1997 - 10 - 09

1. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit vier Münzen

(a) 0-mal; (b) einmal; (c) zweimal; (d) dreimal; (e) viermal

Zahl zu werfen?

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden 3 Ereignisse bei einem Wurf mit zwei Würfeln:

(a) $A =$ "die Augensumme $= 6$";

(b) $B =$ "eine Augenzahl ≥ 3 tritt auf";

(c) $C =$ "die Augenzahlen sind verschieden".

(3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem Wurf mit drei Würfeln die Augensumme

(a) 18; (b) 17; (c) 16; (d) kleiner als 16; (e) 11

ist.

Hinweis zu (e): Stellen Sie fest, welche Ziffernkombinationen in Summe 11 ergeben (z.B. $6 + 3 + 2 = 11$), und auf wieviele Arten sich jede davon anordnen läßt!

(4) Beim österreichischen Sport-Toto wird bei 12 Spielen auf 1, 2, oder X gewettet. (1 bedeutet "die erste Mannschaft gewinnt", 2 heißt "die zweite Mannschaft gewinnt", X entspricht "Unentschieden"). Wir wollen annehmen, daß alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, d.h. Ω sei ein *symmetrischer* Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Wie viele Tips sind möglich?

(b) Wie wahrscheinlich ist ein Hauptgewinn?

(c) Wie wahrscheinlich ist es, daß kein Spiel unentschieden bleibt?

(d) Wie wahrscheinlich ist ein 2. Gewinn, d.h. auf genau 11 Spiele richtig zu wetten?

Zusatzaufgabe (Z1) Zeigen Sie, daß es wahrscheinlicher ist, wenigstens einmal 6 zu erhalten, wenn man viermal mit einem Würfel würfelt, als zumindest eine Doppelsechs, wenn man 24-mal mit 2 Würfeln würfelt!

Hinweis: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der komplementären Ereignisse!

Historische Note: Dieses Problem legte Chevalier de Méré 1652 dem Mathematiker und Philosophen Pascal mit der Behauptung vor, er hätte einen Fehler im Gebäude der Mathematik entdeckt: Seiner Auffassung nach müßten die Wahrscheinlichkeiten nämlich übereinstimmen, da $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$, zahlreiche Würfelexperimente hätten aber das in der Aufgabe formulierte ergeben. (Dies zeigt, daß de Méré vielleicht kein guter Mathematiker, sicherlich aber ein eingefleischter Spieler war.)

1997 - 10 - 16

2. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(5) Auf einem Lottoschein sind 6 der Zahlen $1, 2, \ldots, 45$ anzukreuzen. Die Gewinnermittlung erfolgt durch das Ziehen von 7 Kugeln, welche die 6 Gewinnzahlen sowie eine Zusatzzahl bestimmen. Die 5 Gewinnränge sind wie folgt festgelegt:

1. Rang: 6 richtige Gewinnzahlen;
2. Rang: 5 richtige Gewinnzahlen + Zusatzzahl;
3. Rang: 5 richtige Gewinnzahlen;
4. Rang: 4 richtige Gewinnzahlen;
5. Rang: 3 richtige Gewinnzahlen.

Berechnen Sie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, in einen dieser Gewinnränge zu gelangen!

Historische Note: Erstmals wurde das Zahlenlotto 1720 in Genua durchgeführt. Dort wettete man darauf, welche 5 Ratsherren aus einem 90-köpfigen Kollegium gewählt würden.

(6) Aus einem Spiel Karten (52 Karten) werden 5 Karten herausgenommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

(a) daß alle Karten dieselbe Farbe (Herz, Karo, Pik, oder Treff) haben = “flush”;

(b) daß 4 gleichnamige Karten (alle 4 Neuner oder alle 4 Assen etc.) enthalten sind = “poker”.

(7) (a) Bestimmen Sie $\mathrm{Bin}(10, \frac{1}{2})$, d.h. die Binomialverteilung mit den Parametern $10, \frac{1}{2}$. Berechnen Sie also $p_i = \binom{10}{i} 2^{-10}$ für $i = 0, 1, \ldots, 10$.

(b) Skizzieren Sie die Punkte (i, p_i) in der (x, y) -Ebene! Tragen Sie p_i in $\%$ auf!

(8) Bei einer Produktionsserie ist im Durchschnitt jedes 500. Werkstück defekt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, daß unter 2000 Stücken genau

(a) 0; (b) 2; (c) 3; (d) 5; (e) 1999

fehlerhafte sind!

(Z2) Zeigen Sie, daß $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$, indem Sie $\binom{n+1}{k}$ als Anzahl der Möglichkeiten auffassen, eine Menge von k Dingen aus $n+1$ Dingen auszuwählen, und diese Möglichkeiten unterscheiden (a) in solche, wo das erste der $n+1$ Dinge genommen wird und aus den restlichen n Dingen noch $k-1$ zu wählen sind, und (b) in solche, wo das erste Ding nicht genommen wird, und alle k Dinge aus den restlichen n Dingen gewählt werden.

Beweisen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, und $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ in ähnlicher Weise!

1997 - 10 - 24, 7^{30}

3. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(9) In einer Box sind $N = 500$ Kugeln, $F = 75$ davon farbig. Nach Schütteln der Box erscheinen $n = 10$ Kugeln im Sichtfenster. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, daß keine, genau eine, bzw. genau zwei farbige Kugeln auftreten,

(a) mit der hypergeometrischen Verteilung;

(b) mit der Binomialverteilung ($p = \frac{F}{N} = 0.15, \quad q = 1 - p = 0.85$);

(c) mit der Poissonverteilung ($\lambda = np = 1.5$).

Bemerkung: Hier ist (a) exakt, (b) und (c) sind Näherungen.

(10) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten in Aufgabe (8) näherungsweise durch Approximation mit der Poissonverteilung.

(11) Auf einer Straße passiert im Mittel alle 100 Tage ein Unfall. Wir nehmen an, daß die Anzahl der Unfälle in einem festen Zeitraum poissonverteilt ist.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als 1 Unfall pro Monat (= 30 Tage) passiert? ($\lambda = 0.3$)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Unfällen höchstens 3 Tage vergehen? ($\lambda = 0.03$)

(12) Eine Maschine produziert einen durchlaufenden Rohrstrang, der in Stücken von 1 m auf den Markt kommt. Auf 100 m Rohrstrang kommen durchschnittlich 5 Fehler, welche an voneinander unabhängigen Stellen auftreten. Wieviel Prozent der 1 m langen Stücke sind defekt?

(Z3) An einem Sommerabend wird durchschnittlich alle 10 min eine Sternschnuppe beobachtet. Wie wahrscheinlich ist es, daß man in einer Stunde (a) überhaupt keine; (b) mindestens 10 Sternschnuppen sieht?

1997 - 10 - 31

4. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(13) Die Lebensdauer einer bestimmten Glühlampentype ist exponentialverteilt mit Parameter $\mu = 1/200\,[\mathrm{h}^{-1}]$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, daß eine Glühlampe dieser Type

(a) weniger als 100 h;

(b) zwischen 100 h und 200 h;

(c) zwischen 200 h und 300 h;

(d) länger als 300 h brennt.

(14) Die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Radiumatoms ist exponentialverteilt mit Parameter $\mu = 0.000439\,[\mathrm{Jahr}^{-1}]$.

(a) Welcher Anteil einer größeren Menge von Radiumatomen ist zur Zeit t (in Jahren) noch übrig?

(b) Was ist die Halbwertszeit, d.h. die Zeit T, sodaß die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls im Intervall $[0, T]$ genau 50% beträgt?

Bemerkung: Bei einer absolutstetigen Verteilung bezeichnet man die Größe T mit $P(]-\infty, T]) = \frac{1}{2}$ als *Median* dieser Verteilung.

(15) Eine Maschine stellt Platten her, deren Dicke zwischen 9 mm und 10 mm liegt und in diesem Intervall mit der Dichtefunktion $f(t) = 6(t-9)(10-t)$ verteilt ist.

(a) Zeigen Sie, daß f eine Dichtefunktion ist!

(b) Welcher Prozentsatz der Platten ist mehr als 9.2 mm dick?

(16) Für eine absolutstetige Verteilung mit Dichtefunktion $f(t)$ bezeichnet man $\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ als *Erwartungswert*. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Exponentialverteilung! (In den Übungen 13 bzw. 14 würde man den Erwartungswert als *durchschnittliche Lebensdauer* interpretieren.)

(Z4) Ein Kreis wird in zufälliger Weise mit einer Geraden geschnitten (z.B. durch Fallenlassen einer Nadel). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die auf der Geraden liegende Kreissehne länger als der Radius ist!

Historische Note: Die Tatsache, daß sich bei *dieser* Wahl zweier Punkte am Kreis etwas anderes ergibt als bei unabhängiger zufälliger Wahl zweier Punkte (wie in der Vorlesung), erregte im 19. Jahrhundert Aufsehen, und wird, nach dem Entdecker J. Bertrand, als "Bertrand'sches Paradoxon" bezeichnet.

1997 - 11 - 07

5. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(17) Bestimmen Sie für die Normalverteilung mit $\mu = 50$ und $\sigma = 7$

(a) $P([60, \infty[)$; (b) $P(]-\infty, 40])$; (c) $P([42, 63])$;

(d) den Wert x mit $P(]-\infty, x]) = 0.25$!

Bemerkung: x ist also das 25%-Fraktil der gegebenen Verteilung.

(18) Bei der Musterung wurde festgestellt, daß die Körpergröße der Kandidaten normalverteilt ist mit Mittelwert $\mu = 178.8\,\mathrm{cm}$ und Streuung $\sigma = 7.5\,\mathrm{cm}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, daß ein Kandidat

(a) kleiner als 170 cm ist;

(b) größer als 190 cm ist;

(c) zwischen 171 cm und 186 cm groß ist.

(19) Eine Münze wird 36 mal aufgeworfen. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, daß weniger als 15 mal Zahl erscheint, indem Sie die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximieren!

(20) Eine Maschine produziert Bolzen, von denen 10 % defekt sind. Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeiten, daß sich in einer Schachtel mit 400 Bolzen (a) zwischen 30 und 50; (b) mindestens 55 defekte Bolzen befinden!

(Z5) Wie wahrscheinlich ist es, daß zwischen 130 und 200 mal die Augenzahl 6 geworfen wird, wenn man 1000 mal würfelt?

1997 - 11 - 14

6. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(21) Mit einer automatischen Drehbank werden Schrauben hergestellt, deren Durchmesser normalverteilt ist mit $\mu = 5.010$ mm und $\sigma = 0.006$ mm. Die Toleranzgrenzen sind 5.000 mm nach unten und 5.020 mm nach oben.

(a) Welcher Prozentsatz der Schrauben liegt außerhalb der Toleranz?

(b) Wie ändert sich der Ausschuß, wenn sich μ ändert, aber σ konstant bleibt? (z.B. $\mu = 5.008$ mm; $\mu = 5.012$ mm; $\mu = 5.006$ mm)

(22) Auf welchen Wert muß σ in Aufgabe (21) verkleinert werden, damit der Ausschuß bei genauer Einstellung (d.h. für $\mu = 5.010$ mm) nur 1% beträgt? Wie läßt sich diese Forderung mit einem Fraktilwert ausdrücken?

(23) Es wird mit einem grünen und einem weißen Würfel gewürfel. Es seien A, B, C die folgenden Ereignisse:

$A =$ "die Augensumme $= 8$"

$B =$ "die Augenzahl des weißen Würfels $= 3$"

$C =$ "beide Augenzahlen sind gerade"

Berechnen und interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(B|A)$, $P(B|C)$, $P(C|A)$, $P(C|B)$.
Sind A, B bzw. A, C bzw. B, C unabhängige Ereignisse?

(24) Nach statistischen Erhebungen sind etwa 28% der Österreicher über 14 Jahren Raucher. Ferner wurde in einer anderen Statistik bei etwa 4.2% der Verstorbenen Lungenkrebs als Todesursache angegeben. Von den an Lungenkrebs Verstorbenen waren 76% Raucher. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit an Lungenkrebs zu sterben,

(a) wenn man Raucher ist;

(b) wenn man Nichtraucher ist!

(Z6) Für die folgende vereinfachte Version eines Spieles namens "Craps" benötigt man nur einen Spieler und einen Würfel. Der Spieler gewinnt sofort, wenn er im ersten Wurf 5 oder 6 würfelt, und er verliert sofort mit der Augenzahl 1. Bei 2, 3, oder 4 im ersten Wurf würfelt er solange weiter, bis er 1, 2, 3, oder 6 hat. Mit 6 gewinnt er, mit 1, 2, oder 3 verliert er. Wie wahrscheinlich ist es, in diesem Spiel zu gewinnen?

1997 - 11 - 28

7. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(25) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Poissonverteilung! Veranschaulichen Sie das Ergebnis, indem Sie die Poissonverteilungen mit den Parametern $\lambda = 2$ bzw. $\lambda = \frac{1}{2}$ skizzieren.

(26) Berechnen Sie die Varianz der Exponentialverteilung! Veranschaulichen Sie das Ergebnis, indem Sie die Exponentialverteilungen mit den Parametern $\mu = 2$ bzw. $\mu = \frac{1}{2}$ skizzieren.

(27) Bei einem Wurf mit zwei Würfeln bezeichne $\underline{x}$ bzw. $\underline{y}$ die Augenzahl des ersten bzw. des zweiten Würfels, und $\underline{z}$ die Augensumme, d.h. $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$. Bestimmen Sie $\mathcal{E}(\underline{x}), \mathcal{V}(\underline{x}), \mathcal{E}(\underline{z}), \mathcal{V}(\underline{z})$ und überprüfen Sie, daß $\mathcal{E}(\underline{z}) = \mathcal{E}(\underline{x}) + \mathcal{E}(\underline{y})$ und $\mathcal{V}(\underline{z}) = \mathcal{V}(\underline{x}) + \mathcal{V}(\underline{y})$ gelten.

Bemerkung: Die Gleichung $\mathcal{E}(\underline{x} + \underline{y}) = \mathcal{E}(\underline{x}) + \mathcal{E}(\underline{y})$ ist für beliebige Zufallsgrößen gültig; $\mathcal{V}(\underline{x} + \underline{y}) = \mathcal{V}(\underline{x}) + \mathcal{V}(\underline{y})$ stimmt hingegen nur, wenn $\underline{x}, \underline{y}$ unkorreliert sind. Das ist hier der Fall, da $\underline{x}, \underline{y}$ sogar unabhängig sind.

(28) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz für die Gleichverteilung am Intervall $[a, b]$, d.h. für die Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & : a < t < b, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

(Z7) (a) In den Bezeichnungen von Übung 27 sei $\underline{u} = \underline{x}/\underline{y}$. Bestimmen Sie $P_{\underline{u}}$ sowie $\mathcal{E}(\underline{u})$ und $\mathcal{V}(\underline{u})$.

(b) In einem Büro treffen durchschnittlich μ Anrufe pro Stunde ein. Bestimmen Sie $P_{\underline{x}}$ sowie $\mathcal{E}(\underline{x})$ und $\mathcal{V}(\underline{x})$, wenn die Zufallsgröße $\underline{x}$ die "Wartezeit auf den zweiten Anruf" bedeutet.

1997 - 12 - 05

8. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(29) Bei einem Wurf mit zwei Würfeln bezeichne $\underline{z}$ die Augensumme und $\underline{s}$ die Anzahl der Sechser. ($\underline{s}$ nimmt also nur die Werte 0, 1, und 2 an.) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von $\underline{s}$ und $\underline{z}$ sowie die Regressionsgeraden von $\underline{z}$ nach $\underline{s}$ sowie von $\underline{s}$ nach $\underline{z}$!

(30) Bei einem Wurf mit zwei Würfeln bezeichne $\underline{d} = \underline{x} - \underline{y}$ die Differenz der Augenzahlen $\underline{x}$ bzw. $\underline{y}$ des ersten bzw. zweiten Würfels und $\underline{s}$ die Anzahl der Sechser. Zeigen Sie, daß $\underline{s}$ und $\underline{d}$ unkorreliert sind! Was sind die Regressionsgeraden von $\underline{d}$ nach $\underline{s}$ bzw. von $\underline{s}$ nach $\underline{d}$?

Bemerkung: Man beachte, daß $\underline{s}$ und $\underline{d}$ zwar unkorreliert, aber nicht unabhängig sind: Für $\underline{s} = 2$ ist notwendigerweise $\underline{d} = 0$.

(31) Berechnen Sie mit den Formeln der Vorlesung den Korrelationskoeffizienten sowie die zwei möglichen Ausgleichsgeraden zu den Meßpunkten

i	1	2	3	4	5
x_i	1.9	2.0	2.3	2.7	3.1
y_i	1.7	1.0	1.4	1.1	0.8

Hinweis: Zur Berechnung der Varianzen und der Covarianz verwenden Sie am besten die Formeln $\mathcal{V}(\underline{X}) = \mathcal{E}\big((\underline{X} - \mathcal{E}(\underline{X}))^2\big)$, $\operatorname{cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \mathcal{E}\big((\underline{X} - \mathcal{E}(\underline{X}))(\underline{Y} - \mathcal{E}(\underline{Y}))\big)$.

(32) Benützen Sie die in Mathematik B durchgenommene Methode, um die Ausgleichsgerade von y_i nach x_i zu den Meßpunkten in Übung 31 zu bestimmen: Wenn $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{e} = (1, \ldots, 1)$, dann ist $\sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - d)^2 = \|\vec{y} - k\vec{x} - d\vec{e}\|^2$ minimal $\iff k\vec{x} + d\vec{e}$ ist der Fußpunkt der Projektion von $\vec{y}$ in die von $\vec{e}, \vec{x}$ aufgespannte Ebene durch 0 $\iff \vec{y} - k\vec{x} - d\vec{e}$ steht senkrecht auf $\vec{e}$ und auf $\vec{x}$ $\iff \begin{cases} \text{I: } \langle \vec{y} - k\vec{x} - d\vec{e}, \vec{e} \rangle = 0, \\ \text{II: } \langle \vec{y} - k\vec{x} - d\vec{e}, \vec{x} \rangle = 0. \end{cases}$

(Z8) Bei einem Wurf mit n Würfeln bezeichne $\underline{z}$ die Augensumme und $\underline{s}$ die Anzahl der Sechser. Zeigen Sie, daß $\rho(\underline{s}, \underline{z}) = \sqrt{\frac{3}{7}}$ und daß die Regressionsgeraden von $\underline{z}$ nach $\underline{s}$ bzw. von $\underline{s}$ nach $\underline{z}$ jeweils durch $z = 3(s + n)$ bzw. $s = \frac{z}{7} - \frac{n}{3}$ gegeben sind!

Hinweise: (a) $\underline{z} = \underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_n$, wobei $\underline{x}_i$ die Augenzahl des $i-$ten Würfels bezeichnet;

(b) $\underline{s} = \underline{s}_1 + \cdots + \underline{s}_n$, wobei $\underline{s}_i = \begin{cases} 1 : i - \text{ter Würfel zeigt } 6, \\ 0 : \text{sonst}; \end{cases}$

(c) $\mathcal{E}(\underline{z}) = n\mathcal{E}(\underline{x}_1) = \frac{7n}{2}$, $\mathcal{V}(\underline{z}) = n\mathcal{V}(\underline{x}_1) = \frac{35n}{12}$, $P_{\underline{s}} = \operatorname{Bin}(n, \frac{1}{6})$, $\mathcal{E}(\underline{s}) = \frac{n}{6}$, $\mathcal{V}(\underline{s}) = \frac{5n}{36}$, $\operatorname{cov}(\underline{s}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \operatorname{cov}(\underline{s}_i, \underline{x}_j) = \sum_{i=1}^n \operatorname{cov}(\underline{s}_i, \underline{x}_i) = n \operatorname{cov}(\underline{s}_1, \underline{x}_1) = \frac{5n}{12}$.

1997 - 12 - 12

9. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(33) Ein Rohr wird aus 2 Teilstücken A und B zusammengesetzt, die von verschiedenen Maschinen hergestellt wurden. Die Durchmesser der Rohrteile sind mit $\mu_A = 100.2\,\text{mm}$, $\sigma_A = 0.3\,\text{mm}$ bzw. $\mu_B = 100.1\,\text{mm}$, $\sigma_B = 0.4\,\text{mm}$ normalverteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Teile A und B verbunden werden können, wenn eine Differenz der Durchmesser bis zu 1 mm zulässig ist?
Hinweis: Die Zufallsvariablen $\underline{x}_A, \underline{x}_B$, welche den Durchmessern der Rohrteile A, B entsprechen, sind unabhängig (dies wollen wir zumindest annehmen), und daher ist auch $\underline{x}_A - \underline{x}_B$ normalverteilt (s. § 8, Satz 3).

(34) In einer Molkerei wird maschinell Butter verpackt. Das Gewicht eines Stückes Butter ist normalverteilt mit $\sigma = 3\,\text{g}$. Bei einer eventuellen Kontrolle nimmt die Behörde eine Stichprobe von 25 Stück Butter. Die Molkerei wird bestraft, wenn das mittlere Gewicht der Stichprobe weniger als $250\,\text{g}$ beträgt. Auf welchen Erwartungswert μ muß die Maschine eingestellt werden, um das Risiko einer Bestrafung auf $0.5\,\%$ zu reduzieren? (Was ergibt sich hingegen für μ, wenn die Behörde nur **eine** Butterpackung kontrolliert?)

(35) Bei einem Wurf mit drei Würfeln seien $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ die einzelnen Augenzahlen und $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3$ die Augensumme. Skizzieren Sie die Verteilung von $\underline{x}$ (vgl. Übung 3) sowie die Dichtefunktion der Normalverteilung $N(3 \cdot 3.5, \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{35}{12}})$, welche $P_{\underline{x}}$ nach dem zentralen Grenzwertsatz approximiert!

(36) Es wird n mal gewürfelt und das Stichprobenmittel $\overline{\underline{x}} = \frac{1}{n}(\underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_n)$ betrachtet. Ab welchem n unterscheidet sich $\overline{\underline{x}}$ mit $99.9\,\%$ Wahrscheinlichkeit um weniger als 0.2 von 3.5?
Hinweis: Man kann (nach dem zentralen Grenzwertsatz) $\dfrac{\overline{\underline{x}} - 3.5}{\sqrt{\frac{35}{12}}\Big/\sqrt{n}}$ als ungefähr $N(0,1)-$verteilt annehmen, d.h. $P_{\overline{\underline{x}}} \approx N(3.5, \sqrt{\frac{35}{12n}})$; n wird dann so bestimmt, daß $P_{\overline{\underline{x}}}([3.3, 3.7]) = 0.999$.

(Z9) Es sei $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ eine Stichprobe vom Umfang n, $\mu = \mathcal{E}(\underline{x}_j)$, $\sigma^2 = \mathcal{V}(\underline{x}_j)$, und $\overline{\underline{x}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underline{x}_j$. Zeigen Sie, daß für $\underline{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\underline{x}_j - \overline{\underline{x}})^2$ gilt $\mathcal{E}(\underline{s}^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$!

1998 - 01 - 09

10. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(37) Bestimmen Sie zur Meßserie in S. 44, 45 zweiseitige Konfidenzintervalle für die Druckfestigkeit zu den Signifikanzniveaus 2% und 1% unter der Annahme $\sigma = \hat{s}$.
($n = 55$, $\overline{y} = 356.6$, $s^2 = 1539.1127$)

(38) Bestimmen Sie die korrekten Konfidenzintervalle zu den Angaben in Übung (37), d.h. ohne die Annahme $\sigma = \hat{s}$ und mit Hilfe der $t-$Verteilung.

(39) Bestimmen Sie mit Hilfe der $t-$Verteilung einseitige Konfidenzintervalle $[a, \infty[$ zu den Angaben in Übung (37).
Hinweis: Beim 98%−Konfidenzintervall muß man sowohl bzgl. des Freiheitsgrades $\nu = 54$ als auch bzgl. des Signifikanzniveaus interpolieren.

(40) Messungen an Kabeln ergaben die folgenden Bruchlasten (in Newton):

i	1	2	3	4	5	6
f_i	8 312	10 593	9 664	8 842	10 226	9 438

(a) Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für $\mathcal{E}(\underline{f})$ zum Signifikanzniveau 5% !

(b) Bei welchem Signifikanzniveau kann gesagt werden, daß die mittlere Bruchlast durch $\overline{f} \pm 900$ gegeben ist?

(Z10) Die Geburtsstatistik der Stadt Wien in den Jahren 1937–1946 weist bei insgesamt $n = 227\,116$ Geburten $k = 109\,689$ Mädchengeburten auf. Geben Sie ein zweiseitiges 95%−Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt an.
Hinweis: Gesucht ist p in $\mathrm{Bin}(n,p) \approx N(np, \sqrt{npq})$. In erster Näherung ist $p = \frac{k}{n}$ und daher setzt man $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{k \cdot \frac{n-k}{n}}$ und bestimmt zunächst ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ von $N(\mu, \sigma)$ um den beobachteten Wert k, d.h. $[a,b] = [k - 1.96\sigma, k + 1.96\sigma]$. Dann ist $[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}]$ das gesuchte Konfidenzintervall für p.

1998 - 01 - 16

11. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(41) Bestimmen Sie zur Meßserie in S. 44, 45 zweiseitige Konfidenzintervalle für die Streuung der Druckfestigkeit zu den Signifikanzniveaus 2% und 1%.
($n = 55, \quad s^2 = 1539.1127$; beachte: $(n-1)\underline{\hat{s}}^2 = n\underline{s}^2$)

(42) Bestimmen Sie die einseitigen Konfidenzintervalle $[\sqrt{a}, \infty[$ bzw. $]0, \sqrt{b}]$ für σ zu den Angaben in Übung (41) zum Signifikanzniveau 1%!

(43) (a) Zeichnen Sie die Dichtefunktionen der χ^2-Verteilungen mit $\nu = 1$ bzw. $\nu = 4$ Freiheitsgraden!

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der χ^2-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden!

(44) $f(t)$ sei die Dichtefunktion der χ^2-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden. Berechnen Sie $F(u) = \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t$ und bestimmen Sie mit dem Newton'schen Näherungsverfahren das 95%-Fraktil, d.h. den Wert u, der $F(u) = 0.95$ erfüllt. Verwenden Sie $u_0 = 8$ als Startwert und berechnen Sie u_3! Überprüfen Sie das Ergebnis mit der Tabelle in S. 66!

(Z11) $\underline{x}, \underline{y}$ seien zwei unabhängige Zufallsgrößen mit Standardnormalverteilung. Zeigen Sie, daß $\underline{x}/\underline{y}$ $t-$verteilt mit einem Freiheitsgrad ist, d.h. mit der Dichtefunktion $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2}$ verteilt ist!

<u>Historische Note:</u> Diese Verteilung wird nach Augustin Louis Cauchy (1789–1857) benannt. Seinen Namen tragen auch die Cauchy-Folge, die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, und der Cauchy'sche Integralsatz.

<u>Hinweis:</u> $P(\{\underline{x}/\underline{y} > u\}) = 2 \cdot \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2} \int\limits_{x=yu}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad =$ (Substitution: $x = yt) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{t=u}^{\infty} \int\limits_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2(1+t^2)/2}\, y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$

1998 - 01 - 23

12. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

(45) Die mittlere Reißfestigkeit einer bestimmten Drahttype war $\mu_0 = 218\,\mathrm{N/mm^2}$. Eine veränderte Produktionsweise ergab bei einer Stichprobe von 50 Stück die mittlere Reißfestigkeit $\overline{x} = 225\,\mathrm{N/mm^2}$. Es wird angenommen, daß die Standardabweichung in beiden Produktionsarten $20\,\mathrm{N/mm^2}$ ist. Testen Sie zu den Signifikanzniveaus 5% und 1%, ob die neue Produktionsweise die Reißfestigkeit gleich läßt!

(46) Testen Sie zum Signifikanzniveau 5% für die Meßserie in S. 44, 45 die Hypothese gleicher Erwartungswerte für die ersten 25 Meßwerte $y_1, \ldots, y_{25}$ bzw. die 30 weiteren Meßwerte $y_{26}, \ldots, y_{55}$ der Druckfestigkeit

(a) mit dem $N-$ Test unter der Annahme bekannter Streuung $\sigma_1 = \sigma_2 = \hat{s} \approx 39.59$;

(b) mit dem $t-$ Test unter der Annahme einer identischen, aber unbekannten Streuung $\sigma_1 = \sigma_2$!

<u>Hinweis:</u> $\overline{y} = 370.68$, $\overline{y}\,' = 344.8\dot{6}$, $\hat{s}_{\mathrm{k}}^2 = \frac{1}{53}\left[\sum_{j=1}^{25}(y_j - \overline{y})^2 + \sum_{j=26}^{55}(y_j - \overline{y}\,')^2\right] \approx$ 1425.75

(47) Hängt der Erwartungswert der Biegezugsfestigkeit $[\mathrm{kp/mm^2}]$ von Gießharzbeton in signifikanter Weise von der Körnigkeit des Zuschlags ab? Es sei $\alpha = 1\%$. Die Meßwerte x_j (grober Zuschlag) und x'_j (feiner Zuschlag), $j = 1, \ldots, 9 = n_1 = n_2$, sind:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_j	203	229	215	220	223	233	208	228	209
x'_j	181	207	181	173	165	190	185	184	182

Es wird angenommen (z.B. aufgrund des Tests in der nächsten Übung), daß $\underline{x}_j, \underline{x}'_j$ mit *derselben* Varianz normalverteilt sind.

(48) Testen Sie mit dem $F-$ Test zum Niveau 5% die Hypothese gleicher Varianzen im obigen Beispiel!

(Z12) Zeigen Sie, daß die kombinierte Varianzschätzung

$$\underline{\hat{s}}_{\mathrm{k}}^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left[\sum_{j=1}^{n_1}(\underline{x}_j - \overline{\underline{x}})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(\underline{x}'_j - \overline{\underline{x}}\,')^2\right]$$

erwartungstreu ist!

1997 - 11 - 21

1. Klausur zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

Bearbeiten Sie bitte die folgenden 4 Aufgaben. Es genügt, die gesuchten Wahrscheinlichkeiten formelmäßig anzugeben. Parameter wie $N, F, n, i, p, q, \lambda, \mu, \sigma, t$ sollten aber durch Zahlen ausgedrückt werden. (Im Fall, daß Sie einen Taschenrechner und noch Zeit haben, die gefragten Wahrscheinlichkeiten numerisch auszurechnen, sollten Sie das folgende erhalten: (1) 31.63%; 30.87%; 25.10% (2) 15.58%; 23.87% (3) 85.43% (4) $13.\dot{8}\%$; $83.\dot{3}\%$; $11.\dot{1}\%$; $13.\dot{3}\%$; 80%)

(1) Aus einer Schachtel mit 70 weißen und 30 roten Kugeln werden 5 Kugeln zufällig entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich darunter genau 2 rote Kugeln befinden,

  (a) mit der hypergeometrischen Verteilung;

  (b) mit der Binomialverteilung;

  (c) mit der Poissonverteilung.

  Bemerkung: Hier ist (a) exakt, (b) und (c) sind Näherungen.

(2) In einem Gebiet ereignet sich im Mittel alle 10 Tage ein Unfall.

  (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Woche mehr als ein Unfall passiert?

  (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man zwischen 5 und 10 Tagen warten muß, bis der erste Unfall eintritt?

(3) Eine Münze wird 16 mal aufgeworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 5 mal und höchstens 10 mal Zahl erscheint, indem Sie die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximieren. Verwenden Sie die Tabelle auf der Rückseite!

(4) Beim Würfeln mit 2 Würfeln seien die folgenden Ereignisse gegeben:

  $A =$ "die Augensumme $= 6$"

  $B =$ "die Augenzahlen sind verschieden"

  Bestimmen Sie $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$. Sind A, B unabhängige Ereignisse?

1998 - 01 - 30

2. Klausur zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 1997/98

Bearbeiten Sie bitte die folgenden 4 Aufgaben.

(1) Beim Würfeln mit einem Würfel bezeichne $\underline{x}$ die Augenzahl, $\underline{y} = \underline{x} - 3$, $\underline{z} = \underline{y}^2$. Bestimmen Sie $\mathcal{E}(\underline{y})$, $\mathcal{E}(\underline{z})$, $\mathcal{V}(\underline{y})$, $\operatorname{cov}(\underline{y}, \underline{z})$, und die Regressionsgerade von $\underline{z}$ nach $\underline{y}$.

(2) In einer Zuckerraffinerie wird maschinell Zucker verpackt. Das Gewicht der Pakete ist normalverteilt mit $\sigma = 12\,\mathrm{g}$. Bei einer Kontrolle entnimmt das Marktamt eine Stichprobe von sechzehn Paketen Zucker. Die Raffinerie wird bestraft, wenn das mittlere Gewicht der Stichprobe weniger als $1\,\mathrm{kg}$ beträgt. Auf welchen Erwartungswert μ muß die Abfüllmaschine eingestellt werden, um das Risiko einer Bestrafung auf 2% zu reduzieren?

(3) Eine Messung der Druckfestigkeit von 25 Betonproben ergab das Stichprobenmittel $\overline{x} = 295$ und die erwartungstreue Stichprobenvarianz $\hat{s}^2 = 100$. Das Signifikanzniveau α sei 2%. Bestimmen Sie zweiseitige Konfidenzintervalle (a) für den Erwartungwert μ, und (b) für die Streuung σ. ($\sqrt{\frac{24}{43}} \approx 0.75$, $\sqrt{\frac{24}{10.9}} \approx 1.48$)

(4) Zwei Stichproben ergaben die folgenden Werte:

j	1	2	3	4	5
x_j	17	24	18	16	25
x'_j	19	14	22	14	21

Es wird angenommen, daß $\underline{x}_j, \underline{x}'_j$ mit *derselben* Varianz normalverteilt sind. Testen Sie mit dem $t-$ Test zum Signifikanzniveau 10% die Hypothese gleicher Erwartungswerte. ($\sqrt{2.5} \approx 1.58$)