1. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(1) Berechnen Sie $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2+1}$. Nach der Substitution $u = \operatorname{sh} v$ werden die Gleichungen $\operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2v)$, $\operatorname{sh} 2v = 2 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v = 2 \operatorname{sh} v \sqrt{\operatorname{sh}^2 v + 1}$, und $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ verwendet.

(2) Berechnen Sie das Integral in Übung (1) numerisch mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$, d.h. $k = 6$, mit der (a) Linksregel, (b) Rechtsregel, (c) Trapezregel, und (d) Simpsonregel.

(3) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $y = 2x - 4$ eingeschlossen wird, durch Integration (a) nach x; (b) nach y.

Hinweis zu (a): Unterteilen Sie die Integration bei $x = 1$.

(4) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y = x^2$ und der Ellipsenhälfte $3x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ eingeschlossen wird.

Hinweis: Substituieren Sie in einem Teil des Integrals $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin t$.

(5) Bestimmen Sie das Volumen, das entsteht, wenn die Kurve $y = \mathrm{e}^x$, $0 \leq x \leq 1$, um die $x-$ Achse rotiert.

(6) Was ergibt sich in Übung 5, wenn die Kurve um die $y-$ Achse rotiert?

Hinweis: Schreiben Sie 1 als Faktor ins Integral.

(7) Berechnen Sie die Bogenlänge L der Kurve $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, numerisch mit der Simpsonregel. Verwenden Sie die Schrittweite $h = \frac{\pi}{6}$!

(8) Bestimmen Sie die Oberfläche des Drehkörpers, der bei Rotation des Hyperbelstükkes $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $1 \leq x \leq 2$, um die $x-$ Achse entsteht!

(Z1) (a) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(x)$ der Kurve $y = t^{3/2}$ über dem Intervall $[0, x]$.

(b) Stellen Sie x als Funktion von s dar!

(c) Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$, wenn $\varphi = \arctan y'$ der Winkel der Tangente mit der $x-$ Achse ist.

(d) Kontrollieren Sie, daß $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

1999 - 03 - 10

2. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

Stellen Sie bei den uneigentlichen Integralen in den Übungen (9) – (12) fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall! Machen Sie jeweils eine Skizze!

(9) (a) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ (b) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(10) (a) $\int\limits_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ (b) $\int\limits_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$

(11) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in]-\pi,\pi[$, $x = 2\arctan t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, oder die Abschätzung $0 < \sin x < x$, $0 < x < 1$.

(12) $\int_0^1 x \arccos x \,\mathrm{d}x$

Hinweis: Dieses Integral wird nach partieller Integration uneigentlich. Die Substitution $x = \sin t$ macht das Integral wieder eigentlich.

(13) Die Euler'sche Gammafunktion ist definiert durch $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, $x > 0$.

Zeigen Sie: (a) $\Gamma(1) = 1$; (b) $\Gamma(3) = 2$; (c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$; (d) $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hinweise: Zu (b,c): partiell integrieren! Zu (d): $n! =$ [Produkt aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und $n] = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. (0!, das "leere Produkt", wird als 1 definiert. Dann ist (a) in (d) enthalten.)

Bemerkung: Das Integral für $\Gamma(x)$ ist ein konvergentes uneigentliches Integral 1. Art, wenn $x \in [1,\infty[$, und ist ein konvergentes uneigentliches Integral 1. und 2. Art, wenn $x \in]0,1[$. Wie könnte man sich das überlegen?

(14) Berechnen Sie zu $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + \mathrm{i}$ jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag, und Argument, sowie $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, $\frac{z}{w}$. Skizze!

(15) Überprüfen Sie für z, w aus Übung (14) die Gleichungen $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ und $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$, $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

(16) Stellen Sie $z = -1.3 - 1.7\,\mathrm{i}$ in der Form $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dar und berechnen Sie damit z^9 !

(Z2) Bestimmen Sie (a) $\int\limits_0^{\infty}\Big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+a}\Big)\mathrm{d}x\ ,\ \ a>0;$ (b) $\int\limits_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\Big)\mathrm{d}x$

1999 - 03 - 17

3. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(17) Es seien $z_n = \left(1+\frac{2\mathrm{i}}{n}\right)^n$ und $z = \lim_{n\to\infty} z_n$. Berechnen Sie $|z-z_n|$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

(18) (a) Schreiben Sie die Zahlen $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $z_2 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ in der Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.
(b) Berechnen Sie $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, und $\operatorname{Im} z$ für $z = \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\pi/4}$.

(19) Welche Gestalt haben folgende parametrisierte Kurven für feste $a > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$?
(a) $z(t) = z_0 + t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$, $t \geq 0$; (b) $z(t) = z_0 + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(20) Stellen Sie $\cos^3\varphi$ durch $\cos\varphi$ und $\cos 3\varphi$ dar und berechnen Sie so $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$!
(Vgl. auch Üb. (75d) zu Math. A.)

(21) Berechnen Sie $\int_0^3 \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\sin 2x = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

(22) Stellen Sie $\sin 5\varphi$ als Linearkombination von $\sin^k\varphi$, $k = 1, \ldots, 5$, dar.
<u>Hinweise:</u> $\sin 5\varphi = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\varphi} = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^5 = \operatorname{Im}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^5$; $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$

(23) Lösen Sie die Gleichung $z^2 + (2+4\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$.

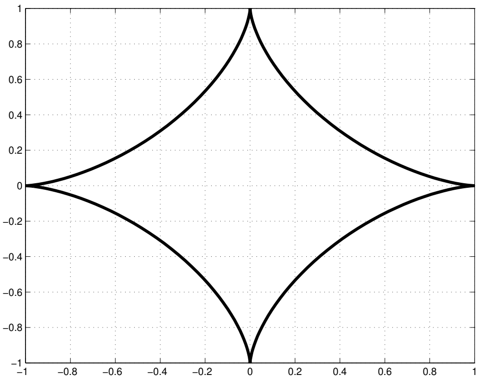
(24) Lösen Sie die Gleichung $z^6 = 7+8\mathrm{i}$. Bestimmen Sie z_0 ! Wie lassen sich die übrigen Lösungen z_k, $k = 1, \ldots, 5$, durch z_0 ausdrücken? Skizze!

(Z3) Für welche komplexen Zahlen w gilt $\mathrm{e}^w = z$, wenn $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gegeben ist? Folgern Sie $w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$.

1999 - 03 - 24

4. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(25) Die *Astroide* (ἄστρον = Stern) ist durch $\vec{x} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}, \|\dot{\vec{x}}\|, y', \ddot{\vec{x}}, \kappa,$ und M (a) allgemein, sowie (b) speziell für $t = \frac{\pi}{4}$.



Astroide

(26) (a) Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Astroide.

(b) Parametrisieren Sie den Teil im ersten Quadranten (d.h. $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$) nach der Bogenlänge.

(27) Wenn der Kreis $x^2 + (y - a)^2 \le a^2$ auf der $x-$Achse ohne Schlupf abrollt, so beschreibt der ursprünglich in $(0, a(1 - \lambda)),\quad 0 < \lambda < 1,$ gelegene Punkt R eine *verkürzte Zykloide* oder *Trochoide* (τροχός = Rad).

(a) Zeigen Sie, daß ihre Gleichung durch $\vec{x} = a \begin{pmatrix} t - \lambda \sin t \\ 1 - \lambda \cos t \end{pmatrix}$ gegeben ist.

(b) Berechnen Sie ihre Krümmung für $t = 0$.

(28) Ein Straßenstück beschreibt einen Viertelbogen in der Form einer Klothoide

$$x(s) = \int_0^s \cos \frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad y(s) = \int_0^s \sin \frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad 0 \le s \le S,$$

und hat also im Punkt $\big(x(S), y(S)\big)$ eine senkrechte Tangente, d.h. $\dot{x}(S) = 0$.

(a) Bestimmen Sie a und S so, daß für $s = S$ der Krümmungsradius $10\,\mathrm{m}$ beträgt.

(b) Wie lang ist das Straßenstück?

(29) Eine in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegebene Kurve erfüllt $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$, wobei φ die Rolle des Parameters t spielt. Leiten Sie aus dieser Darstellung durch Differenzieren die Formeln (a) für das Bogenelement $\mathrm{d}s = \|\dot{\vec{x}}\|\,\mathrm{d}\varphi$ und (b) für die Krümmung κ her.

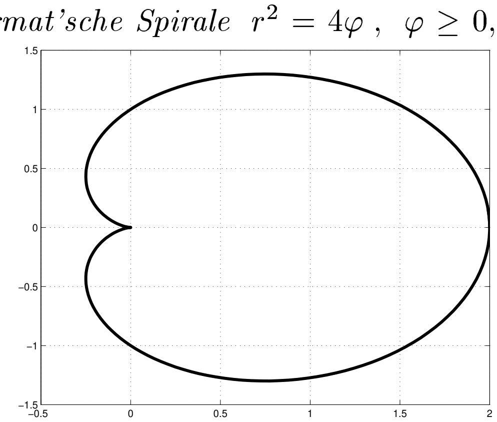
(30) Berechnen Sie den Winkel γ, mit dem die *Fermat'sche Spirale* $r^2 = 4\varphi$, $\varphi \ge 0$, den Einheitskreis schneidet.

(31) Bestimmen Sie die Punkte der *Herzlinie* oder *Kardioide* (καρδία = Herz) $r = 1 + \cos \varphi$ mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

<u>Hinweis:</u> Tangente horizontal $\Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0$

Tangente vertikal $\Leftrightarrow y' = \infty \quad \Rightarrow \dot{x} = 0$

(32) Zeigen Sie, daß für den Krümmungsradius ϱ der Kardioide gilt $\varrho^2 = \frac{8}{9} r$.



Kardioide

(Z4) Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve nennt man ihre *Evolute.* Zeigen Sie, daß man die Krümmungsmittelpunkte der Zykloide erhält, indem man von P aus in Richtung Q das Doppelte der Länge $\overline{PQ}$ abträgt, und daß die Evolute der Zykloide eine verschobene Zykloide ist.

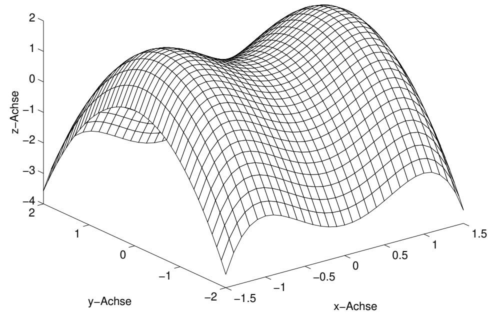
1999 - 04 - 21

5. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(33) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $z = \dfrac{\sin s}{t^2} + \dfrac{t^2}{s} + s^t$.

(34) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen nach $x, y, z, a,$ und b von $u = f(x, y, z, a, b) = axy - z \arcsin(b + \cos a)$.

(35) Es sei $f(x, y) = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$. Bestimmen Sie die Tangentialebenen an $z = f(x, y)$ (a) in $\vec{x}_0 = \binom{1/2}{1}$, (b) in $\vec{x}_1 = \binom{0}{0}$, (c) in $\vec{x}_2 = \binom{1}{0}$.



$z = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$

(36) In einem Dreieck wurden die zwei Seiten x, y sowie der eingeschlossenen Winkel α gemessen. Es ergab sich $x = 100\,\mathrm{m}$, $y = 200\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30°$. Bestimmen Sie den möglichen Fehler $\mathrm{d}A$ bei der Flächenberechnung $A = \frac{1}{2} xy \sin\alpha = 5\,000\,\mathrm{m}^2$, wenn die Messungen nur auf $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = 0.5\,\mathrm{m}$, sowie $\mathrm{d}\alpha = 1°$ genau sind!

Hinweis: Warum sollte man in Radiant rechnen?

(37) Bei der Verformung eines Kegels vergrößert sich sein Grundkreisradius $r = 30\,\mathrm{cm}$ auf $30.1\,\mathrm{cm}$ und verringert sich seine Höhe h von $60\,\mathrm{cm}$ auf $59.5\,\mathrm{cm}$. Berechnen Sie die exakte Volumenänderung sowie die lineare Näherung $\mathrm{d}V$.

(38) Es sei $z = f(x, y) = xy - y \ln x$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d} f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(39) Es seien $z(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^2$, $x(u, v) = u^2 v$, $y(u, v) = u + v^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(40) Es seien Funktionen der folgenden Form gegeben: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1(s, t)$, $x_2(t, u)$, $x_3(s)$, $x_4(s, u)$, $u(y, s)$. Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ mit der Kettenregel aus? Skizzieren Sie das "Baumdiagramm"!

(Z5) $p, v,$ und T bezeichnen Druck, Molvolumen, und Temperatur eines Gases, das der Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung $\left(p + \dfrac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$ genügt. ($a, b,$ und R sind Konstanten.)

(a) Berechnen Sie den *thermischen Ausdehnungskoeffizienten* $\alpha = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial T}$ (d.h. die Volumszunahme durch Erwärmung bei konstantem Druck) durch Differenzieren der Zustandsgleichung. (Diese definiert die Funktion $v(p, T)$ "implizit".)

(b) Wie stark dehnt sich das Volumen V von $1\,\ell$ Sauerstoff bei $0°$ und $1\,\mathrm{Atm}$ (= Luftdruck) aus, wenn man die Temperatur um $1°$ erhöht?

Hinweis: $\mathrm{d}V = V \cdot \alpha \cdot \mathrm{d}T$; $a \approx 1.36\,[\mathrm{Atm}\,\ell^2\,\mathrm{Mol}^{-1}]$, $b \approx 0.032\,[\ell\,\mathrm{Mol}^{-1}]$, $v \approx 22.4\,[\ell\,\mathrm{Mol}^{-1}]$, $R =$ Gaskonstante $\approx 0.083\,[\mathrm{Atm}\,\ell\,\mathrm{grad}^{-1}\mathrm{Mol}^{-1}]$

1999 - 04 - 28

6. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(41) Rechnen Sie $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ in Polarkoordinaten um und überprüfen Sie die Formel am Beispiel $z = f(x,y) = 2xy = 2r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi = r^2 \sin 2\varphi$.

(42) Das elektrische Potential V sei durch $V(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ gegeben. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von V im Punkt $\vec{x}_0^T = (0,-4,3)$ in Richtung $\vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie das Ergebnis näherungsweise, indem Sie $V(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für kleines ϵ berechnen, z.B. für $\epsilon = \frac{1}{100}$.

(43) Es seien $F(x,y) = xy$ und die neun Punkte (i,j), $i,j \in \{-1,0,1\}$ gegeben.

(a) Zeichnen Sie die (drei) Niveaulinien von F, die durch diese Punkte gehen!

(b) Zeichnen Sie die Gradienten in diesen neun Punkten ein!

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F, \binom{1}{1}, \vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$.

(44) Berechnen Sie die Richtungsableitungen von $F(x,y,z) = xy+yz+zx-1$ in Richtung der Tangentialvektoren an die Kurven (a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$ (b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t^2-t \end{pmatrix}$, d.h. jeweils $\mathrm{RA}\big(F, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)/\|\dot{\vec{x}}(t)\|\big)$, und erklären Sie das Ergebnis in (b).

<u>Hinweis zu (b):</u> Die Kettenregel ergibt $F\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot} = \|\dot{\vec{x}}(t)\| \cdot \mathrm{RA}\big(F, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)/\|\dot{\vec{x}}(t)\|\big)$.

(45) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 3$ im Punkt $(1,3,-2)$ auf zwei Arten.

(46) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an **die** Niveaufläche von $F(x,y,z) = xy^3 + yz^3 + zx^3$, in der der Punkt $\vec{x}_0^T = (1,-1,1)$ liegt.

(47) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ für $z = x^y$.

(48) Berechnen Sie f_x, f_z, f_{xz}, f_{zx}, und f_{zz} für $f(x,y,z) = y \arccos z + \mathrm{sh}(xz)$.

(Z6) In der Niveaufläche $F(x,y,z) = c$ werde jeweils x als Funktion von y,z; y als Funktion von x,z; und z als Funktion von x,y betrachtet. Zeigen Sie, daß dann gilt: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$

<u>Hinweis:</u> $x\big(y(x,z),z\big) = x$ etc.

1999 - 05 - 05

7. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(49) Zeigen Sie, daß $f(x,y) = x^2 - y^2$ harmonisch ist (a) direkt, (b) in Polarkoordinaten $\big(f(r,\varphi) = r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = r^2\cos 2\varphi\big)$.

(50) Zeigen Sie, daß $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{\|\vec{x}\|}$ (definiert für $\vec{x} \neq \vec{0}$) harmonisch ist.

(51) Rechnen Sie $f_{xx} - f_{yy}$ in Polarkoordinaten um! Verwenden Sie zur Einübung (im Gegensatz zur Vorlesung) Indices zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen.

Hinweis: Leiten Sie wie in der Vorlesung Formeln für $f_{xx}, r_x, \varphi_x, r_{xx}, \varphi_{xx}$ etc. her.

(52) Rechnen Sie Δf für $f(x,y)$ in die Koordinaten $s = x+y,\ t = xy$ um und testen Sie das Ergebnis an $f(x,y) = x^2y + xy^2$!

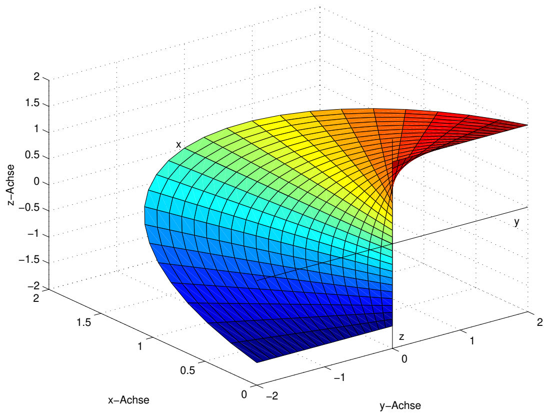
Hinweis: Wenn r,φ durch s,t ersetzt werden, so folgt aus S. 30 der Vorlesung die Formel $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}\cdot\|\nabla s\|^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\cdot\langle\nabla s,\nabla t\rangle + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\|\nabla t\|^2 + \dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\Delta s + \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\Delta t.$

(53) Wenn eine Membran auf dem Kreis $x^2+y^2 = R^2$ eben eingespannt ist und unter der Last $p(x,y)\,[\mathrm{N/m^2}]$ steht, so erfüllt ihre Durchbiegung $f(x,y)\,[\mathrm{m}]$ die Gleichungen $\tau\Delta f = -p$ und $f(\vec{x}) = 0$ für $\|\vec{x}\| = R$. Bestimmen Sie a,b so, daß $f(r,\varphi) = ar^2 + b$ im Fall einer Gleichlast $p =$ konstant. Wie groß ist die maximale Durchbiegung, wenn $\tau =$ Membranspannung $= 1\,[\mathrm{N/m}]$, und Gesamtlast $= p\cdot R^2\pi = 1\,[\mathrm{N}]$?

(54) Zeigen Sie durch Differenzieren, daß die Wendelfläche $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x},\quad x > 0$, die *Minimalflächengleichung*

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$$ erfüllt!

Bemerkung: Die Umrechnung auf Polarkoordinaten empfehle ich nur hartgesottenen RechnerInnen!



$z = \arctan\frac{y}{x} = \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x > 0$

(55) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 + x^2$ am Kreis $x^2+y^2 \le 1$.

Hinweis: Die Gleichung $f(x,y) = 4x\big((x+\frac{1}{8})^2 + y^2 - \frac{1}{64}\big)$ zeigt, wo f positiv bzw. negativ ist.

(56) Eine oben offene, rechteckige Schachtel soll ein Volumen von $32\,\mathrm{dm}^3$ besitzen. Bestimmen Sie die Maße dieser Schachtel so, daß ihre Oberfläche minimal wird!

(Z7) Die Differentialgleichung der Torsionsfunktion ist $\Delta\psi = -2$.

(a) Zeigen Sie, daß $\psi(r,\varphi) = \dfrac{a}{2}(2R\cos\varphi - r)\Big(\dfrac{r}{a} - \dfrac{a}{r}\Big)$ eine Lösung dieser Gleichung ist! ($0 < a < R$ sind Konstante und r,φ sind Polarkoordinaten.)

(b) Wo ist $\psi = 0$? (Dies ist die Begrenzungslinie des verdrillten Querschnittes, der hier einer Welle mit halbkreisförmiger Keilnut entspricht.)

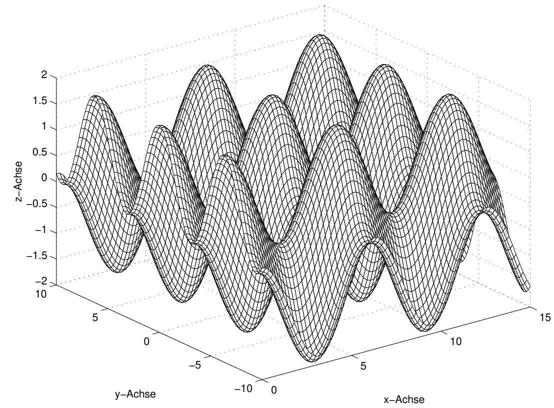
1999 - 05 - 12

8. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(57) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!

(58) Bestimmmen Sie die Extrema und die Sattelpunkte von $f(x,y) = \cos x + \cos y$.

<u>Hinweis:</u> $\cos k\pi = (-1)^k$; unterscheiden Sie für $P_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ die 3 Fälle 1) k, l gerade; 2) k, l ungerade; 3) eines gerade, eines ungerade!



$z = \cos x + \cos y$

(59) Bestimmen Sie die zwei stationären Punkte von $f(x,y,z) = 2x + x\mathrm{e}^{-y^2-z^2} - x^3$ und klassifizieren Sie sie mit dem Hurwitz-Kriterium.

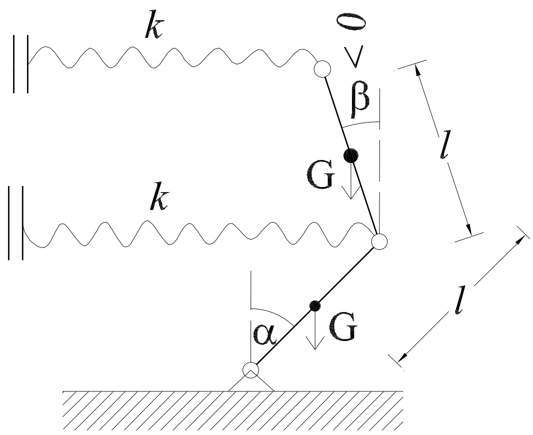
(60) Lösen Sie Übung (56) als Extremwertaufgabe mit einer Nebenbedingung, d.h. bestimmen Sie die Extrema von $xy+2xz+2yz$ unter der Nebenbedingung $xyz = 32$.

(61) Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $x+y=1, \quad x^2+2y^2+z^2=1$ mit dem größten bzw. kleinsten Abstand vom Ursprung, indem Sie eine Extremwertaufgabe mit zwei Nebenbedingungen lösen!

(62) Für die gezeichnete Stabkette ist die potentielle Energie durch

$$U(\alpha,\beta) = G\frac{l\cos\alpha}{2} + G\Big(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\Big) + \frac{k}{2}(l\sin\alpha)^2 + \frac{k}{2}(l\sin\alpha + l\sin\beta)^2$$

gegeben. Die vertikale Gleichgewichtslage ist *stabil* (d.h. knickt nicht aus), wenn U für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum hat, d.h. wenn $\mathrm{H}\,U(0,0)$ positiv definit ist. Wie groß muß $c = kl/G$ sein, damit das der Fall ist?



Stabkette

(Z8) Ein Wassergraben habe einen Querschnitt von der Form eines gleichschenkligen Trapezes mit gegebenem Flächeninhalt F. Bestimmen Sie die Form dieses Trapezes so, daß die Summe der drei benetzten Seiten (und damit die Reibung des strömenden Wassers) ein Minimum wird!

1999 - 05 - 19

9. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(63) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ für das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ \frac{y}{x}\sin z \\ \arctan(x+z) \end{pmatrix}$.

(64) Zeigen Sie (a) $\operatorname{div}(f\vec{v}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{v}\rangle + f\operatorname{div}(\vec{v})$ und (b) $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = \operatorname{grad} f \times \vec{v} + f\operatorname{rot}\vec{v}$ für eine skalare Funktion f und ein Vektorfeld $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

(65) Zeigen Sie $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ für ein Vektorfeld $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

(66) Durch $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} z\cos(xz) \\ 2yz \\ x\cos(xz) + y^2 - 2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, daß $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(67) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß $\vec{v}$ nicht wirbelfrei ist! Versuchen Sie, wie in Aufgabe (66) ein Potential zu bestimmen, und stellen Sie fest, an welcher Stelle der Versuch mißlingt!

(68) Zeigen Sie, daß $\vec{w}(\vec{x}) = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a(y^2+z^2) \\ b(x^2+z^2) \\ c(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ ein Vektorpotential zu $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist (für konstante a, b, c). Was ist dann $\operatorname{div}\vec{v}$?

(69) Schreiben Sie die Definition der 4 Begriffe "quellenfrei", "wirbelfrei", "konservativ" (im unpolitischen Sinn), und "hat ein Vektorpotential" an. Welche Zusammenhänge bestehen?

(70) Wie früher sei $\varphi(x,y) = \begin{cases} (\pi +)\arctan\dfrac{y}{x} & : \pm x > 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & : x = 0,\ \pm y > 0 \end{cases}$. Begründen Sie die folgenden Aussagen!

(a) φ ist an der negativen $y-$Achse unstetig.

(b) Außerhalb der negativen $y-$Achse ist $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi = \binom{-y/(x^2+y^2)}{x/(x^2+y^2)}$.

(c) Wenn im $\mathbb{R}^3$ gerechnet wird, ist $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \\ 0 \end{pmatrix}$ außerhalb der $z-$Achse definiert und dort $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$.

(d) Wenn $\vec{v}$ ein Potential hätte, müßte es die Form $\varphi + C$ haben und wäre daher nicht überall (außerhalb der $z-$Achse) differenzierbar.

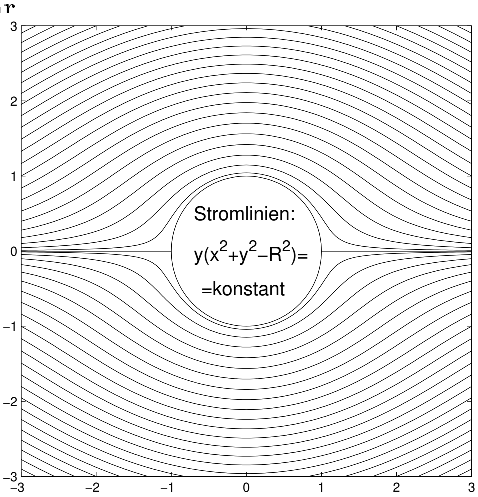
(e) Das ist kein Widerspruch zu Satz 1 in §21 der Vorlesung.

(Z9) Das Potential einer inkompressiblen, wirbelfreien Strömung um den Zylinder $x^2 + y^2 \leq R^2$ ist durch $f(x,y,z) = c\Big(x + \dfrac{R^2 x}{x^2+y^2}\Big)$ gegeben. ($c =$ Grenzgeschwindigkeit in Richtung der $x-$Achse im Unendlichen.)

(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \operatorname{grad} f$!

(b) Zeigen Sie $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

(c) Skizzieren Sie $\vec{v}$ an der Oberfläche des Zylinders $x^2 + y^2 = R^2$!



Umströmter Zylinder $x^2 + y^2 = R^2$, $\quad R = 1$

1999 - 06 - 02

10. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(71) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ xyz \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}_0)$, $\mathrm{J}\vec{v}$, $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$. Was ist

die lineare Näherung von $\vec{v}(\vec{x})$ für $\vec{x} = \vec{x}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(72) Berechnen Sie $\dfrac{\partial(v_1, v_2, v_3)}{\partial(x, y, z)} = \det(\mathrm{J}\vec{v})$ für $\vec{v}$ aus (71). Wie groß ist die Volumsänderung eines kleinen Quaders bei $\vec{x}_0$ unter der Abbildung $\vec{v}$?

(73) Es sei $\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 + y_3^2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, daß $\mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v}) = \mathrm{J}\vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}$.

(74) Zeigen Sie, daß die Kugelkoordinaten $\varrho = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vartheta = \arccos \dfrac{z}{\varrho}$, $\varphi = (\pi +) \arctan \dfrac{y}{x}$ orthogonal sind, indem Sie nachrechnen, daß die Gradienten $\nabla \varrho = \dfrac{\vec{x}}{\varrho}$, $\nabla \vartheta = \dfrac{1}{r\varrho^2} \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$, $\nabla \varphi = \dfrac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) paarweise aufeinander senkrecht stehen.

(75) Berechnen Sie aus den Formeln in Aufgabe (74) $\left| \dfrac{\partial(\varrho, \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} \right|$.

(76) (a) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \vartheta, \varphi)}$ durch Differenzieren aus $x = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = \varrho \cos\vartheta$.

(b) Kontrollieren Sie das Ergebnis mittels Aufgabe (75) und Satz 4 in §21.

(77) Berechnen Sie die Partialsummen sowie die Summe der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots$.

<u>Hinweise:</u> $a_k = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\Big)$; schreiben Sie $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ in der Form $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ an und heben Sie weg!

(78) Bestimmen Sie die Partialsummen s_n und—im Fall der Konvergenz—die Summe S der geometrischen Reihen (a) $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots$; (b) $1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots$; und (c) $1 - 2 + 4 - 8 + - \cdots$.

(Z10) Überlegen Sie, daß sich die Niveauflächen der *Zylinderkoordinaten* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = (\pi +) \arctan \dfrac{y}{x}$, $z = z$ senkrecht schneiden, d.h. daß Zylinderkoordinaten orthogonal sind. Bestimmen Sie auch die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)}$.

1999 - 06 - 09

11. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(79) Zeigen Sie, daß die Reihen (a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-33\sin n}{12\sqrt{n}-17n^2}$ divergieren!

(80) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ konvergiert!

(81) Untersuchen Sie mit dem Integralkriterium, ob die Reihe in Übung (80) konvergiert.

(82) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ und (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3$

Hinweis: Erweitern Sie $(a-b)$ mit $(a+b)$ und verwenden sie das Vergleichskriterium!

(83) Untersuchen Sie mit dem Integralkriterium die Konvergenz der Reihen (a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ und (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. Schätzen Sie in (b) die Summe nach oben ab! (Siehe auch Übung 9).

(84) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n+9\sqrt{n}}{2n^3-1}$.

(85) Zeigen Sie mit dem Integralkriterium, daß $1.0625=\frac{17}{16}\le\zeta(4)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\le\frac{53}{48}\approx$ 1.104.

(86) Bestimmen Sie mit dem Integralkriterium die Anzahl der Reihenglieder, die zu summieren sind, um $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ auf 10^{-3} angeben zu können.

(Z11) Zeigen Sie, daß

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Wieviele Reihenglieder sind in der letzten Reihe zu summieren, um S auf 10^{-3} angeben zu können?

Hinweis: Schätzen Sie $\int\limits_N^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$ durch $\int\limits_N^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ ab!

1999 - 06 - 16

12. Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

(87) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ bedingt konvergent ist! Bis zu welchem n muß man die Reihe summieren, um die Summe der Reihe auf 0.1 genau angeben zu können?

(88) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ absolut konvergiert! Bis zu welchem n muß man die Reihe summieren, um damit die Summe $(= \mathrm{e}^{-1})$ auf 10^{-20} genau berechnen zu können?

(89) Welche Voraussetzungen des Leibnizkriteriums sind für die Reihe $\frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} - \frac{1}{8} + - \cdots$ erfüllt? Welche nicht? Ist die Reihe konvergent?

Hinweis zur letzten Frage: $s_n = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots \pm \frac{1}{n}\right] + \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ oder } \frac{1}{n-1}\right]$

(90) Zeigen Sie: (a) Die Reihe $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ erfüllt $s_2 = \frac{1}{2} < S < \frac{5}{6} = s_3$.

(b) Die daraus durch Umordnung entstandene Reihe $\tilde{S} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + - \cdots$ erfüllt (mit dieser Klammerung) auch das Leibnizkriterium und daher ist $\tilde{s}_2 = \frac{5}{6} < \tilde{S} < \frac{4}{3} = \tilde{s}_1$ und $S \neq \tilde{S}$.

Hinweis zu (b): $\tilde{S}$ hat die Form $\tilde{S} = \cdots - \frac{1}{2k} + \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3}\right) - \frac{1}{2k+2} + \cdots$.

Bemerkung: Bei bedingt konvergenten Reihen kann die Summe durch Umordnung jeden beliebigen Wert annehmen gemäß dem Spruch "*Durch Umordnung kann jede beliebige Unordnung erzeugt werden*".

Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz der folgenden 3 Reihen:

(91) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ (92) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$ (93) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(94) Bestimmen Sie mit dem Quotientenkriterium die Menge der $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -4$, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2x+3}{x+4}\right)^n$ konvergiert!

(Z12) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2} (\operatorname{cth} n - \operatorname{th} n)$ (mit $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$) konvergiert. Überprüfen Sie, daß (bzw. überlegen Sie, warum) diese Reihe in der angegebenen Form mit dem Computer nicht befriedigend angenähert werden kann!

1999 - 06 - 23

13. und letztes Übungsblatt zu Mathematik B, SoSe 1999

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden vier Potenzreihen:

(95) (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n n^2}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

(96) (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^n x^n}{n!}$

(97) Berechnen Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ und bestimmen Sie ihr Konvergenzintervall M! Was ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$ (vgl Üb. 91)?

Hinweis: Differenzieren Sie die geometrische Reihe und multiplizieren Sie sie mit x.

(98) Berechnen Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ und bestimmen Sie ihr Konvergenzintervall M!

(99) Stellen Sie $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ durch eine Reihe dar und bestimmen Sie die Summe dieser alternierenden Reihe bis auf 10^{-4}.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ gilt. Dividieren Sie diese Gleichung durch x und integrieren Sie gliedweise!

(100) Entwickeln Sie $f(x) = x^3 - 7x^2 + 5x + 12$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 1$ und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren!

(101) Berechnen Sie die ersten zwei nicht verschwindenden Glieder der MacLaurinreihe von $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

(102) Entwickeln Sie $\ln x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 2$! Was ist das Konvergenzintervall dieser Reihe?

(Z13) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\, \mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(1)$ auf 10^{-3} genau!

1999 - 06 - 29

Einige zusätzliche Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

(P1) Bestimmen Sie die MacLaurinreihen von $\operatorname{sh} x$ und $\operatorname{ch} x$ aus der MacLaurinreihe für e^x mit den Formeln $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

(P2) Bestimmen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{2^{-n}}{n!} + \dfrac{n2^n + 3^n}{n6^n} + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\Big)$. (Ergebnis: $\sqrt{\mathrm{e}} + \ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$)

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Formeln der Vorlesung!

(P3) Berechnen Sie $\cos\frac{1}{10}$ mit der MacLaurinreihe auf 10^{-16} genau!
(Ergebnis: $0.995\,004\,165\,278\,025\,7937 \pm 10^{-16}$)

(P4) Berechnen Sie die ersten drei nicht verschwindenden Glieder der MacLaurinreihe von $f(x) = \tan x$ mit Hilfe der Gleichung $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, d.h. $f' = 1 + f^2$.
(Ergebnis: $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varrho_5(x)$)

(P5) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(\frac{1}{2})$ auf 10^{-5} genau! (Ergebnis: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$, $|x| \leq 1$, $f(\frac{1}{2}) = 0.4872258 \pm 10^{-5}$)

(P6) Berechnen Sie statt mit der Regel von l'Hôpital durch Bestimmung der Taylorpolynome (3. Grades in a, b; 4. Grades in c) von Zähler und Nenner und Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varrho_n(x)}{x^n} = 0$ die Grenzwerte (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\mathrm{e}^{x^2} - \sin x}{\arctan x - \sin x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin x}{\cos x - \sqrt{1-x^2}}$. (Ergebnis: $-\frac{1}{6}$; -7; 6)

(P7) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen? (Ergebnis: 210)

(P8) Wie wahrscheinlich ist es, im Lotto (a) genau 2 Richtige, (b) keine richtige Zahl zu haben? (Ergebnis: 15.15%; 40.05%)

(P9) Beweisen Sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ mittels der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

(P10) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$ durch Integration der binomischen Reihe auf 10^{-2} genau!
(Ergebnis: 0.914847 ± 0.01; wahrer Wert: $0.9096042...$)

(P11) (a) Zeigen Sie, dass der Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen a und b (mit $a \geq b$) durch $U(\epsilon) = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ gegeben ist, wobei $\epsilon^2 = 1 - (b^2/a^2)$. ($\epsilon$ wird *Exzentrizität* der Ellipse genannt; $U(\epsilon)$ heißt *elliptisches Integral.*)

(b) Nähern sie $U(\epsilon)$ durch ein Polynom 4. Grades in ϵ an!

$\big($Hinweis und Ergebnis: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $U(\epsilon) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t$, $U(\epsilon) \approx 2a\pi\big(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{3}{64}\epsilon^4)\big)$

(P12) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2y$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und überprüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren! $\big($Ergebnis: $f(x,y) = 2 + 4(x-1) + (y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + (x-1)^2(y-2)\big)$

(P13) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ um $(0,0)$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung! Überprüfen Sie das Ergebnis durch Verwendung der MacLaurinreihen von $\sqrt{1+x}$ und e^x. $\big($Ergebnis: $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{8}(x^2 + 2xy - y^2) + \varrho_2(x,y)\big)$

(P14) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = x\ln(2x-y)$ um $(1,1)$ bis einschließlich zu den Gliedern 3. Ordnung! $\big($Ergebnis: $f(x,y) = 2(x-1) - (y-1) + (x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - 2(x-1)^2(y-1) + \frac{3}{2}(x-1)(y-1)^2 - \frac{1}{3}(y-1)^3 + \varrho_3(x-1, y-1)\big)$

1999 - 04 - 14

1. Klausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Benützen Sie für Rechnungen die angegebenen Näherungswerte.

(1) Ein Grundstück liegt zwischen einer geraden Straße und einem gewundenen Bach. In Abständen von je 10 m wurde senkrecht von der Straße der Abstand d (auch in m) zum Bach gemessen, und es ergab sich:

x	0	10	20	30	40	50	60
d	0	2	3	7	6	3	0

Bestimmen Sie näherungsweise die Größe des Grundstückes (a) mit der Trapezregel, (b) mit der Simpsonregel.

(2) Bestimmen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation der Kurve $y = x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, um die $x-$Achse entsteht!
Hinweis: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\pi^4 \approx 96$, $\pi^2 \approx 10$

(3) Berechnen Sie $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(1 + 2\ln x)\ln x}$.
Hinweis: $\ln \frac{3}{2} \approx 0.4$

(4) Stellen Sie $\sin^3\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\sin 3\varphi$ dar und berechnen Sie so $\int_0^\pi \sin^3 x \, \mathrm{d}x$.

(5) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -2 + 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie z_0, z_1, z_2 in der Form $a + \mathrm{i}b$ auf eine Dezimalstelle.
Hinweis: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4 + 2\pi/3)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$; $\sqrt{3} \approx 1.8$

(6) Parametrisieren Sie die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \arctan t \\ \ln\sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}$, $t \geq 0$, nach der Bogenlänge!

1999 - 05 - 26

2. Klausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Es sei $z = f(x,y) = \mathrm{e}^{y/x}$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(2) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $x^3 + y^3 + z^3 = 8$ im Punkt $(2, -1, 1)$ auf zwei Arten.

(3) Rechnen Sie f_{xy} in Polarkoordinaten um! (In der Endformel sollten x, y nicht mehr vorkommen.)

(4) Bestimmen und klassifizieren Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$.

(5) Bestimmen Sie die (sechs) Extrema von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + 3y^2 = 4$. (Sie brauchen die Extrema nicht zu klassifizieren.)
Hinweis: $\sqrt{32/27} \approx 1.1$

(6) Durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^{-xz} \\ z/y \\ x\mathrm{e}^{-xz} - 2 + \ln y \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld gegeben. Zeigen Sie, daß $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und berechnen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$, d.h. f mit $\nabla f = \vec{v}$.

1999 - 06 - 30

3. Klausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Es sei $\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 - y_1^2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v}) = \mathrm{J}\vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}$.

(2) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{15n^{3/2}+12n}$.

(3) Bestimmen Sie mit dem Integralkriterium die Anzahl der Reihenglieder, die zu summieren sind, um $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ auf 10^{-2} angeben zu können.

(4) Zeigen Sie (mit dem Vergleichs- oder dem Integralkriterium), dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ absolut konvergiert! Bis zu welchem n muß man die Reihe summieren, um damit die Summe $(= -\frac{\pi^2}{12})$ auf 10^{-1} genau berechnen zu können?

(5) Berechnen Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$ und bestimmen Sie ihr Konvergenzintervall M!

(6) Entwickeln Sie $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 3$! (Sie brauchen keine Restgliedabschätzung durchzuführen.)

1999 - 11 - 03

1. Wiederholungsklausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Alle 6 Aufgaben können Ihnen angerechnet werden. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Benützen Sie für Rechnungen die angegebenen Näherungswerte.

(1) Berechnen Sie die Oberfläche des Ellipsoides, das bei Rotation von $y = f(x) = \sqrt{1-2x^2}$, $|x| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, um die $x-$ Achse entsteht.
Hinweis: $\operatorname{ch}^2 u = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2u + 1)$; $\operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2 \operatorname{sh} u \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1}$; $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,)$; $2\pi + \sqrt{2}\,\pi \ln(1+\sqrt{2}\,) \approx 10.2$

(2) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int\limits_0^\infty \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1 \right) \mathrm{d}x$.

(3) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x} \cos 2x \,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Euler'sche Formel! ($\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.2$)

(4) Parametrisieren Sie die Astroide $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, nach der Bogenlänge!

(5) Es seien $z(x,y) = x^3 + 3x^2 y + y^2$, $x(u,v) = u^2 v$, $y(u,v) = u + v^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(6) Berechnen Sie f_x, f_z, f_{xz}, f_{zx}, und f_{zz} für $f(x,y,z) = y^x + x \arctan z$.

2. Wiederholungsklausur zu 'Mathematik B', SoSe 1999

Alle 6 Aufgaben können Ihnen angerechnet werden. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Zeigen Sie $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ für ein Vektorfeld $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

(2) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = 4x^3 + 4y^3 - 3x - 3y$ und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!

(3) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$ der Kugelkoordinaten $x = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \varrho\cos\vartheta$.

(4) Bestimmen Sie mit dem Integralkriterium die Anzahl N der Reihenglieder, die zu summieren sind, um $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ auf $\frac{1}{10}$ genau angeben zu können!

Hinweis: Bestimmen Sie N so, dass $S - s_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}} \leq \dfrac{1}{10}$.

(5) Bestimmen Sie mit dem Quotientenkriterium die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-7)^n}{3n+1}$ konvergiert! Vergessen Sie nicht, die Randpunkte separat zu untersuchen!

(6) Berechnen Sie die vier ersten Glieder der Taylorreihe von $f(x) = 5 + x^2 \ln x$ um $x_0 = 1$!