1. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(1) Welche der folgenden sieben Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(a) $x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$ (b) $x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2$

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geq y \Longleftrightarrow x^2 \geq y^2$ (d) $\forall x, y \geq 0 : x \geq y \Longleftrightarrow x^2 \geq y^2$

(e) $\forall x, y \geq 0 : \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (f) $\forall x, y \geq 0 : \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(g) $\forall M, N$ Mengen $: x \in M \cap N \Longleftrightarrow x \in M \wedge x \in N$

(2) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} :\ 3|x-2| \leq 6 + 2x - x^2\}$.

Hinweis: Sie müssen die Fälle $x - 2 \geq 0$ und $x - 2 \leq 0$ unterscheiden! (Warum?)

(3) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 1 \ \wedge \ \dfrac{1}{x-1} < x + 1\}$.

Hinweis: Vor dem Multiplizieren mit $x - 1$ müssen Sie die Fälle $x - 1 > 0$ und $x - 1 < 0$ unterscheiden! (Warum?)

(4) Für welche reelle x ist $\sqrt{3x+10} < 2 + x$?
Hinweis: Schreiben Sie zunächst L als Menge an! Unterscheiden Sie dann die Fälle $2 + x \geq 0$ und $2 + x < 0$, bevor Sie quadrieren. (Vgl. Üb. 1, (c) und (d)!)

(5) Wir betrachten das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

(a) Dividieren Sie P durch $x - 1$. Wie lässt sich der Rest direkt bestimmen?

(b) Zerlegen Sie P in Linearfaktoren und skizzieren Sie den Graph von P!
Hinweis zu (b): Die Nullstelle $x_0 = -1$ findet man durch Probieren.

(6) Es seien $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x^2$.

(a) Was ist $f \circ g$ und was ist $g \circ f$? (b) Zeigen Sie, dass $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

(c) Skizzieren Sie nacheinander die Graphen der Funktionen $\cos x$, $\cos 2x$, $-\cos 2x$, $1 - \cos 2x$, sowie $\sin^2 x$.

(7) Bestimmen Sie geometrisch (a) $\cos(-\frac{\pi}{3})$, (b) $\sin(-\frac{\pi}{3})$, (c) $\tan(-\frac{\pi}{3})$.

Hinweis: Zeichnen Sie im Einheitskreis das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(\cos(-\frac{\pi}{3}), \sin(-\frac{\pi}{3}))$ und beachten Sie, dass dieses Dreieck gleichseitig ist.

(8) Leiten Sie aus dem Summensatz für den Cosinus die Formel
$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ her!

Hinweis: Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$ und betrachten Sie $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$.

(Z1) Bestimmen Sie $L = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge \dfrac{3\,|2x-1| - 23}{x-1} \leq 6 - x\right\}$!

2017 - 10 - 18 bzw. 20

2. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(9) (a) Skizzieren Sie die Parabel $y = P(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$! Was ist die Bildmenge B?
(b) Auf welchen Intervallen ist P monoton steigend bzw. fallend (und daher umkehrbar)?
(c) Betrachten Sie P auf diesen Intervallen, nennen Sie diese Funktionen f_1 bzw. f_2, bestimmen Sie die Umkehrfunktionen f_1^{-1} und f_2^{-1} und skizzieren Sie diese!

(10) Wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar (= injektiv) ist und B die Bildmenge, so gilt

$$\boxed{\forall x \in D : f^{-1}\big(f(x)\big) = x} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\forall x \in B : f\big(f^{-1}(x)\big) = x}$$

(a) Was heißt das für $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$?
(b) Was heißt das für $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$?
(c) Warum ist $\sqrt{x^2} \neq x$ für $x < 0$? (d) Warum ist $\arcsin(\sin \pi) \neq \pi$?

(11) Es sei $f :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x$.
(a) Was ist die Bildmenge B? Was ist $f^{-1}(x)$? Was ist $\frac{1}{f(x)}$? Ist es dasselbe?
(b) Was ist $\tan \frac{\pi}{4}$? Was ist $\arctan 1$? Skizzieren Sie $\arctan$!
(c) Wann gilt $\arctan(\tan x) = x$? (d) Was ist $\arctan(\tan x)$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$?

(12) (a) Bestimmen Sie $\arcsin \frac{1}{2}$! (b) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \frac{1}{2}\}$!
(c) Bestimmen Sie $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6})$! Warum ist es nicht $\frac{5\pi}{6}$?
(d) Skizzieren Sie die Graphen von $y = \arcsin x$ und von $y = \arccos x$.

(13) Geben Sie für die Gerade g im $\mathbb{R}^2$ durch $A = (3/1), \quad B = (2/4)$
(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}$,
(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ an!
Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(14) Geben Sie für die Ebene ϵ im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/2/3), \quad B = (1/0/-1)$, und $C = (-2/1/-1)$
(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2$,
(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$ an!
Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(15) Bestimmen Sie die Gerade h im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/-1/2), \quad B = (2/0/0)$
(a) durch eine Parameterdarstellung,
(b) als Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. durch 2 Gleichungen!
Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(16) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene ϵ aus Aufgabe 14 mit der Geraden h aus Aufgabe 15!

(Z2) (a) Warum gilt $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$, $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$? (Vgl. Skriptum S. 11 oder Summensätze).
(b) Folgern Sie $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = -\tan(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\tan x}$ (für x, wo alles definiert ist).
(c) Zeigen Sie mit (b), dass $\forall u > 0 : \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} - \arctan u$! (Setzen Sie $u = \tan x$)

2017 - 10 - 25 bzw. 27

3. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

Lösen Sie die folgenden 4 linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Algorithmus:

(17)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= -4 \end{aligned}$$

(18)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= -4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(19)
$$\begin{aligned} -x_4 + x_6 &= 1 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 &= 2 \\ 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 - \mathbf{2}\,x_6 &= -1 \end{aligned}$$

(20)
$$\begin{aligned} -x_4 + x_6 &= 1 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 &= 2 \\ 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + \mathbf{3}\,x_6 &= -1 \end{aligned}$$

(21) Wir betrachten nochmals das inhomogene Gleichungssystem aus Übung 17. Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{hom}}$ und überprüfen Sie, dass $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$, d.h. $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$ (s. § 3 A im Skriptum). Überprüfen Sie auch die Gleichung $k = n -$ Anzahl der Pivotzeilen (§ 2). Warum ist L_{hom} ein Vektorraum, L_{inh} aber nicht? Geben Sie eine Basis und die Dimension von L_{hom} an!

(22) Zeigen Sie, dass $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist!
Zeigen Sie dazu, dass sich jedes $\vec{b}$ eindeutig als LK $\vec{b} = \lambda_1 \vec{f_1} + \lambda_2 \vec{f_2} + \lambda_3 \vec{f_3}$ schreiben lässt, indem Sie das Gleichungssystem $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b_1$, $2\lambda_1 + 2\lambda_3 = b_2$, $3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = b_3$ lösen. Was sind die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis?

(23) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$? (Gauß) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig? Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Basissatz, S. 21, 3b)

(24) Es seien $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \lambda_3 \vec{w}_3 = \vec{0}$? (Gauß; setze $\lambda_3 = \mu$) Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ linear unabhängig? Was bedeutet das geometrisch? Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(Z3) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Ist $\vec{v}_1$ l.u.? Ist $\vec{v}_1$ ein EZS von $\mathbb{R}^2$? Ist $\vec{v}_1$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

(b) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ l.u.? Sind sie ein EZS von $\mathbb{R}^2$? Sind sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

(c) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ l.u.? Sind sie ein EZS von $\mathbb{R}^2$? Sind sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

(d) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ l.u.? Sind sie ein EZS von $\mathbb{R}^2$? Sind sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

2017 - 11 - 10

1. Klausur zu 'Mathematik 1', WS 2017/2018

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \ 2|x+3| < x^2 + 5x + 6\}$!

(2) (a) Bestimmen Sie geometrisch, d.h. durch eine Konstruktion im Einheitskreis, $\sin(\frac{5\pi}{6})$!

Berechnen Sie daraus (b) $\cos(\frac{5\pi}{6})$ und (c) $\tan(\frac{5\pi}{6})$!

(3) Leiten Sie aus dem Summensatz für den Sinus die Formel
$\sin a - \sin b = 2\,\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ her!

<u>Hinweis:</u> Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \beta = \frac{a-b}{2}$!

(4) (a) Bestimmen Sie $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$! (b) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$!

(c) Für welche x gilt $\arccos(\cos x) = x$?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von $y = \arccos x$!

(5) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Algorithmus und machen Sie die Probe!

$$\begin{aligned}
2\,x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 \quad - x_4 &= 1\\
- x_2 \quad + x_3 + 2\,x_4 &= 1\\
2\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 + 5\,x_4 &= 4\\
2\,x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 &= 2
\end{aligned}$$

Überprüfen Sie zur Probe, dass $\dim L_{\text{hom}} = n - \text{Anzahl PZ}$, dass der Stützvektor das inhomogene und die Richtungsvektoren das homogene Gleichungssystem lösen!
<u>Hinweis:</u> Die Lösungsmenge ist nicht leer. Bevor Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus beginnen, kontrollieren Sie, ob Sie A und $\vec{b}$ richtig abgeschrieben haben! Rechnen Sie dann langsam und sorgfältig und kontrollieren Sie jeden Schritt zweimal!

(6) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2\\1\\3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2\\0\\2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3.$

(a) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig? (Wenn ja warum, wenn nein warum nicht?)

(b) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$? (Wenn ja warum, wenn nein warum nicht?)

(c) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$? (Wenn ja warum, wenn nein warum nicht?)

(d) Was sind die Koordinaten von $\vec{v}_4$ bezüglich $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$?

2017 - 11 - 15 bzw. 17

4. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2013/14

(25) Wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem zu Aufgabe 17.

(a) Was ist der Zeilenraum Z?

(b) Wenden Sie Gauß an und bestimmen Sie die Pivotzeilen (vgl. Aufg. 17 und 21).

(c) Was ist nach §3, Satz 5, S. 24, im Skriptum eine Basis von Z?

(d) Was ist $\dim Z$? Was ist $\dim L$?

(e) Sind die vier Zeilen des homogenen linearen Gleichungssystems (α) l.u.? (β) ein EZS von Z? (γ) eine Basis von Z?

(26) (a) Drehen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ um 60° im Gegenuhrzeigersinn!

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der Geraden $x_2 = -x_1$. Warum ist diese Abbildung linear? Was ist die Matrix A von f?

(27) (a) Bestimmen Sie wie im Skriptum, S. 32, die Matrix A der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, für welche $f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $f(-2,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt.

(b) Was ist $f(1,1)$?

(28) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Welche der Produkte $AB, BA, A\vec{x}, \vec{x}A, B\vec{x}, \vec{x}B, \vec{x}^T\vec{u}, \vec{x}\vec{u}^T$ sind sinnvoll? Berechnen Sie diese!

(29) Es seien f bzw. g bzw. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehungen um die Winkel α bzw. β bzw. $\alpha + \beta$ im Gegenuhrzeigersinn.

(a) Welche Matrizen A, B, C entsprechen f, g, h?

(b) Überlegen Sie, dass $h = f \circ g$ und daher $C = A \cdot B$ (§4, Satz 2).

(c) Folgern Sie aus (a), (b) die Summensätze für Sinus und Cosinus.

(30) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ sowie $B\vec{x} - \vec{u} = C^T\vec{y}$ (a) mit Pünktchen, (b) mit Summenschreibweise, (c) in Tensorschreibweise! (Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$.)

(31) (a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1} wie in §4, Bsp. 10, S. 41 des Skriptums! Erklären Sie den Vorgang!

(b) Kontrollieren Sie $A^{-1} \cdot A = I_3$! Wie folgt das aus der Gleichung $\forall \vec{x} \in D = \mathbb{R}^3 : f^{-1}(f(\vec{x})) = \vec{x}$? (c) Was ist die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = (1,2,3)^T$?

(32) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $ad - bc \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, indem Sie $A \cdot A^{-1} = I$ überprüfen!

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie mit (a) A^{-1} und die Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$.

(Z4) Schreiben Sie $ABC = D$ in TSW und $b_{ji} = c_{ik}d_{kj} - x_i y_j$ mit Vektoren/Matrizen an!

2017 - 11 - 22 bzw. 24

5. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(33) (a) Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren $\vec{v}_1 = (2,2,0)^T, \vec{v}_2 = (2,1,3)^T, \vec{v}_3 = (1,3,1)^T$ aufgespannt wird.

(b) Warum sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(c) Machen Sie eine Skizze, die zeigt, warum $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ negativ ist!

(34) Bestimmen Sie $\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0 & -7 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -5 \end{vmatrix}$ so wie in §5, Bsp. 3, S. 51 des Skriptums.

(35) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus $\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$!
(Hoffentlich sind Sie nicht abergläubisch ...)

(36) Es seien $a, b > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei Streckung bzw. Stauchung (für $a, b > 1$ bzw. < 1) mit dem Faktor a in x_1-Richtung, mit dem Faktor b in x_2-Richtung.

(a) Was ist $\vec{y} = f(\vec{x})$? Was ist die Matrix A von f?

(b) Was ist der Flächenveränderungsfaktor von f?

(c) Was ist das Bild des Vollkreises $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ unter f? (Skizze für $a = 2, b = 3$)

(d) Welche Formel gilt daher für die Fläche der Ellipse $\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} \leq 1$?

(e) Was ist das Volumen des Ellipsoides $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$? (Hier stehen x, y, z anstelle von y_1, y_2, y_3 entsprechend (d); Einheitskugelvolumen $=\ 4\pi/3$.)

(37) A sei die Matrix aus Aufg. 31. Bestimmen Sie A^{-1} mit Streichungsdeterminanten.

(38) Wir betrachten das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ aus Übung 18.

(a) Berechnen Sie $\det A$ durch Entwicklung nach der 3. Spalte!

(b) Berechnen Sie x_4 mit der Cramer'schen Regel!

(39) ϵ, A, B, C seien wie in Übung 14. Bestimmen Sie die Längen und Winkel im Dreieck ABC sowie mittels des Kreuzprodukts eine Gleichung für ϵ. Was ist die Fläche des Dreiecks ABC?

(40) Es sei $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$.

(a) Was ist der Abstand des Punktes $Q = (1/2/3)$ von der Ebene $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 9$?

(b) Was ist die Matrix der Spiegelung s_H an der Ebene $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

(Z5) Zeigen Sie: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (Merkregel: "baz – zab")

2017 - 11 - 29 (bzw. 2017 - 12 - 01)

6. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(41) (a) Zeigen Sie, dass $\vec{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine ONB im $\mathbb{R}^3$ sind! (b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{v} = (1,1,1)^T$ bzgl. dieser Basis!

(42) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -7 \\ -4 & 0 & 2 \\ 12 & 6 & -7 \end{pmatrix}$! Machen Sie eine Probe für die Eigenvektoren!
<u>Hinweis:</u> Für das charakteristische Polynom sollten Sie mit Sarrus das Ergebnis $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$ erhalten!

(43) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die lineare Abbildung, die an der 1. Mediane $x_1 = x_2$ spiegelt.
(a) Bestimmen Sie die Matrix A von f!
(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von f (bzw. A)!
(c) Wie erhält man hier die EWe λ und EVen $\vec{x}$ aus der Definition $\boxed{f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}}$?

(44) A sei die Matrix aus Übung 42.
(a) Überprüfen Sie, dass (α) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{sp} A \,(= c_2)$, (β) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A \,(= c_0)$, (γ) $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \sum_{i=1}^{3} \det(A_{\not{i}\not{i}}) \,(= c_1)$!
(b) Überprüfen Sie, dass $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda + c_0$!

(45) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ sind schon die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -6$ bekannt. (a) Bestimmen Sie aus $\operatorname{sp} A$ den dritten Eigenwert!
(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den 3 EWen. Was sind hier a.V. und g.V.?

(46) Für einen dreiachsigen Spannungszustand gelte $\sigma_x = 2.3$, $\sigma_y = -1.4$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 1.5$, $\tau_{xz} = 0.7$, $\tau_{yz} = 0$ (in $[\mathrm{N/m^2}]$). Ermitteln Sie näherungsweise (mit dem Newton-Verfahren) die Größe der maximalen Normalspannung, d.h. den größten Eigenwert der Spannungsmatrix!

(47) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ sei die Spiegelung an der Ebene $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$.
(a) Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von f (bzw. A)? (Überlegen Sie wie in Üb. 43 (c)!)
(b) Bestimmen Sie $\vec{a}$ als Eigenvektor für $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$! (S. Üb. 40 (b)!)

(48) Es seien $\vec{a}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ und $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei die Drehung um $\mathbb{R} \cdot \vec{a}$ um φ im Rechtsdrehsinn (bzgl. $\vec{a}$).
(a) Warum ist die Projektion $\vec{x}_p$ von $\vec{x}$ auf die Achse $\mathbb{R}\cdot\vec{a}$ gegeben durch $\vec{x}_p = \vec{a}\cdot\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$?
(b) Was ist die Matrix dieser Projektion?
(c) Setzen Sie $\vec{x}_n = \vec{x} - \vec{x}_p$ und überlegen Sie, dass $f(\vec{x}_p) = \vec{x}_p$ und $f(\vec{x}_n) = \vec{x}_n \cdot \cos\varphi + \vec{a} \times \vec{x} \cdot \sin\varphi$.
(d) Folgern Sie $f(\vec{x}) = \left[\cos\varphi \cdot I_3 + (1 - \cos\varphi) \cdot \vec{a} \cdot \vec{a}^T\right]\vec{x} + \sin\varphi \cdot \vec{a} \times \vec{x}$.
(e) Bestimmen Sie die Matrix der Drehung um $\mathbb{R}\cdot(1,1,-1)^T$ um 60° im Rechtsdrehsinn! Was sind die Eigenvektoren dieser Matrix zum Eigenwert $\lambda = 1$?

(Z6) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei eine obere Dreiecksmatrix. (a) Was sind die Eigenwerte von A?
(b) Überprüfen Sie die 3 Formeln in Aufgabe 44 (a)!

2017 - 12 - 06

7. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(49) (a) Warum ist $\vec{f_1} = \binom{1}{1}, \vec{f_2} = \binom{1}{-1}$ eine Basis im $\mathbb{R}^2$?

(b) Was ist die Transformationsmatrix T von der Standardbasis zu $\vec{f_1}, \vec{f_2}$?

(c) Berechnen Sie mit $\boxed{\vec{y} = T^{-1}\vec{x}}$ die Koordinaten y_1, y_2 von $\vec{x} = \binom{2}{5}$ bzgl. $\vec{f_1}, \vec{f_2}$! Machen Sie eine Probe!

(50) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung in Aufgabe 43, $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ seien wie in Aufgabe 49.

(a) Drücken Sie $f(\vec{f_1})$ und $f(\vec{f_2})$ als Linearkombinationen von $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ aus und gewinnen Sie daraus die Matrix B von f bzgl. $\vec{f_1}, \vec{f_2}$!

(b) Überprüfen Sie, dass $\boxed{B = T^{-1}AT}$ gilt! (Vgl. Skriptum, Satz 7, S. 90)

(51) Es sei $T = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ wie in Übung 41.

(a) Warum ist T eine orthogonale Matrix? (Lesen Sie zuerst Satz 11, S. 96!)

(b) Überprüfen Sie, dass $T^T \cdot T = I$ und daher $T^{-1} = T^T$ gilt!

(52) Die *symmetrische* Matrix A sei wie in Übung 45 und $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Überprüfen Sie, dass Satz 10, S. 94 im Skriptum zutrifft und speziell, dass $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ aus Übung 41 eine ONB von EVen von A ist.

(b) Welche Matrix B hat f bzgl. $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$? (c) Überprüfen Sie $B = T^{-1}AT$!

Transformieren Sie die folgenden drei Quadriken auf Hauptachsenform! Geben Sie eine Transformationsmatrix, die Hauptachsen sowie die Art der Quadrik an! Machen Sie eine Skizze!

(53) $g(x_1, x_2) = x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2 = 1.$

(54) $g(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 = a, \quad a \in \mathbb{R}.$ (Vgl. Aufgabe 45!)

(55) $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 10\sqrt{5}x_1 + 14 = 0.$
<u>Hinweis:</u> Transformieren Sie den linearen Term mit der Transformationsmatrix und ergänzen Sie dann quadratisch! Bestimmen Sie auch den Mittelpunkt der Ellipse!

(56) Zeigen Sie, dass die quadratische Form $g(\vec{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ positiv definit ist

(a) durch Berechnung der Eigenwerte (mühsam), sowie

(b) mit dem Jacobischen Kriterium (einfacher)!

(Z7) Bei einem eingespannten Kragträger $(0 \le x \le l, \quad -b \le y \le b, \quad 0 \le z \le h, \quad l^2 \ge 2b^2)$ unter der Endlast P (in $y-$Richtung) ist $S = a\begin{pmatrix} 2(l-x)y & y^2 - b^2 \\ y^2 - b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \dfrac{3P}{4hb^3}.$
Wie groß ist die maximale Normalspannung, und bei welchen x, y tritt sie auf?

2017 - 12 - 13

2. Klausur zu 'Mathematik 1', WS 2017/2018

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Schreiben Sie die Gleichung $\vec{u} - A\vec{x} = BC\vec{y}$ (für $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$)

(a) mit Summenschreibweise (b) in Tensorschreibweise!

(2) Bestimmen Sie $(A^{-1})_{14}$ (d.h. das Element in der 1. Zeile und 4. Spalte der inversen Matrix von A) für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) Bestimmen Sie für das Dreieck ABC mit den Ecken $A = (1/1/1)$, $B = (2/2/1)$, $C = (-1/0/3)$

(a) den Winkel α (bei A) in Grad und in Radiant, (b) die Fläche von ABC,

(c) eine Gleichung der Ebene ϵ, in der ABC liegt!

(4) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ hat den doppelten Eigenwert -3 (d.h. a.V. = 2).

(a) Bestimmen Sie aus $\operatorname{sp} A$ den dritten Eigenwert!

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den zwei verschiedenen Eigenwerten!

(c) Machen Sie eine Probe für die Eigenvektoren!

(5) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei die Drehung um $\mathbb{R} \cdot (1, 2, 2)^T$ um $180°$.

(a) Bestimmen Sie eine ONB $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ aus Eigenvektoren von f, indem Sie überlegen, was auf der Drehachse bzw. senkrecht dazu passiert!

(b) Was ist die Matrix B von f bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$?

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von B und der Transformationsmatrix T die Matrix A von f bzgl. der Standardbasis!

(6) Transformieren Sie die Quadrik $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_1 = 1$ auf Hauptachsenform! Geben Sie eine Transformationsmatrix und die Art der Quadrik an! Bestimmen Sie auch den Mittelpunkt!

2018 - 01 - 10 bzw. 12

8. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(57) Es sei $a_n = \dfrac{n-1}{2n+5}$, $n \in \mathbb{N}$. (a) Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \frac{1}{2}| < \epsilon$.
(b) Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = 0.1$?

(58) Untersuchen Sie, was passiert, wenn man in Aufgabe 57 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ zeigen will. (a) Was passiert für $\epsilon \geq \frac{1}{2}$? (b) Was passiert für $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$? Z.B. für welche n gilt $|a_n - 0| < \epsilon$ wenn $\epsilon = \frac{1}{4}$? Existiert dafür N wie in Aufgabe 57?

(59) Bestimmen Sie bei den folgenden Zahlenfolgen a_{10}, a_{99} und, wenn das möglich ist, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Welche der Folgen sind konvergent?
(a) $\dfrac{n^2+1}{3n^2-7}$ (b) $\dfrac{n^2+1}{3n-7}$ (c) $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ (d) $\cos(n\pi)$

(60) Es seien $a_n = 2n+1$, $b_n = \dfrac{2n^3+5n^2}{n^2+1}$, $c_n = a_n - b_n$.

Was ergeben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$? Warum lassen sich die GWS auf $a_n - b_n$ nicht direkt anwenden?

(61) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2+3x+5}\,\right)$. Welchen Typ $\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\ \text{etc.}\right)$ hat der Grenzwert zu Beginn bzw. im Lauf der Rechnung? Berechnen Sie auch am Taschenrechner $f(10)$, $f(50)$, $f(100)$.
<u>Hinweis:</u> $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(62) (a) Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \geq 0 \text{ mit } 0 < |x-4| < \delta : |\sqrt{x} - 2| < \epsilon.$$

(b) Wie ist δ für $\epsilon = 0.1$ zu wählen?

(c) Wie kann man den Grenzwert in (a) mit dem Wort “stetig” formulieren?

(63) Berechnen Sie (a) $\lim\limits_{x\searrow -1} \dfrac{\arccos x - \arcsin x}{\arctan x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin x}{x^3}$!

<u>Hinweis zu (b):</u> Verwenden Sie die Verdoppelungsformel und $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ (vgl. Übung 6) und nicht die Regel von l'Hôpital!

(64) Welche der folgenden Grenzwerte sind sinnvoll? Bestimmen Sie diese!

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ (d) $\lim\limits_{x\nearrow 1} \dfrac{1}{x-1}$

<u>Hinweis zu (b):</u> Substituieren Sie $t = \sqrt[3]{x}$ und kürzen Sie!

(Z8) Wir betrachten die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ bzw. $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$. Wie muss c gesetzt werden, damit $\lim\limits_{x\to\infty}\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - cx\right) = 0$? Konstruieren Sie damit die Asymptoten! (Vgl. Übung 61!)

2018 - 01 - 17 bzw. 19

9. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(65) Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano, dass die Funktion $f(x) = 5\cos x + x$ im Intervall $I_1 = [\frac{\pi}{3}, \pi]$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung das Teilintervall I_3 der Länge $\frac{\pi}{6}$, in dem eine Nullstelle von f liegt.

(66) Vereinfachen Sie für $x > 0$ die Funktion

$$g(x) = \sqrt{\ln(\sqrt[4]{e^x}\,)} + \ln\big(x^{4/3}\sqrt[5]{e^3}\,\big) + \frac{3}{4}\,e^{\ln(e^{\ln x})} + 4\sin\Big(\frac{7\pi}{6}\Big) + \lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n$$
$$+ \ln\Big(\frac{\sqrt{e\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}\Big) + \arccos(\cos(-2.4)) + x\sqrt[3]{2^{-\ln(e^6)}} - \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

(67) (a) Berechnen Sie die Ableitung von $y = f(x) = x^3$ mit der Definition, d.h. berechnen Sie $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$.
<u>Hinweis:</u> $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, vgl. (Z9)

(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = 1$!

(68) (a) Berechnen Sie mit der Definition von $f'(x_0)$ (also ohne Quotientenregel) die Ableitung von $y = f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
<u>Hinweis:</u> Doppelbruch vereinfachen und Summensatz.

(b) Bestimmen Sie die Tangente an $y = f(x)$ für $x_0 = \frac{\pi}{4}$!

(69) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so gilt für kleines h: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. Der Fehler in $\approx$ ist $\rho(h)$, d.h. $\rho(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)$.

(a) Bestimmen Sie $\rho(h)$ für $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $h = 0.1$ (mit dem Taschenrechner)!

(b) Zeigen Sie die Näherungsformel $\sqrt[3]{8+h} \approx 2 + \frac{h}{12}$ für kleines h!

(70) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen. (a ist eine Konstante.)

$$f(x) = \frac{\cos(a^2 + x^2)}{\ln(\arctan x)}; \qquad z(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{t^2} + \arccos(e^{at})}$$

(71) (a) Zeigen Sie $\arctan'(t_0) = \dfrac{1}{1 + t_0^2}$ entsprechend Bsp. 12, S. 60 im Skriptum!

(b) Bestimmen Sie die Tangente an $y = \arctan x$ in $x_0 = 1$!

(72) Die stetige Funktion $y = f(x)$ erfüllt die Gleichung $y^2 - 2y\tan x = e^x$ sowie $f(0) = -1$.
(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung nach y auf und stellen Sie so $y = f(x)$ explizit dar! Berechnen Sie daraus $f'(0)$!
(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f'(0)$ durch implizites Differenzieren!

(Z9) Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren die folgenden Formeln!

$\forall n \in \mathbb{N} : \forall u, v, q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$:

(a) $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$;

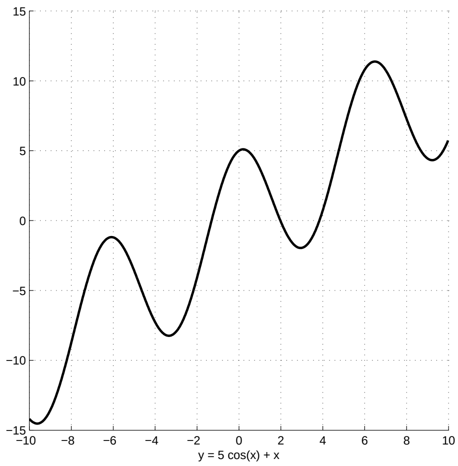
(b) $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

(c) Wenn man auf das erste Feld eines Schachbrettes 1 Reiskorn legt, auf das 2. Feld 2 Reiskörner, auf das 3. Feld $2^2 = 4$ Reiskörner, auf das 4. Feld $2^3 = 8$ Reiskörner, und immer so weiter macht, wieviele Reiskörner ergibt das?

2018 - 01 - 24 bzw. 26

10. und letztes Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2017/18

(73) Lösen Sie die Gleichung $5\cos x = -x$ mit dem Newtonschen Näherungsverfahren! (Vgl. Übung 65). Setzen Sie $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und berechnen Sie x_3! Was passiert, wenn man $\frac{1}{2}$ bzw. -1 als Startwert x_0 verwendet?



Machen Sie bei den zwei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion wie im Skriptum, S. 68–70, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema, untersuchen Sie, wo $f' > 0$ bzw. $f' < 0$ gilt, und bestimmen Sie die globalen bzw. lokalen Maxima und Minima. Machen Sie jeweils eine Skizze und berechnen Sie $f'(0+)$ und $f'(0-)$!

(74) $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x| \cdot (x^2 - 3)$ (75) $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4|x| + 5\arctan x$

(76) Welche der folgenden Grenzwerte lassen sich mit der Regel von l'Hôpital (eventuell öfters verwendet) berechnen, welche nicht?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(2\pi x) + \cos(\pi x)}{\ln^2 x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$

Zusatzfrage: Was ergibt sich, wenn man $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$ in Übung 67 (a) mit der Regel von l'Hôpital berechnet? Ist das sinnvoll?

(77) (a) Bestimmen Sie die Normale n_{x_0}, die Krümmung κ, den Krümmungsradius ϱ, und den Krümmungsmittelpunkt M zum Punkt $P = (x_0/y_0) = (1/0)$ auf dem Graphen von $y = \ln x$ mit den Formeln der Vorlesung. (Skizze!)

(b) Bestimmen Sie einen geeigneten Richtungsvektor $\vec{r}$ der Länge 1 auf der Normalen n_{x_0} und überprüfen Sie, dass $M = P + \varrho \cdot \vec{r}$.

(78) Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve heißt *Evolute* dieser Kurve. Bestimmen Sie die Evolute der Parabel $y = x^2$!

Hinweis: Berechnen Sie den Krümmungsmittelpunkt $M = (\xi/\eta)$ zu einem beliebigen Punkt $P = (x/x^2)$ der Parabel und stellen Sie dann η als Funktion von ξ dar.

(79) Berechnen Sie für $f : [0, \frac{3\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ und die Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ (Skizze!) (a) die untere bzw. obere Darbouxsumme $UD(Z)$ bzw. $OD(Z)$;

(b) die Riemannsummen $R(Z, \Xi)$ für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ bzw. für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\}$.

(80) (a) Schreiben Sie den Hauptsatz der Integralrechnung an! (Definieren Sie auch F!)

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $g : [0,\pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto 2\sqrt{x}\sin x - \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$.

Hinweis: Berechnen Sie g' (nicht g) und untersuchen Sie, wo $g' > 0$ bzw. < 0!

(Z10) Differenzieren Sie die Funktionen $x^{\sin x}$ und x^{x^x} (d.h. genauer $x^{(x^x)}$).

Hinweis: $\forall u > 0 : \forall v \in \mathbb{R} : u^v = e^{v \ln u}$

2018 - 02 - 02

3. Klausur zu 'Mathematik 1', WS 2017/2018

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Es sei $a_n = \dfrac{1-5n}{3n-2}$. (a) Berechnen Sie $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, d.h. geben Sie für alle $\epsilon > 0$ eine Ungleichung der Art $N > \dots$ an, sodass $|a_n - \alpha| < \epsilon$ für $n \geq N$ gilt!

(2) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2\sqrt{x^2+3x}\right)$!

(3) (a) Berechnen Sie f' für $f(x) = \cos x$ mit der Definition der Ableitung!
Hinweis: $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}$.

(b) Bestimmen Sie die Tangente an $y = f(x)$ für $x_0 = \frac{\pi}{3}$!

(4) Die stetige Funktion $y = f(x)$ erfüllt die Gleichung

$$y^4 - 5y\arcsin(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\cos^2(x)}$$

sowie $f(0) = 1$. Berechnen Sie $f'(0)$ durch implizites Differenzieren!

(5) Machen Sie bei der Funktion

$$f : [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2\arctan(x) + |x-2|$$

eine Kurvendiskussion wie im Skriptum, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema, untersuchen Sie, wo $f' > 0$ bzw. $f' < 0$ gilt, und bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima. (Die globalen Extrema müssen Sie nicht bestimmen.) Berechnen Sie auch $f'(2+)$ und $f'(2-)$!

(6) Berechnen Sie für $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$, die Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ und die Zwischenpunkte $\Xi = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$ (Skizze!)

(a) die untere Darbouxsumme $UD(Z)$, (b) die obere Darbouxsumme $OD(Z)$,

(c) die Riemannsumme $R(Z, \Xi)$ sowie (d) das bestimmte Integral $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.