1. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(1) (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \le x \le 1$.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche, die entsteht, wenn die Kurve in (a) um die $x-$ Achse rotiert!

Stellen Sie bei den uneigentlichen Integralen in den Übungen 2, 3 fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall! Machen Sie jeweils eine Skizze!

(2) (a) $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (b) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (c) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$

Hinweis zu (c): $\ln\alpha - \ln\beta = \ln\frac{\alpha}{\beta}$

(3) (a) $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ (c) $\int\limits_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

Hinweis zu (a): Verwenden Sie Übung 76 (b) zu Mathematik 1!

(4) (a) Berechnen Sie $\frac{z}{w}$ zu $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + \mathrm{i}$ und skizzieren Sie $z, w, \frac{z}{w}$!

(b) Überprüfen Sie $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

(5) (a) Berechnen Sie $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, und $\operatorname{Im} z$ für $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$. Skizze!

(b) Stellen Sie z als $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ dar entsprechend 16.2 im Skriptum. Was sind z_1, z_2, z_3?

(6) Stellen Sie $\sin^5\varphi$ durch $\sin\varphi$, $\sin 3\varphi$ und $\sin 5\varphi$ dar und berechnen Sie so $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$!

(7) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\cos 3x = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$ und $\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$. Skizze!

(Z1) (a) Berechnen Sie $f(a) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x$ für $a > 0$ mittels $\sin x = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, vgl. Üb. 7.

(b) Überlegen Sie, dass $\Phi(a) = -\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ eine Stammfunktion von f ist!

(c) Folgern Sie aus $\lim\limits_{a\to\infty}\Phi(a) = 0$, dass $\Phi(a) = \arctan a - \frac{\pi}{2}$ und $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

2013 - 03 - 13

2. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(8) (a) Schreiben Sie $w = -3 + 4\,\mathrm{i}$ in der Form $w = \varrho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^4 = -3 + 4\,\mathrm{i}$. Machen Sie den Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$! Bestimmen Sie z_0! Wie lassen sich die übrigen Lösungen z_1, z_2, z_3 durch z_0 ausdrücken? Skizze!

(9) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{y \sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$ zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(10) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = 2x^2 t\, \mathrm{e}^{t^2}$ zum Anfangswert $x(0) = 1$! In welchem Intervall ist $x(t)$ definiert? Was passiert am Rand dieses Intervalls?

(11) Auf einen Fallschirmspringer wirken Gravitation und Reibung. Wenn die Reibung proportional zu v^2 ist ($v =$ Geschwindigkeit nach unten), so gilt:

$$\begin{aligned} \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} &= m\dot{v} \\ &= \text{Kraft} = mg - av^2 \end{aligned}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für $m = 100\,\mathrm{kg}$, $g = 10\,\mathrm{m/sec}^2$, $a = 40\,\mathrm{kg/m}$ und $v(0) = 20\,\mathrm{m/sec}$ (d.h. beim Öffnen des Fallschirms). Wie lange dauert es, bis der Fallschirmspringer auf (a) $10\,\mathrm{m/sec}$, (b) $6\,\mathrm{m/sec}$, (c) $5\,\mathrm{m/sec}$ abgebremst ist?

(12) Ein Stromkabel der Länge $120\,\mathrm{m}$ und mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\mathrm{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\mathrm{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen? (Verwenden Sie $H_0 = 150$ als Startwert für das Newtonverfahren!)

(b) Wie weit hängt das Kabel durch?

(13) Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = -\dfrac{y}{x}$.

(a) Richtungsfeld: Zeichnen Sie in den Punkten (x, y) mit $x = -2, -1, \ldots, 2$, $y = -2, -1, \ldots, 2$ die Steigungen ein!

(b) Lösung: Warum ist die Differentialgleichung mit trennbaren Variablen? Lösen Sie sie!

(c) Probe: Überprüfen Sie die Lösung durch Differenzieren!

(d) Anfangswerte: Bestimmen Sie die Lösungskurven zu $y(1) = \pm 1$ und zeichnen Sie sie in das Richtungsfeld.

(14) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = C \tan x : C \in \mathbb{R}\}$. Skizze!

(Z2) Ein Stromkabel mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\mathrm{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\mathrm{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen $20\,\mathrm{m}$ durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen?

(b) Wie lang ist das Kabel?

3. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(15) (a) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dgl. $y'' + \mathrm{e}^x\, y' + y = 0$ einen VR bilden!

(b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dgl. $y'' + \mathrm{e}^x\, y' \cdot y = 0$ keinen Vektorraum bilden! Überprüfen Sie, dass $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ eine Lösung ist, $y_1(x) + y_1(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$ aber nicht! Wodurch unterscheiden sich die zwei Differentialgleichungen?

(16) Lösen Sie die Differentialgleichungen (a) $y'' - 2y' - 3y = 0$ (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

(17) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 9y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

(18) Die Masse $m = 2\,[\mathrm{kg}]$ schwingt frei und ohne Reibung unter einer Rückstellkraft mit Federkonstante $c = 18\,[\mathrm{kg/sec}^2]$ und Anfangswerten $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$.

(a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung an!

(b) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Übung 17 an!

(c) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar! Skizze! Was ist die Periode T?

(19) Lösen Sie die Differentialgleichung $y''+2y'+5y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$.

(20) Für eine an einer Feder frei schwingende Masse gilt: $m = 2\,[\mathrm{kg}]$, $r = 4\,[\mathrm{kg/sec}]$, $c = 10\,[\mathrm{kg/sec}^2]$, $x(0) = -2\,[\mathrm{m}]$, $\dot{x}(0) = 4\,[\mathrm{m/sec}]$.

(a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung an!

(b) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Übung 19 an!

(c) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar! Skizze! Was ist die Quasiperiode T'?

(21) An der Masse in Übung 20 greife die Kraft $F(t) = F_0 \sin(\vartheta t) = 52 \sin(3t)\,[\mathrm{N}]$ an. Bestimmen Sie

(a) $x_{\mathrm{st}} = x_{\mathrm{p}}$ mit dem Ansatz $x_{\mathrm{p}} = a \sin(3t) + b\cos(3t)$; (b) $x_{\mathrm{inh}} = x_{\mathrm{p}} + x_{\mathrm{hom}}$;

(c) Amplitude A und Phasenverschiebung α von x_{st} aus $a - \mathrm{i}b = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

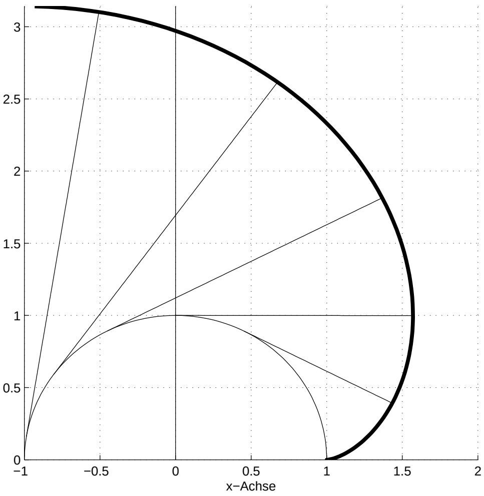
(Z3) Stellen Sie die stationäre Lösung von

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 10x = 52 \sin(3t)$$

(vgl. Übung 21) in der Form $x_{\mathrm{st}}(t) = A \sin(3t - \alpha)$ dar mittels der Formeln der Vorlesung (s. S. 148, 149). Skizzieren Sie die äußere Kraft sowie x_{st}!

4. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(22) Die *Kreisevolvente* ist durch
$\vec{x} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}$ gegeben.
Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}$, $\|\dot{\vec{x}}\|$, y', $\ddot{\vec{x}}$, κ (a) allgemein, sowie (b) speziell für $t = \frac{\pi}{2}$. Skizzieren Sie $\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t)$ für $t = \frac{\pi}{2}$! Wo ist der Krümmungsmittelpunkt M?
Zusatzfrage: Erklären Sie, wie die Parametrisierung aus dem Abwickeln eines Fadens am Kreis entsteht!



Kreisevolvente

(23) (a) Bestimmen Sie die Länge der Kreisevolvente in Üb. 22 für $t \in [0, \pi]$.
(b) Parametrisieren Sie sie nach der Bogenlänge.

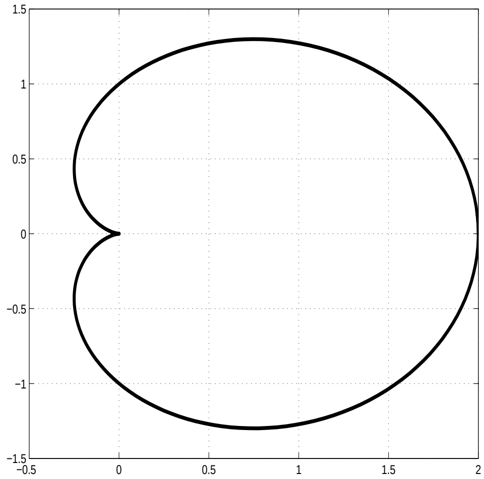
(24) Ein Straßenstück beschreibt einen Viertelbogen in der Form einer Klothoide

$$x(s) = \int_0^s \cos \frac{a\sigma^2}{2} \, \mathrm{d}\sigma, \qquad y(s) = \int_0^s \sin \frac{a\sigma^2}{2} \, \mathrm{d}\sigma, \qquad 0 \leq s \leq S,$$

und hat also im Punkt $\big(x(S), y(S)\big)$ eine senkrechte Tangente, d.h. $\dot{x}(S) = 0$.
(a) Bestimmen Sie a und S so, dass für $s = S$ der Krümmungsradius $10\,\mathrm{m}$ beträgt. (b) Wie lang ist das Straßenstück?

(25) Wenn der Kreis $x^2 + (y - a)^2 \leq a^2$ auf der $x-$Achse ohne Schlupf abrollt, so beschreibt der ursprünglich in $(0, a(1 - \lambda))$, $0 < \lambda < 1$, gelegene Punkt R eine *verkürzte Zykloide* oder *Trochoide* ($\tau\varrho o\chi \acute{o}\varsigma$ = Rad).
(a) Zeigen Sie, daß ihre Gleichung durch $\vec{x}(t) = a \begin{pmatrix} t - \lambda \sin t \\ 1 - \lambda \cos t \end{pmatrix}$ gegeben ist.
(b) Berechnen Sie ihre Krümmung für $t = 0$.

(26) Die *Herzlinie* oder *Kardioide* ($\kappa\alpha\varrho\delta\acute{\iota}\alpha$ = Herz) ist in Polarkoordinaten durch $r = 1 + \cos\varphi$ gegeben, d.h. $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos\varphi \\ r(\varphi) \sin\varphi \end{pmatrix}$. (a) Zeichnen Sie $\vec{x}(\varphi)$ für $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$! Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}$!
(b) Bestimmen Sie die Punkte mit horizontaler Tangente! (Dort ist also $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0 \Longrightarrow \dot{y} = 0$.)


Kardioide

(27) Eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve erfüllt
$\vec{x}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos\varphi \\ r(\varphi) \sin\varphi \end{pmatrix}$.
(a) Zeigen Sie, dass $\|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}$. (b) Bestimmen Sie die Länge der Kardioide!

(28) Eine Kurve sei in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegeben.
(a) Setzen Sie $\vec{e}_1 = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $\vec{e}_2 = \binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ und zeigen Sie $\dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_1 + r\vec{e}_2$, $\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r)\vec{e}_1 + 2\dot{r}\vec{e}_2$.
(b) Folgern Sie $\mathrm{d}s = \|\dot{\vec{x}}\| \, \mathrm{d}\varphi = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \, \mathrm{d}\varphi$ und $\kappa = \dfrac{|\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} = \dfrac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}|}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}$.

(Z4) Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve nennt man ihre *Evolute.* Zeigen Sie, daß man die Krümmungsmittelpunkte der Zykloide erhält, indem man von P aus in Richtung Q das Doppelte der Länge $\overline{PQ}$ abträgt, und daß die Evolute der Zykloide eine verschobene Zykloide ist.

2013 - 04 - 17

1. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2013

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\int\limits_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)(x+2)}$

(2) Stellen Sie $\cos^4\varphi$ durch $\cos 2\varphi$ und $\cos 4\varphi$ dar und berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.

(3) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Hyperbelschar $A : y^2 - x^2 = C$!

(4) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 4y' + 13y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = -1$, $y'(0) = -4$.

(5) (a) Bestimmen Sie die stationäre Lösung von $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 4\sin 2t$ mit dem Ansatz $x_{\mathrm{st}} = x_{\mathrm{p}} = a\sin 2t + b\cos 2t$!

(b) Stellen Sie x_{st} mit Phasenverschiebung dar!

(6) Eine archimedische Spirale ist durch $r = \varphi$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\vec{x}, \dot{\vec{x}}, y'$ und $\|\dot{\vec{x}}\|$.

(b) Berechnen Sie die Länge L der Spirale, wenn φ von 0 bis π geht!

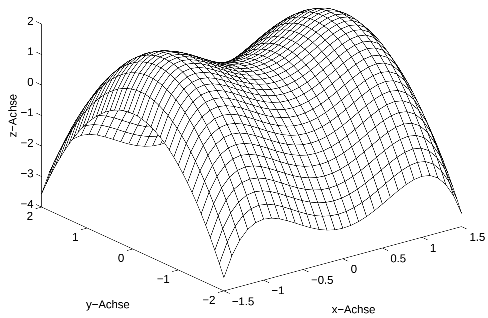
<u>Hinweis:</u> $\mathrm{ch}^2\, t = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}\, 2t)$, $\mathrm{sh}\, 2t = 2\,\mathrm{sh}\, t\,\mathrm{ch}\, t$, $\frac{1}{2}(\mathrm{arsh}\,\pi + \pi\sqrt{1+\pi^2}) \approx 6.1$

2013 - 04 - 24

5. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(29) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $z = \dfrac{\tan x}{y^3} + \arccos(xy + y) + x^y$.

(30) Es sei $f(x, y) = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$. Bestimmen Sie die Tangentialebenen an $z = f(x, y)$ (a) in $\vec{x}_0 = \binom{1/2}{1}$, (b) in $\vec{x}_0 = \vec{0}$, (c) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$.



$z = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$

(31) In einem Dreieck wurden die zwei Seiten x, y sowie der eingeschlossene Winkel α gemessen. Es ergab sich $x = 100\,\text{m}$, $y = 200\,\text{m}$, $\alpha = 150°$. Bestimmen Sie den möglichen Fehler $\mathrm{d}A$ bei der Flächenberechnung $A = \frac{1}{2} xy \sin\alpha = 5\,000\,\text{m}^2$, wenn die Messungen nur auf $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \pm 0.3\,\text{m}$, sowie $\mathrm{d}\alpha = \pm 1°$ genau sind!

Hinweis: Warum sollte man in Radiant rechnen?

Zusatzfrage: Was ist die exakte Flächenänderung $\Delta A = A_{\text{neu}} - A_{\text{alt}}$?

(32) Es sei $z = f(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot y + x \ln y$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(33) Es sei $\varphi(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ für $x > 0$ und $x(s, t) = st$, $y(s, t) = st^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel!

(34) Es seien Funktionen der folgenden Form gegeben: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1(s, u)$, $x_2(s)$, $x_3(t, y)$, $x_4(y, u)$, $u(s, y)$. Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ mit der Kettenregel aus? Skizzieren Sie das "Baumdiagramm"!

(35) (a) Rechnen Sie $x \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}$ in Polarkoordinaten um!

(b) Überprüfen Sie die Formel am Beispiel $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$!

(Z5) Bei der Verformung eines Kegels vergrößert sich sein Grundkreisradius $r = 30\,\text{cm}$ auf $30.1\,\text{cm}$ und verringert sich seine Höhe h von $60\,\text{cm}$ auf $59.5\,\text{cm}$. Berechnen Sie die exakte Volumenänderung $\Delta V = V_{\text{neu}} - V_{\text{alt}}$ sowie die lineare Näherung $\mathrm{d}V$.

2013 - 05 - 08

6. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(36) Es sei $F(\vec{x}) = 2y + \tan(xy) - \sin z$ und $\vec{x}_0 = (0,1,0)^T$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{3}(2,1,-2)^T$!

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für $\epsilon = 0.01$ berechnen!

(c) In welche Richtung wächst F von $\vec{x}_0$ aus am stärksten? Wie stark?

(d) Für welche Richtungen ist die Richtungsableitung 0?

(37) F und $\vec{x}_0$ seien wie in Aufgabe 36. In welcher Niveaufläche $F = c$ liegt $\vec{x}_0$? Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an diese Niveaufläche auf zwei Arten!

(38) Es sei $f(t,x,y) = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(4t)} = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}$.

(a) Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial t}$! (b) Berechnen Sie Δf in Polarkoordinaten!

(c) Folgern Sie, dass f für $t \neq 0$ die "Wärmeleitungsgleichung" $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f = 0$ erfüllt.

(39) Wenn eine Membran auf dem Kreis $x^2+y^2 = R^2$ eben eingespannt ist und unter der Last $p(x,y)\,[\mathrm{N/m^2}]$ steht, so erfüllt ihre Durchbiegung $f(x,y)\,[\mathrm{m}]$ die Gleichungen $\tau\Delta f = -p$ und $f(\vec{x}) = 0$ für $\|\vec{x}\| = R$.

(a) Welche (gewöhnliche) Differentialgleichung in r ergibt sich im Fall einer Gleichlast $p =$ konstant, wenn f also nur von r und nicht von φ abhängt?

(b) Lösen Sie diese mit dem Ansatz $f(r) = ar^2 + b$.

(c) Wie groß ist die maximale Durchbiegung, wenn τ = Membranspannung = $1\,[\mathrm{N/m}]$, und Gesamtlast $= p \cdot R^2\pi = 1\,[\mathrm{N}]$?

(40) Rechnen Sie f_{xy} in Polarkoordinaten um! Verwenden Sie zur Einübung (im Gegensatz zur Vorlesung) Indices zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen.
Hinweis: Leiten Sie wie in der Vorlesung Formeln für $f_{xy}, r_x, r_y, \varphi_x, \varphi_y, r_{xy}, \varphi_{xy}$ her!

(41) (a) Rechnen Sie f_{yy} in die Koordinaten $v = x + y^2$, $w = x - y^2$ um!

(b) Testen Sie das Ergebnis an $f = vw$!

(42) Rechnen Sie Δf für $f(x,y)$ in die Koordinaten $s = x + y$, $t = xy$ um und testen Sie das Ergebnis an $f(x,y) = x^2y + xy^2$!

Hinweis: Wenn r, φ durch s, t ersetzt werden, so folgt aus S. 30 der Vorlesung die Formel $\Delta f = f_{ss} \cdot \|\nabla s\|^2 + 2f_{st} \cdot \langle \nabla s, \nabla t\rangle + f_{tt} \cdot \|\nabla t\|^2 + f_s \cdot \Delta s + f_t \cdot \Delta t$.

(Z6) In der Niveaufläche $F(x,y,z) = c$ werde jeweils x als Funktion von y,z; y als Funktion von x,z; und z als Funktion von x,y betrachtet. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$

Hinweis: $x\big(y(x,z), z\big) = x$ etc.

2013 - 05 - 15

7. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

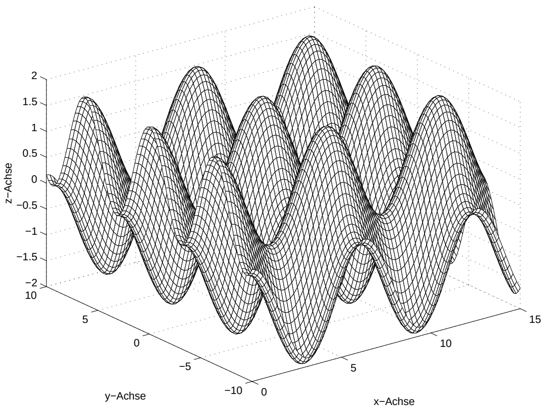
(43) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = 3xy^2 + 2y^3 + x^3 - 6x$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein.

(44) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = y^4 - \frac{1}{2}y^2 - x^2$ am Kreis $x^2 + y^2 \leq 1$ und teilen Sie sie in Maxima und Minima ein!

Hinweise: Verwenden Sie im Inneren die Hessematrix! Der Rand kann mit Parametrisierung oder mit Lagrange untersucht werden

(45) Bestimmmen Sie die Extrema und die Sattelpunkte von $f(x,y) = \cos x + \cos y$.

Hinweis: $\cos k\pi = (-1)^k$; unterscheiden Sie für $P_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ die 3 Fälle 1) k, l gerade; 2) k, l ungerade; 3) eines gerade, eines ungerade!



$z = \cos x + \cos y$

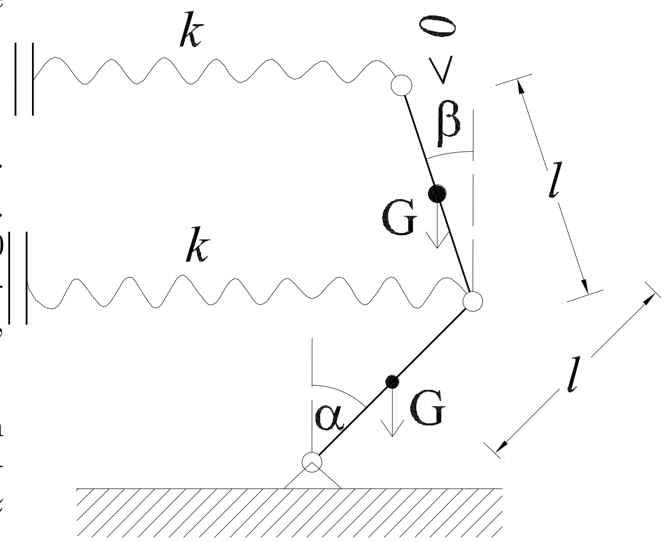
(46) Bestimmen Sie die Punkte des Dreiecks mit den Ecken (0/0), (1/0), (0/1), für welche die Summe der Quadrate der Abstände von den Ecken am größten bzw. am kleinsten ist! Betrachten Sie auch den Rand!

(47) Berechnen Sie mit dem Lagrangeschen Verfahren das Minimum von $2x^3 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $3x^2 + 4y + 2z = 8$.

(48) Für die gezeichnete Stabkette ist die potentielle Energie durch

$$U(\alpha,\beta) = G\frac{l\cos\alpha}{2} + G\Big(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\Big) + \frac{k}{2}(l\sin\alpha)^2 + \frac{k}{2}(l\sin\alpha + l\sin\beta)^2$$

gegeben. Die vertikale Gleichgewichtslage ist *stabil* (d.h. knickt nicht aus), wenn U für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum hat, d.h. wenn $\mathrm{H}\,U(0,0)$ positiv definit ist. Wie groß muss $c = kl/G$ sein, damit das der Fall ist?



Stabkette

(49) Bestimmen Sie den höchsten und den tiefsten Punkt auf der Kurve $x + y + 3z = 0$, $2x^2 + y^2 + 6z^4 = 12$. (Dort ist also $f(x,y,z) = z$ extremal.)

(Z7) Ein Wassergraben hat einen Querschnitt von der Form eines gleichschenkligen Trapezes mit gegebenem Flächeninhalt F. Bestimmen Sie die Form dieses Trapezes so, dass die Summe der drei benetzten Seiten (und damit die Reibung des strömenden Wassers) ein Minimum wird!

2013 - 05 - 22

2. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2013

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) In einem Dreieck wurden die Seite c sowie die anliegenden Winkel α, β gemessen. Es ergab sich $c = 100\,\mathrm{m}$, $\alpha = \beta = 45°$. Bestimmen Sie den möglichen Fehler $\mathrm{d}A$ bei der Flächenberechnung

$$A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 2500\,\mathrm{m}^2,$$

wenn die Messungen nur auf $\mathrm{d}c = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}$, $\mathrm{d}\alpha = 0.01\,\mathrm{rad}$, $\mathrm{d}\beta = 0.02\,\mathrm{rad}$ genau sind!

(2) (a) Rechnen Sie f_y in Polarkoordinaten um!

(b) Überprüfen Sie die Formel für $f(x, y) = \mathrm{e}^{y/x}$!

(3) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an das zweischalige Hyperboloid $4x^2 - \frac{1}{2}y^2 - z^2 = 1$ im Punkt $(1, 2, 1)$ auf zwei Arten!

(4) (a) Rechnen Sie f_{xy} in die Koordinaten $s = x + y$, $t = xy$ um!

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f(x, y) = \sin(xy)$!

(5) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x, y) = x^2y + xy^2 - x^2 - x$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima und Sattelpunkte ein!

(6) Berechnen Sie mit dem Lagrangeschen Verfahren den Maximalwert von xy^2z^3 auf der Fläche $x^4 + y^4 + z^4 = 1$!

<u>Hinweis:</u> $\frac{1}{2} \cdot 3^{-3/4} \approx 0.219$

2013 - 05 - 29

8. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(50) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \arcsin y \\ \sin(xz) \\ \ln(\mathrm{e}^{xz}) \end{pmatrix}$. (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$! (b) Zeigen Sie, dass allgemein $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$ gilt!

(51) Es sei $f(\vec{x}) = x^y + \arctan(xz)$. (a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$! (b) Zeigen Sie, dass allgemein $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$ gilt!

(52) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{x^2+z^2} \\ y + \ln\sqrt{x^2+z^2} \\ \dfrac{yz}{x^2+z^2} + \dfrac{1}{\cos^2 z} \end{pmatrix}$. (a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. (b) Bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(53) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$. (a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ nicht wirbelfrei ist! (b) Versuchen Sie, wie in Aufgabe 52 ein Potential zu bestimmen, und stellen Sie fest, an welcher Stelle der Versuch misslingt!

(54) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ xyz \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}_0)$, $\mathrm{J}\vec{v}$, $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und die lineare Näherung $\vec{l}$ von $\vec{v}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. $\vec{l}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

(b) Setzen Sie speziell $\vec{x} = \vec{x}_0 + \epsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und vergleichen Sie $\vec{v}(\vec{x})$ mit der linearen Näherung $\vec{l}(\vec{x})$.

(55) Das nichtlineare Gleichungssystem

$$v_1(x,y) = x + \arctan y - \frac{3}{4} = 0, \qquad v_2(x,y) = y\mathrm{e}^{4x} - 1 = 0,$$

hat in der Nähe von $\vec{x}_0 = \binom{0}{1}$ eine Nullstelle. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$! (Verwenden Sie $\pi - 3 \approx 0.1416$.)

(56) Es sei $\vec{v}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} y_1 + y_3^2 \\ \sin y_2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{J}(\vec{w}\circ\vec{v}) = (\mathrm{J}\vec{w})\big(\vec{v}(\vec{x})\big)\cdot\mathrm{J}\vec{v}$.

(Z8) Die Funktion $z = \cos x + \cos y$ hat bei $\vec{x}_0 = \binom{\pi}{0}$ einen Sattelpunkt (vgl. Aufg. 45). In der Funktion $f(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(\frac{1}{2}xy) + \frac{x}{5}$ ist dieser Sattelpunkt etwas verschoben. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$ zum Startwert $\vec{x}_0$!

2013 - 06 - 05

9. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(57) Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = S$, vgl. § 22, Bsp. 2.

(a) Schreiben Sie die Reihe als Zahlenreihe an! Was sind $a_3, s_3, a_k, a_n, a_{n-1}$?

(b) Zeigen Sie $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, schreiben Sie damit $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ an, kürzen Sie, und bestimmen Sie s_{999} und S!

(58) Bestimmen Sie die Partialsummen s_n und—im Fall der Konvergenz—die Summe S der geometrischen Reihen (a) $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots$; (b) $1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots$; und (c) $1 - 2 + 4 - 8 + - \cdots$. Was ist jeweils s_4?

(59) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n + 9\sqrt{n}}{2n^3 - 1}$ konvergent ist!

(60) Für welche α ist (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ bzw. (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}$ konvergent?

(61) Wir betrachten die Reihe $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3} = \zeta(3)$.

(a) Zeigen Sie mit dem Integralkriterium, dass $\dfrac{1}{2N^2} \leq \sum\limits_{k=N}^{\infty} \dfrac{1}{k^3} \leq \dfrac{1}{2(N-1)^2}$ gilt!

(b) Ab welchem n gilt nach (a) $|S - s_n| \leq 0.0001$?

(62) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ bedingt konvergent ist! Bis zu welchem n muss man die Reihe summieren, um die Summe der Reihe auf 0.01 genau angeben zu können, d.h. ab wann gilt sicher $|S - s_n| \leq 0.01$?

(63) Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihen

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

(Z9) Berechnen Sie $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$! (Hinweis: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} + \ldots$)

2013 - 06 - 12

10. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(64) (a) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$.

(b) Bis zu welchem n muss man summieren, um $f(-1)$ auf 0.001 genau angeben zu können?

(65) (a) Entwickeln Sie $f(x) = \cos x$ in eine MacLaurinreihe! Was ist ihr Konvergenzradius?

Zusatzfrage: Überprüfen Sie das Ergebnis mit der Eulerschen Formel!

(66) Entwickeln Sie $f(x) = x^3 - 7x^2 + 5x + 12$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 1$ und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren!

(67) Bestimmen Sie mittels $\tan' = 1 + \tan^2$ die MacLaurinreihe von $f(x) = \tan x$ bis zum x^5- Term!

(68) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(1) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ auf 10^{-4} genau!

Hinweis: Setzen Sie für $\sin t$ die MacLaurinreihe ein und integrieren Sie gliedweise!

(69) Berechnen Sie statt mit der Regel von l'Hôpital durch Bestimmung der Taylorpolynome (2. Grades in a, 3. Grades in b) von Zähler und Nenner und Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varrho_n(x)}{x^n} = 0$ die Grenzwerte (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x^2} - \operatorname{sh} x}{\ln(1-x) + \sin x + x^2/2}$.

(70) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{y^2 + \sin x}$ um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bis zu den Termen 2. Ordnung!

(Z10) Leiten Sie die MacLaurinreihe von $f(x) = \arctan x$ aus $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ und der geometrischen Reihe her!

2013 - 06 - 19

11. und letztes Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2013

(71) Die Funktion $f(x,y)$ erfüllt in $\vec{x}_0 = \binom{0}{1}$ das folgende: $f(\vec{x}_0) = 5$, $\nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Hf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f_{xxx}(\vec{x}_0) = f_{xyy}(\vec{x}_0) = 0$, $f_{xxy}(\vec{x}_0) = 1, f_{yyy}(\vec{x}_0) = 5$. Schreiben Sie das Taylorpolynom $s_3(x,y)$ an!

(72) Das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(\sqrt{\pi}, -1)$, $(\sqrt{\pi}, 2)$ ist mit der Dichte $\rho(x,y) = \sin(x^2)$ belegt. Berechnen Sie seine Masse!

(73) Berechnen Sie das statische Moment S_y für das von $y = 1$ und $y = x^2$ im 1. Quadranten begrenzte endliche Gebiet D (Skizze!), das mit der Dichte $\rho(x,y) = \sin y$ belegt ist, indem Sie (a) außen nach x integrieren bzw. (b) außen nach y integrieren!

(74) Skizzieren Sie das durch $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x + y \geq 1$ gegebene Gebiet D und bestimmen Sie seinen Schwerpunkt $\vec{s}$!

(75) Das Gebiet D sei durch $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass dann die statischen Momente von D mit folgenden *einfachen* Integrale

$$S_x = S_2 = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad S_y = S_1 = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden können!

(b) Berechnen Sie so den Schwerpunkt des Gebietes $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \mathrm{e}^x$.

(76) Berechnen Sie die Trägheitsmomente

$$I_x = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad I_y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

für das Dreieck D mit den Ecken $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$! Warum ist $I_x > I_y$?

(77) Berechnen Sie den Schwerpunkt des vom Viertelkreisbogen $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, den Geradenstücken $y - x = 1$, $y + x = -1$, $-1 \leq x \leq 0$, sowie dem Parabelbogen $y = x^2 - 1$, $0 \leq x \leq 1$ begrenzten Flächenstückes. (Skizze!)

<u>Hinweis:</u> Überlegen und verwenden Sie dabei die Formel $\vec{s} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{k} M_i \vec{s}_i$, wenn $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ und $\vec{s}_i$, M_i der Schwerpunkt bzw. die Masse von D_i sind, und $M = \sum_{i=1}^{k} M_i$ die Gesamtmasse ist.

(Z11) Bei der Methode der Monte-Carlo–Integration zur angenäherten Berechnung beispielsweise des Schwerpunktes eines Gebietes D werden mit dem Zufallsgenerator n Punkte in D gewählt und der Mittelwert ihrer Koordinaten gebildet. Testen Sie diese Idee am Computer zur näherungsweisen Berechnung des Schwerpunktes von $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \cos(x+y) \geq xy\}$.

2013 - 06 - 28

3. Klausur zu ‘Mathematik 2’, SoSe 2013

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Durch $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1/x \\ 2yz\cos(y^2z) \\ y^2\cos(y^2z) + z^{-2/3} \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld für $x > 0,\ z > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$, und bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(2) Es sei $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2x_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1y_2 \\ \sin y_1 \\ \ln y_2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v}) = (\mathrm{J}\vec{w})\big(\vec{v}(\vec{x})\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}$ gilt für $x_2 > 0,\ x_3 > 0$.

(3) (a) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n^2}$.

(b) Bis zu welchem n muss man summieren, um $f(-\frac{1}{2})$ auf 0.01 genau angeben zu können?

(4) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe!

(5) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x, y) = \sqrt{\mathrm{e}^x + \sin y}$ um $\vec{x}_0 = \vec{0}$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung!

(6) Das durch $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x + y \geq 1$ gegebene Gebiet D ist mit der Dichte $\rho = 2y$ belegt. Skizze! Berechnen Sie seine Masse M,

(a) indem Sie außen nach x integrieren, (b) indem Sie außen nach y integrieren!