$ alle Lösungen haben die Form
$C_1 \sin x + C_2(x\sin x + \cos x)$

2) $y'' + y \cdot y' = 0$ ist nicht linear
$y_1 = \dfrac{2}{x}$ ist eine Lösung, denn
$y_1' = -\dfrac{2}{x^2},\ y_1'' = \dfrac{4}{x^3} \Longrightarrow y_1'' + y_1 \cdot y_1' = \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{4}{x^3} = 0$
und $y_2 = 1$ (konstante Funktion) ist auch eine Lösung
aber $y_1 + y_2 = \dfrac{2}{x} + 1$ ist keine Lösung, denn
$\left(\dfrac{2}{x}+1\right)'' + \left(\dfrac{2}{x}+1\right) \cdot \left(\dfrac{2}{x}+1\right)' = -\dfrac{2}{x^2} \neq 0$

Teil 1) im Satz 1 ist nicht anwendbar, da die Differentialgleichung nicht linear ist.

Def.: Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat konstante Koeffizienten
$\iff f_0(x)$ und $f_1(x)$ sind Konstanten.

Vorsicht: $g(x)$ muß nicht konstant sein.

Bsp.: Schwingungsgleichung: $\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F(t)}{m}$

Methode: bei homogenen, linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten macht man den Ansatz $\boxed{y = \mathrm{e}^{\lambda x}}$ und erhält eine Polynomgleichung in λ. Diese heißt charakteristische Gleichung.

Bsp.: 1) $y'' + 2y' - 3y = 0$
Anfangswerte: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
Ansatz: $y = \mathrm{e}^{\lambda x} \Longrightarrow y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$
Also: $\mathrm{e}^{\lambda x}$ ist Lösung $\iff \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + 2\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} - 3\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \qquad / : \mathrm{e}^{\lambda x}$
$\iff \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad$ (charakteristische Gleichung)

$$\iff {}_1\lambda_2 = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Lösungen: $y_1 = \mathrm{e}^{1\cdot x} = \mathrm{e}^x, \quad y_2 = \mathrm{e}^{-3x} \Longrightarrow$ (Satz 1)
Gesamtlösung: $y_{\text{hom}} = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-3x}$

$$\text{Anfangswerte:} \quad \left.\begin{aligned} y(0) &= C_1\mathrm{e}^0 + C_2\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) &= C_1\mathrm{e}^0 - 3C_2\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = C_1 - 3C_2 = 0 \end{aligned}\right\} -$$

$$\Longrightarrow 4C_2 = 1,\ C_2 = \frac{1}{4},\ C_1 = \frac{3}{4} \Longrightarrow y_{\text{Lösung}} = \frac{3}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3x}$$

2) $y'' + 2y' + y = 0$
$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad$ (charakteristische Gleichung)
$\Longrightarrow \ {}_1\lambda_2 = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$
Lösungen: $y_1 = \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{-x} = y_1$ nützt nichts.

Trick: In solchen Fällen ist $x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ auch eine Lösung.
Setze also $y_2 = x\mathrm{e}^{-x}$

Kontrolle: $y_2' = \mathrm{e}^{-x} - x \cdot \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2'' = -\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = -2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$
$\Longrightarrow y_2'' + 2y_2' + y_2 = -2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + 2(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) + x\mathrm{e}^{-x} = 0\checkmark$
Somit: $y_{\text{hom}} = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2 x\mathrm{e}^{-x}.$

3) $y'' + 2y' + 5y = 0$

$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ (charakterische Gleichung)

$\Longrightarrow \ {}_1\lambda_2 = -1 \pm \sqrt{1-5} = \underbrace{-1}_{a} \pm \underbrace{2}_{b}\mathrm{i} = a \pm \mathrm{i}b$

Das liefert die komplexwertigen Lösungen

$$z_1 = \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x)$$

und $z_2 = \mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x - \mathrm{i}\sin 2x)$

(Beachte: $(\mathrm{e}^{\lambda x})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$ auch für $\lambda \in \mathbb{C}$, vgl. 16.2, Beispiel 4)

Weil z_1, z_2 Lösungen sind, sind nach Satz 1, 1) auch

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1 - z_2) = \mathrm{e}^{-x}\sin 2x = y_1$$

und $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \mathrm{e}^{-x}\cos 2x = y_2$

Lösungen. Nach Satz 1, 2) ist dann

$$y_{\text{hom}} = C_1\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + C_2\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$$

Im allgemeinen: $y_{\text{hom}} = C_1\mathrm{e}^{ax}\sin bx + C_2\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

Darstellung mit Phasenverschiebung: (**BEACHTE:** C_1 beim sin, C_2 beim cos!!!)

C_1, C_2 seien durch die Anfangswerte bestimmt

$C_1 - \mathrm{i}C_2 = A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ (d.h. $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\alpha + 2k\pi = \arg(C_1 - \mathrm{i}C_2)$)

$\Longrightarrow C_1 = A\cos\alpha,\ C_2 = -A\sin\alpha$

$\Longrightarrow y = \mathrm{e}^{ax} \cdot A(\cos\alpha \sin bx - \sin\alpha\cos bx) = \underline{\underline{A\mathrm{e}^{ax}\sin(bx - \alpha)}}$

Rechenprozeß: $y(0),\ y'(0) \rightsquigarrow C_1, C_2 \rightsquigarrow C_1 - \mathrm{i}C_2 \rightsquigarrow A, \alpha$

Zurück zur Schwingungsgleichung:

Es sei $F(t) = 0, \forall t$ (“freie” Schwingung)

$\Longrightarrow m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = 0 \qquad / : m$

$\Longrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\xi^2}x = 0$

ξ, δ sind Frequenzen [1/sec]=[Hz]

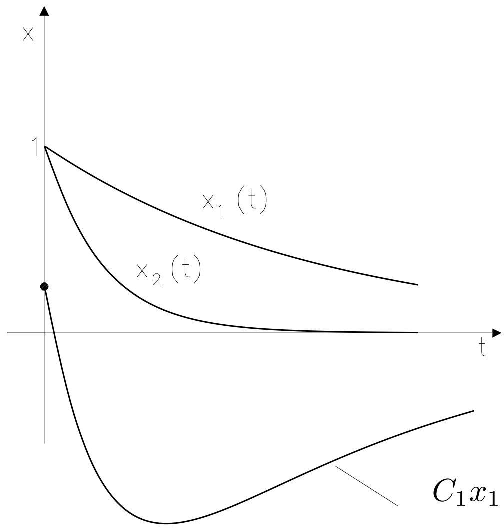
Ansatz: $x = \mathrm{e}^{\lambda t} \Longrightarrow \ldots \lambda^2 + 2\delta\lambda + \xi^2 = 0$

$\Longrightarrow \ {}_1\lambda_2 = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \xi^2}$

<u>1. Fall</u> $\delta > \xi$ (d.h. $\dfrac{r}{2m} > \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, d.h. $r > 2\sqrt{cm}$)

$\Longrightarrow x_{\text{hom}}(t) = C_1 \underbrace{\mathrm{e}^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\xi^2})t}}_{x_1(t)} + C_2 \underbrace{\mathrm{e}^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\xi^2})t}}_{x_2(t)}$

Bild:



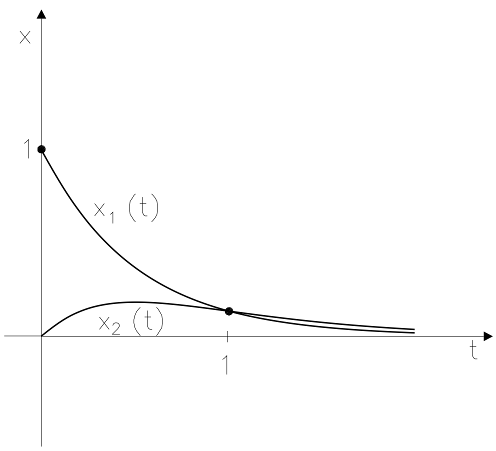
$C_1x_1 + C_2x_2$ für spezielle C_1, C_2

<u>Redeweise:</u> Aperiodischer Fall

<u>2. Fall:</u> $\delta = \xi$ (d.h. $r = 2\sqrt{cm}$)

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta \Longrightarrow x_{\text{hom}}(t) = C_1 \underbrace{\mathrm{e}^{-\delta t}}_{x_1(t)} + C_2 \underbrace{t\mathrm{e}^{-\delta t}}_{x_2(t)}$

Bild:



<u>Redeweise:</u> Aperiodischer Grenzfall

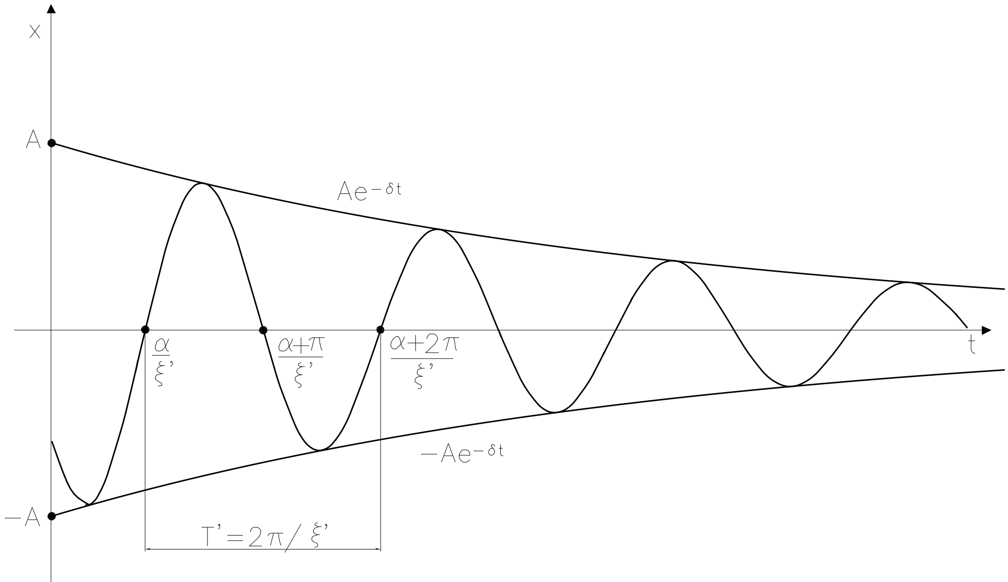
Im 1. und 2. Fall ist aufgrund zu starker Dämpfung keine Schwingung möglich.

<u>3. Fall:</u> $\delta < \xi$ (d.h. $r < 2\sqrt{cm}$)

${}_1\lambda_2 = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \xi^2} = \underbrace{-\delta}_{a} \pm \mathrm{i} \underbrace{\sqrt{\xi^2 - \delta^2}}_{\xi' = b}$

$\Longrightarrow x_{\text{hom}}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\xi' t) + C_2 \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\xi' t) = A\mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\xi' t - \alpha)$

Bild:
(für $\alpha \in [0, \pi]$)



<u>Def.:</u> $T' = \dfrac{2\pi}{\xi'}$ [sec] heißt <u>Quasiperiode</u>

<u>Redeweise:</u> Periodischer Fall, Schwingfall

<u>Speziell:</u> $\delta = 0 \Longleftrightarrow r = 0 \Longleftrightarrow$ keine Dämpfung

$\Longleftrightarrow x(t) = A\sin(\xi t - \alpha); \quad T = \dfrac{2\pi}{\xi}$ heißt Periode.

17.3 DIE ERZWUNGENE SCHWINGUNG

<u>Satz 2</u> $\quad (*) \quad y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$

sei eine (inhomogene) lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit stetigen f_0, f_1. $y_{\text{hom}} = C_1y_1 + C_2y_2$ sei die Lösung der homogenen Gleichung

$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ und $y_p(x)$ sei irgendeine Lösung von $(*)$.

Dann gilt: Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist $y_{\text{inh}} = y_p + y_{\text{hom}} = y_p + C_1y_1 + C_2y_2$

<u>Redeweise:</u> Wenn man ein y_p gefunden hat, nennt man es oft "partikuläre Lösung".

<u>Vorsicht:</u> Jede Lösung von $(*)$ ist eine partikuläre Lösung. Die Ausdrucksweise "<u>die</u> partikuläre Lösung" ist sinnlos.

<u>Beweis:</u> y_3 sei eine Lösung von $(*) \Longrightarrow (y_3-y_p)'' + f_1(x)(y_3-y_p)' + f_0(x)(y_3-y_p) = g(x) - g(x) = 0 \Longrightarrow \exists\, C_1, C_2 : y_3 - y_p = C_1y_1 + C_2y_2 \Longrightarrow y_3 = y_p + C_1y_1 + C_2y_2. \square$

<u>Bsp.:</u> $y'' + 2(\tan x)y' - y = 1 \qquad (*)$

Errate $y_p = -1 \quad (\underbrace{y_p''}_{0} + 2(\tan x) \underbrace{y_p'}_{0} - y_p = -(-1) = 1\checkmark)$

$\underset{\text{Satz 2}}{\Longrightarrow} y_{\text{inh}} = -1 + C_1 \sin x + C_2(x\sin x + \cos x)$

Z.B. Anfangswerte: $y(0) = 5, \quad y'(0) = 7$

$\Longrightarrow 5 = y(0) = -1 + C_1 \cdot 0 + C_2(0+1) \Longrightarrow C_2 = 6, \quad 7 = y'(0) = C_1$

$\Longrightarrow y_{\text{Lösung}} = -1 + 7\sin x + 6x\sin x + 6\cos x$

Zurück zur Schwingungsgleichung:
Wir betrachten nur sinusförmige äußere Kräfte, d.h.
$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F(t) = F_0 \sin(\vartheta t) \qquad (*)$
$F_0 \ldots$ Maximalkraft [N] $(F_0 > 0)$; weiters sei hier $r > 0$.

Ansatz für x_p: $x_p = a\sin(\vartheta t) + b\cos(\vartheta t)$

Vorsicht: Diese a, b haben mit dem ${}_1\lambda_2 = a \pm \mathrm{i}b$ beim 3. Fall der homogenen Differentialgleichung nichts zu tun!!

$\dot{x}_p = a\vartheta\cos(\vartheta t) - b\vartheta\sin(\vartheta t)$
$\ddot{x}_p = -a\vartheta^2\sin(\vartheta t) - b\vartheta^2\cos(\vartheta t)$
x_p erfüllt $(*) \Longleftrightarrow m\ddot{x}_p + r\dot{x}_p + cx_p = F_0\sin(\vartheta t), \forall t$
$\Longleftrightarrow \sin(\vartheta t)[-ma\vartheta^2 - rb\vartheta + ca] + \cos(\vartheta t)\,[-mb\vartheta^2 + ra\vartheta + cb] = F_0\sin(\vartheta t) + 0\cos(\vartheta t)$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{I} \;\; (c - m\vartheta^2)a - r\vartheta b = F_0$$
$$\wedge \quad \text{II} \;\; r\vartheta a + (c - m\vartheta^2)b = 0$$

$$\text{II} \Longrightarrow a = -\frac{(c - m\vartheta^2)}{r\vartheta}\, b$$
$$\text{I} \Longrightarrow -\frac{(c - m\vartheta^2)^2}{r\vartheta}\, b - r\vartheta b = F_0$$
$$\Longrightarrow b = \frac{-F_0 r\vartheta}{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}, \quad a = \frac{F_0(c - m\vartheta^2)}{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}$$

Nach Satz 2 erhalten wir also

$x_{\text{inh}} = x_p + x_{\text{hom}} = a\sin(\vartheta t) + b\cos(\vartheta t) + x_{\text{hom}}$

Weil $\lim\limits_{t\to\infty} x_{\text{hom}}(t) = 0$, nennt man $a\sin(\vartheta t) + b\cos(\vartheta t)$ die stationäre Lösung x_{st}. Dies ist die einzige periodische Lösung von $(*)$. (Dieses x_p spielt also tatsächlich eine Sonderrolle.)

Darstellung mit Phasenverschiebung (vergl. 17.2, Bsp. 3):

$x_{\text{st}} = A\sin(\vartheta t - \alpha)$, wobei $a - \mathrm{i}b = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, d.h. $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{F_0}{\sqrt{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}}$

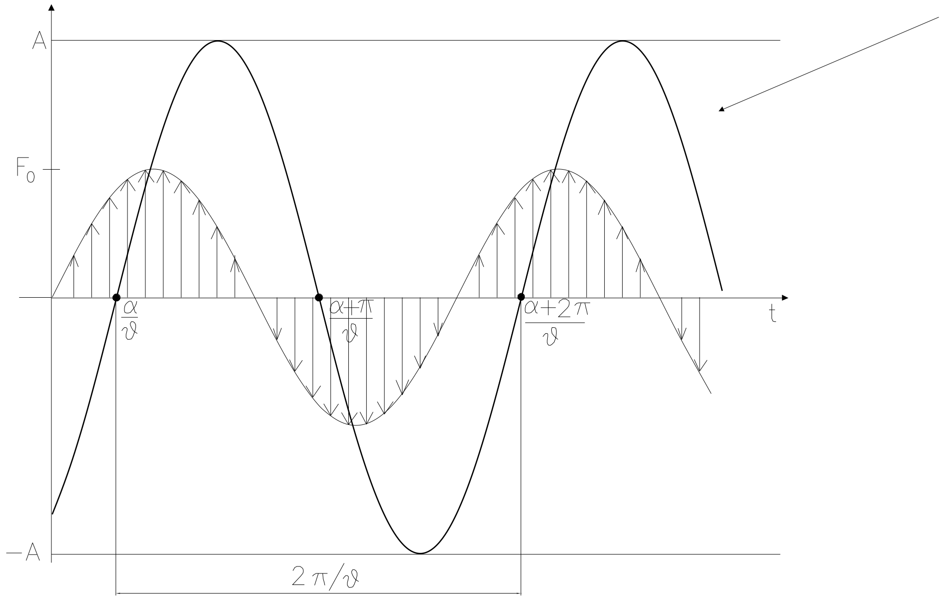
$b < 0 \Longrightarrow a - \mathrm{i}b \in$ I. oder II. Quadrant.

Es sei $\arg(a - \mathrm{i}b) = \alpha + 2k\pi$ mit $0 \leq \alpha \leq \pi$
Formel für α : $\alpha \in [0, \pi],\ A\cos\alpha = a$

$$\Longrightarrow \alpha = \arccos\Big(\frac{a}{A}\Big) = \arccos\Big(\frac{c - m\vartheta^2}{\sqrt{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}}\Big)$$

Def.: A heißt Amplitude, α Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung

Bild: $x\,[\mathrm{m}]$ $F\,[\mathrm{N}]$ $x_{\mathrm{st}} = A\sin(\vartheta t - \alpha)$



$\frac{2\pi}{\vartheta}$ = Periodendauer [sec]

Zahlenbeispiel: $m = 1,\ r = 2,\ c = 5,\ \vartheta = 3,\ F_0 = 2$
$\Longrightarrow x_{\mathrm{hom}} = C_1\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + C_2\mathrm{e}^{-t}\cos 2t$ (vgl. Bsp. 3 in 17.2)

$$A = \frac{2}{\sqrt{(5 - 1\cdot 3^2)^2 + 2^2\cdot 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{52}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \approx 0.277 \quad [\mathrm{m}]$$

$$\alpha = \arccos\Big(\frac{5-9}{\sqrt{52}}\Big) \approx 2.159$$

$\Longrightarrow x_{\mathrm{st}} = 0.277\sin(3t - 2.159)$
$x_{\mathrm{inh}} = x_{\mathrm{st}} + x_{\mathrm{hom}}$
Anfangswerte z. B. $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$
$\Longrightarrow 1 = x(0) = 0.277\sin(-2.159) + C_2 \Longrightarrow C_2 \approx 1.231$
$\quad 0 = \dot{x}(0) = 0.277\cdot 3\cos(-2.159) + 2C_1 - C_2 \Longrightarrow C_1 \approx 0.846$

Also: $x_{\text{Lösung}}(t) \approx 0.277\sin(3t - 2.159) + \underbrace{\mathrm{e}^{-t}(0.846\sin 2t + 1.231\cos 2t)}_{x_{\mathrm{hom}}}$

Man kann auch noch x_{hom} mit Phasenverschiebung darstellen. Das gibt $x_{\mathrm{hom}} \approx 1.494\mathrm{e}^{-t}\sin(2t + 0.9687)$

Noch zu besprechen wären: Resonanz und
Resonanz ohne Dämpfung