1. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(1) (a) Schreiben Sie § 10, Satz 3, 3), S. 87, des blauen Skriptums auf die Tafel!

(b) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{2}{3}\arcsin(x^{3/2})\right)' = \sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$ und berechnen Sie damit $\int\limits_0^{1/\sqrt[3]{4}} \sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}\,\mathrm{d}x$! Was sind hier f, Φ, a, b von (a)?

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale! Machen Sie bei den bestimmten Integralen eine Skizze!

(2) (a) $\displaystyle\int \left(\frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_0^{\pi} t^2 \cos t\,\mathrm{d}t$

(3) (a) $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{\sqrt{1+3\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin y\,\mathrm{d}y$ (Zusatzfrage: Wie lässt sich dieses Integral mittels einer Fläche unter dem Sinus darstellen?)

(4) (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{a+7}{a^2-a-6}\,\mathrm{d}a$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2a-1}{a^2-a-6}\,\mathrm{d}a$

Hinweis: Partialbruchzerlegung in (a), substituieren in (b)!

(5) (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t$

Hinweis zu (b): $t^2+1 = t^2+2t+3-(2t+2)$

(6) (a) $\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

Hinweis zu (d): $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$

(7) $\int \sqrt{4x-x^2-3}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: Quadratisch ergänzen, $u = x-2$, Winkelfunktionen substituieren

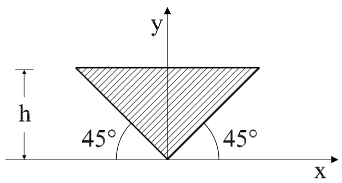
(8) Berechnen Sie $\int\limits_{\sqrt{2}-2}^{0} \sqrt{x^2+4x+2}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2-1}$. Nach der Substitution $u = \operatorname{ch} v$ werden die Gleichungen $\operatorname{sh}^2 v = \frac{1}{2}(-1+\operatorname{ch} 2v)$, $\operatorname{sh} 2v = 2\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v$ und $\operatorname{arch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ verwendet.

(Z1) Aus einem Überlauf von der Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks der Höhe h fließt Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g(h-y)}$ (Ausflussgesetz von Torricelli). Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Sekunde! Was ergibt sich für $h = 3\,\mathrm{dm}$?

<u>Hinweis:</u> $Q = \int\limits_0^h 2y\sqrt{2g(h-y)}\,\mathrm{d}y$

$g \approx 9.81\,\mathrm{m/sec}^2$



2018 - 03 - 14

2. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(9) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $y = 2x - 4$ eingeschlossen wird, durch Integration (a) nach x; (b) nach y.

(10) Bestimmen Sie die Volumina, die entstehen, wenn die Kurve $y = \mathrm{e}^x$, $0 \le x \le 1$, (a) um die $x-$Achse, (b) um die $y-$Achse rotiert.

Hinweis zu (b): Schreiben Sie 1 als Faktor ins Integral.

(11) (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le 1$.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche, die entsteht, wenn die Kurve in (a) um die $x-$Achse rotiert!

(12) (a) Zeichnen Sie den Graph von $y = \mathrm{e}^x$ für $x \le 0$.

(b) Welche Fläche schließt der Graph mit der $x-$Achse ein?

(c) Welches Volumen entsteht, wenn die Kurve um die $x-$Achse rotiert?

(d) Wie groß ist die entstehende Oberfläche?

Hinweis zu (d): Substituiere etwas, wovon die Ableitung als Faktor im $\int$ steht!

Stellen Sie bei den uneigentlichen Integralen in den Übungen 13, 14 fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall! Machen Sie jeweils eine Skizze!

(13) (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)(x+2)}$

Hinweis zu (c): $\ln\alpha - \ln\beta = \ln\frac{\alpha}{\beta}$

(14) (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Zusatzfrage: Wie hängt das Integral in (b) mit Aufgabe 12 (b) zusammen?

(15) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{3x^2 y}{\sqrt{1+x^3}}$ zum Anfangswert $y(0) = 1$!

(16) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = 2x^2 t\,\mathrm{e}^{t^2}$ zum Anfangswert $x(0) = 1$! In welchem Intervall ist $x(t)$ definiert? Was passiert am Rand dieses Intervalls?

(Z2) Untersuchen Sie, welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergent sind, und berechnen Sie diese!

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ (d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ (e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$ (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)\ln x}$

2018 - 03 - 21

3. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(17) Lösen Sie die logistische Differentialgleichung $\dot{x} = x(2-x)$ zum Anfangswert $x(0) = 1$. Was passiert für $t \to \infty$? Was ist die Lösung zum Anfangswert $x(0) = 0$?

(18) Ein Stromkabel der Länge $120\,\mathrm{m}$ und mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\mathrm{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\mathrm{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen? (Verwenden Sie $H_0 = 150$ als Startwert für das Newtonverfahren!)

(b) Wie weit hängt das Kabel durch?

(19) Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = x + y$.

(a) Richtungsfeld: Zeichnen Sie in den Punkten (x, y) mit $x = -2, -1, \ldots, 2$, $y = -2, -1, \ldots, 2$ die Steigungen ein!

(b) Kann man in $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$ die Variablen trennen?

(c) Lösung: Überprüfen Sie, dass $y(x) = -1 - x + C\mathrm{e}^x$ Lösungen sind!

(d) Anfangswerte: Bestimmen Sie aus (c) die zwei Lösungskurven $y_{1,2}$ zu $y_1(0) = -1$ und zu $y_2(0) = 0$ und zeichnen Sie sie in das Richtungsfeld.

(20) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Hyperbelschar $A : y^2 - x^2 = C$! Skizze!

(21) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = C \tan x : C \in \mathbb{R}\}$. Skizze!

(22) Berechnen Sie zu $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + \mathrm{i}$ jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag, und Argument, sowie $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, $\dfrac{z}{w}$. Skizze!

(23) Überprüfen Sie für z, w aus Übung 22 die Gleichungen $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ und $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$, $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

(24) (a) Berechnen Sie $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, und $\operatorname{Im} z$ für $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$. Skizze!

(b) Stellen Sie z als $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ dar entsprechend 16.2 im Skriptum. Was sind z_1, z_2, z_3?

(Z3) Ein Stromkabel mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\mathrm{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\mathrm{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen $20\,\mathrm{m}$ durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen?

(b) Wie lang ist das Kabel?

2018 - 04 - 11

4. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(25) Stellen Sie $z = -1.3 - 1.7\,\mathrm{i}$ in der Form $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ dar und berechnen Sie so z^9!

(26) Leiten Sie die Summensätze für $\cos(x-y), \sin(x-y)$ aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$ her!

(27) Stellen Sie $\cos^4\varphi$ durch $\cos k\varphi$, $k = 0, 2, 4$, dar und berechnen Sie so $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x \,\mathrm{d}x$!

(28) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 3x \,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\cos 3x = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$ und $\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 3x \,\mathrm{d}x = \mathrm{Re} \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \,\mathrm{d}x$. Skizze!

(29) Lösen Sie die Gleichung $z^2 + (2 + 4\,\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$.

(30) Zerlegen Sie $P(z) = z^3 + (2 + 3\mathrm{i})z^2 + (4 - 3\mathrm{i})z - 1$ in Linearfaktoren!
(Hinweis: $P(\mathrm{i}) = 0$; verwenden Sie Üb. 29!)

(31) (a) Schreiben Sie $w = -3 + 4\,\mathrm{i}$ in der Form $w = \varrho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^4 = -3 + 4\,\mathrm{i}$. Machen Sie den Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$! Bestimmen Sie z_0! Wie lassen sich die übrigen Lösungen z_1, z_2, z_3 durch z_0 ausdrücken? Skizze!

(32) (a) Warum bilden die Lösungen der Dgl. $y'' + \mathrm{e}^x\,y' + y = 0$ einen Vektorraum?

(b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dgl. $y'' + \mathrm{e}^x\,y' \cdot y = 0$ keinen Vektorraum bilden! Überprüfen Sie dafür, dass $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ eine Lösung ist, $y_2(x) = 2y_1(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$ aber nicht! Wodurch unterscheiden sich die zwei Differentialgleichungen?

(Z4) (a) Berechnen Sie $f(a) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \sin x \,\mathrm{d}x$ für $a > 0$ mittels $\sin x = \mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, vgl. Üb. 28.

(b) Überlegen Sie, dass $\Phi(a) = -\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \dfrac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$ eine Stammfunktion von f ist!

(c) Folgern Sie aus $\lim\limits_{a\to\infty} \Phi(a) = 0$, dass $\Phi(a) = \arctan a - \frac{\pi}{2}$ und $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$.

2018 - 04 - 18

1. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2018

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Berechnen Sie $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2+1}$. Nach der Substitution $u = \operatorname{sh} v$ werden die Gleichungen $\operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2v)$, $\operatorname{sh} 2v = 2 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v$ und $\operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ verwendet.

(2) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$!

(3) Lösen Sie die Differentialgleichung $2yy' = (y^2+1)\tan x$ zum Anfangswert $y(0)=1$.

(4) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Parabelschar $A : y = Cx^2$! Skizze!

(5) Stellen Sie $\sin^5 \varphi$ durch $\sin(k\varphi)$, $k = 1, 3, 5$, dar!

Hinweis: $\sin\varphi = \dfrac{1}{2\mathbf{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})$

(6) Lösen Sie die Gleichung $z^4 = -16$ in $\mathbb{C}$! Bestimmen Sie z_0, z_1, z_2, z_3!

Hinweis: $w = -16 + 0\,\mathrm{i} = \varrho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$

2018 - 04 - 25

5. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(33) Lösen Sie die Differentialgleichungen (a) $y'' + 5y' + 6y = 0$ (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

(34) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

(35) Die Masse $m = 2\,[\text{kg}]$ schwingt frei und ohne Reibung unter einer Rückstellkraft mit Federkonstante $c = 8\,[\text{kg/sec}^2]$ und Anfangswerten $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$.

(a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung an!

(b) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Aufgabe 34 an!

(c) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar! Skizze! Was ist die Periode T?

(36) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 4y' + 13y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = -1$, $y'(0) = -4$.

(37) Für eine an einer Feder frei schwingende Masse gilt: $m = 2\,[\text{kg}]$, $r = 8\,[\text{kg/sec}]$, $c = 26\,[\text{kg/sec}^2]$, $x(0) = -1\,[\text{m}]$, $\dot{x}(0) = -4\,[\text{m/sec}]$.

(a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung an!

(b) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Übung 36 an!

(c) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar! Skizze! Was ist die Quasiperiode T'?

(38) An der Masse in Übung 37 greife die Kraft $F(t) = 80\sin(3t)\,[\text{N}]$ an. Bestimmen Sie

(a) $x_{\text{st}} = x_{\text{p}}$ mit dem Ansatz $x_{\text{p}} = a\sin(3t) + b\cos(3t)$; (b) $x_{\text{inh}} = x_{\text{p}} + x_{\text{hom}}$;

(c) Amplitude A und Phasenverschiebung α von x_{st} aus $a - \mathrm{i}b = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

(39) Stellen Sie die stationäre Lösung von

$$2\ddot{x} + 8\dot{x} + 26x = 80\sin(3t)$$

(vgl. Übung 38) in der Form $x_{\text{st}}(t) = A\sin(3t - \alpha)$ dar mittels der Formeln der Vorlesung (s. S. 148, 149). Skizzieren Sie die äußere Kraft sowie x_{st}!

(Z5) (a) Überprüfen Sie, dass $y(x) = x\,\mathrm{e}^{-px/2}$ die Dgl. $y'' + py' + \frac{p^2}{4}y = 0$ löst (mit den Anfangswerten $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$)! Was ergibt die charakteristische Gleichung?

(b) Lösen Sie, um das anschaulich zu verstehen, das Anfangswertproblem

$$y'' + py' + \Big(\frac{p^2}{4} - \epsilon^2\Big)y = 0, \qquad y(0) = 0,\; y'(0) = 1,$$

und betrachten Sie den Grenzwert $\epsilon \to 0$.

2018 - 05 - 02

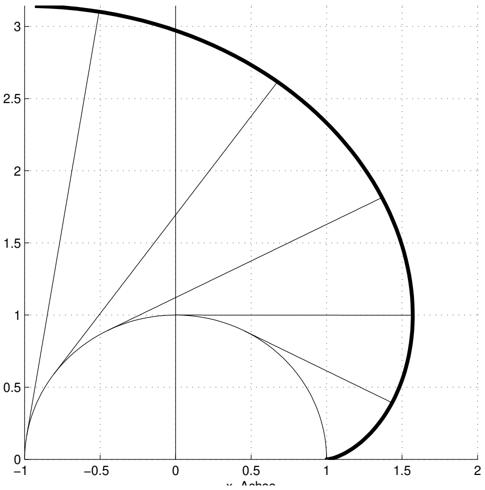
6. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(40) Wir betrachten die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (a) Bestimmen Sie $y(x)$ sowie $y'(x)$!

(b) Parametrisieren Sie die Ellipse wie in der Vorlesung und berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ und $\ddot{\vec{x}}$! Skizzieren Sie $\dot{\vec{x}}$ und $\ddot{\vec{x}}$ für $t=\frac{\pi}{4}$! (c) Überprüfen Sie $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$!

(d) Geben Sie eine Integralformel für die Länge L der Ellipse an!

(41) Die *Kreisevolvente* ist durch
$\vec{x}:[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2 : t\mapsto\begin{pmatrix}\cos t+t\sin t\\ \sin t-t\cos t\end{pmatrix}$ gegeben.
Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}, \|\dot{\vec{x}}\|, y', \ddot{\vec{x}}$ (a) allgemein, sowie (b) speziell für $t=\frac{\pi}{2}$. Skizzieren Sie $\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t)$ für $t=\frac{\pi}{2}$!
Zusatzfrage: Erklären Sie, wie die Parametrisierung aus dem Abwickeln eines Fadens am Einheitskreis entsteht!



(42) (a) Bestimmen Sie die Länge der Kreisevolvente in Üb. 41 für $t\in[0,\pi]$!
(b) Parametrisieren Sie sie nach der Bogenlänge!

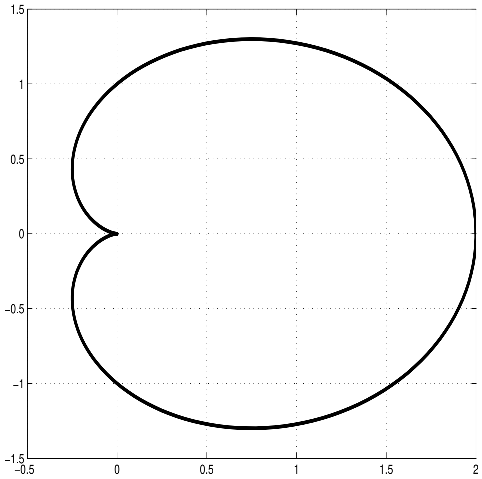
(43) Die *Herzlinie* oder *Kardioide* ($\kappa\alpha\varrho\delta\acute{\iota}\alpha=$ Herz) ist in Polarkoordinaten durch $r=1+\cos\varphi$ gegeben.

(a) Zeichnen Sie $\vec{x}(\varphi)$ für $\varphi=0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\pi$ etc.

(b) Bestimmen Sie die Punkte mit vertikaler Tangente.

Hinweise: Tangente horizontal $\Leftrightarrow y'=0\Rightarrow\dot{y}=0$

Tangente vertikal $\Leftrightarrow y'=\infty\quad\Rightarrow\dot{x}=0$



Kardioide

(44) Eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve erfüllt
$\vec{x}(\varphi)=r(\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(\varphi)\cos\varphi\\ r(\varphi)\sin\varphi\end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\|\dot{\vec{x}}\|=\sqrt{r^2+\dot{r}^2}$. (b) Bestimmen Sie die Länge der Kardioide!

(45) Eine Kurve sei in Polarkoordinaten durch $r=r(\varphi)$ gegeben.

(a) Setzen Sie $\vec{e}_1=\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $\vec{e}_2=\binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ und zeigen Sie $\dot{\vec{x}}=\dot{r}\vec{e}_1+r\vec{e}_2$, $\ddot{\vec{x}}=(\ddot{r}-r)\vec{e}_1+2\dot{r}\vec{e}_2$.
(b) Folgern Sie $\mathrm{d}s=\|\dot{\vec{x}}\|\,\mathrm{d}\varphi=\sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi$ und $\kappa=\dfrac{|\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}=\dfrac{|r^2+2\dot{r}^2-r\ddot{r}|}{(r^2+\dot{r}^2)^{3/2}}$.

(46) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $z=\dfrac{\tan x}{y^3}+\arccos(xy+y)+x^y$.

(47) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen nach $x,y,z,a,$ und b von $u=f(x,y,z,a,b)=\arctan(axy)+z\arcsin(b+\cos a)$.

(Z6) Wenn der Kreis $x^2+(y-a)^2\le a^2$ auf der $x-$Achse ohne Schlupf abrollt, so beschreibt der ursprünglich in $(0,a(1-\lambda))$, $0<\lambda<1$, gelegene Punkt R eine *verkürzte Zykloide* oder *Trochoide* ($\tau\varrho o\chi\acute{o}\varsigma=$ Rad) .

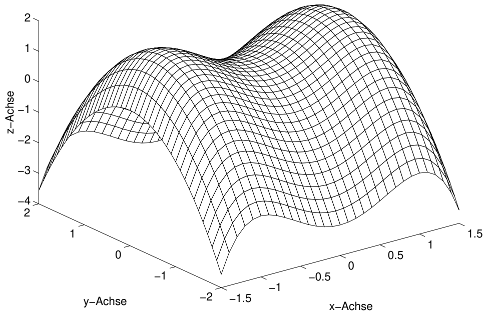
(a) Zeigen Sie, dass ihre Gleichung durch $\vec{x}(t)=a\begin{pmatrix}t-\lambda\sin t\\ 1-\lambda\cos t\end{pmatrix}$ gegeben ist.
(b) Berechnen Sie ihre Krümmung für $t=0$.

2018 - 05 - 09

7. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(48) Es sei $f(x,y) = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$. Bestimmen Sie die Tangentialebenen an $z = f(x,y)$ (a) in $\vec{x}_0 = \binom{1/2}{-1}$, (b) in $\vec{x}_0 = \vec{0}$, (c) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$.

Lokalisieren Sie diese 3 Punkte auf dem Graph!



$z = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$

(49) In einem Dreieck wurden die zwei Seiten x, y sowie der eingeschlossene Winkel α gemessen. Es ergab sich $x = 100\,\text{m}$, $y = 200\,\text{m}$, $\alpha = 30°$. Bestimmen Sie den möglichen Fehler $\mathrm{d}A$ bei der Flächenberechnung $A = \frac{1}{2}xy\sin\alpha = 5000\,\text{m}^2$, wenn die Messungen nur auf $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \pm 0.5\,\text{m}$, sowie $\mathrm{d}\alpha = \pm 1°$ genau sind! (Warum sollte man in Radiant rechnen?) Zusatzfrage: Was ist die exakte Flächenänderung $\Delta A = A_{\text{neu}} - A_{\text{alt}}$?

(50) Es sei $z = f(x,y) = xy - y\ln x$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f\circ\vec{x}}{\mathrm{d}t}$

(a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(51) Es sei $\varphi(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ für $x > 0$ und $x(s,t) = \sqrt{st}$, $y(s,t) = s\sqrt{t}$ für $s,t > 0$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel! Überprüfen Sie, dass sich in (b) dasselbe ergibt!

(52) (a) Rechnen Sie f_y in Polarkoordinaten um!

(b) Überprüfen Sie die Formel für $f(x,y) = \mathrm{e}^{y/x}$!

(53) Es seien $F(x,y) = xy$ und die neun Punkte (i,j), $i,j \in \{-1,0,1\}$ gegeben.

(a) Zeichnen Sie die (drei) Niveaulinien von F, die durch diese Punkte gehen!

(b) Zeichnen Sie die Gradienten in diesen neun Punkten ein! Überprüfen Sie, dass die Gradienten senkrecht auf die Niveaulinien stehen und in die Richtung gehen, in der F wächst!

(c) Warum ist $\mathrm{RA}(F, \binom{1}{1}, \vec{r}) = 0$ für $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$?

(54) Es sei $F(\vec{x}) = 2y + \tan(xy) - \sin z$ und $\vec{x}_0 = (0,1,0)^T$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{3}(2,1,-2)^T$!

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für $\epsilon = 0.01$ berechnen!

(c) In welche Richtung wächst F von $\vec{x}_0$ aus am stärksten? Wie stark?

(d) Für welche Richtungen ist die Richtungsableitung 0?

(55) F und $\vec{x}_0$ seien wie in Aufgabe 54. In welcher Niveaufläche $F = c$ liegt $\vec{x}_0$? Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an diese Niveaufläche M_c

(a) "explizit", d.h. indem Sie $z = f(x,y)$ aus $F = c$ ausrechnen;

(b) "implizit", d.h. mit der Formel $\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle = 0$.

(Z7) In der Niveaufläche $F(x,y,z) = c$ werde jeweils x als Funktion von y,z; y als Funktion von x,z; und z als Funktion von x,y betrachtet. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$ Hinweis: $x\big(y(x,z),z\big) = x$ etc.

2018 - 05 - 16

8. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(56) Es sei $f(t,x,y) = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(4t)} = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}$.

(a) Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial t}$! (b) Berechnen Sie Δf in Polarkoordinaten!

(c) Folgern Sie, dass f für $t \neq 0$ die “Wärmeleitungsgleichung” $\Big(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\Big) f = 0$ erfüllt.

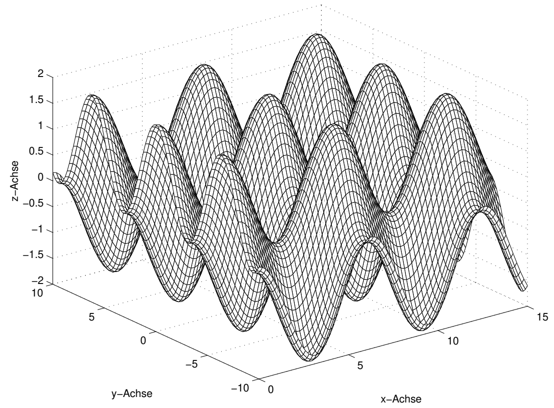
(57) Rechnen Sie f_{xx} in Polarkoordinaten um! Verwenden Sie zur Einübung (im Gegensatz zur Vorlesung) Indices zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen.
Hinweis: Leiten Sie wie in der Vorlesung Formeln für $f_{xx}, r_x, \varphi_x, r_{xx}, \varphi_{xx}$ her!

(58) Rechnen Sie f_{xy} in die Koordinaten $u = y^2 + \sin x$, $v = y \ln x$ um, und testen Sie das Ergebnis an $f = v^2$. (Die Faktoren vor f_{uu}, f_{uv} etc. können hier als Funktionen von x, y stehenbleiben.)

(59) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = 3xy^2 + 2y^3 + x^3 - 6x$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein.

(60) Bestimmmen Sie die Extrema und die Sattelpunkte von $f(x,y) = \cos x + \cos y$, $D = \mathbb{R}^2$.

Hinweis: $\cos k\pi = (-1)^k$; unterscheiden Sie für $P_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ die 3 Fälle 1) k,l gerade; 2) k,l ungerade; 3) eines gerade, eines ungerade!



$z = \cos x + \cos y$

(61) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = y^4 - \frac{1}{2}y^2 - x^2$ am Kreis $x^2 + y^2 \leq 1$ und teilen Sie sie in Maxima und Minima ein!

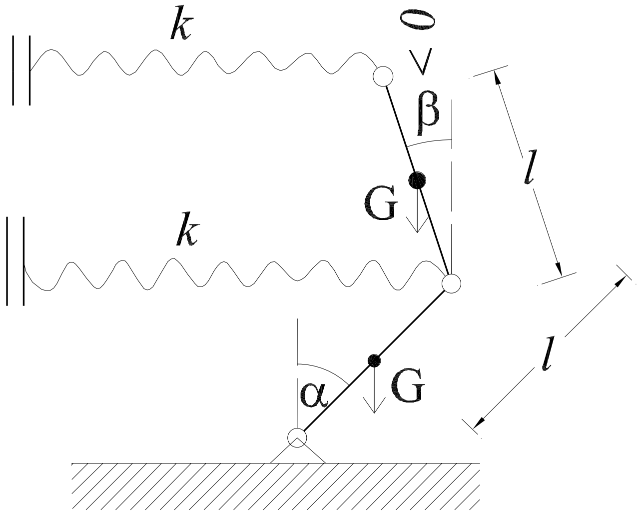
Hinweise: Verwenden Sie im Inneren die Hessematrix! Der Rand kann mit Parametrisierung oder mit Lagrange untersucht werden.

(62) Berechnen Sie mit dem Lagrangeschen Verfahren das Minimum von $2x^3 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $3x^2 + 4y + 2z = 8$.

(Z8) Für die gezeichnete Stabkette ist die potentielle Energie durch

$$U(\alpha,\beta) = G\frac{l\cos\alpha}{2} + G\Big(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\Big) + \frac{k}{2}(l\sin\alpha)^2 + \frac{k}{2}(l\sin\alpha + l\sin\beta)^2$$

gegeben. Die vertikale Gleichgewichtslage ist *stabil* (d.h. knickt nicht aus), wenn U für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum hat, d.h. wenn $\mathrm{H}\,U(0,0)$ positiv definit ist. Wie groß muss $c = kl/G$ sein, damit das der Fall ist?



Stabkette

2018 - 05 - 23

2. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2018

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Stellen Sie die Lösung der homogenen Schwingungsgleichung $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0,\quad x(0)=1,$ $\dot{x}(0)=-3,$ mit Phasenverschiebung dar!

(2) (a) Zeigen Sie $\|\dot{\vec{x}}\|=\sqrt{r^2+\dot{r}^2}$ für eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r=r(\varphi)$.

(b) Berechnen Sie die Länge L der archimedischen Spirale $r=\varphi$ mit $0\le\varphi\le\pi$!

Hinweis: $\operatorname{ch}^2 u=\frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}2u),\ \operatorname{sh}2u=2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u,\ \frac{1}{2}[\operatorname{arsh}\pi+\pi\sqrt{1+\pi^2}]\approx 6.1$

(3) Rechnen Sie f_x in Polarkoordinaten um!

(4) (a) Rechnen Sie f_{xy} in die Koordinaten $s=x+y,\quad t=xy$ um!

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f(x,y)=\sin(xy)$!

(5) Es sei $F(x,y,z)=xyz$ und $\vec{x}_0=(1,2,3)^T$. In welcher Niveaufläche $F=c$ liegt $\vec{x}_0$? Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an diese Niveaufläche M_c

(a) "explizit", d.h. indem Sie $z=f(x,y)$ aus $F=c$ ausrechnen;

(b) "implizit", d.h. mittels $\nabla F(\vec{x}_0)$!

(6) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y)=x^2y+xy^2-x^2-x$ (mit $D=\mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima und Sattelpunkte ein!

2018 - 05 - 30

9. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(63) (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ für das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ \frac{y}{x}\sin z \\ \arctan(x+z) \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass allgemein $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$ gilt!

(64) Durch $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4xy\,\mathrm{e}^{2x^2} \\ \frac{z}{y} + \mathrm{e}^{2x^2} \\ \sqrt{z} + \ln y \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld für $y > 0,\ z > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$, und bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(65) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = (yz, xz, x^2)^T$. Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ nicht wirbelfrei ist (d.h. $\operatorname{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$)! Versuchen Sie, wie in Übung 64 ein Potential zu bestimmen, und stellen Sie fest, an welcher Stelle der Versuch misslingt!

(66) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = (xy, xz, xyz)^T$ und $\vec{x}_0 = (1,2,3)^T$.

(a) Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}_0)$, $\mathrm{J}\vec{v}$, $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und die lineare Näherung $\vec{l}$ von $\vec{v}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. $\vec{l}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

(b) Vergleichen Sie speziell für $\vec{x} = \vec{x}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ mit der linearen Näherung $\vec{l}(\vec{x})$.

(67) Lösen Sie das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$v_1(x,y) = \sqrt[3]{x+2y} - \cos(xy) = 0, \qquad v_2(x,y) = \frac{x}{3} + y + \arctan(xy) = 0,$$

das in der Nähe von $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$!

(68) Die Funktion $z = \cos x + \cos y$ hat bei $\vec{x}_0 = \binom{\pi}{0}$ einen Sattelpunkt (vgl. Aufg. 60). In der Funktion $f(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(\frac{1}{2}xy) + \frac{x}{5}$ ist dieser Sattelpunkt etwas verschoben. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$ zum Startwert $\vec{x}_0$!

(69) Es sei $\vec{v}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} y_1 + y_3^2 \\ \sin y_2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{J}(\vec{w}\circ\vec{v}) = (\mathrm{J}\vec{w})\big(\vec{v}(\vec{x})\big)\cdot \mathrm{J}\vec{v}$.

(70) (a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v_1,v_2,v_3)}{\partial(x,y,z)} = \det(\mathrm{J}\vec{v})$ für $\vec{v}$ aus Übung 66 allgemein und speziell in $\vec{x}_0$. ($|\det(\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0))|$ entspricht der Volumsänderung eines kleinen Quaders bei $\vec{x}_0$ unter der Abbildung $\vec{v}$.)

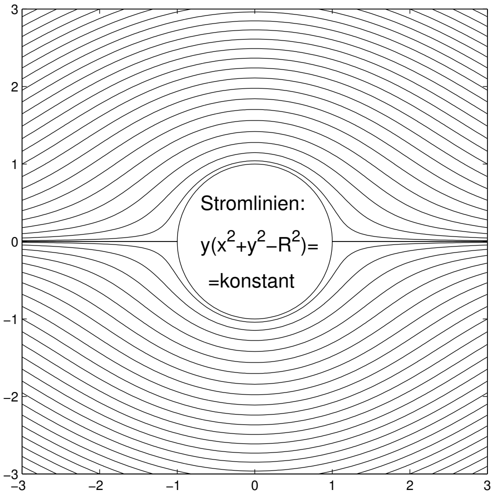
(b) Warum sind v_1, v_2, v_3 *Koordinaten* bei $\vec{x}_0$?

(Z9) Das Potential einer inkompressiblen, wirbelfreien Strömung um den Zylinder $x^2+y^2 \le R^2$ ist durch $f(x,y,z) = c\Big(x + \dfrac{R^2x}{x^2+y^2}\Big)$ gegeben. ($c =$ Grenzgeschwindigkeit in Richtung der $x-$ Achse im Unendlichen.)

(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \operatorname{grad} f$!

(b) Zeigen Sie $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

(c) Skizzieren Sie $\vec{v}$ an der Oberfläche des Zylinders $x^2+y^2 = R^2$!



Umströmter Zylinder $x^2+y^2 = R^2$, $R = 1$

2018 - 06 - 06

10. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(71) Zeigen Sie, dass die Kugelkoordinaten $\varrho = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vartheta = \arccos\frac{z}{\varrho}$, $\varphi = (\pi+)\arctan\frac{y}{x}$ orthogonal sind, indem Sie nachrechnen, dass $\nabla\varrho = \frac{\vec{x}}{\varrho}$, $\nabla\vartheta = \frac{1}{r\varrho^2}\begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -r^2 \end{pmatrix}$, $\nabla\varphi = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (wobei $r = \sqrt{x^2+y^2}$), und zeigen, dass diese Gradienten paarweise aufeinander senkrecht stehen. Skizze!

(72) (a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\det(\mathrm{J}\vec{v}) = \frac{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}{\partial(x,y,z)}$ für die Kugelkoordinaten. Nehmen Sie $\mathrm{J}\vec{v}$ aus Üb. 71 und verwenden Sie, dass det multilinear ist!

(b) Warum gilt $|\det(\mathrm{J}\vec{v})| = \|\nabla\varrho\|\cdot\|\nabla\vartheta\|\cdot\|\nabla\varphi\|$?

(73) (a) Berechnen Sie $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$ für die Kugelkoordinaten. (Verwenden und erklären Sie $\vec{x} = \varrho(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)^T$, vgl. Skriptum S. 55, 56!)

(b) Versuchen Sie die geometrische Herleitung von $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$ im Skriptum, S. 59, zu verstehen und zu erklären!

Zusatzfrage: Wie erhält man $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$ aus $\frac{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}{\partial(x,y,z)}$?

(74) Skizzieren Sie das Hyperbelsegment

$$D: x^2 - y^2 \geq 1, \qquad y \geq 0, \qquad 1 \leq x \leq 2,$$

und berechnen Sie $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ indem Sie außen nach x integrieren!

(75) Berechnen Sie das Doppelintegral in Aufgabe 74, indem Sie außen nach y integrieren!

(76) Das von der Geraden $x = 1$ sowie der Parabel $y = x^2$ im 1. Quadranten eingeschlossene beschränkte Gebiet D ist mit der Dichte $\rho(x,y) = x\cos y$ belegt. Skizze! Berechnen Sie seine Masse $M = \iint_D \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

(a) indem Sie außen nach x integrieren, (b) indem Sie außen nach y integrieren!

(77) Das von der Geraden $y = 1$ sowie der Parabel $y = \frac{1}{3}x^2$ im 1. Quadranten eingeschlossene beschränkte Gebiet D ist mit der Dichte $\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y}}$ belegt. Skizze! Berechnen Sie das statische Moment $S_1 = S_y = \iint_D x\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

(a) indem Sie außen nach x integrieren, (b) indem Sie außen nach y integrieren!

(Z10) Berechnen Sie $\iint_D \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für das Dreieck D mit den Eckpunkten $(0/0)$, $(\sqrt{\pi}/-1)$, $(\sqrt{\pi}/2)$.

2018 - 06 - 13

11. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(78) Skizzieren Sie das durch $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x + y \geq 1$ gegebene Gebiet D und bestimmen Sie seinen Schwerpunkt $\vec{s}$!

(79) Das Gebiet D sei durch $a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass dann die statischen Momente von D mit folgenden *einfachen* Integrale

$$S_x = S_2 = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad S_y = S_1 = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden können!

(b) Berechnen Sie so den Schwerpunkt des Gebietes $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \cos x$.

(80) D sei wie in der Aufgabe 79.

(a) Zeigen Sie, dass $I_x = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x)^3}{3}\,\mathrm{d}x$ und $I_y = \displaystyle\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie so I_x, I_y für das Dreieck $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1$.

(81) Berechnen Sie I_g für das Einheitsquadrat $0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1$ (mit $\rho = 1$) bezüglich $g : x + 2y = 0$.

(82) (a) Berechnen Sie I_x für den Kreis $x^2 + y^2 \leq R^2$ in Polarkoordinaten!

(b) Was ergibt der Satz von Steiner für I_g bzgl. der Geraden $g : a_1 x + a_2 y = b$?

(83) Skizzieren Sie das Flächenstück, das in Polarkoordinaten durch die Kurven $r = 1$, $r = 2, \quad r = \varphi, \quad r = \mathrm{e}^{\varphi}$ begrenzt wird und ermitteln Sie seine Größe.

(84) D sei das Dreieck mit den Eckpunkten $(0/0)$, $(0/1)$, $(1/0)$. Berechnen Sie $\displaystyle\iint\limits_D \cos\Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, indem Sie $u = x - y, \quad v = x + y$ substituieren.

(Z11) Das Volumen V des Körpers, der über dem Viertelkreis $D : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x, y \geq 0$ liegt und von der Sattelfläche $z = xy$ begrenzt wird, ist durch $V = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gegeben. Berechnen Sie V (a) in $xy-$Koordinaten, (b) in Polarkoordinaten.

2018 - 06 - 20

12. und letztes Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2018

(85) Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = S$, vgl. § 22, Bsp. 2.

(a) Schreiben Sie die Reihe als Zahlenreihe an! Was sind $a_3, s_3, a_k, a_n, a_{n-1}$?

(b) Zeigen Sie $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, schreiben Sie damit $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ an, kürzen Sie, und bestimmen Sie s_{999} und S!

(86) (a) Überlegen Sie noch einmal (vgl. Skriptum S. 62), dass für die geometrische Reihe gilt

$$s_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} = \frac{1-p^n}{1-p} \qquad \text{wenn } p \neq 1.$$

Bestimmen Sie dann die Partialsummen s_n und—im Fall der Konvergenz—die Summe S der geometrischen Reihen (b) $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots$; (c) $1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots$; sowie (d) $1 - 2 + 4 - 8 + - \cdots$. Was ist jeweils s_3?

(87) Wir betrachten die Reihe $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3} = \zeta(3)$.

(a) Zeigen Sie mit dem Integralkriterium, dass $\dfrac{1}{2N^2} \leq \sum\limits_{k=N}^{\infty} \dfrac{1}{k^3} \leq \dfrac{1}{2(N-1)^2}$ gilt!

(b) Ab welchem n gilt nach (a) $|S - s_n| \leq 0.0001$?

(88) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ bedingt konvergent ist! Bis zu welchem n muss man die Reihe summieren, um die Summe der Reihe auf 0.01 genau angeben zu können, d.h. ab wann gilt sicher $|S - s_n| \leq 0.01$?

(89) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden zwei Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{n \cdot 2^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

(90) (a) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$.

(b) Bis zu welchem n muss man summieren, um $f(-1)$ auf 0.001 genau angeben zu können?

(91) (a) Entwickeln Sie $f(x) = \cos x$ in eine MacLaurinreihe! Was ist ihr Konvergenzradius?

Zusatzfrage: Überprüfen Sie das Ergebnis mit der Eulerschen Formel!

(92) Entwickeln Sie $f(x) = x^3 - 7x^2 + 5x + 12$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 1$ und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren!

Beachten Sie bitte, dass die dritte Klausur (wegen der Festigkeitslehreklausur) am Freitag, den 29. 6. 2018, von 8h bis 10h stattfindet.

(Z12) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(1) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ auf 10^{-4} genau!

Hinweis: Setzen Sie für $\sin t$ die MacLaurinreihe ein und integrieren Sie gliedweise!

2018 - 06 - 29

3. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2018

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{x^2+z^2} \\ \ln\sqrt{x^2+z^2} \\ \dfrac{yz}{x^2+z^2} + \dfrac{1}{\cos^2 z} \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$.

(b) Bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(2) Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 0.1 + \arctan(xy) \\ \sin(y + \ln x) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

hat in der Nähe von $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ eine Nullstelle. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$!

(3) Berechnen Sie die Jacobimatrix und die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v_1, v_2, v_3)}{\partial(x, y, z)}$ für die Koordinaten $v_1(\vec{x}) = \sqrt[3]{x+y^2}$, $v_2(\vec{x}) = y\tan(z)$, $v_3(\vec{x}) = x\ln(\mathrm{e}^{\ln z})$.

(4) Das von der Geraden $x = 1$ sowie der Parabel $y = x^2$ im 1. Quadranten eingeschlossene Gebiet D ist mit der Dichte $\rho(x,y) = \cos y$ belegt. Skizze!
Berechnen Sie das statische Moment $S_1 = S_y$,

(a) indem Sie außen nach x integrieren, (b) indem Sie außen nach y integrieren!

Hinweis: $\cos 1 \approx 0.54$

(5) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_y des Kreissektors $D : 0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0$!

(6) (a) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{5^n n^2}$.

(b) Berechnen Sie $f(-1)$ auf 0.001 genau!

Juni 2018

Einige zusätzliche Übungen zur Taylorreihe empfohlen als Vorbereitung auf die Prüfung zu Mathematik 2

(Z1) Bestimmen Sie die MacLaurinreihen von $\operatorname{sh} x$ und $\operatorname{ch} x$ aus der MacLaurinreihe für e^x mit den Formeln $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

(Z2) Bestimmen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{-n}}{n!} + \frac{n2^n + 3^n}{n6^n} + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$.

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Formeln der Vorlesung!

(Z3) Berechnen Sie $\cos \frac{1}{10}$ mit der MacLaurinreihe auf 10^{-16} genau!

(Z4) Bestimmen Sie mittels $\tan' = 1 + \tan^2$ die MacLaurinreihe von $f(x) = \tan x$ bis zum x^5– Term!

(Z5) Berechnen Sie statt mit der Regel von l'Hôpital durch Bestimmung der Taylorpolynome (2. Grades in a, 3. Grades in b) von Zähler und Nenner und Verwendung von $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\varrho_n(x)}{x^n} = 0$ die Grenzwerte (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\,\mathrm{e}^{x^2} - \operatorname{sh} x}{\ln(1-x) + \sin x + x^2/2}$.

(Z6) Leiten Sie die MacLaurinreihe von $f(x) = \arctan x$ aus $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und der geometrischen Reihe her!

(Z7) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen?

(Z8) Wie wahrscheinlich ist es, im Lotto (a) genau 2 Richtige, (b) keine richtige Zahl zu haben?

(Z9) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$ durch Integration der binomischen Reihe auf 10^{-2} genau!

(Z10) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{y^2 + \sin x}$ um $\vec{x}_0 = \binom{0}{1}$ bis zu den Termen 2. Ordnung!

(Z11) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2y$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \binom{1}{2}$ und überprüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren!

(Z12) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = x\ln(2x-y)$ um $\binom{1}{1}$ bis einschließlich zu den Gliedern 3. Ordnung!

(Z13) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{x+\mathrm{e}^y}$ um $\vec{0}$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung! Überprüfen Sie das Ergebnis durch Verwendung der MacLaurinreihen von $\sqrt{1+x}$ und e^x.

(Z14) Die Funktion $f(x,y)$ erfüllt in $\vec{x}_0 = \binom{0}{1}$ das folgende: $f(\vec{x}_0) = 5$, $\nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Hf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f_{xxx}(\vec{x}_0) = f_{xyy}(\vec{x}_0) = 0$, $f_{xxy}(\vec{x}_0) = 1, f_{yyy}(\vec{x}_0) = 5$. Schreiben Sie das Taylorpolynom $s_3(x,y)$ an!