1998 - 10 - 14

1. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

(1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 \leq 0\}$.

(2) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \ \wedge \ \sqrt{x-1} \geq x - 3\}$.

(3) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \ \wedge \ \dfrac{(x-2)(|x|+1)}{x-3} \leq 0\}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Methode der kritischen Punkte!

(4) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : |1 - x^2| \geq x + 1\}$.

(5) Welche der folgenden 6 Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y$ (b) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x = y$
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y$ (d) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x = y$
(e) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x = y$ (f) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : x = y$

(Warum wird nicht nach $\exists y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : x = y$ und $\forall y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x = y$ gefragt?)

(6) Zeichnen Sie die durch die Gleichung $3x + 3y + 4z = 12$ bestimmte Ebene im $\mathbb{R}^3$ und geben Sie 2 verschiedene Parameterdarstellungen an.

(7) Für welche k hat das Gleichungssystem

$$x - y = 3, \quad 2x - 2y = k$$

keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

(8) Zu zeigen: Ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}$$

lösbar, so ist $c = a + b$.

Zusatzaufgabe (Z1) Welche reellen Zahlen genügen der Ungleichung

$$\left| \frac{x^2 + 5x + 8}{x + 6} \right| + x < 3 \ ?$$

(Z2) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} l_1 : &\quad ax + by = k, \\ l_2 : &\quad cx + dy = l, \\ l_3 : &\quad ex + fy = m \end{aligned}$$

Welche Lage müssen die Geraden l_1, l_2 und l_3 zueinander haben, wenn das System

a) keine

b) genau eine

c) unendliche viele Lösungen besitzt?

1998 - 10 - 21

2. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

(9) Wir betrachten das Polynom $P:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}: x\longmapsto 2x^3+x^2-2x-1$.

(a) Dividieren Sie P durch $x-2$. Wie läßt sich der Rest direkt bestimmen?

(b) Zerlegen Sie P in Linearfaktoren!

Hinweis zu (b): Die Nullstelle -1 findet man durch Probieren.

(10) Es seien $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$. Bestimmen Sie $f\circ g$ und $g\circ f$ und zeigen Sie, daß $g\circ f=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Skizzieren Sie die Graphen von $f\circ g$ und $g\circ f$!

(11) Bestimmen Sie geometrisch (a) $\cos\frac{\pi}{3}$, (b) $\sin(-\frac{\pi}{3})$, (c) $\tan(-\frac{\pi}{3})$.

(12) Leiten Sie aus dem Summensatz für den Sinus die Formel
$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ her!

Hinweis: Setzen Sie $\alpha=\frac{a+b}{2}$, $\beta=\frac{a-b}{2}$ und betrachten Sie $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$.

(13) Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche ungerade? (Skizze!)

(a) x^3 (b) x^3+1 (c) $(x+1)^3$ (d) $x^2+|x|$ (e) $\dfrac{1}{x^2-1}$ (f) $\cot x$.

(14) Drei Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen einen Kreis K mit der Gleichung

$$ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$$

Bestimmen Sie a,b,c,d so, daß K die Punkte $(4,-3),(-4,5),(-2,7)$ enthält.

(15) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 6,\\ x^2 & - & y^2 & + & 2z^2 & = & 2,\\ 2x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & 3,\end{array}$$

durch Substitution: $x_1=x^2$, $x_2=y^2$, $x_3=z^2$.

(16) Ermitteln Sie die 18 Lösungen des nichtlinearen Systems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \sin\alpha & + & 2\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0,\\ 2\sin\alpha & + & 5\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0,\\ -\sin\alpha & - & 5\cos\beta & + & 5\tan\gamma & = & 0,\end{array}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi,\ 0 \leq \beta \leq 2\pi,\ 0 \leq \gamma \leq 2\pi.$$

(Z3) Beweisen Sie geometrisch den Summensatz für den Cosinus, d.h. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. (Sie dürfen wie in der Vorlesung annehmen, daß $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in]0°, 90°[$.)

1998 - 10 - 28

3. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

(17) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0.7\}$!

(18) Bestimmen Sie (a) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (b) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; (c) $\sin(\arcsin x),\ x \in [-1,1]$; (d) $\arcsin(\sin x),\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; (e) $\arcsin(\sin x),\ x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Hinweis zu (e): $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x = \sin(\pi - x)$ (Warum?)

(19) Zeigen Sie für $x \neq \pm 1 : 2\arctan x = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) + \begin{cases} 0 & : |x| < 1, \\ \pi & : x > 1, \\ -\pi & : x < -1. \end{cases}$

Hinweis: Setzen Sie $u = \arctan x$ und berechnen Sie $\tan(2u) = \tan(u+u)$ mit der Summenformel!

(20) Es sei $a_n = \dfrac{2n-7}{n+3}$. Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, daß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - 2| < \epsilon$. Wie groß muß N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = 0.1$?

(21) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n + 1 - \dfrac{2n^3 + 5n^2}{n^2+1}\right)$ mit den Grenzwertsätzen! Was ergibt sich für $n = 10, 100, 1000$?

Hinweis: Bringen Sie zuerst a_n auf einen gemeinsamen Bruchstrich.

(22) Man löse die folgende Matrixgleichung für a, b, c und d :

$$\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

(23) Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(24) Zeigen Sie, daß $AB \neq BA$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(Z4) Es sei $a_n = n^2 - 4n$. Zeigen Sie mit der Definition, daß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, d.h. zeigen Sie $\forall M \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > M$. Wie groß muß N mindestens gewählt werden, wenn $M = 1000$?

(Z5) Berechnen Sie die Matrizenprodukte

$$(1)\quad A \cdot B \qquad \text{und} \qquad (2)\quad B \cdot A \qquad\qquad \text{für} \quad A = (a_1, \cdots, a_n) \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1998 - 11 - 11

4. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

(25) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7\cdot 5^n + 3^n}$ mit dem Einschließungssatz! Was ergibt sich für $n = 10$ und für $n = 100$?

(26) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - \sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)$ und zeichnen Sie die Graphen der stetigen Funktionen $y = x$ und $y = \sqrt[3]{x^3+2x^2}$!

Hinweis: $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

(27) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$! Was ergibt sich für $x = \pm 0.1$ und für $x = \pm 0.01$?

Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ und leiten Sie sie her!

(28) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$! Was ergibt sich für $x = 0.9$ und für $x = 0.99$?

Hinweis: Substituieren Sie $t = \arccos x$!

(29) (a) Es sei $f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{|x|}$. Was ist $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$? Existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

(b) Ist f in 0 stetig? Ist f stetig (schlechthin)? Läßt sich f stetig in 0 fortsetzen?

(30) Sei A gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimme $p(A)$ für

(a) $p(x) = x - 2$ (b) $p(x) = 2x^2 - x + 1$ (c) $p(x) = x^3 - 2x + 4$.

(31) Bestimmen Sie die Inverse von

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(32) (a) Man zeige, daß eine Matrix, die eine Nullzeile enthält, nicht invertierbar ist.

(b) Man zeige, daß eine Matrix, die eine Nullspalte enthält, nicht invertierbar ist.

(Z6) (a) Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \geq 0 \text{ mit } 0 < |x-4| < \delta : |\sqrt{x} - 2| < \epsilon$$

(b) Wie ist δ für $\epsilon = 0.1$ zu wählen?

(c) Wie kann man den Grenzwert in (a) mit dem Wort "stetig" formulieren?

1998 - 11 - 18

5. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

(33) Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, daß das Polynom $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $]0,1[$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung ein Teilintervall der Länge $\frac{1}{8}$, in dem eine Nullstelle von p liegt.

(34) Zur Zeit t bleiben von 1 kg eines durch Radioaktivität zerfallenden Stoffes noch $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ kg übrig.

(a) Mit welcher Zahl α kann der Zerfall von Radium (Halbwertszeit 1620 Jahre, d.h. nach 1620 Jahren ist die Hälfte übrig) beschrieben werden? (t werde in Jahren gemessen.)

(b) Wieviel g von 1 kg Radium sind nach 100 Jahren zerfallen?

(35) Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren die folgenden Formeln!

$\forall n \in \mathbb{N} : \forall u, v, q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$:

(a) $u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1});$

(b) $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}.$

(c) Wenn man auf das erste Feld eines Schachbrettes 1 Reiskorn legt, auf das 2. Feld 2 Reiskörner, auf das 3. Feld $2^2 = 4$ Reiskörner, auf das 4. Feld $2^3 = 8$ Reiskörner, und immer so weiter macht, wieviele Reiskörner ergibt das?

(36) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$ und die Tangente an die Kurve $f(x) = x^3$ im Punkt $(1,1)$, d.h. für $x_0 = 1$. (Skizze!)

<u>Hinweis:</u> $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

(37) Berechnen Sie die Ableitung des Cosinus, d.h. berechnen Sie $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$.

<u>Hinweis:</u> $\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}$; substituieren Sie $t = \frac{x - x_0}{2}$!

(38) Man schreibe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

als Produkt $A = EFGR$ von Elementarmatrizen E, F, G und einer Zeilenstufenmatrix R.

(39) Man zeige, daß

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

(40) Man ermittle Bedingungen für b, damit das System lösbar ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & b_2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & b_3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & b_4 \end{array}$$

(Z7) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x - \cot x}{(x-\frac{\pi}{2})^3}$ mit der Substitution $x = t + \dfrac{\pi}{2}$ und der Formel $1 - \cos t = 2\sin^2(\frac{t}{2})$.

1998 - 11 - 25

6. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

(41) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so gilt für kleines h : $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. Der Fehler in $\approx$ ist $\rho(h)$. Bestimmen Sie $\rho(h)$

(a) für $f = \cos$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $h = 0.1$;

(b) für $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, h beliebig. Zeigen Sie in diesem Fall, daß $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{h} = 0$.

(42) (a) Zeigen Sie $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ mit der Quotientenregel.

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie beide Seiten der Gleichung $\cot x \cdot \sin x = \cos x$ differenzieren.

(43) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen.

$$f(x) = \sqrt{1-x}\,\cos\left(\mathrm{e}^{3+2\sin x}\right); \qquad z(t) = \frac{\tan(t^2) + \tan^2 t}{\ln(\arctan t)}$$

(44) Bestimmen Sie (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln(u + \sqrt{u^2+v^2})$ (b) $\left(\sqrt[3]{\arccos(\sqrt{1-x^2})}\right)'$

Hinweis zu (b): $\sqrt{x^2} = |x|$, $\dfrac{x}{|x|} = \operatorname{sign} x$ für $x \neq 0$

(45) Zeigen Sie, daß $\arctan'(t_0) = \dfrac{1}{1+t_0^2}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ (falls $\tan x$ definiert ist)!

(46) Ist die (n,n) -Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch?

(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

(c) $a_{ij} = 2i + 2j$ (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

(47) Man bestimme eine Diagonalmatrix A mit

(a) $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A^{-2} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(48) Man bestimme alle a, b und c, für die A symmetrisch ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

(Z8) Differenzieren Sie die Funktionen $x^{\sin x}$ und x^{x^x} (d.h. genauer $x^{(x^x)}$).

<u>Hinweis:</u> $\forall u > 0 : \forall v \in \mathbb{R} : u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$

1998 - 12 - 02

7. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

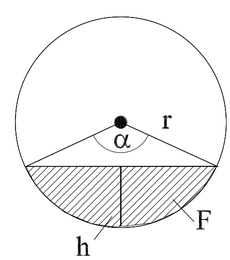
(49) Aus einem Lastwagen wird maschinell mit der Geschwindigkeit $5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ Sand ausgeladen. Dieser Sand bildet eine kegelförmigen Haufen, dessen Höhe gleich $\frac{4}{3}$ des Radius ist. Mit welcher Geschwindigkeit wächst der Radius in dem Augenblick, in dem der Sandkegel eine Höhe von $3\,\mathrm{m}$ hat?

Hinweis: Kegelvolumen $= \frac{1}{3}$ Grundfläche $\cdot$ Höhe

(50) Bestimmen Sie die Nullstelle von $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $]0,1[$ (vgl.Üb. 33) mit dem Newton'schen Näherungsverfahren! Verwenden Sie 0 als Startwert x_0 und berechnen Sie x_3.

(51) Ein auf einer Mantellinie liegender zylindrischer Öltank enthält 3000 Liter. Seine Länge beträgt $5\,\mathrm{m}$, sein Radius r ist $70\,\mathrm{cm}$. Bestimmen Sie näherungsweise die Höhe h des Flüssigkeitsstandes mit dem Newton'schen Näherungsverfahren. Verwenden Sie $\alpha_0 = \pi$ und berechnen Sie α_2. Dann ist $h \approx r\big(1 - \cos(\alpha_2/2)\big)$, vgl. die Skizze.

$$\begin{aligned} F &= r^2\,\frac{\alpha}{2} - \Big(r\sin\frac{\alpha}{2}\Big)\Big(r\cos\frac{\alpha}{2}\Big) \\ &= \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) \quad \text{(warum?)} \end{aligned}$$



(52) (a) Differenzieren Sie $f(x) = \arcsin|x|, \quad x \in [-1,1]$, für $x \neq 0, \pm 1$.

(b) Skizzieren Sie den Graph von f. (c) Ist f in 0 differenzierbar?

(d) Wo sind die Maxima bzw. Minima von f ? Warum findet man sie nicht, indem man f' Null setzt?

(53) Betrachten Sie die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x}$. Was besagt in diesem Fall der Mittelwertsatz? Wo liegt der Mittelwert x_0 ?

(54) Seien $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

$$\|a+b\|_2,\ \|a\|_2 + \|b\|_2,\ \|-2a\|_2 + 2\|a\|_2,\ \|3a - 5b + c\|_2,\ \frac{1}{\|c\|_2}c,\ \left\|\frac{1}{\|c\|_2}c\right\|_2.$$

(55)

(a) Man ermittle zwei zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ <u>orthogonale Einheitsvektoren</u>

(Einheitsvektor=Vektor der Länge 1) im $\mathbb{R}^2$.

(b) Zu zeigen: Es gibt unendlich viele Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$, die auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

(56) Der <u>Abstand des Punktes</u> $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ von der <u>Hyperebene</u>

$7x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 5x_5 - 8 = 0$ im $\mathbb{R}^5$ ist zu bestimmen.

(Z9) Die differenzierbare Funktion $y = f(x)$ erfüllt die Gleichung $y^2 + 4xy - 7x^5 + 2 = 0$ und weiters $f(1) = -5$.

(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung nach y auf und stellen Sie so $y = f(x)$ explizit dar. Berechnen Sie daraus $f'(1)$.

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f'(1)$ durch implizites Differenzieren!

1998 - 12 - 16

8. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

Machen Sie bei den zwei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion. Geben Sie die Nullstellen, die Extrema (unterschieden in globale bzw. lokale Maxima oder Minima), die Wendepunkte und (evtl.) die Punkte, wo f nicht differenzierbar ist, an. Machen Sie eine Skizze!

(57) $f : [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 1$

(58) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$, $x \in [-3, 1]$ (vgl. Üb. 26) (Bedenken Sie, daß $\sqrt[3]{x}$ außer in 0 überall differenzierbar ist, und f daher differenzierbar ist solange $x^3 + 2x^2 \neq 0$.)

(59) Wie ist eine zylindrische Dose mit 1 l Inhalt zu dimensionieren, damit sie minimale Oberfläche besitzt? Was ist das Verhältnis der Höhe zum Durchmesser der Grundfläche?

(60) Berechnen Sie die zwei folgenden Limites mit der Regel von l'Hôpital.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\tan(x-2)}{x^2 + x - 6}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

Hinweis zu (b): Bringen Sie die Brüche auf gemeinsamen Nenner und verwenden Sie die Regel von l'Hôpital öfters!

(61) Bestimmen Sie die Krümmung κ, den Krümmungsradius ρ, und den Krümmungsmittelpunkt M zum Punkt $P = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ auf dem Graphen von $y = \sin x$. (Skizze!)

Hinweis: $\kappa = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad M = P + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$

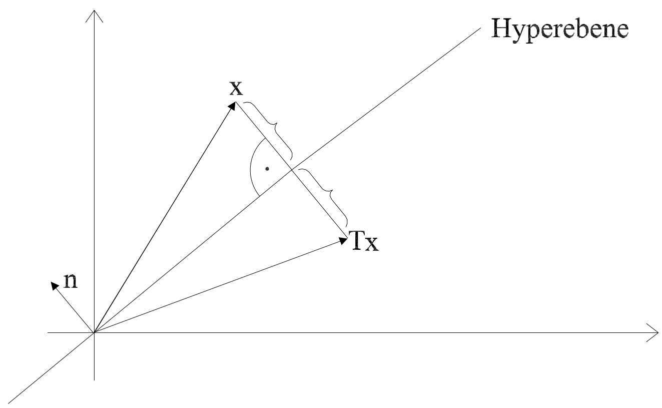
(62) Man bestimme die Standarddarstellungsmatrizen der zusammengesetzten Operatoren auf $\mathbb{R}^3$:

(a) Zuerst eine Rotation von 30° um die x-Achse, dann eine Rotation von 30° um die z-Achse und schließlich eine Kontraktion mit Faktor $k = \frac{1}{4}$;

(b) Reflexion an der xy-Ebene, dann an der xz-Ebene, gefolgt von einer Projektion auf die yz-Ebene;

(c) Rotation von 270° um die x-Achse, 90° um die y-Achse und 180° um die z-Achse.

(63) Im $\mathbb{R}^4$ ist eine Hyperebene durch die Gleichung $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ gegeben. $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sei die Reflexion (= Spiegelung) an der Hyperebene. Ermitteln Sie die Standarddarstellungsmatrix von T durch Betrachtung folgender Zeichnung:



(64) Bestimmen Sie a, b, c, d so, daß die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ die Standarddarstellungsmatrix einer Rotation im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel von $60°$ im mathematisch positiven Sinn ist. Bestimmen Sie A^{19} , indem Sie benutzen, daß A^{19} die Standarddarstellungsmatrix einer Drehung um den Winkel $1140°$ im positiven Sinn ist.

(Z10) Machen Sie eine Kurvendiskussion von $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot |x+1|, \quad x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $x > -1$ und $x < -1$!

1999 - 01 - 13

9. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

(65) Berechnen Sie für $f : [0, \frac{3\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ und die Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ (Skizze!) (a) die untere bzw. obere Darbouxsumme $UD(Z)$ bzw. $OD(Z)$;
(b) die Riemannsummen $R(Z, \Xi)$ für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ bzw. für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\}$.

(66) Bestimmen Sie durch zweimaliges partielles Integrieren $\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)\,\mathrm{d}x$.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale!

(67) (a) $\displaystyle\int \left(\frac{a}{\cos^2 x} + bx \ln x\right) \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^\pi y^2 \cos y\,\mathrm{d}y$

(68) (a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sin t\,\mathrm{e}^{\cos t}\right) \mathrm{d}t$ (b) $\int_0^{1/2} \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(69) (a) $\displaystyle\int_2^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^\pi + \pi^x - (5x-7)^6\right) \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+3}}$

Hinweis zu (a): $\pi^x = \mathrm{e}^{x \ln \pi}$; substituieren Sie im letzten Teil $t = 5x - 7$.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie Üb. 44 (a) und Satz 3, 3), (α), p. 87, der Vorlesung (d.h. eine Folgerung des Hauptsatzes der Integralrechnung).

(70) Ist $a \neq 0$ ein Einheitsvektor, so ist

$$A = \cos\varphi \cdot I + (1 - \cos\varphi) a \cdot a^T + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Standarddarstellungsmatrix der Drehung um den Winkel φ in positiver Richtung um die Rotationsachse in Richtung a.

(a) Zeigen Sie $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{sp}(A) - 1}{2}$.

(b) Zeigen Sie:

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

ist die Darstellungsmatrix einer Rotation im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Drehwinkel und die Drehachse.

(71) Man entscheide ohne Rechnung, ob der beschriebene lineare Operator injektiv ist.

(a) Orthogonalprojektion auf die x -Achse im $\mathbb{R}^2$,

(b) Reflexion an der y -Achse im $\mathbb{R}^2$,

(c) Reflexion an der Geraden $y = x$ im $\mathbb{R}^2$,

(d) Kontraktion mit Faktor $k > 0$ im $\mathbb{R}^2$,

(e) Rotation um die z -Achse im $\mathbb{R}^3$,

(f) Reflexion an der xy -Ebene im $\mathbb{R}^3$,

(g) Dilatation mit Faktor $k > 0$ im $\mathbb{R}^3$.

(72) Eine lineare Transformation $w = Tx$ ist durch

$$\begin{array}{rcrcrcr} w_1 & = & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \\ w_2 & = & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 \\ w_3 & = & x_1 & & & + & 8x_3 \end{array}$$

gegeben. Ist T injektiv? Ist T surjektiv?

(Z11) Berechnen Sie $\int_0^b \sin t \, dt$ (für $b > 0$) mit Riemannsummen.

Hinweis: Setzen Sie $h = \frac{b}{n}$, $Z^{(n)} = \{0, h, 2h, \ldots, nh\}$, $\Xi^{(n)} = \{\frac{1}{2}h, \frac{3}{2}h, \ldots, \frac{2n-1}{2}h\}$ und verwenden Sie $\sin(\frac{j}{2}h) = \frac{1}{2\sin(h/2)} 2\sin(\frac{j}{2}h)\sin(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2\sin(h/2)} \big(\cos(\frac{j-1}{2}h) - \cos(\frac{j+1}{2}h)\big)$.

1999 - 01 - 20

10. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 1998/99

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale!

(73) (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$

(74) (a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+2}$

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Substitution $t=\tan\frac{x}{2}$, $x=2\arctan x$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ und Übung (73b).

(75) (a) $\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

Hinweis zu (d): $\cos^3 x=\cos x(1-\sin^2 x)$

(76) Zeigen Sie $\forall x,y\in\mathbb{R}:$

(a) $\operatorname{th}'(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1-\operatorname{th}^2 x$ (b) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$.

(77) (a) Zeigen Sie $\forall t_0>1:\operatorname{arch}'(t_0)=\dfrac{1}{\sqrt{t_0^2-1}}$ mit dem Satz über die Ableitung einer Umkehrfunktion!

(b) Zeigen Sie $\forall x\geq 1:\operatorname{arch}x=\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)$.

(c) Kontrollieren Sie das Ergebnis in (a) mit Hilfe von (b)!

(78) Die reellen (2,2)-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b\end{pmatrix}$ bilden einen Untervektorraum V von $M_{2,2}$ und daher selbst einen Vektorraum (Definition und Satz der Vorlesung). Geben Sie 2 verschiedene Basen von V an und bestimmen Sie $\dim V$.

(79) Seien $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\2\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\\0\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

(79.1) Kann v_3 als Linearkombination von v_1,v_2,v_4 dargestellt werden?

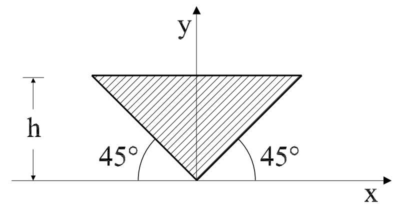
(79.2) Gilt: $v_4\in\langle v_1,v_2,v_3\rangle$?

(80) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Lösungsraumes:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& z &=& 0\\ 3x &+& 2y &-& 2z &=& 0\\ 4x &+& 3y &-& z &=& 0\\ 6x &+& 5y &+& z &=& 0\end{array}$$

(Z12) Aus einem Überlauf von der Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks der Höhe h fließt Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g(h-y)}$ (Ausflußgesetz von Torricelli). Berechnen Sie die Ausflußmenge Q pro Sekunde! Was ergibt sich für $h = 3\,\mathrm{dm}$?

<u>Hinweis:</u> $Q = \int\limits_0^h 2y\sqrt{2g(h-y)}\,\mathrm{d}y$



Beachten Sie bitte, daß die 3. Klausur am Freitag, den 29. Jänner 1999, von 9 h 15 - 12 h, im BZ I und BZ II stattfindet.

1998 - 11 - 04

1. Klausur zu 'Mathematik A', WS 1998/99

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : 3|x+1| \leq 7 - x^2\}$.

(2) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = \frac{1}{2}\}$. (Geben Sie auch die geometrische Konstruktion an, durch die $\arccos \frac{1}{2}$ im Einheitskreis bestimmt wird.)

(3) Zeigen Sie $2 \arctan x = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) + \pi$ für $x > 1$.

Hinweis: Setzen Sie $u = \arctan x$ und verwenden Sie $\tan(2u) = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$!

(4) Es sei $a_n = \dfrac{n-3}{2n+5}$. Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, daß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \frac{1}{2}| < \epsilon$. Wie groß muß N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = 0.1$?

(5) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & b_2, \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & b_3. \end{array}$$

(6) Legen Sie durch die vier Punkte $(0,10)$, $(1,7)$, $(3,-11)$, und $(4,-14)$ eine "kubische Parabel" $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c, d so, daß die vier Punkte die Gleichung erfüllen.

1998 - 12 - 09

2. Klausur zu 'Mathematik A', WS 1998/99

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Berechnen Sie **ohne** Verwendung der Regel von l'Hôpital $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\tan(x-2)}{x^2+x-6}$!
Hinweis: Substitution!

(2) (a) Bestimmen Sie $(\sqrt{x})'$ mit der Definition, d.h. berechnen Sie $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$!
Unterscheiden Sie die Fälle $x_0 > 0$ und $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie die Tangente an $f(x) = \sqrt{x}$ im Punkt $(4, 2)$, d.h. für $x_0 = 4$. (Skizze!)

(3) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen.

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\ln(\arccos x)}; \qquad z(t) = \sqrt[3]{t^{-2}+a^2}\,\mathrm{e}^{5-2t+\tan t}$$

(4) Der Schnittpunkt der Geraden $y = -x$ mit der Kurve $y = \ln x$ soll mit Hilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens bestimmt werden. Berechnen Sie x_1 und x_2 zum Startwert $x_0 = 1$.

Hinweis: Benützen Sie für die Rechnung den Näherungswert $\ln 2 \approx 0.69$.

(5) Schreiben Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ als Produkt $A = EFGHR$ von Elementarmatrizen E, F, G, H und einer Zeilenstufenmatrix R.

(6) Welche Bedingungen muß b erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 11x_3 & + & 14x_4 & = & b_3 \\ 12x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & b_4 \end{array}$$

lösbar ist?

1999 - 01 - 29

3. Klausur zu 'Mathematik A', WS 1998/99

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Benützen Sie für Rechnungen die angegebenen Näherungswerte.

(1) Machen Sie für die Funktion $f : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x| - \ln(x^2 + 1)$ eine Kurvendiskussion. Geben Sie die Extrema, unterschieden in globale bzw. lokale Maxima oder Minima an. Machen Sie eine Skizze!
Hinweis: $\ln 2 \approx 0.7, \quad \ln 5 \approx 1.6$

(2) Bestimmen Sie die folgenden zwei Integrale. (Sie könnten das Vorzeichen in (a) mittels einer Skizze überprüfen.)
(a) $\int_0^\pi x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int x \cos x^2 \, \mathrm{d}x$

(3) Bestimmen Sie die folgenden zwei Integrale auf 2 Dezimalstellen! (Sie könnten das Vorzeichen in (a) mittels einer Skizze überprüfen.)
(a) $\int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x}$ (b) $\int\limits_{-2}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 8}$
Hinweis: $\ln 6 \approx 1.8, \quad \pi \approx 3.14$

(4) Zeigen Sie $\forall x \in \mathbb{R}:$ (a) $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ (b) $\mathrm{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}\,)$

(5) Zu bestimmen ist die Standarddarstellungsmatrix des folgenden zusammengesetzten Operators auf $\mathbb{R}^3$: Zuerst eine Rotation von $45°$ um die $y-$Achse, dann eine Rotation von $60°$ um die $x-$Achse, und schließlich eine Dilatation mit Faktor 4.
Hinweis: Wenn man von der positiven Drehachse aus auf die Drehebene schaut, wird im Gegenuhrzeigersinn gedreht.

(6) Geben Sie die Standarddarstellungsmatrix der Spiegelung an der Ebene $x + 2y - 3z = 0$ im $\mathbb{R}^3$ an.