2008 - 03 - 05

1. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(1) Überprüfen Sie, ob die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ positiv definit ist,

(a) durch Bestimmung der Eigenwerte, (b) mit Hilfe des Jacobi'schen Kriteriums.

(2) Was für eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ ist $x_2 = \frac{1}{x_1}$ bzw. die Gleichung $x_1 x_2 = 1$? Bestimmen Sie dazu eine symmetrische Matrix $\mathbf{A}$, sodass $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$ der Gleichung $x_1 x_2 = 1$ entspricht, und führen Sie eine Hauptachsentransformation durch.

(3) Zeigen Sie $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ (b) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

(4) Berechnen Sie $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2 + 2x + 3}\, \mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2+1}$. Nach der Substitution $u = \operatorname{sh} v$ werden die Gleichungen $\operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} 2v)$, $\operatorname{sh} 2v = 2 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v$, und $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ verwendet.

(5) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $y = 2x - 4$ eingeschlossen wird, durch Integration (a) nach x; (b) nach y.

Hinweis zu (a): Unterteilen Sie die Integration bei $x = 1$.

(6) Bestimmen Sie die Volumina, die entstehen, wenn die Kurve $y = \mathrm{e}^x$, $0 \le x \le 1$, (a) um die $x-$Achse, (b) um die $y-$Achse rotiert.

Hinweis zu (b): Schreiben Sie 1 als Faktor ins Integral.

(7) (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le 1$.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche, die entsteht, wenn die Kurve in (a) um die $x-$Achse rotiert!

(Z1) Bei einem eingespannten Kragträger $(0 \le x \le l,\ -b \le y \le b,\ 0 \le z \le h,\ l^2 \ge 2b^2)$ unter der Endlast P (in $y-$Richtung) ist $S = a \begin{pmatrix} 2(l-x)y & y^2 - b^2 \\ y^2 - b^2 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \dfrac{3P}{4hb^3}$.
Wie groß ist die maximale Normalspannung, und bei welchen x, y tritt sie auf?

2. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

Stellen Sie bei den uneigentlichen Integralen in den Übungen 8, 9 fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall! Machen Sie eine Skizze!

(8) (a) $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (b) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (c) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$

Hinweis zu (c): $\ln\alpha - \ln\beta = \ln\frac{\alpha}{\beta}$

(9) (a) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (b) $\int\limits_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{cx}\,\mathrm{d}x, \quad c>0$

Zusatzfrage: Gibt es einen Zusammenhang zwischen (b) und (c) wenn $c=1$?

(10) Es sei $f : [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$.

(a) Ist die Fläche zwischen $y=f(x)$ und der $x-$Achse endlich?

(b) Was ist das Volumen des Drehkörpers, der sich bei Rotation der Kurve $y=f(x)$ um die $x-$Achse ergibt?

(c) Ist die Oberfläche des Drehkörpers in (b) endlich?

Zusatzfrage zu (c): Was ist die Oberfläche für $1 \le x \le b$?

(11) (a) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ für $0<\alpha<1$! Was ergibt sich speziell für $\alpha=\frac{1}{2}$?

(b) Zeigen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \infty$ für $\alpha>1$!

(c) Machen Sie eine Skizze! (Vgl. Skriptum S. 118)

(12) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{y\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$ zum Anfangswert $y(0)=1$.

(13) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = 2x^2 t\,\mathrm{e}^{t^2}$ zum Anfangswert $x(0)=1$! In welchem Intervall ist $x(t)$ definiert? Was passiert am Rand dieses Intervalls?

(14) Auf einen Fallschirmspringer wirken Gravitation und Reibung. Wenn die Reibung proportional zu v^2 ist ($v=$ Geschwindigkeit nach unten), so gilt:

$$\begin{aligned}\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} &= m\dot{v}\\ &= \text{Kraft} = mg - av^2\end{aligned}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für $m=100\,\mathrm{kg}$, $g=10\,\mathrm{m/sec^2}$, $a=40\,\mathrm{kg/m}$ und $v(0)=20\,\mathrm{m/sec}$ (d.h. beim Öffnen des Fallschirms). Wie lange dauert es, bis der Fallschirmspringer auf (a) $10\,\mathrm{m/sec}$, (b) $6\,\mathrm{m/sec}$, (c) $5\,\mathrm{m/sec}$ abgebremst ist?

(Z2) Untersuchen Sie, welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergent sind, und berechnen Sie diese!

(a) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\int\limits_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ (c) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ (d) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ (e) $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(f) $\int\limits_0^\infty x^2\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad a\in\mathbb{R}$ (g) $\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$ (h) $\int\limits_{\mathrm{e}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)\ln x}$

3. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(15) Ein Stromkabel der Länge $120\,\mathrm{m}$ und mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\mathrm{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\mathrm{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen?

(b) Wie weit hängt das Kabel durch?

(16) Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = x + y$.

(a) Richtungsfeld: Zeichnen Sie in den Punkten (x, y) mit $x = -2, -1, \ldots, 2$, $y = -2, -1, \ldots, 2$ die Steigungen ein!

(b) Kann man in $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$ die Variablen trennen?

(c) Lösung: Überprüfen Sie, dass $y(x) = -1 - x + C\mathrm{e}^x$ Lösungen sind!

(d) Anfangswerte: Bestimmen Sie die Lösungskurven zu $y(0) = -1$ und zu $y(0) = 0$ und zeichnen Sie sie in das Richtungsfeld.

(17) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Hyperbelschar $A = \{y = \frac{C}{x} : C \in \mathbb{R}\}$. Skizze!

(18) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = \pm\sqrt{C + \cos^2 x} : C > -1\}$. Skizze!
Hinweis: $\frac{1}{\sin(x)\cdot\cos x} = \frac{1}{\tan(x)\cdot\cos^2 x}$

(19) Berechnen Sie zu $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + \mathrm{i}$ jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag, und Argument, sowie $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, $\dfrac{z}{w}$. Skizze!

(20) Überprüfen Sie für z, w aus Übung 19 die Gleichungen $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ und $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$, $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

(21) Stellen Sie $z = -1.3 - 1.7\,\mathrm{i}$ in der Form $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)$ dar und berechnen Sie damit z^9!

Hinweis: $|z^9| = |z|^9$ etc.

(Z3) Ein Stromkabel mit $\dfrac{\text{Gewicht}}{\text{Länge}} = \sigma = 3\,\mathrm{N/m}$ hängt zwischen zwei $100\,\mathrm{m}$ entfernten, gleich hohen Stützen $20\,\mathrm{m}$ durch.

(a) Wie groß sind die Horizontal- bzw. die Vertikalkraft in den Stützen?

(b) Wie lang ist das Kabel?

4. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(22) (a) Berechnen Sie $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, und $\operatorname{Im} z$ für $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$. Skizze!

(b) Stellen Sie z als $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ dar entsprechend 16.2 im Skriptum. Was sind z_1, z_2, z_3?

(23) Leiten Sie die Summensätze für $\cos(x-y)$, $\sin(x-y)$ aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$ her!

(24) (a) Stellen Sie $\sin^5\varphi$ durch $\sin\varphi$, $\sin 3\varphi$ und $\sin 5\varphi$ dar.

(b) Berechnen Sie damit $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 x \, \mathrm{d}x$!

Zusatzfrage: Wie lässt sich das Integral mit $\sin^5 x = (1-\cos^2 x)^2 \sin x$ überprüfen?

(25) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 3x \, \mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\cos 3x = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$ und $\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 3x \, \mathrm{d}x = \operatorname{Re} \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \, \mathrm{d}x$. Skizze!

(26) Lösen Sie die Gleichung $z^2 + (2+4\,\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$.

(27) (a) Schreiben Sie $w = 7 + 8\,\mathrm{i}$ in der Form $w = \varrho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^6 = 7 + 8\,\mathrm{i}$. Machen Sie den Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$! Bestimmen Sie z_0! Wie lassen sich die übrigen Lösungen z_k, $k = 1, \ldots, 5$, durch z_0 ausdrücken? Skizze!

(28) Zerlegen Sie $P(z) = z^3 + (2+3\mathrm{i})z^2 + (4-3\mathrm{i})z - 1$ in Linearfaktoren!

Hinweise: (a) $P(\mathrm{i}) = 0$; (b) verwenden Sie Übung 26!

(Z4/1) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \sin(\beta x) \, \mathrm{d}x$ für $\alpha < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Eulerschen Formeln (d.h. wie in Übung 25).

(Z4/2) Lösen Sie die Gleichung $z^2 = -3 + 5\,\mathrm{i}$ mit dem Ansatz $z = a + \mathrm{i}\,b$ und zeigen Sie, dass ${}_1z_2 = \pm\left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{34}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3+\sqrt{34}}{2}}\right)$. (Vgl. auch Übung 26.)

5. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(29) Lösen Sie die Differentialgleichungen (a) $y''+5y'+6y=0$ (b) $y''+4y'+4y=0$.

(30) Lösen Sie die Differentialgleichung $y''+4y'+13y=0$ mit den Anfangswerten $y(0)=-1$, $y'(0)=-4$.

(31) Für eine an einer Feder frei schwingende Masse gilt: $m=2\,[\text{kg}]$, $r=8\,[\text{kg/sec}]$, $c=26\,[\text{kg/sec}^2]$, $x(0)=-1\,[\text{m}]$, $\dot{x}(0)=-4\,[\text{m/sec}]$.

(a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung an!

(b) Schreiben Sie die Lösung $x(t)$ nach Übung 30 an!

(c) Stellen Sie die Lösung mit Phasenverschiebung dar! Skizze! Was ist T'?

(32) An der Masse in Übung 31 greife die Kraft $F(t)=80\sin(3t)\,[\text{N}]$ an. Bestimmen Sie

(a) $x_{\text{st}}=x_{\text{p}}$ mit dem Ansatz $x_{\text{p}}=a\sin(3t)+b\cos(3t)$; (b) $x_{\text{inh}}=x_{\text{p}}+x_{\text{hom}}$;

(c) Amplitude A und Phasenverschiebung α von x_{st} aus $a-\mathrm{i}b=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

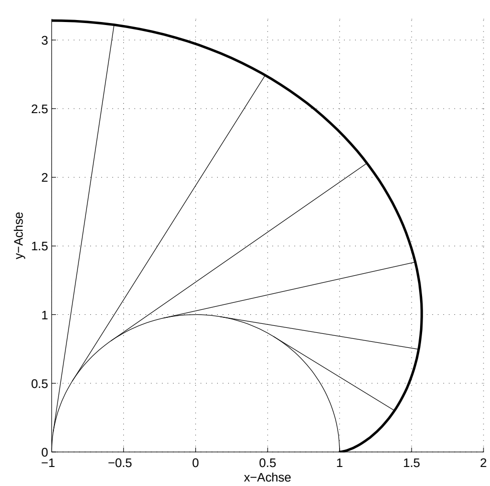
(33) Stellen Sie die stationäre Lösung von

$$2\ddot{x}+8\dot{x}+26x=80\sin(3t)$$

(vgl. Übung 32) in der Form $x_{\text{st}}(t)=A\sin(3t-\alpha)$ dar mittels der Formeln der Vorlesung (s. S. 148, 149). Skizzieren Sie die äußere Kraft sowie x_{st}!

(34) Der Beginn der *Kreisevolvente* ist durch
$\vec{x}:[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2: t\longmapsto\begin{pmatrix}\cos t+t\sin t\\ \sin t-t\cos t\end{pmatrix}$ gegeben.
Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}$, $\|\dot{\vec{x}}\|$, y', $\ddot{\vec{x}}$, κ (a) allgemein, sowie (b) speziell für $t=\frac{\pi}{2}$. Skizzieren Sie $\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),\ddot{\vec{x}}(t)$ für $t=\frac{\pi}{2}$! Wo ist der Krümmungsmittelpunkt M?
Zusatzfrage: Erklären Sie, wie die Parametrisierung aus dem Abwickeln eines Fadens am Kreis entsteht!

(35) (a) Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Kreisevolvente in Üb. 34.
(b) Parametrisieren Sie sie nach der Bogenlänge.



Kreisevolvente

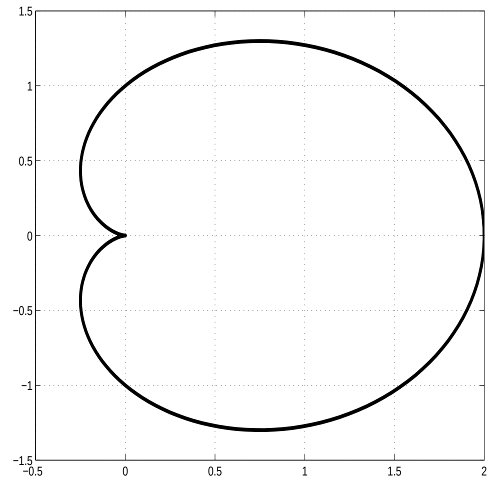
(Z5) (a) Überprüfen Sie, dass $y(x)=x\,\mathrm{e}^{-px/2}$ die Dgl. $y''+py'+\frac{p^2}{4}y=0$ löst (mit den Anfangswerten $y(0)=0$, $y'(0)=1$)! Was ergibt die charakteristische Gleichung?

(b) Lösen Sie, um das anschaulich zu verstehen, das Anfangswertproblem

$$y''+py'+\Big(\frac{p^2}{4}-\epsilon^2\Big)y=0,\qquad y(0)=0,\ y'(0)=1,$$

und betrachten Sie den Grenzwert $\epsilon\to 0$.

6. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008



Kardioide

(36) Die *Herzlinie* oder *Kardioide* ($\kappa\alpha\varrho\delta\acute{\iota}\alpha = $ Herz) ist in Polarkoordinaten durch $r = 1 + \cos\varphi$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$ und daraus $\dot{\vec{x}}$.

(b) Bestimmen Sie die Punkte mit horizontaler Tangente! (Dort ist also $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0 \Longrightarrow \dot{y} = 0$.)

(37) Eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve erfüllt $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$.

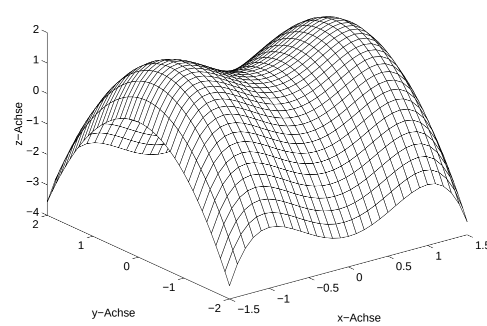
(a) Zeigen Sie, dass $\|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}$. (b) Bestimmen Sie die Länge der Kardioide!

(38) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $z = \dfrac{\sin x}{y^2} + \dfrac{y^2}{x} + x^y$.

(39) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen nach $x, y, z, a,$ und b von

$$u = f(x, y, z, a, b) = \arctan(axy) + z\arcsin(b + \cos a).$$

(40) Es sei $f(x, y) = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$. Bestimmen Sie die Tangentialebenen an $z = f(x, y)$ (a) in $\vec{x}_0 = \binom{1/2}{1}$, (b) in $\vec{x}_0 = \binom{0}{0}$, (c) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$.



$z = 1 + 2x^2 - y^2 - x^4$

(41) In einem Dreieck wurden die zwei Seiten x, y sowie der eingeschlossene Winkel α gemessen. Es ergab sich $x = 100\,\mathrm{m}$, $y = 200\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30°$. Bestimmen Sie den möglichen Fehler $\mathrm{d}A$ bei der Flächenberechnung $A = \frac{1}{2}xy\sin\alpha = 5\,000\,\mathrm{m}^2$, wenn die Messungen nur auf $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \pm 0.5\,\mathrm{m}$, sowie $\mathrm{d}\alpha = \pm 1°$ genau sind!

Hinweis: Warum sollte man in Radiant rechnen?

(42) Es sei $z = f(x, y) = xy - y\ln x$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f\circ\vec{x}}{\mathrm{d}t}$
(a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(Z6) Bei der Verformung eines Kegels vergrößert sich sein Grundkreisradius $r = 30\,\mathrm{cm}$ auf $30.1\,\mathrm{cm}$ und verringert sich seine Höhe h von $60\,\mathrm{cm}$ auf $59.5\,\mathrm{cm}$. Berechnen Sie die exakte Volumenänderung $\Delta V = V_{\mathrm{neu}} - V_{\mathrm{alt}}$ sowie die lineare Näherung $\mathrm{d}V$.

7. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(43) Es sei $\varphi(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ für $x > 0$ und $x(s,t) = \sqrt{st}$, $y(s,t) = s\sqrt{t}$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel!

(44) Es seien Funktionen der folgenden Form gegeben: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $x_1(s,u)$, $x_2(s)$, $x_3(t,y)$, $x_4(y,u)$, $u(s,y)$. Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ mit der Kettenregel aus? Skizzieren Sie das "Baumdiagramm"!

(45) r, φ seien Polarkoordinaten. (a) Drücken Sie f_x durch f_r, f_φ aus!
(b) Was folgt daraus für f_x, wenn $f = \varphi\arcsin(r)$, $r = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$?

(46) Es sei $F(\vec{x}) = x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}$ und $\vec{x}_0 = (1,3,-2)^T$.
(a) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F,\vec{x}_0,\vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{3}(2,1,-2)^T$!
(b) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für $\epsilon = \frac{1}{100}$ berechnen!
(c) In welche Richtung wächst F am stärksten? Wie stark?
(d) In welchen Richtungen ist die Richtungsableitung 0?

(47) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 3$ im Punkt $(1,3,-2)$ auf zwei Arten.

(48) Es seien $F(x,y) = xy$ und die neun Punkte (i,j), $i,j \in \{-1,0,1\}$ gegeben.
(a) Zeichnen Sie die (drei) Niveaulinien von F, die durch diese Punkte gehen!
(b) Zeichnen Sie die Gradienten in diesen neun Punkten ein!
(c) Bestimmen Sie $\mathrm{RA}(F,\binom{1}{1},\vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$.

(49) Berechnen Sie f_x, f_z, f_{xz}, f_{zx}, und f_{xx} für $f(x,y,z) = y\arccos z + \mathrm{sh}(xz)$.

(Z7) In der Niveaufläche $F(x,y,z) = c$ werde jeweils x als Funktion von y,z; y als Funktion von x,z; und z als Funktion von x,y betrachtet. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$

<u>Hinweis:</u> $x\big(y(x,z),z\big) = x$ etc.

8. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(50) Es sei $f(t,x,y) = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(4t)} = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}$.

(a) Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial t}$! (b) Berechnen Sie Δf in Polarkoordinaten!

(c) Folgern Sie, dass f für $t \neq 0$ die "Wärmeleitungsgleichung" $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f = 0$ erfüllt.

(51) Wenn eine Membran auf dem Kreis $x^2+y^2 = R^2$ eben eingespannt ist und unter der Last $p(x,y)\,[\mathrm{N/m^2}]$ steht, so erfüllt ihre Durchbiegung $f(x,y)\,[\mathrm{m}]$ die Gleichungen $\tau\Delta f = -p$ und $f(\vec{x}) = 0$ für $\|\vec{x}\| = R$.

(a) Welche (gewöhnliche) Differentialgleichung in r ergibt sich im Fall einer Gleichlast $p =$ konstant, wenn f also nur von r und nicht von φ abhängt?

(b) Lösen Sie diese mit dem Ansatz $f(r) = ar^2 + b$.

(c) Wie groß ist die maximale Durchbiegung, wenn τ = Membranspannung = $1\,[\mathrm{N/m}]$, und Gesamtlast $= p \cdot R^2\pi = 1\,[\mathrm{N}]$?

(52) Rechnen Sie f_{xx} in Polarkoordinaten um! Verwenden Sie zur Einübung (im Gegensatz zur Vorlesung) Indices zur Bezeichnung der partiellen Ableitungen.
Hinweis: Leiten Sie wie in der Vorlesung Formeln für $f_{xx}, r_x, \varphi_x, r_{xx}, \varphi_{xx}$ her!

(53) Rechnen Sie f_{xy} in die Koordinaten $u = y^2 + \sin x$, $v = y \ln x$ um, und testen Sie das Ergebnis an $f = v^2$. (Die Faktoren vor f_{uu}, f_{uv} etc. können hier als Funktionen von x, y stehenbleiben.)

(54) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4y^3 + 4x^2y + y^2$ am Kreis $x^2 + y^2 \leq 1$.

Hinweise: Betrachten Sie das Innere des Kreises und den Kreisrand separat! Die Gleichung $f(x,y) = 4y\big[x^2 + (y + \frac{1}{8})^2 - \frac{1}{64}\big]$ zeigt, wo f positiv bzw. negativ ist. Daraus sieht man, dass im Ursprung kein Extremum sein kann.

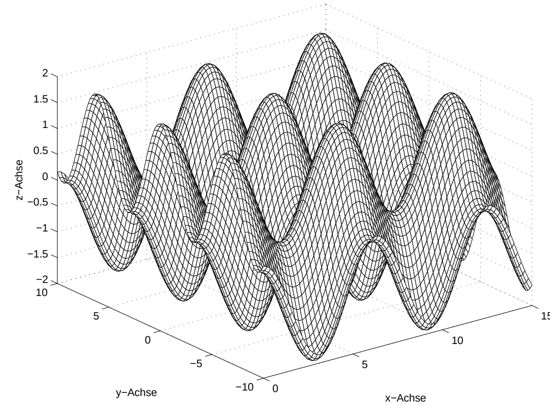
(55) Eine oben offene, rechteckige Schachtel soll ein Volumen von $32\,\mathrm{dm}^3$ besitzen. Bestimmen Sie die Maße dieser Schachtel so, dass ihre Oberfläche minimal wird!

(Z8) Die Differentialgleichung der Torsionsfunktion ist $\Delta\psi = -2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(r,\varphi) = \dfrac{a}{2}(2R\cos\varphi - r)\left(\dfrac{r}{a} - \dfrac{a}{r}\right)$ eine Lösung dieser Gleichung ist! ($0 < a < R$ sind Konstante und r, φ sind Polarkoordinaten.)

(b) Wo ist $\psi = 0$? (Dies ist die Begrenzungslinie des verdrillten Querschnittes, der hier einer Welle mit halbkreisförmiger Keilnut entspricht.)

(56) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!



$z = \cos x + \cos y$

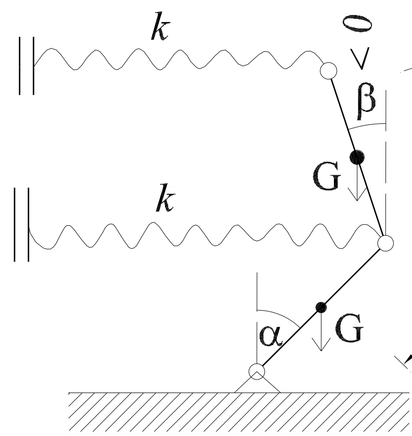
(57) Bestimmmen Sie die Extrema und die Sattelpunkte von $f(x,y) = \cos x + \cos y$.

Hinweis: $\cos k\pi = (-1)^k$; unterscheiden Sie für $P_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ die 3 Fälle 1) k, l gerade; 2) k, l ungerade; 3) eines gerade, eines ungerade!

(58) Für die gezeichnete Stabkette ist die potentielle Energie durch

$$U(\alpha,\beta) = G\frac{l\cos\alpha}{2} + G\Big(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\Big) + \frac{k}{2}(l\sin\alpha)^2 + \frac{k}{2}(l\sin\alpha + l\sin\beta)^2$$

gegeben. Die vertikale Gleichgewichtslage ist *stabil* (d.h. knickt nicht aus), wenn U für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum hat, d.h. wenn $\mathrm{H}\,U(0,0)$ positiv definit ist. Wie groß muss $c = kl/G$ sein, damit das der Fall ist?



Stabkette

(59) Bestimmen Sie mit dem Lagrangeschen Verfahren das Minimum von $2x^3 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $3x^2 + 4y + 2z = 8$.

(60) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ für das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ \frac{y}{x}\sin z \\ \arctan(x+z) \end{pmatrix}$.

(61) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{x^2+z^2} \\ \ln\sqrt{x^2+z^2} \\ \dfrac{yz}{x^2+z^2} + \dfrac{1}{\cos^2 z} \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$.

(b) Bestimmen Sie ein Potential f zu $\vec{v}$.

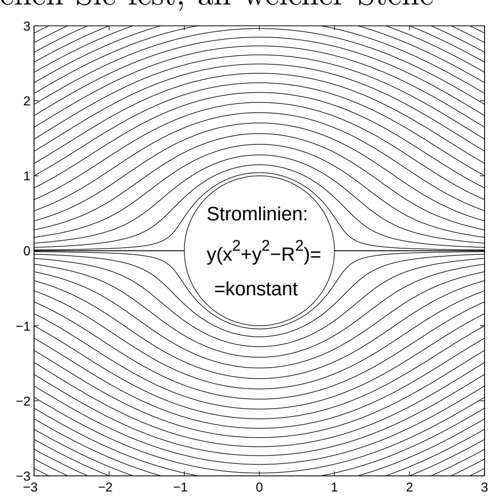
(62) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ nicht wirbelfrei ist! Versuchen Sie, wie in Aufgabe (61) ein Potential zu bestimmen, und stellen Sie fest, an welcher Stelle der Versuch misslingt!

(Z9) Das Potential einer inkompressiblen, wirbelfreien Strömung um den Zylinder $x^2 + y^2 \le R^2$ ist durch $f(x,y,z) = c\Big(x + \dfrac{R^2 x}{x^2+y^2}\Big)$ gegeben. ($c =$ Grenzgeschwindigkeit in Richtung der $x-$Achse im Unendlichen.)

(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \operatorname{grad} f$!

(b) Zeigen Sie $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

(c) Skizzieren Sie $\vec{v}$ an der Oberfläche des Zylinders $x^2 + y^2 = R^2$!



Umströmter Zylinder $x^2 + y^2 = R^2$, $R = 1$

10. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(63) Es seien $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ xyz \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\vec{v}(\vec{x}_0)$, $\mathrm{J}\vec{v}$, $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und die lineare Näherung von $\vec{v}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. $\vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$.

(b) Setzen Sie speziell $\vec{x} = \vec{x}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und vergleichen Sie $\vec{v}(\vec{x})$ mit der linearen Näherung für $\epsilon = 0.1$.

(64) Es seien $\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$ und $\vec{w}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 + y_3^2 \\ \sin y_2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v}) = (\mathrm{J}\vec{w})\big(\vec{v}(\vec{x})\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}$.

(65) Lösen Sie das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$v_1(x, y) = \sqrt[3]{x + 2y} - \cos(xy) = 0, \qquad v_2(x, y) = \frac{x}{3} + y + \arctan(xy) = 0,$$

das in der Nähe von $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$!

(66) Die Funktion $z = \cos x + \cos y$ hat bei $\vec{x}_0 = \binom{\pi}{0}$ einen Sattelpunkt (vgl. Aufg. 57). In der Funktion $f(x, y) = \cos x + \cos y + \sin(\frac{1}{2}xy) + \frac{x}{5}$ ist dieser Sattelpunkt etwas verschoben. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$ zum Startwert $\vec{x}_0$!

(67) (a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v_1, v_2, v_3)}{\partial(x, y, z)} = \det(\mathrm{J}\vec{v})$ für $\vec{v}$ aus Übung 63 allgemein und speziell in $\vec{x}_0$. ($|\det(\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0))|$ entspricht der Volumsänderung eines kleinen Quaders bei $\vec{x}_0$ unter der Abbildung $\vec{v}$.)

(b) Warum sind v_1, v_2, v_3 *Koordinaten* bei $\vec{x}_0$?

(68) (a) Bestimmen Sie $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}$ sowie $\dfrac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)}$ wenn r, φ Polarkoordinaten sind!

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit Satz 4, S. 57!

(69) Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \vartheta, \varphi)}$ für die Kugelkoordinaten. Skizze!

(Z10) Zeigen Sie, dass die Kugelkoordinaten $\varrho = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vartheta = \arccos \dfrac{z}{\varrho}$, $\varphi = (\pi+) \arctan \dfrac{y}{x}$ orthogonal sind, indem Sie nachrechnen, dass $\nabla \varrho = \dfrac{\vec{x}}{\varrho}$, $\nabla \vartheta = \dfrac{1}{r \varrho^2} \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$, $\nabla \varphi = \dfrac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) und zeigen, dass diese Gradienten paarweise aufeinander senkrecht stehen.

11. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(70) Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = S.$

(a) Schreiben Sie die Reihe als Zahlenreihe an! Was sind $a_3, s_3, a_k, a_n, a_{n-1}$?

(b) Zeigen Sie $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, schreiben Sie damit $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ an, kürzen Sie, und bestimmen Sie s_{999} und S!

(71) Bestimmen Sie die Partialsummen s_n und—im Fall der Konvergenz—die Summe S der geometrischen Reihen (a) $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots$; (b) $1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots$; und (c) $1 - 2 + 4 - 8 + - \cdots$. Was ist jeweils s_3?

(72) Untersuchen Sie (a) mit dem Vergleichskriterium (b) mit dem Integralkriterium, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$ konvergiert!

(73) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^3.$$

Hinweis: Erweitern Sie $(a-b)$ mit $(a+b)$ und verwenden Sie das Vergleichskriterium!

(74) Zeigen Sie mit dem Integralkriterium, daß $1.0625 = \dfrac{17}{16} \leq \zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} \leq \dfrac{53}{48} \approx 1.104$.

(75) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ bedingt konvergent ist! Bis zu welchem n muss man die Reihe summieren, um die Summe der Reihe auf 0.1 genau angeben zu können?

(76) Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihen

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

(Z11) Bestimmen Sie mit dem Integralkriterium die Anzahl der Reihenglieder, die zu summieren sind, um $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ auf 10^{-3} angeben zu können.

12. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(77) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden zwei Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{n \cdot 2^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

(78) (a) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$.

(b) Berechnen Sie $f(x)$ aus der geometrischen Reihe! Was ist z.B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots$?

(79) (a) Welche Potenzreihe ergibt sich aus der geometrischen Reihe für $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$? Für welche x gilt das?

(b) Was folgt daraus für $f(x) = \arctan x$ durch Integrieren? Für welche x gilt das?

(80) Entwickeln Sie $f(x) = \cos x$ in eine MacLaurinreihe! Was ist ihr Konvergenzradius?

(81) Berechnen Sie die ersten zwei nicht verschwindenden Glieder der MacLaurinreihe von $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Was ist die Schmiegeparabel an $y = f(x)$ bei $x_0 = 0$?

(82) Stellen Sie $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ durch eine Reihe dar und bestimmen Sie die Summe dieser alternierenden Reihe bis auf 10^{-4}.

<u>Hinweis:</u> Setzen Sie für $\sin x$ die MacLaurinreihe ein und integrieren Sie gliedweise!

(83) Entwickeln Sie $\ln x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 2$! Was ist das Konvergenzintervall dieser Reihe?

(Z12) Entwickeln Sie $f(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ in eine MacLaurinreihe und bestimmen Sie $f(1)$ auf 10^{-3} genau!

13. Übungsblatt zu Mathematik 2, SoSe 2008

(84) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2 y$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und überprüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren!

(85) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ um $(0,0)$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung!
Zusatzfrage: Wie lässt sich das Ergebnis durch Verwendung der MacLaurinreihen von $\sqrt{1+x}$ und e^x überprüfen?

(86) Berechnen Sie $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über das Hyperbelsegment

$$D : x^2 - y^2 \geq 1, \qquad y \geq 0, \qquad 1 \leq x \leq 2,$$

(a) indem Sie außen nach x integrieren, (b) indem Sie außen nach y integrieren!

(87) Das von der Geraden $y = 1$ sowie der Parabel $y = \frac{1}{3}x^2$ im 1. Quadranten eingeschlossene Gebiet D ist mit der Dichte $\rho(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}$ belegt.
Berechnen Sie seine Masse M,

(a) indem Sie außen nach x integrieren, (b) indem Sie außen nach y integrieren!

(88) Skizzieren Sie das durch $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x + y \geq 1$ gegebene Gebiet D und bestimmen Sie seinen Schwerpunkt $\vec{s}$!

(89) Das Gebiet D sei durch $a \leq x \leq b,\quad 0 \leq y \leq f(x)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass dann die statischen Momente von D mit folgenden *einfachen* Integrale

$$S_x = S_2 = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad S_y = S_1 = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden können!

(b) Berechnen Sie so den Schwerpunkt des Gebietes $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leq y \leq \cos x$.

(90) Die Trägheitsmomente sind durch

$$I_x = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad I_y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gegeben, D sei wie in der Aufgabe 89.

(a) Zeigen Sie, dass $I_x = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x)^3}{3}\,\mathrm{d}x$ und $I_y = \displaystyle\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie I_x, I_y für das Dreieck $x \geq 0,\quad y \geq 0,\quad x + y \leq 1$.

(Z13) Berechnen Sie $\iint_D \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für das Dreieck D mit den Eckpunkten $(0/0)$, $(\sqrt{\pi}/-1)$, $(\sqrt{\pi}/2)$.

1. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2008

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Berechnen Sie die Oberfläche, die entsteht, wenn $y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, um die $x-$ Achse rotiert!

Hinweise: $\operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} 2v), \quad \operatorname{sh} 2v = 2 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v, \quad \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,)$, $\pi[\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\,] \approx 7.2$

(2) Stellen Sie bei den folgenden uneigentlichen Integralen fest, ob sie konvergent sind, und berechnen Sie sie in diesem Fall!

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$ (Hinweis: $\ln 2 \approx 0.7$)

(3) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = \dfrac{3xt^2}{\sqrt{1+t^3}}$ zum Anfangswert $x(0) = 1$.

(4) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = C \tan x : C \in \mathbb{R}\}$.

(5) (a) Stellen Sie $\sin^3 \varphi$ durch $\sin\varphi, \sin 3\varphi$ dar! (b) Berechnen Sie damit $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Zur Kontrolle von (b) könnten Sie $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$ verwenden!

(6) (a) Schreiben Sie $w = -2 + 2\,\mathrm{i}$ in der Form $w = \varrho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -2 + 2\,\mathrm{i}$. Machen Sie den Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$! Bestimmen Sie z_0! Wie lassen sich die übrigen Lösungen z_1, z_2 durch z_0 ausdrücken? Skizze!

2. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2008

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Für eine an einer Feder frei schwingende Masse gilt: $m = 2\,[\mathrm{kg}]$, $r = 6\,[\mathrm{kg/sec}]$, $c = 5\,[\mathrm{kg/sec}^2]$, $x(0) = 2\,[\mathrm{m}]$, $\dot{x}(0) = 0\,[\mathrm{m/sec}]$. Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$! (Die Darstellung mit Phasenverschiebung ist nicht erforderlich.)

(2) Für eine erzwungene Schwingung gilt

$$\ddot{x} + \dot{x} + 6x = 12\sin(3t).$$

(a) Bestimmen Sie die stationäre Lösung $x_{\mathrm{st}}(t)$ mit einem geeigneten Ansatz!

(b) Stellen Sie $x_{\mathrm{st}}(t)$ mit Phasenverschiebung dar!

(3) Es sei $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \arctan t \\ \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \end{pmatrix}, \quad -1 \le t \le 1.$

(a) Berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$, $\|\dot{\vec{x}}\|$, y', $\ddot{\vec{x}}$. Wo hat die Kurve eine waagrechte Tangente?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge!

<u>Hinweis:</u> $\operatorname{arsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88$

(4) Es sei $f(x,y) = \mathrm{e}^y \cdot \arcsin x$ und $x(u,v) = u + v$, $y(u,v) = \ln(uv)$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel! Überprüfen Sie, dass sich dasselbe ergibt!

(5) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z^2 + y\ln x = 4$ im Punkt $(1, 2, -2)$ auf zwei Arten. Überprüfen Sie, dass sich dasselbe ergibt!

(6) Rechnen Sie f_{xy} in die Koordinaten $s = x + y^2$, $t = xy$ um, und testen Sie das Ergebnis an $f = t^2$. (Die Faktoren bei f_{ss}, f_{st} etc. können hier als Funktionen von x, y stehenbleiben.)

3. Klausur zu 'Mathematik 2', SoSe 2008

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = 3xy^2 + 2y^3 + x^3 - 6x$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein.

(2) Lösen Sie das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$v_1(x,y) = 0.1 - \arcsin(xy) = 0, \qquad v_2(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \tan(2y) = 0,$$

das in der Nähe von $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\vec{x}_1$!

(3) (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n^2 \cdot 9^n}$.

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M!

(4) Entwickeln Sie $f(x) = \cos x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = \pi$. Schreiben Sie am Schluss die Reihe in der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ldots$ an!

(5) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{y^2 + \sin x}$ um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung!

(6) Berechnen Sie das statische Moment S_y für das von $y = 1$ und $y = x^2$ im 1. Quadranten begrenzte endliche Gebiet D, das mit der Dichte $\rho(x,y) = \sin y$ belegt ist,

(a) indem Sie außen nach x integrieren;

(b) indem Sie außen nach y integrieren! ($\cos 1 \approx 0.54$, $\sin 1 \approx 0.84$)