1999 - 10 - 13

1. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 10 \geq 0\}$.

(2) Für welche reelle x ist $\sqrt{x-1} > x - 3$?

(3) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : 3|x-2| \leq 6 + 2x - x^2\}$.

(4) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3 \ \wedge \ \dfrac{(x+2)(|x|-1)}{x+3} \leq 0\}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Methode der kritischen Punkte!

(5) Welche der folgenden 6 Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ (b) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x < y$

(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ (d) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x < y$

(e) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x < y$ (f) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : x < y$

(Warum wird nicht nach $\exists y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : x < y$ und $\forall y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x < y$ gefragt?)

(6) Zeichnen Sie die durch die Gleichung $3x + 3y + 4z = 12$ bestimmte Ebene im $\mathbb{R}^3$ und geben Sie 2 verschiedene Parameterdarstellungen an.

(7) Für welche k hat das Gleichungssystem

$$x - y = 3, \quad 2x - 2y = k$$

keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

(8) Zu zeigen: Ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}$$

lösbar, so ist $c = a + b$.

Zusatzaufgabe (Z1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|5x-1|} < x + 1\}$.

1999 - 10 - 20

2. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(9) Es seien $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $g(x) = x^2 - 1$. Bestimmen und skizzieren Sie die Funktionen (a) f, $f(x)+1$, $f(x+1)$, (b) g, $2g(x)$, $g(2x)$, und (c) $f \circ g$ und $g \circ f$.

(10) Wir betrachten das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 1$.

(a) Dividieren Sie P durch $x - 2$. Wie lässt sich der Rest direkt berechnen?

(b) Zerlegen Sie P in Linearfaktoren! Skizzieren Sie den Graph von P!

Hinweis zu (b): Die Nullstelle -1 findet man durch Probieren.

(11) Bestimmen Sie geometrisch (a) $\sin(-\frac{\pi}{6})$, (b) $\cos(-\frac{\pi}{6})$, (c) $\tan(-\frac{\pi}{6})$.

(12) Zeigen Sie $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ und zeichnen Sie nacheinander die Bilder der Funktionen $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = -\cos 2x$, $y = 1 - \cos 2x$, und $y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \sin^2 x$.

(13) Leiten Sie aus den Summensätzen für Sinus und Cosinus (vgl. die Vorlesung und Üb. (Z2)) **eine** der folgenden Formeln her.

(a) $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ (b) $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

(c) $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ (d) $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

Hinweis: Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$ und betrachten Sie $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ etc. Sie können auch (c) und (d) aus (a) und (b) folgern, indem Sie die Beziehung $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ verwenden.

(14) Drei Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen einen Kreis K mit der Gleichung

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

Bestimmen Sie a, b, c, d so, dass K die Punkte $(4, -3), (-4, 5), (-2, 7)$ enthält.

(15) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 6, \\ x^2 & - & y^2 & + & 2z^2 & = & 2, \\ 2x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & 3, \end{array}$$

durch Substitution: $x_1 = x^2$, $x_2 = y^2$, $x_3 = z^2$.

(16) Ermitteln Sie die 18 Lösungen des nichtlinearen Systems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \sin\alpha & + & 2\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0, \\ 2\sin\alpha & + & 5\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0, \\ -\sin\alpha & - & 5\cos\beta & + & 5\tan\gamma & = & 0, \end{array}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \; 0 \leq \beta \leq 2\pi, \; 0 \leq \gamma \leq 2\pi.$$

(Z2) Beweisen Sie geometrisch den Summensatz für den Cosinus, d.h. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$. (Sie dürfen wie in der Vorlesung annehmen, dass $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in\,]0°, 90°[$.)

1999 - 10 - 27

3. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(17) Auf welchen Intervallen ist das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 - 6x + 5$ monoton steigend bzw. fallend? Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen auf diesen Intervallen!

(18) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = -0.4\}$!

Hinweis: $\arccos(-0.4) \approx 1.98 \approx 113°35'$

(19) Bestimmen Sie (a) $\arccos \frac{1}{2}$; (b) $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right)$; (c) $\cos(\arccos x)$, $x \in [-1, 1]$; (d) $\arccos(\cos x)$, $x \in [0, \pi]$; (e) $\arccos(\cos x)$, $x \in [\pi, 2\pi]$.

Hinweis zu (e): $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = \cos(2\pi - x)$ (Warum?)

(20) (a) Zeigen Sie $2 \arccos x = \begin{cases} \arccos\left(2x^2 - 1\right) & : \; x \in [0, 1], \\ 2\pi - \arccos\left(2x^2 - 1\right) & : \; x \in [-1, 0]. \end{cases}$

(b) Kontrollieren Sie (a) am Taschenrechner für $x = 0.6$ und $x = -0.6$!

Hinweis zu (a): Setzen Sie $u = \arccos x$, folgern Sie $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 2x^2 - 1$ und wenden Sie auf beide Seiten dieser Gleichung arccos an!

(21) Es sei $a_n = \dfrac{2n - 7}{n + 3}$. Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - 2| < \epsilon$. Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = 0.1$?

(22) Man löse die folgende Matrixgleichung für a, b, c und d :

$$\begin{pmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

(23) Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(24) Zeigen Sie, dass $AB \neq BA$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(Z3) Es sei $a_n = n^2 - 4n$. Zeigen Sie mit der Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, d.h. zeigen Sie $\forall M \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > M$. Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $M = 1000$?

1999 - 11 - 10

4. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(25) Bestimmen Sie bei den folgenden Zahlenfolgen a_{10}, a_{99}, und, wenn das möglich ist, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Welche der Folgen sind konvergent?

(a) $\dfrac{n^2+1}{3n^2-7}$; (b) $\dfrac{n^2+1}{3n-7}$; (c) $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$; (d) $\cos(n\pi)$.

Berechnen Sie die folgenden drei Grenzwerte! Welchen Typ $\left(\text{„}\frac{0}{0}\text{"}\ \text{etc.}\right)$ haben die Grenzwerte zu Beginn bzw. im Lauf der Rechnung? Machen Sie numerische Tests! (Z.B. $26:\ x=100,\quad 27:\ x=\pm 0.1,\quad 28:\ x\in\{7.9, 8.1\}$)

(26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)$ Hinweis: $\forall a,b\in\mathbb{R}: (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ Hinweis: $\forall x\in\mathbb{R}: 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ (Warum?)

(28) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-\sqrt[3]{x}-6}$ Hinweis: Setzen Sie $t=\sqrt[3]{x}$ und kürzen Sie!

(29) (a) Es sei $f:\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}\longrightarrow\mathbb{R}: x\longmapsto\dfrac{\sin x}{|x|}$. Was ist $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$? Existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Skizzieren Sie den Graph von f!

(b) Ist f in 0 stetig? Ist f stetig (schlechthin)? Lässt sich f stetig in 0 fortsetzen?

(30) Schreiben Sie die Lösung des Gleichungssystems
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & b_1\\ x_1 & & & & x_3 & = & b_2\\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & b_3\end{array}$$
in der Form $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \text{Matrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$!

(31) Bestimmen Sie die Inverse von $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(32) (a) Man zeige, dass eine Matrix, die eine Nullzeile enthält, nicht invertierbar ist.

(b) Man zeige, dass eine Matrix, die eine Nullspalte enthält, nicht invertierbar ist.

(Z4) (a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$, d.h.
$$\forall\epsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\geq 0 \text{ mit } 0<|x-4|<\delta: |\sqrt{x}-2|<\epsilon.$$

(b) Wie ist δ für $\epsilon=0.1$ zu wählen?

(c) Wie kann man den Grenzwert in (a) mit dem Wort “stetig” formulieren?

1999 - 11 - 17

5. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(33) Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass das Polynom $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $]0,1[$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung ein Teilintervall der Länge $\frac{1}{8}$, in dem eine Nullstelle von p liegt.

(34) Wenn ein Gegenstand mit der Temperatur c zur Zeit $t = 0$ in eine Umgebung der Temperatur d gebracht wird, so hat der Gegenstand zur Zeit t die Temperatur $f(t) = d + (c - d)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

(a) Mit welcher Zahl α ist die Temperatur einer Tasse Kaffee zu beschreiben, die sich in der Umgebungstemperatur $d = 20°$ nach einer $\frac{1}{2}$ Minute von $c = 100°$ auf $70°$ abgekühlt hat? Geben Sie eine Formel für α an! (t werde in Sekunden gemessen, d.h. $f(30) = 70°$.)

(b) Nach wieviel Sekunden hat der Kaffee die Temperatur $40°$? $(\ln 2 \approx 0.7, \quad \ln 5 \approx 1.6)$

(35) Zeigen Sie $\forall a, b > 0, 1 \neq u > 0:$ (a) ${}^u\!\log(a \cdot b) = {}^u\!\log a + {}^u\!\log b$ (b) ${}^u\!\log a = \dfrac{\ln a}{\ln u}$.

<u>Hinweis:</u> Wenn $x = {}^u\!\log a$, $y = {}^u\!\log b$ gesetzt wird, so ist $a = u^x$, $b = u^y$, $a \cdot b = u^{x+y}$, und $\ln a = x \cdot \ln u$. (Warum?)

(36) Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren die Formeln in (a) und (b)!

(a) $\forall n \in \{2, 3, 4, \dots\} : \forall u, v \in \mathbb{R} : u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1 : 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

(c) Wenn man auf das erste Feld eines Schachbrettes 1 Reiskorn legt, auf das 2. Feld 2 Reiskörner, auf das 3. Feld $2^2 = 4$ Reiskörner, auf das 4. Feld $2^3 = 8$ Reiskörner, und immer so weiter macht, wieviele Reiskörner ergibt das?

(37) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \sqrt[3]{x}$, d.h. berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$.

<u>Hinweis:</u> $\forall u, v \in \mathbb{R} : (u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$ (vgl. Üb. 36 a); unterscheiden Sie die Fälle $x_0 = 0$ und $x_0 \neq 0$.

(38) Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Man bestimme $p(A)$ für

(a) $p(x) = x - 2$ (b) $p(x) = 2x^2 - x + 1$ (c) $p(x) = x^3 - 2x + 4$.

(39) Man zeige, dass $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist.

(40) Man ermittle Bedingungen für b, damit das System lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & b_2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & b_3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & b_4 \end{array}$$

(Z5) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$! Was ergibt sich für $x = 0.9$ und für $x = 0.99$?

<u>Hinweis:</u> Substituieren Sie $t = \arccos x$!

1999 - 11 - 24

6. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(41) (a) Berechnen Sie die Ableitung des Cosinus, d.h. berechnen Sie $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$.
(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = \frac{\pi}{3} = 60°$!
Hinweis zu (a): $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}$ (vgl. Üb. (13d)). Substituieren Sie $t = \frac{x-x_0}{2}$!

(42) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so gilt für kleines h : $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. Der Fehler in $\approx$ ist $\rho(h)$, d.h. $\rho(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)$. Bestimmen Sie $\rho(h)$ (a) für $f = \cos$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $h = 0.1$ (mit dem TR); (b) für $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, h beliebig. Zeigen Sie in diesem Fall, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\rho(h)}{h} = 0$.

(43) (a) Zeigen Sie $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ mit der Quotientenregel.
(b) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie beide Seiten der Gleichung $\cot x \cdot \sin x = \cos x$ differenzieren.

(44) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen. (a, b, c sind Konstante.)

$$f(x) = \sqrt{1-ax}\,\cos\big(\mathrm{e}^{b+c\sin x}\big); \qquad z(t) = \frac{\tan(t^2) + \tan^2 t}{\ln(\arctan t)}$$

(45) Lösen Sie Übung (20) analog Bsp. 16, S. 61 im Skriptum, d.h. zeigen Sie

$$\arccos\big(2x^2-1\big) = \begin{cases} 2\arccos x & : \ x \in [0,1], \\ 2\pi - 2\arccos x : & x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Anleitung: (a) Überprüfen Sie, dass beim Differenzieren der linken Seite dasselbe wie rechts herauskommt! (Vorsicht: $\sqrt{x^2} = |x|$) (b) Die linke Seite ist differenzierbar, wenn $2x^2 - 1 \neq \pm 1$ (warum?), d.h. für $x \neq 0, -1, 1$. Wegen (a) stimmen linke und rechte Seite in $[-1,0]$ sowie in $[0,1]$ jeweils bis auf eine Konstante überein. Überprüfen Sie, dass diese Konstanten 0 sind, indem Sie $x = \pm 1$ einsetzen.

(46) Ist die $(n,n)-$ Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch?

(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

(c) $a_{ij} = 2i + 2j$ (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

(47) Man bestimme Diagonalmatrizen A mit

(a) $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A^{-2} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(48) Man bestimme alle a, b und c, für die $A = \begin{pmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist.

(Z6) Differenzieren Sie die Funktionen $x^{\sin x}$ und x^{x^x} (d.h. genauer $x^{(x^x)}$).

Hinweis: $\forall u > 0 : \forall v \in \mathbb{R} : u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$

1999 - 12 - 15

7. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(49) Zeigen Sie $\arcsin'(t_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t_0^2}}$ entsprechend Bsp. 12, S. 60 im Skriptum!

(50) Bestimmen Sie die Nullstelle von $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $]0,1[$ (vgl. Üb. 33) mit dem Newton'schen Näherungsverfahren! Verwenden Sie 0 als Startwert x_0 und berechnen Sie x_3. Was passiert, wenn man 1 bzw. 2 als Startwert x_0 verwendet?

Machen Sie bei den zwei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema und unterteilen Sie sie in globale bzw. lokale Maxima oder Minima. Machen Sie eine Skizze! Berechnen Sie in (52) $f'(1+)$ und $f'(1-)$ mit der Regel von l'Hôpital!

(51) $p : [-2,3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ (52) $f(x) = (x^2-8)\,\mathrm{e}^{|x-1|}, \quad x \in D = [-3,3]$

(53) Welche der folgenden Grenzwerte lassen sich mit der Regel von l'Hôpital (eventuell zweimal verwendet) berechnen, welche nicht?

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{\arctan x}{\sin x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-\cos x}{x^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+\cos x}$

(54) Seien $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, und $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\|a+b\|_2,\ \|a\|_2 + \|b\|_2,\ \|-2a\|_2 + 2\|a\|_2,\ \|3a-5b+c\|_2,\ \frac{1}{\|c\|_2}c,\ \left\|\frac{1}{\|c\|_2}c\right\|_2.$$

(55) Der Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ von der Hyperebene $7x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 5x_5 - 8 = 0$ im $\mathbb{R}^5$ ist zu bestimmen.

(56) (a) Man ermittle die zwei zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonalen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$. ("Einheitsvektor" = Vektor der Länge 1)

(b) Zu zeigen: Es gibt unendlich viele Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$, die auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

(Z7) Die Umweltbelastung durch eine Strasse ist proportional zur Frequenz und verkehrt proportional zum Quadrat der Entfernung. Auf welcher Linie zwischen einer Autobahn und einer parallel dazu im Abstand von 3 km verlaufenden Bundesstrasse ist die Summe der Belastungen minimal, wenn die Autobahn achtmal so frequentiert ist wie die Bundesstrasse?

2000 - 01 - 12

8. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

(57) Bestimmen Sie die Krümmung κ, den Krümmungsradius ϱ, und den Krümmungsmittelpunkt M zum Punkt $P = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ auf dem Graphen von $y = \sin x$. (Skizze!)

Hinweis: $\kappa = \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad M = P + \dfrac{1+y'^2}{y''}\begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$

(58) (a) Lesen Sie §10, Satz 3, 3), S. 87 des Skriptums!

(b) Zeigen Sie, dass $\left(\ln|\tan\frac{x}{2}|\right)' = \dfrac{1}{\sin x}$ und berechnen Sie damit $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

($\ln 3 \approx 1.1$) Was sind hier f, Φ, a, b von (a)? Skizze!

(59) Es sei $f : [\frac{1}{2}, 4] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion Φ, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{1/2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$, $F(x) = \int_{1/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Skizzieren Sie f und F, sowie speziell $F(2)$ als Länge, $F(2)$ als Fläche, die Tangente an F in $x_0 = 2$ und ihre Steigung. ($\ln 2 \approx 0.7$)

(60) Bestimmen Sie durch zweimaliges partielles Integrieren $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$.

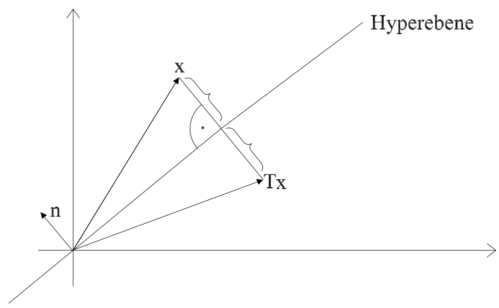
(61) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale!

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{a}{\cos^2 x} + bx\ln x\right)\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{\pi} y^2 \cos y\,\mathrm{d}y$

(62) Man bestimme die Standarddarstellungsmatrizen folgender zusammengesetzter Operatoren auf $\mathbb{R}^3$:

(a) Zuerst eine Rotation von $30°$ um die x -Achse, dann eine Rotation von $30°$ um die z -Achse und schließlich eine Kontraktion mit Faktor $k = \frac{1}{4}$;
(b) Reflexion an der xy -Ebene, dann an der xz -Ebene, gefolgt von einer Projektion auf die yz -Ebene;
(c) Rotation von $270°$ um die x -Achse, $90°$ um die y -Achse und $180°$ um die z -Achse.

(63) Im $\mathbb{R}^4$ ist eine Hyperebene durch die Gleichung $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ gegeben. $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sei die Reflexion (=Spiegelung) an der Hyperebene. Ermitteln Sie die Standarddarstellungsmatrix von T durch Betrachtung nebenstehender Zeichnung:



(64) Bestimmen Sie a, b, c, d so, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ die Standarddarstellungsmatrix einer Rotation im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel von $60°$ im mathematisch positiven Sinn ist. Bestimmen Sie A^{19}, indem Sie benutzen, dass A^{19} die Standarddarstellungsmatrix einer Drehung um den Winkel $1140°$ im positiven Sinn ist.

(Z8) Um heftige Stöße aufgrund von plötzlichen Zentrifugalkräften zu vermeiden, werden geradlinige Eisenbahnstrecken mit kreisförmigen oft durch Übergangskurven der Form $y = cx^3$ ($c > 0$ eine Konstante) verbunden. Die geradlinige Strecke wird bei $x = 0$, die kreisförmige bei dem positiven x_0, wo κ maximal ist, angeschlossen.

(a) Für welches $x_0 > 0$ hat $y = cx^3$ maximale Krümmung?

(b) Was ergibt sich für $c, x_0, y_0,$ wenn eine Kreisstrecke mit Radius $500\,\mathrm{m}$ angeschlossen wird?

2000 - 01 - 19

9. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1999/2000

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale! Machen Sie bei den bestimmten Integralen eine Skizze!

(65) (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{1+9x^2-2x^3}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin y\,\mathrm{d}y$

Zusatzfrage zu (b): Wie lässt sich das Integral mittels einer Fläche unter dem Sinus darstellen?

(66) (a) $\displaystyle\int \frac{4a-5}{a^2-a-2}\,\mathrm{d}a$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$

(67) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+2}$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t=\tan\frac{x}{2}$, $x=2\arctan t$ (für $-\pi<x<\pi$), $\mathrm{d}x=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ und Übung (66b).

(68) $\int \sqrt{4x-x^2-3}\,\mathrm{d}x$ (Hinweis: Quadratisch ergänzen, $u=x-2$, Winkelfunktionen substituieren)

(69) (a) $\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

Hinweis zu (d): $\cos^3 x=\cos x(1-\sin^2 x)$

(70) Ist $a\neq 0$ ein Einheitsvektor, so ist

$$A=\cos\varphi\cdot I+(1-\cos\varphi)a\cdot a^T+\sin\varphi\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}$$

die Standarddarstellungsmatrix der Drehung um den Winkel φ in positiver Richtung um die Rotationsachse in Richtung a.

(a) Zeigen Sie $\cos\varphi=\dfrac{\mathrm{sp}(A)-1}{2}$.

(b) Zeigen Sie: $A=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-4&8\\8&4&1\\-4&7&4\end{pmatrix}$ ist die Darstellungsmatrix einer Rotation im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Drehwinkel und die Drehachse.

(71) Man entscheide ohne Rechnung, ob der beschriebene lineare Operator injektiv ist.

(a) Orthogonalprojektion auf die x-Achse im $\mathbb{R}^2$,

(b) Reflexion an der y-Achse im $\mathbb{R}^2$,

(c) Reflexion an der Geraden $y=x$ im $\mathbb{R}^2$,

(d) Kontraktion mit Faktor $k > 0$ im $\mathbb{R}^2$,

(e) Rotation um die z -Achse im $\mathbb{R}^3$,

(f) Reflexion an der xy -Ebene im $\mathbb{R}^3$,

(g) Dilatation mit Faktor $k > 0$ im $\mathbb{R}^3$.

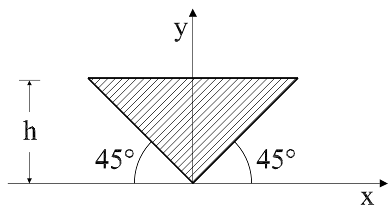
(72) Eine lineare Transformation $w = Tx$ ist durch

$$\begin{array}{rcrcrcr} w_1 & = & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \\ w_2 & = & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 \\ w_3 & = & x_1 & & & + & 8x_3 \end{array}$$

gegeben. Ist T injektiv? Ist T surjektiv?

(Z9) Aus einem Überlauf von der Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks der Höhe h fließt Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g(h-y)}$ (Ausflussgesetz von Torricelli). Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Sekunde! Was ergibt sich für $h = 3\,\mathrm{dm}$?

<u>Hinweis:</u> $Q = \int\limits_0^h 2y\sqrt{2g(h-y)}\,\mathrm{d}y$



1999 - 11 - 03

1. Klausur zu 'Mathematik A', WS 1999/2000

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Bestimmen Sie rechnerisch $L = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge \sqrt{x-1} < |x-4| - 3\}$. (Eine graphische Lösung ist nur zur Kontrolle erlaubt.)
Hinweis: Machen Sie zuerst die Fallunterscheidung bezüglich des Betrages! $15^2 = 225$

(2) Bestimmen Sie am Einheitskreis (a) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, (b) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, (c) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$. (Vergessen Sie nicht, die Ergebnisse zu begründen!)

(3) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : 3\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0\}$!
Hinweis: $\arccos(\frac{1}{3}) \approx 1.23$

(4) Es sei $a_n = \dfrac{n+3}{1-2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n + \frac{1}{2}| < \epsilon$. Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = \frac{1}{4}$?

(5) Für welche Werte von a hat das folgende lineare Gleichungssystem keine, genau eine, bzw. unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungen!

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}$$

Hinweis: Wenden Sie den Gauß'schen Algorithmus an und unterscheiden Sie dann drei Fälle abhängig von a.

(6) Bestimmen Sie alle reellen x, y, z, w, sodass die folgende Matrizengleichung erfüllt ist!

$$\begin{pmatrix} x+3y & -y \\ 2x+2y & 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z+2w & 3z-w \\ -4z & -z-2w \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wenden Sie den Gauß'schen Algorithmus an und führen Sie dann für w einen Parameter ein!

1999 - 12 - 01

2. Klausur zu 'Mathematik A', WS 1999/2000

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - \cos x}{x^2}$!
Hinweis: $\forall a, b \in \mathbb{R} : \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$

(2) (a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x^{3/2}$ für $x > 0$ als Grenzwert, d.h. berechnen Sie $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^{3/2} - x_0^{3/2}}{x - x_0}$ für $x_0 > 0$.

(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = 4$.

Hinweis zu (a): $\forall u, v, a, b \in \mathbb{R} : (u - v)(u + v) = u^2 - v^2$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(3) Der Luftdruck p wird als Funktion der Seehöhe h (relativ gut) durch die Gleichung $p(h) = c\,\mathrm{e}^{-\alpha h}$ beschrieben.

(a) Durch welche Formel ist α gegeben, wenn der Luftdruck am Meeresspiegel (d.h. für $h = 0\,[\mathrm{m}]$) $760\,[\mathrm{Torr}]$ und in Innsbruck (d.h. für $h = 600\,[\mathrm{m}]$) $705\,[\mathrm{Torr}]$ beträgt?

(b) Welcher Luftdruck herrscht am Patscherkofel, d.h. für $h = 2000\,[\mathrm{m}]$? Verwenden Sie $\ln\left(\frac{705}{760}\right) \approx -\frac{3}{40}$ und $760\,\mathrm{e}^{-1/4} \approx 592$.

(4) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen. Wenn Sie nicht *sehr* sicher rechnen, sollten Sie aber Ihre Rechnung genauestens kontrollieren. (a, b, c sind Konstante.)

$$f(x) = a\,x^{-5.3} + x\cos^2 x + b\,\mathrm{e}^{2\arccos x}; \qquad z(t) = \frac{\ln\big(\tan(t^2)\big)}{c + \sqrt[3]{t}}$$

(5) Bestimmen Sie jene reellen Zahlen a, b, c, d, e, f, g, für die die Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar ist!

(6) Berechnen Sie eine Matrix K, sodass $AKB = C$ gilt! $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Welche Dimension muss K haben? Setzen Sie K mit unbestimmten Koeffizienten an!

2000 - 01 - 26

3. Klausur zu 'Mathematik A', WS 1999/2000

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Benützen Sie für Rechnungen die angegebenen Näherungswerte.

(1) Berechnen Sie $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{4x + 2x^2 - (1 + x^4)\arctan x^2}{(2 + x)^2(1 + x^4)}\,\mathrm{d}x$, nachdem Sie überprüft haben, dass $\Phi(x) = \dfrac{\arctan(x^2)}{2 + x}$ eine Stammfunktion des Integranden ist. ($\frac{\pi}{6} \approx 0.52$)

(2) Machen Sie für die Funktion $f\,:\,[-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,:\,x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \cdot |x + 1|$ eine Kurvendiskussion. Geben Sie die Extrema, unterschieden in globale bzw. lokale Maxima oder Minima an. Machen Sie eine Skizze! ($\mathrm{e}^2 \approx 7.4$, $\mathrm{e}^{-1} \approx 0.37$)

(3) Bestimmen Sie die folgenden zwei Integrale.

(a) $\int_0^1 \arctan y \,\mathrm{d}y$ (b) $\int x^2\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x,\quad a \neq 0$

Hinweis: $\ln 2 \approx 0.7$, $\frac{\pi}{4} \approx 0.8$

(4) Bestimmen Sie die folgenden zwei Integrale auf 1 Dezimalstelle! (Sie könnten das Vorzeichen in (a) mittels einer Skizze überprüfen.)

(a) $\int\limits_{2}^{4} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 5}$ (b) $\int\limits_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{\ln^2 x + 2\ln x + 3} \cdot \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: $\ln 3 \approx 1.1$, $\arctan\sqrt{2} \approx 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$

(5) Zu bestimmen ist die Standarddarstellungsmatrix der folgenden linearen Abbildung im $\mathbb{R}^3$: Hintereinanderausführung einer Dilatation mit dem Faktor k, dann Rotation um die $y-$Achse im positiven Sinn um $45°$, dann Rotation um die $z-$Achse im positiven Sinn um $30°$.

(6) Geben Sie die Standarddarstellungsmatrix der orthogonalen Projektion P im $\mathbb{R}^4$ auf den Unterraum $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\}$ an. Ist P injektiv? Ist M eine Hyperebene?