2012 - 03 - 07

1. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(1) Bestimmen Sie die Volumina, die entstehen, wenn die Kurve $y = \mathrm{e}^x, \quad 0 \le x \le 1$, (a) um die $x-$ Achse, (b) um die $y-$ Achse rotiert.

Hinweis zu (b): Schreiben Sie 1 als Faktor ins Integral.

(2) (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \le x \le 1$.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche, die entsteht, wenn die Kurve in (a) um die $x-$ Achse rotiert!

Stellen Sie bei den uneigentlichen Integralen in den Übungen 3, 4 fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall! Machen Sie jeweils eine Skizze!

(3) (a) $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (b) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (c) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$

Hinweis zu (c): $\ln\alpha - \ln\beta = \ln\frac{\alpha}{\beta}$

(4) (a) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (b) $\int\limits_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{cx}\,\mathrm{d}x, \quad c > 0$

Zusatzfrage: Gibt es einen Zusammenhang zwischen (b) und (c) wenn $c = 1$?

(5) (a) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$! Was ergibt sich speziell für $\alpha = \frac{1}{2}$?

(b) Zeigen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \infty$ für $\alpha > 1$!

(c) Machen Sie eine Skizze! (Vgl. Skriptum S. 118)

(6) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{3x^2 y}{\sqrt{1+x^3}}$ zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(7) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = 2x^2 t\,\mathrm{e}^{t^2}$ zum Anfangswert $x(0) = 1$! In welchem Intervall ist $x(t)$ definiert? Was passiert am Rand dieses Intervalls?

(Z1) Untersuchen Sie, welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergent sind, und berechnen Sie diese!

(a) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\int\limits_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ (c) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ (d) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ (e) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(f) $\int\limits_0^\infty x^2\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R}$ (g) $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$ (h) $\int\limits_{\mathrm{e}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)\ln x}$

2012 - 03 - 14

2. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(8) Auf einen Fallschirmspringer wirken Gravitation und Reibung. Wenn die Reibung proportional zu v^2 ist ($v =$ Geschwindigkeit nach unten), so gilt:

$$\begin{aligned}\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} &= m\dot{v}\\ &= \text{Kraft} = mg - av^2\end{aligned}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für $m = 100\,\text{kg}$, $g = 10\,\text{m/sec}^2$, $a = 40\,\text{kg/m}$ und $v(0) = 20\,\text{m/sec}$ (d.h. beim Öffnen des Fallschirms). Wie lange dauert es, bis der Fallschirmspringer auf (a) $10\,\text{m/sec}$, (b) $6\,\text{m/sec}$, (c) $5\,\text{m/sec}$ abgebremst ist?

(9) Ein Stromkabel der Länge $120\,\text{m}$ und mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\text{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\text{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen? (Verwenden Sie $H_0 = 150$ als Startwert für das Newtonverfahren!)

(b) Wie weit hängt das Kabel durch?

(10) Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = x + y$.

(a) Richtungsfeld: Zeichnen Sie in den Punkten (x, y) mit $x = -2, -1, \ldots, 2$, $y = -2, -1, \ldots, 2$ die Steigungen ein!

(b) Kann man in $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$ die Variablen trennen?

(c) Lösung: Überprüfen Sie, dass $y(x) = -1 - x + C\mathrm{e}^x$ Lösungen sind!

(d) Anfangswerte: Bestimmen Sie die Lösungskurven zu $y(0) = -1$ und zu $y(0) = 0$ und zeichnen Sie sie in das Richtungsfeld.

(11) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Hyperbelschar $A = \{y = \frac{C}{x} : C \in \mathbb{R}\}$. Skizze!

(12) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = \pm\sqrt{C + \cos^2 x} : C > -1\}$. Skizze!
<u>Hinweis:</u> $\frac{1}{\sin(x)\cdot\cos x} = \frac{1}{\tan(x)\cdot\cos^2 x}$

(13) Berechnen Sie zu $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + \mathrm{i}$ jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag, und Argument, sowie $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, $\dfrac{z}{w}$. Skizze!

(14) Überprüfen Sie für z, w aus Übung 13 die Gleichungen $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ und $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$, $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

(Z2) Ein Stromkabel mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\text{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\text{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen $20\,\text{m}$ durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen?

(b) Wie lang ist das Kabel?

2012 - 03 - 21

3. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(15) Stellen Sie $z = -1.3 - 1.7\,\mathrm{i}$ in der Form $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ dar und berechnen Sie so z^9!

(16) (a) Berechnen Sie $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, und $\operatorname{Im} z$ für $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$. Skizze!

(b) Stellen Sie z als $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ dar entsprechend 16.2 im Skriptum. Was sind z_1, z_2, z_3?

(17) Leiten Sie die Summensätze für $\cos(x-y), \sin(x-y)$ aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$ her!

(18) Stellen Sie $\cos^4 \varphi$ durch $\cos k\varphi$, $k = 0, 2, 4$, dar und berechnen Sie so $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x\,\mathrm{d}x$!

(19) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\cos 3x = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$ und $\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$. Skizze!

(20) Lösen Sie die Gleichung $z^2 + (2 + 4\,\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$.

(21) (a) Schreiben Sie $w = 7 + 8\,\mathrm{i}$ in der Form $w = \varrho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^6 = 7 + 8\,\mathrm{i}$. Machen Sie den Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$! Bestimmen Sie z_0! Wie lassen sich die übrigen Lösungen z_k, $k = 1, \ldots, 5$, durch z_0 ausdrücken? Skizze!

(Z3) Zerlegen Sie $P(z) = z^3 + (2 + 3\mathrm{i})z^2 + (4 - 3\mathrm{i})z - 1$ in Linearfaktoren!

Hinweise: (a) $P(\mathrm{i}) = 0$; (b) verwenden Sie Übung 20!

2012 - 03 - 28

4. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(22) Überprüfen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = 3$ sowie $y_2(x) = 2\sqrt{x}$ Lösungen der Differentialgleichung $yy'' + {y'}^2 = 0$ sind. Untersuchen Sie dann, ob $y_3 = y_1 + y_2$ auch eine Lösung darstellt, und versuchen Sie das Resultat zu erklären.

(23) Lösen Sie die Differentialgleichungen (a) $y'' + 5y' + 6y = 0$ (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$ jeweils mit den Anfangswerten $y(0) = 4, \quad y'(0) = -3$.

(24) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

(25) Die Masse $m = 2\,[\mathrm{kg}]$ schwingt frei und ohne Reibung unter einer Rückstellkraft mit Federkonstante $c = 8\,[\mathrm{kg/sec}^2]$ und Anfangswerten $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$.

(a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung an!

(b) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Übung 24 an!

(c) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar! Skizze! Was ist die Periode T?

(26) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 4y' + 13y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = -1$, $y'(0) = -4$.

(27) Für eine an einer Feder frei schwingende Masse gilt: $m = 2\,[\mathrm{kg}]$, $r = 8\,[\mathrm{kg/sec}]$, $c = 26\,[\mathrm{kg/sec}^2]$, $x(0) = -1\,[\mathrm{m}]$, $\dot{x}(0) = -4\,[\mathrm{m/sec}]$.

(a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung an!

(b) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Übung 26 an!

(c) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar! Skizze! Was ist die Quasiperiode T'?

(28) An der Masse in Übung 27 greife die Kraft $F(t) = 80\sin(3t)\,[\mathrm{N}]$ an. Bestimmen Sie

(a) $x_{\mathrm{st}} = x_{\mathrm{p}}$ mit dem Ansatz $x_{\mathrm{p}} = a\sin(3t) + b\cos(3t)$; (b) $x_{\mathrm{inh}} = x_{\mathrm{p}} + x_{\mathrm{hom}}$;

(c) Amplitude A und Phasenverschiebung α von x_{st} aus $a - \mathrm{i}b = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

(Z4) Stellen Sie die stationäre Lösung von

$$2\ddot{x} + 8\dot{x} + 26x = 80\sin(3t)$$

(vgl. Übung 28) in der Form $x_{\mathrm{st}}(t) = A\sin(3t - \alpha)$ dar mittels der Formeln der Vorlesung (s. S. 148, 149). Skizzieren Sie die äußere Kraft sowie x_{st}!

2012 - 04 - 18

1. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2012

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Stellen Sie bei den folgenden uneigentlichen Integralen fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall!

(a) $\int\limits_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$ (b) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$

Hinweis: $x^2+x-2 = (x-1)\cdot(x+2)$

(2) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Kurvenschar $A = \{y = \pm\sqrt{C + 2\ln|\cos x|} : C \in \mathbb{R}\}$.

Hinweis: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Longrightarrow (\ln|\cos x|)' = -\frac{\sin x}{\cos x}$

(3) Stellen Sie $\sin^5\varphi$ durch $\sin(k\varphi)$, $k = 1, 3, 5$, dar!

Hinweis: $\sin\varphi = \frac{1}{2\mathbf{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})$

(4) Berechnen Sie $\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 3x\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\sin 3x = \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$ und $\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 3x\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$.

(5) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 6y' + 13y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

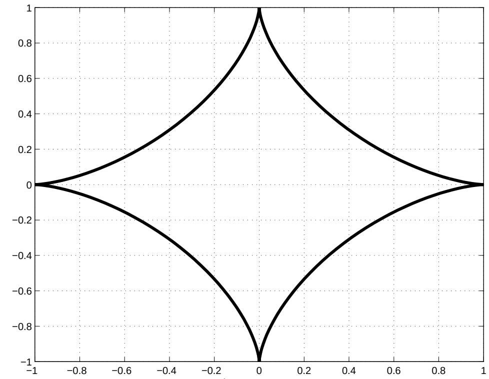
(6) Für eine an einer Feder frei schwingende Masse gilt: $m = 2\,[\mathrm{kg}]$, $r = 12\,[\mathrm{kg/sec}]$, $c = 26\,[\mathrm{kg/sec^2}]$, $x(0) = 1\,[\mathrm{m}]$, $\dot{x}(0) = -1\,[\mathrm{m/sec}]$.

(a) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Aufgabe 5 an!

(b) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar!

2012 - 04 - 25

5. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012



Astroide

(29) Die *Astroide* (ἄστϱον = Stern) ist durch $\vec{x} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}, \|\dot{\vec{x}}\|, y', \ddot{\vec{x}}, \kappa,$ und M (a) allgemein, sowie (b) speziell für $t = \frac{\pi}{4}$.

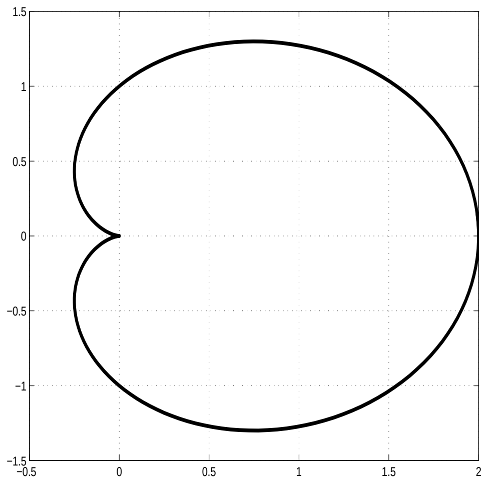
(30) (a) Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Astroide.
(b) Parametrisieren Sie den Teil im ersten Quadranten (d.h. $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$) nach der Bogenlänge.

(31) Ein Straßenstück beschreibt einen Viertelbogen in der Form einer Klothoide

$$x(s) = \int_0^s \cos\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad y(s) = \int_0^s \sin\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad 0 \le s \le S,$$

und hat also im Punkt $\big(x(S), y(S)\big)$ eine senkrechte Tangente, d.h. $\dot{x}(S) = 0$.
(a) Bestimmen Sie a und S so, dass für $s = S$ der Krümmungsradius 10 m beträgt. (b) Wie lang ist das Straßenstück?

(32) Eine in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegebene Kurve erfüllt $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$, wobei φ die Rolle des Parameters t spielt.
(a) Setzen Sie $\vec{e}_1 = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $\vec{e}_2 = \binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ und zeigen Sie $\dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_1 + r\vec{e}_2$, $\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r)\vec{e}_1 + 2\dot{r}\vec{e}_2$.
(b) Folgern Sie $\mathrm{d}s = \|\dot{\vec{x}}\|\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi$ und $\kappa = \dfrac{|\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} = \dfrac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}|}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}$.



Kardioide

(33) Die *Herzlinie* oder *Kardioide* (καϱδία = Herz) ist in Polarkoordinaten durch $r = 1 + \cos\varphi$ gegeben.
(a) Bestimmen Sie die Punkte mit horizontaler bzw. mit vertikaler Tangente.
(b) Bestimmen Sie die Länge der Kardioide!
Hinweise: Tangente horizontal $\Leftrightarrow y' = 0 \quad \Rightarrow \dot{y} = 0$
Tangente vertikal $\Leftrightarrow y' = \infty \quad \Rightarrow \dot{x} = 0$
Verwenden Sie für (b) Aufgabe 32 (b)!

(34) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $z = \dfrac{\sin x}{y^2} + \dfrac{y^2}{x} + x^y$.

(35) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen nach $x, y, z, a,$ und b von

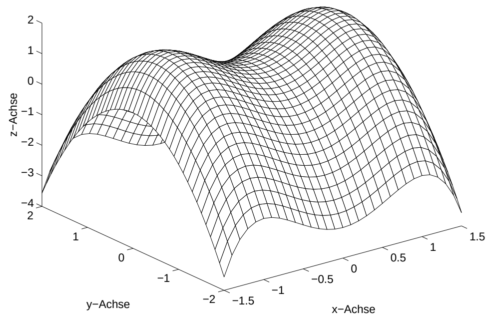
$$u = f(x, y, z, a, b) = \arctan(axy) + z\arcsin(b + \cos a).$$

(Z5) Wenn der Kreis $x^2 + (y - a)^2 \le a^2$ auf der $x-$Achse ohne Schlupf abrollt, so beschreibt der ursprünglich in $(0, a(1 - \lambda))$, $0 < \lambda < 1$, gelegene Punkt R eine *verkürzte Zykloide* oder *Trochoide* (τϱοχός = Rad) .
(a) Zeigen Sie, dass ihre Gleichung durch $\vec{x}(t) = a\begin{pmatrix} t - \lambda\sin t \\ 1 - \lambda\cos t \end{pmatrix}$ gegeben ist.
(b) Berechnen Sie ihre Krümmung für $t = 0$.

2012 - 05 - 02

6. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(36) Es sei $f(x,y) = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$. Bestimmen Sie die Tangentialebenen an $z = f(x,y)$ (a) in $\vec{x}_0 = \binom{1/2}{1}$, (b) in $\vec{x}_0 = \vec{0}$, (c) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$.



$z = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$

(37) In einem Dreieck wurden die zwei Seiten x, y sowie der eingeschlossene Winkel α gemessen. Es ergab sich $x = 100\,\mathrm{m}$, $y = 200\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30°$. Bestimmen Sie den möglichen Fehler $\mathrm{d}A$ bei der Flächenberechnung $A = \frac{1}{2}xy\sin\alpha = 5\,000\,\mathrm{m}^2$, wenn die Messungen nur auf $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \pm 0.5\,\mathrm{m}$, sowie $\mathrm{d}\alpha = \pm 1°$ genau sind!

Hinweis: Warum sollte man in Radiant rechnen?

(38) Es sei $z = f(x,y) = xy - y\ln x$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f\circ\vec{x}}{\mathrm{d}t}$
(a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(39) Es sei $\varphi(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ für $x > 0$ und $x(s,t) = \sqrt{st}$, $y(s,t) = s\sqrt{t}$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel!

(40) Es seien Funktionen der folgenden Form gegeben: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1(s,u)$, $x_2(s)$, $x_3(t,y)$, $x_4(y,u)$, $u(s,y)$. Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ mit der Kettenregel aus? Skizzieren Sie das "Baumdiagramm"!

(41) r, φ seien Polarkoordinaten. (a) Drücken Sie f_x durch f_r, f_φ aus!
(b) Was folgt daraus für f_x, wenn $f = \varphi\arcsin(r)$, $r = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$?

(42) Es sei $F(\vec{x}) = x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}$ und $\vec{x}_0 = (1, 3, -2)^T$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$!

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für $\epsilon = \frac{1}{100}$ berechnen!

(c) In welche Richtung wächst F von $\vec{x}_0$ aus am stärksten? Wie stark?

(d) In welchen Richtungen ist die Richtungsableitung 0?

(Z6) Bei der Verformung eines Kegels vergrößert sich sein Grundkreisradius $r = 30\,\mathrm{cm}$ auf $30.1\,\mathrm{cm}$ und verringert sich seine Höhe h von $60\,\mathrm{cm}$ auf $59.5\,\mathrm{cm}$. Berechnen Sie die exakte Volumenänderung $\Delta V = V_{\mathrm{neu}} - V_{\mathrm{alt}}$ sowie die lineare Näherung $\mathrm{d}V$.

2012 - 05 - 09

7. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(43) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid $x^2+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=3$ im Punkt $(1,3,-2)$ auf zwei Arten.

(44) Es seien $F(x,y)=xy$ und die neun Punkte (i,j), $i,j\in\{-1,0,1\}$ gegeben.

(a) Zeichnen Sie die (drei) Niveaulinien von F, die durch diese Punkte gehen!

(b) Zeichnen Sie die Gradienten in diesen neun Punkten ein!

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F,\binom{1}{1},\vec{r})$ für $\vec{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$.

(45) Berechnen Sie f_x, f_z, f_{xz}, f_{zx}, und f_{xx} für $f(x,y,z)=y\arccos z+\mathrm{sh}(xz)$.

(46) Es sei $f(t,x,y)=\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(4t)}=\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}$.

(a) Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial t}$! (b) Berechnen Sie Δf in Polarkoordinaten!

(c) Folgern Sie, dass f für $t\neq 0$ die "Wärmeleitungsgleichung" $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)f=0$ erfüllt.

(47) Wenn eine Membran auf dem Kreis $x^2+y^2=R^2$ eben eingespannt ist und unter der Last $p(x,y)\,[\mathrm{N/m^2}]$ steht, so erfüllt ihre Durchbiegung $f(x,y)\,[\mathrm{m}]$ die Gleichungen $\tau\Delta f=-p$ und $f(\vec{x})=0$ für $\|\vec{x}\|=R$.

(a) Welche (gewöhnliche) Differentialgleichung in r ergibt sich im Fall einer Gleichlast $p=$ konstant, wenn f also nur von r und nicht von φ abhängt?

(b) Lösen Sie diese mit dem Ansatz $f(r)=ar^2+b$.

(c) Wie groß ist die maximale Durchbiegung, wenn τ = Membranspannung = $1\,[\mathrm{N/m}]$, und Gesamtlast $=p\cdot R^2\pi=1\,[\mathrm{N}]$?

(48) Rechnen Sie f_{xx} in Polarkoordinaten um! Verwenden Sie zur Einübung (im Gegensatz zur Vorlesung) Indices zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen.
Hinweis: Leiten Sie wie in der Vorlesung Formeln für $f_{xx}, r_x, \varphi_x, r_{xx}, \varphi_{xx}$ her!

(49) Rechnen Sie f_{xy} in die Koordinaten $u=y^2+\sin x$, $v=y\ln x$ um, und testen Sie das Ergebnis an $f=v^2$. (Die Faktoren vor f_{uu}, f_{uv} etc. können hier als Funktionen von x,y stehenbleiben.)

(Z7) Die Differentialgleichung der Torsionsfunktion ist $\Delta\psi=-2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(r,\varphi)=\dfrac{a}{2}(2R\cos\varphi-r)\left(\dfrac{r}{a}-\dfrac{a}{r}\right)$ eine Lösung dieser Gleichung ist! ($0<a<R$ sind Konstante und r,φ sind Polarkoordinaten.)

(b) Wo ist $\psi=0$? (Dies ist die Begrenzungslinie des verdrillten Querschnittes, der hier einer Welle mit halbkreisförmiger Keilnut entspricht.)

2012 - 05 - 16

8. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(50) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4y^3 + 4x^2y + y^2$ am Kreis $x^2 + y^2 \le 1$.

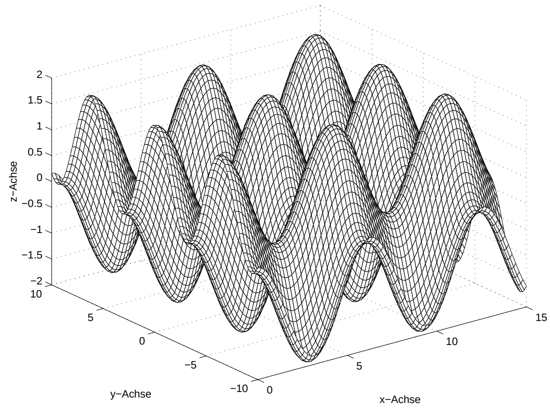
Hinweise: Betrachten Sie (a) das Innere des Kreises und (b) den Kreisrand! Die Gleichung $f(x,y) = 4y\left[x^2 + (y + \frac{1}{8})^2 - \frac{1}{64}\right]$ zeigt, wo f positiv bzw. negativ ist. Daraus sieht man, dass im Ursprung kein Extremum sein kann.

(51) Eine oben offene, rechteckige Schachtel soll ein Volumen von $32\,\mathrm{dm}^3$ besitzen. Bestimmen Sie die Maße dieser Schachtel so, dass ihre Oberfläche minimal wird!

(52) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!

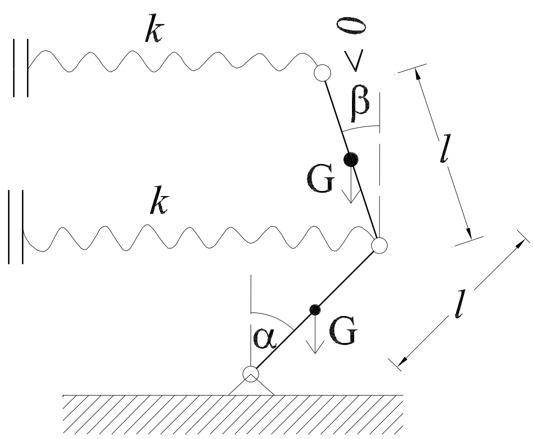
(53) Bestimmmen Sie die Extrema und die Sattelpunkte von $f(x,y) = \cos x + \cos y$.

Hinweis: $\cos k\pi = (-1)^k$; unterscheiden Sie für $P_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ die 3 Fälle 1) k, l gerade; 2) k, l ungerade; 3) eines gerade, eines ungerade!



$z = \cos x + \cos y$

(54) Für die gezeichnete Stabkette ist die potentielle Energie durch
$$U(\alpha,\beta) = G\frac{l\cos\alpha}{2} + G\left(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\right) + \frac{k}{2}(l\sin\alpha)^2 + \frac{k}{2}(l\sin\alpha + l\sin\beta)^2$$
gegeben. Die vertikale Gleichgewichtslage ist *stabil* (d.h. knickt nicht aus), wenn U für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum hat, d.h. wenn $\mathrm{H}\,U(0,0)$ positiv definit ist. Wie groß muss $c = kl/G$ sein, damit das der Fall ist?



Stabkette

(55) Lösen Sie Übung 51 als Extremwertaufgabe mit einer Nebenbedingung, d.h. bestimmen Sie die Extrema von $xy + 2xz + 2yz$ unter der Nebenbedingung $xyz = 32$ mit dem Lagrangeschen Verfahren.

(56) Bestimmen Sie die zwei stationären Punkte von $f(x,y,z) = 2x + x\mathrm{e}^{-y^2-z^2} - x^3$ und klassifizieren Sie sie mit dem Jacobi-Kriterium (S. 39).

(Z8) Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $x + y = 1$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ mit dem größten bzw. kleinsten Abstand vom Ursprung, indem Sie eine Extremwertaufgabe mit zwei Nebenbedingungen lösen!

2012 - 05 - 23

2. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2012

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Die Neilsche Parabel ist durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/3 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$, gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}, \|\dot{\vec{x}}\|, y', \ddot{\vec{x}}, \kappa = \dfrac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}$.

(b) Berechnen Sie ihre Länge! (Heben Sie aus $\sqrt{t^2 + t^4}$ den Faktor t heraus; $\sqrt{2} \approx 1.4$)

(2) Messungen ergaben $x = 1$, $y = 2$, $\alpha = 45°$. Bestimmen Sie den (linearen) Fehler $\mathrm{d}f$ auf 2 Dezimalen, wenn $f = x^y \tan\alpha$ und die Messungen auf $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = 0.01$ und $\mathrm{d}\alpha = 1° \approx 0.0175$ genau sind.

(3) Es sei $\varphi(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ für $x > 0$ und $x(s, t) = st$, $y(s, t) = st^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel!

(4) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z^2 - y \ln x = 4$ im Punkt $(1, 2, -2)$ auf zwei Arten. Überprüfen Sie, dass sich dasselbe ergibt!

(5) Rechnen Sie f_{yy} in die Koordinaten $u = x + \sin y$, $w = \mathrm{e}^x + 2y$ um. (Die Faktoren vor f_{uu}, f_{uw} etc. können als Funktionen von x, y stehen bleiben.)

(6) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!

2012 - 05 - 30

9. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(57) (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ für das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ \frac{y}{x}\sin z \\ \arctan(x+z) \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass allgemein $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$ gilt!

(58) Durch $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} z\cos(xz) \\ 2yz \\ x\cos(xz) + y^2 - 2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(59) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ nicht wirbelfrei ist! Versuchen Sie, wie in Übung 58 ein Potential zu bestimmen, und stellen Sie fest, an welcher Stelle der Versuch misslingt!

(60) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ xyz \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}_0)$, $\mathrm{J}\vec{v}$, $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und die lineare Näherung von $\vec{v}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. $\vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

(b) Setzen Sie speziell $\vec{x} = \vec{x}_0 + \epsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und vergleichen Sie $\vec{v}(\vec{x})$ mit der linearen Näherung für $\epsilon = 0.1$.

(61) Es sei $\vec{v}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} y_1 + y_3^2 \\ \sin y_2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{J}(\vec{w}\circ\vec{v}) = (\mathrm{J}\vec{w})\big(\vec{v}(\vec{x})\big)\cdot\mathrm{J}\vec{v}$.

(62) Lösen Sie das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$v_1(x,y) = \sqrt[3]{x+2y} - \cos(xy) = 0, \qquad v_2(x,y) = \frac{x}{3} + y + \arctan(xy) = 0,$$

das in der Nähe von $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$!

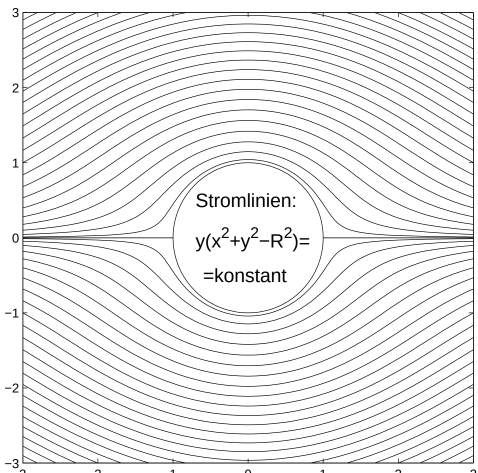
(63) Die Funktion $z = \cos x + \cos y$ hat bei $\vec{x}_0 = \binom{\pi}{0}$ einen Sattelpunkt (vgl. Aufg. 53). In der Funktion $f(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(\frac{1}{2}xy) + \frac{x}{5}$ ist dieser Sattelpunkt etwas verschoben. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$ zum Startwert $\vec{x}_0$!

(Z9) Das Potential einer inkompressiblen, wirbelfreien Strömung um den Zylinder $x^2+y^2 \le R^2$ ist durch $f(x,y,z) = c\Big(x + \dfrac{R^2x}{x^2+y^2}\Big)$ gegeben. ($c =$ Grenzgeschwindigkeit in Richtung der $x-$ Achse im Unendlichen.)

(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \operatorname{grad} f$!

(b) Zeigen Sie $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

(c) Skizzieren Sie $\vec{v}$ an der Oberfläche des Zylinders $x^2+y^2 = R^2$!



Umströmter Zylinder $x^2+y^2 = R^2$, $R = 1$

2012 - 06 - 06

10. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(64) Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = S.$

(a) Schreiben Sie die Reihe als Zahlenreihe an! Was sind $a_3, s_3, a_k, a_n, a_{n-1}$?

(b) Zeigen Sie $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, schreiben Sie damit $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ an, kürzen Sie, und bestimmen Sie s_{999} und S!

(65) Bestimmen Sie die Partialsummen s_n und—im Fall der Konvergenz—die Summe S der geometrischen Reihen (a) $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots$; (b) $1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots$; und (c) $1 - 2 + 4 - 8 + - \cdots$. Was ist jeweils s_3?

(66) Untersuchen Sie (a) mit dem Vergleichskriterium (b) mit dem Integralkriterium, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+1}$ konvergiert!

(67) Untersuchen Sie mit dem Vergleichskriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n + 9\sqrt{n}}{2n^3 - 1}$.

(68) Zeigen Sie mit dem Integralkriterium, daß $1.0625 = \dfrac{17}{16} \le \zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} \le \dfrac{53}{48} \approx 1.104$.

(69) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ bedingt konvergent ist!

(70) Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihen

$$\text{(a)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \qquad\qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

(Z10) Zeigen Sie: (a) Die Reihe $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + - \cdots$ erfüllt $s_2 = \dfrac{1}{2} < S < \dfrac{5}{6} = s_3$.

(b) Die daraus durch Umordnung entstandene Reihe $\tilde{S} = \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\right) - \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11}\right) - \dfrac{1}{6} + - \cdots$ erfüllt (mit dieser Klammerung) auch das Leibnizkriterium und daher ist $\tilde{s}_2 = \dfrac{5}{6} < \tilde{S} < \dfrac{4}{3} = \tilde{s}_1$ und $S \neq \tilde{S}$.

Hinweis zu (b): $\tilde{S}$ hat die Form $\tilde{S} = \cdots - \dfrac{1}{2k} + \left(\dfrac{1}{4k+1} + \dfrac{1}{4k+3}\right) - \dfrac{1}{2k+2} + \cdots$.

Bemerkung: Bei bedingt konvergenten Reihen kann die Summe durch Umordnung jeden beliebigen Wert annehmen gemäß dem Spruch "*Durch Umordnung kann jede beliebige Unordnung erzeugt werden*".

2012 - 06 - 13

11. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(71) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden zwei Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 2^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(72) (a) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

(b) Berechnen Sie $f(x)$ aus der geometrischen Reihe! Was ist z.B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots$?

(73) Berechnen Sie die ersten zwei nicht verschwindenden Glieder der MacLaurinreihe von $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Was ist die Schmiegeparabel an $y = f(x)$ bei $x_0 = 0$?

(74) (a) Bestimmen Sie die MacLaurinreihe von $\operatorname{ch} x$ durch Differenzieren!

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis mittels der Formel $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

(75) Entwickeln Sie $\ln x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 2$!

Zusatzfrage: Was ist das Konvergenzintervall dieser Reihe?

(76) Berechnen Sie statt mit der Regel von l'Hôpital durch Bestimmung der Taylorpolynome (3. Grades in a, b; 4. Grades in c) von Zähler und Nenner und Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\varrho_n(x)}{x^n} = 0$ die Grenzwerte (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^{x^2} - \sin x}{\arctan x - \sin x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{\operatorname{ch} x - \cos x + \ln(1 - x^2)}$.

(77) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(\frac{1}{2})$ auf 10^{-4} genau!

Hinweis: Setzen Sie für $\arctan t$ die MacLaurinreihe ein und integrieren Sie gliedweise!

(Z11) (a) Zeigen Sie, dass der Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen a und b (mit $a \geq b$) durch $U(\epsilon) = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ gegeben ist, wobei $\epsilon^2 = 1 - (b^2/a^2)$. ($\epsilon$ wird *Exzentrizität* der Ellipse genannt; $U(\epsilon)$ heißt *elliptisches Integral.*)

(b) Nähern sie $U(\epsilon)$ durch ein Polynom 4. Grades in ϵ an!
(Hinweis und Ergebnis: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $U(\epsilon) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t$, $U(\epsilon) \approx 2a\pi\big(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{3}{64}\epsilon^4\big)$)

2012 - 06 - 20

12. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2012

(78) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2 y$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und überprüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren!

(79) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ um $(0,0)$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung!

(80) Das Hyperbelsegment

$$D : x^2 - y^2 \geq 1, \qquad y \geq 0, \qquad 1 \leq x \leq 2,$$

ist mit der Dichte $\rho(x,y) = \dfrac{y}{x}$ belegt. Machen Sie eine Skizze und berechnen Sie die Masse $M = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, indem Sie außen nach x integrieren.

(81) Berechnen Sie die Masse M in Aufgabe 80, indem Sie außen nach y integrieren!

(82) Skizzieren Sie das durch $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x + y \geq 1$ gegebene Gebiet D und bestimmen Sie seinen Schwerpunkt $\vec{s}$!

(83) Das Gebiet D sei durch $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass dann die statischen Momente von D mit folgenden *einfachen* Integrale

$$S_x = S_2 = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad S_y = S_1 = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden können!

(b) Berechnen Sie so den Schwerpunkt des Gebietes $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \cos x$.

(84) Die Trägheitsmomente sind durch

$$I_x = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad I_y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gegeben, D sei wie in der Aufgabe 83.

(a) Zeigen Sie, dass $I_x = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x)^3}{3}\,\mathrm{d}x$ und $I_y = \displaystyle\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie I_x, I_y für das Dreieck $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

(Z12) Berechnen Sie $\iint_D \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für das Dreieck D mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(\sqrt{\pi}, -1)$, $(\sqrt{\pi}, 2)$.

2012 - 06 - 27

3. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2012

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Durch $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4xy\,\mathrm{e}^{2x^2} \\ \frac{z}{y} + \mathrm{e}^{2x^2} \\ \sqrt{z} + \ln y \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld für $y > 0,\ z > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, und bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

(2) Lösen Sie das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$v_1(x,y) = y\mathrm{e}^x - \arcsin(xy) - 1.1 = 0, \qquad v_2(x,y) = \ln(x+y^2) + \tan(xy) + 0.2 = 0,$$

das in der Nähe von $\vec{x}_0 = \binom{0}{1}$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$!

(3) (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

(b) Ist die Reihe für $x = -1$ konvergent?

(c) Bis zu welchem n muß man summieren, um $f(-1)$ auf 0.2 genau angeben zu können?

(4) Entwickeln Sie $f(x) = \sin x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Schreiben Sie am Schluss die Reihe in der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ldots$ an!

(5) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{x + 2\sin y}$ um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung!

(6) Das von der Geraden $x = 1$ sowie der Parabel $y = x^2$ im 1. Quadranten eingeschlossene Gebiet D ist mit der Dichte $\rho(x,y) = x\cos y$ belegt. Skizze!
Berechnen Sie seine Masse M,

(a) indem Sie außen nach x integrieren, (b) indem Sie außen nach y integrieren!

<u>Hinweis:</u> $\cos 1 \approx 0.54$