1. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(1) Geben Sie für die Gerade g im $\mathbb{R}^2$ durch $A = (3/1)$, $B = (2/4)$

(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ an!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(2) Geben Sie für die Ebene ϵ im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/2/3)$, $B = (1/0/-1)$, und $C = (-2/1/-1)$

(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$ an!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(3) Bestimmen Sie die Gerade h im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/-1/2)$, $B = (3/1/-2)$

(a) durch eine Parameterdarstellung,

(b) als Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. durch 2 Gleichungen!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(4) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene ϵ aus Übung 2 mit der Geraden h aus Übung 3!

Lösen Sie die folgenden 4 linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Algorithmus:

(5)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \phantom{{}+2x_3+3x_4} - 8x_5 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -5 \\ -3x_1 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= -9 \end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned} x + y + az &= 0 \\ ax - 2y + 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

für festes $a \in \mathbb{R}$ (Eine Fallunterscheidung ist nötig.)

Zusatzaufgabe (Z1) Bestimmen Sie die Geraden im $\mathbb{R}^3$, welche die vier Geraden

$x = y = 0$	$y = 1,\ z = 1$
$x = 1,\ z = 0$	$x + z = 0,\ y = 4$

schneiden! (Es gibt genau zwei.)

2012 - 10 - 17

2. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(9) Wir betrachten nochmals das inhomogene Gleichungssystem aus Übung 6. Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{hom}}$ und überprüfen Sie, dass $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$, d.h. $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$ (s. § 3 A im Skriptum). Überprüfen Sie auch die Gleichung $k = n -$ Anzahl der Pivotzeilen (§ 2). Warum ist L_{hom} ein Vektorraum, L_{inh} aber nicht? Geben Sie eine Basis und die Dimension von L_{hom} an!

(10) Welche Polynome vom Grad ≤ 3 gehen durch $(-1/0)$ und $(1/0)$? Warum ist das ein Unterraum U von P_3? Geben Sie eine Basis von U an! Was ist $\dim U$?

(11) Zeigen Sie, dass $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist!
Zeigen Sie dazu, dass sich jedes $\vec{b}$ eindeutig als LK $\vec{b} = \lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3$ schreiben lässt, indem Sie das Gleichungssystem $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b_1$, $2\lambda_1 + 2\lambda_3 = b_2$, $3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = b_3$ lösen. Was sind die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis?

(12) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$? (Gauß) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig? Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Satz 4, 3b)

(13) Es seien $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \lambda_3 \vec{w}_3 = \vec{0}$? (Gauß; setze $\lambda_3 = \mu$) Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ linear unabhängig? Was bedeutet das geometrisch? Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(14) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Für welche $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^4$ gilt $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \lambda_4 \vec{v}_4 = \vec{0}$? (Gauß)

(b) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ linear unabhängig? (a oder Satz 4, 1b)

(c) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig? (a mit $\lambda_4 = 0$)

(d) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Satz 4, 3b)

(e) Was sind die Koordinaten von $\vec{v}_4$ bezüglich $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$? (verwende a).

(15) (a) Sind $\vec{v}_1 = 1 + x$, $\vec{v}_2 = x + x^2$, $\vec{v}_3 = 1 + 2x + x^2 \in P_2$ linear unabhängig?

(b) Sind $\vec{w}_1 = 1 - x + x^2$, $\vec{w}_2 = 3 + x - x^2$, $\vec{w}_3 = 1 - 4x + 2x^2 \in P_2$ linear unabhängig? Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ eine Basis von P_2?

(16) (a) Drehen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ um $73°$ im Gegenuhrzeigersinn!

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der Geraden $y = -x$. Warum ist diese Abbildung linear? Was ist die Matrix von f?

(Z2) Bestimmen Sie die Parabel $y = a + bx + cx^2$ durch $(-1/9)$, $(1/3)$, $(2/6)$. Versuchen Sie, sich diese Parabel als Schnittpunkt von 3 Ebenen in P_2 vorzustellen!

(Freitagsgruppen am Mittwoch!) 2012 - 10 - 24

3. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(17) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & -3 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & x \\ -1 & c & 3 & f \\ -1 & -2 & b & 1 \end{pmatrix}$$

(mit $a, b, c, f, x \in \mathbb{R}$). Welche der Produkte AB, BA, AD, DA, CD, DC sind sinnvoll? Berechnen Sie diese!

(18) Es seien f bzw. g bzw. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehungen um die Winkel α bzw. β bzw. $\alpha + \beta$ im Gegenuhrzeigersinn.

(a) Welche Matrizen A, B, C entsprechen f, g, h?

(b) Überlegen Sie, dass $h = f \circ g$ und daher $C = A \cdot B$ (§4, Satz 2).

(c) Folgern Sie aus (a), (b) die Summensätze für Sinus und Cosinus.

(19) (a) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$, $A + BC = D$, $B \cdot (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{z} = \vec{u}$, $ABC = D$ in Tensorschreibweise!

(b) Alle Indizes seien 1 oder 2. Schreiben Sie $c_{kr} - a_{ki} b_{ir} = d_{kj} e_{jr}$ als Matrixgleichung sowie als 4 Gleichungen (für $k, r = 1, 2$) an!

(20) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1} wie in §4, Bsp. 10, S. 41 des Skriptums! Kontrollieren Sie $A \cdot A^{-1} = I$! Was ist die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = (1, 3, 5)^T$?

(21) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$ sowie $\operatorname{rg} A^T$! ($\operatorname{rg} A$ bzw. $\operatorname{rg} A^T$ ergeben sich als Anzahl der Pivotzeilen beim Gauß'schen Algorithmus angewendet auf $A\vec{x} = \vec{0}$ bzw. $A^T\vec{x} = \vec{0}$.) Ist A invertierbar?

(22) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, indem Sie $A \cdot A^{-1} = I$ überprüfen!

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie mit (a) A^{-1} und die Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$.

(23) Es sei A wie in Übung 21, $\vec{b} = (1, -1, 2)^T$ und $\tilde{A} = (A, \vec{b})$ die erweiterte Matrix. Berechnen Sie $\operatorname{rg} \tilde{A}$! Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

(24) (a) Bestimmen Sie die Fläche F des Vierecks im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $A = (2/1)$, $B = (1/3)$, $C = (3/2)$, $D = (4/4)$. Zeichnen Sie das Viereck, und überlegen Sie, dass hier gilt $F = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| + \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$. Erklären Sie die Vorzeichen der 2 Determinanten!

(b) Berechnen Sie mit der Regel von Sarrus $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. Machen Sie eine Skizze, die zeigt, warum die Determinante negativ ist!

(Z3) Es seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $AB, BA; (AB)C, A(BC); (A + B)C, AC + BC$! Wie nennt man das Gesetz, das bei Matrizen nicht erfüllt ist, und die 2 Gesetze, die bei Matrizen erfüllt sind?

(Freitagsgruppen am Mittwoch!) 2012 - 10 - 31

4. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(25) Bestimmen Sie $\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0 & -7 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -5 \end{vmatrix}$ so wie in §5, Bsp. 3, S. 51 des Skriptums.

(26) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(27) Es seien $a, b > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei Streckung bzw. Stauchung (für $a, b > 1$ bzw. < 1) mit dem Faktor a in x_1-Richtung, mit dem Faktor b in x_2-Richtung.
(a) Was ist $\vec{y} = f(\vec{x})$? Was ist die Matrix A von f?
(b) Was ist der Flächenveränderungsfaktor von f?
(c) Was ist das Bild des Vollkreises $x_1^2+x_2^2 \le 1$ unter f? (Skizze für $a = 2, b = 3$)
(d) Welche Formel gilt daher für die Fläche der Ellipse $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \le 1$?
(e) Was ist das Volumen des Ellipsoides $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$? (Hier stehen x, y, z anstelle von y_1, y_2, y_3 entsprechend (d); Einheitskugelvolumen = $4\pi/3$.)

(28) A sei die Matrix aus Übung 20. Bestimmen Sie A^{-1} mit Streichungsdeterminanten. (Vgl. §5, Satz 8 und Bsp. 8, S. 59, 60.)

(29) Was ergibt sich, wenn man §5, Satz 8, S. 59, auf die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ anwendet? Vergleichen Sie das Ergebnis mit Übung 22.

(30) Wir betrachten das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ aus Übung 7.
(a) Berechnen Sie $\det A$ durch Entwicklung nach der 2. Spalte!
(b) Berechnen Sie x_2 mit der Cramer'schen Regel!

(31) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei die Matrix zum homogenen Gleichungssystem in Übung 8.
(a) Berechnen Sie $\det A$ (α) mit Sarrus, (β) durch Entwicklung nach der 3. Zeile!
(b) Für welche a ist $\det A = 0$?
(c) Lesen Sie §5, Satz 7, S. 58 im Skriptum und folgern Sie, dass $L = \{\vec{0}\} \iff \det A \ne 0$. Vgl. auch Satz 5, S. 24: $\dim L = n - \dim Z = n - \operatorname{rg} A$
PS: Sind $\{\vec{0}\}$ und $\{\}$ dasselbe?

(32) Was ergibt sich, wenn in der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$ zuerst I'=I, II'=II, III'=III $-a_1$ II und dann I"=I', II"=II' $-a_1$ I', III"=III' gemacht wird? Warum ändert sich die Determinante nicht? Warum erhält man $\det A = (a_2-a_1)(a_3-a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$? Wie lässt sich das auf $A = (a_j^{i-1})_{i,j=1,\dots,n}$ verallgemeinern?

(Z4) Die Ausbiegung eines axial mit Kraft F zentrisch gedrückten Stabes, der bei $x = 0$ mit dem Einspannmoment λ_1 eingespannt ist und bei $x = l$ frei drehbar gelagert ist, erfüllt die Differentialgleichung $w'' + \alpha^2 w = \frac{\lambda_1}{EJ}(1 - \frac{x}{l})$, wobei $\alpha = \sqrt{\frac{F}{EJ}}$. Dann gilt

$$w(x) = \frac{\lambda_1}{F}\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \lambda_2 \cos\alpha x + \lambda_3 \sin\alpha x \quad \text{und} \quad w(0) = w'(0) = w(l) = 0.$$

Schreiben Sie die letzten 3 Gleichungen als lineares Gleichungssystem in $\vec{\lambda}$ an und ermitteln Sie das kleinste positive F (= Knicklast), für das eine Lösung $\vec{\lambda} \ne \vec{0}$ existiert, durch Berechnung einer Determinante!

1. Klausur zu 'Mathematik 1' , WS 2012/2013

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= -4 \end{aligned}$$

Überprüfen Sie zur Probe, dass $\vec{p}$ das inhomogene und die Richtungsvektoren das homogene Gleichungssystem lösen!

(2) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Beantworten Sie die folgenden 4 Fragen! Begründen Sie Ihre Antworten durch eine Rechnung oder mit einem Satz der Vorlesung!

(a) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ linear unabhängig? (b) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig?

(c) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (d) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ ein EZS des $\mathbb{R}^3$?

(3) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Drehung um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der x_2- Achse.

(a) Bestimmen Sie die zu f und g gehörigen Matrizen A, B sowie die zu $f \circ g$ gehörige Matrix C! (b) Bestimmen Sie $f(g(\vec{x}))$ für $\vec{x} = (1, 2)^T$!

(4) Gegeben sei die lineare Abbildung $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}, indem Sie für die inverse Abbildung $g(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ die Bilder der Standardbasis $g(\vec{e}_i)$ berechnen.

(b) Kontrollieren Sie $AA^{-1} = I$.

(c) Berechnen Sie mittels (a) die eindeutige Lösung von $x_1 + 2x_2 = 5$, $-x_2 + x_3 = 1$, $x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$.

(5) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus $\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$!

(Hoffentlich sind Sie nicht abergläubisch ...)

(6) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & a & a \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\det A$ durch Entwicklung nach der 2. Zeile!
(b) Für welche a ist $A\vec{x} = \vec{y}$ eindeutig lösbar?
(c) Bestimmen Sie x_1 für diese a mit Cramer!

2012 - 11 - 14

5. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(33) ϵ, A, B, C seien wie in Übung 2. Bestimmen Sie die Längen und Winkel im Dreieck ABC sowie mittels des Kreuzprodukts eine Gleichung für ϵ. Was ist die Fläche des Dreiecks ABC?

(34) Es sei $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$.

(a) Was ist der Abstand des Punktes $Q = (1/2/3)$ von der Ebene $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 9$?

(b) Was ist die Matrix der senkr. Projektion pr_H auf die Ebene $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

Zusatzfrage: Was sind hier die Eigenwerte und Eigenvektoren? (Vgl. Übung 38)

(35) Zeigen Sie durch Ausrechnen, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. (Merkregel: “baz minus zab”) Was ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$? Ist $\times$ assoziativ?

(36) (a) Zeigen Sie, dass $\vec{f_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine ONB im $\mathbb{R}^3$ sind! (b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{v} = (1, 1, 1)^T$ bzgl. dieser Basis!

(37) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$!

(38) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die lineare Abbildung, die an der Gerade $x_2 = x_1$ (der 1. Mediane) spiegelt. (a) Bestimmen Sie die Matrix A von f!

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von f (bzw. A).

(c) Wie erhält man hier die Eigenwerte und Eigenvektoren ohne Rechnung?

(39) A sei die Matrix aus Übung 37.

(a) Schreiben Sie $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda + c_0$ an!

(b) Überprüfen Sie, dass $c_0 = \det A$, $c_1 = \sum_{i=1}^{3} \det(A_{\not{i}\not{i}})$ und $c_2 = \mathrm{sp}\, A$.

(c) Überprüfen Sie, dass $c_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $c_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ und $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$!

(40) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ sind schon die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -6$ bekannt.

(a) Bestimmen Sie aus $\mathrm{sp}\, A$ den dritten Eigenwert!

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den 3 Eigenwerten. Was sind hier a.V. und g.V.?

(Z5) Auf zwei windschiefen (d.h. nicht parallelen und nicht schneidenden) Geraden $g_i : \vec{x} = \vec{p_i} + \lambda\vec{r_i}$, $i = 1, 2$, im $\mathbb{R}^3$ seien F_i die Fußpunkte, d.h. so, dass $\|\overrightarrow{F_1F_2}\|$ der Minimalabstand D zwischen g_1 und g_2 ist. Skizze! Überlegen Sie:

(a) $\overrightarrow{F_1F_2} \perp \vec{r_1}, \vec{r_2}$ (b) $\overrightarrow{F_1F_2} \parallel \vec{r_1} \times \vec{r_2}$ (c) $\overrightarrow{F_1F_2} = \vec{p_2} + \lambda_2\vec{r_2} - \vec{p_1} - \lambda_1\vec{r_1}$

(d) $D = \|\overrightarrow{F_1F_2}\| = \dfrac{|\langle \overrightarrow{F_1F_2}, \vec{r_1} \times \vec{r_2} \rangle|}{\|\vec{r_1} \times \vec{r_2}\|} = \dfrac{|\langle \vec{p_2} - \vec{p_1}, \vec{r_1} \times \vec{r_2} \rangle|}{\|\vec{r_1} \times \vec{r_2}\|}$

(e) Berechnen Sie den Abstand D zwischen den zwei Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}!$$

2012 - 11 - 21

6. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(41) Welche der folgenden acht Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(a) $\forall x, y \geq 0 : \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(\lambda A) = \lambda \det A$
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x \geq y$ (d) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y$
(e) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \Longrightarrow x^2 \geq 4$ (f) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4 \Longrightarrow x \geq 2$
(g) $\forall M, N$ Mengen : $x \in M \cup N \Longleftrightarrow x \in M \vee x \in N$
(h) $\forall f : V \longrightarrow W$ surjektiv : $\forall y \in W : \exists x \in V : f(x) = y$

(42) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : 2|x+1| \geq x^2 + 2x - 7\}$.

(43) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \ \wedge \ |x-2| < \dfrac{4}{x+1}\}$.

(44) Für welche reelle x ist $\sqrt{2x+2} \leq 3 - x$?
Hinweis: Schreiben Sie zunächst L als Menge an! Unterscheiden Sie dann die Fälle $3 - x < 0$ und $3 - x \geq 0$ bevor Sie quadrieren! (Warum?)

(45) Wir betrachten das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

(a) Dividieren Sie P durch $x - 2$. Wie lässt sich der Rest direkt bestimmen?

(b) Zerlegen Sie P in Linearfaktoren und skizzieren Sie den Graph von P!
Hinweis zu (b): Die Nullstelle $x_0 = 1$ findet man durch Probieren.

(46) Es seien $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x^2$.

(a) Was ist $f \circ g$ und was ist $g \circ f$? (b) Zeigen Sie, dass $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

(c) Skizzieren Sie nacheinander die Graphen der Funktionen $\cos x$, $\cos 2x$, $-\cos 2x$, $1 - \cos 2x$, sowie $\sin^2 x$.

(47) Bestimmen Sie geometrisch (a) $\cos\frac{2\pi}{3}$, (b) $\sin\frac{2\pi}{3}$, (c) $\tan\frac{2\pi}{3}$.

(48) Leiten Sie aus dem Summensatz für den Sinus die Formel
$\sin a - \sin b = 2 \sin\frac{a-b}{2} \cos\frac{a+b}{2}$ her!

Hinweis: Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$ und betrachten Sie $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$.

(Z6) Lösen Sie die Gleichung $\cos 3x + 6\cos 2x + 5\cos x + 2\sin^2 x = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$!

2012 - 11 - 28

7. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(49) Auf welchen Intervallen ist das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 - 6x + 5$ monoton steigend bzw. fallend? Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen auf diesen Intervallen!

(50) (a) Bestimmen Sie $\arccos \frac{1}{2}$! (b) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = \frac{1}{2}\}$!

(c) Bestimmen Sie $\arccos(\cos \frac{5\pi}{3})$! Warum ist es nicht $\frac{5\pi}{3}$?

(d) Skizzieren Sie die Graphen von $y = \arccos x$ und von $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

(51) Wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist und B die Bildmenge, so gilt

$$\boxed{\forall x \in D : f^{-1}\big(f(x)\big) = x} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\forall x \in B : f\big(f^{-1}(x)\big) = x}$$

(a) Was heißt das für $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$?

(b) Was heißt das für $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$?

(c) Zeigen Sie $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$ für $x \in [\pi, 2\pi]$!

Hinweis zu (c): Überlegen Sie, dass $\cos(2\pi - x) = \cos x$ und dass $2\pi - x \in [0, \pi]$ wenn $x \in [\pi, 2\pi]$!

(52) Es sei $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x$.

(a) Was ist die Bildmenge B? Was ist $f^{-1}(x)$? Was ist $\frac{1}{f(x)}$? Ist es dasselbe?
(b) Warum gilt immer $\tan(\arctan x) = x$? (c) Wann gilt $\arctan(\tan x) = x$?

(d) Was ist $\arctan(\tan x)$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$?

(53) Es sei $a_n = \dfrac{n+3}{1-2n}$, $n \in \mathbb{N}$. (a) Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n + \frac{1}{2}| < \epsilon$.
(b) Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = \frac{1}{4}$?

(54) Bestimmen Sie bei den folgenden Zahlenfolgen a_{10}, a_{99}, und, wenn das möglich ist, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Welche der Folgen sind konvergent?

(a) $\dfrac{n^2+1}{3n^2-7}$ (b) $\dfrac{n^2+1}{3n-7}$ (c) $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ (d) $\cos(n\pi)$

(55) Es seien $a_n = 2n + 1$, $b_n = \dfrac{2n^3 + 5n^2}{n^2+1}$, $c_n = a_n - b_n$.

Was ergeben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$? Warum lassen sich die GWS auf $a_n - b_n$ nicht direkt anwenden?

(56) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n+1}\,\right)$ mit den Grenzwertsätzen! Welchen Typ hat die Folge zu Beginn bzw. im Lauf der Rechnung? (Bestimmen Sie auch mit dem Taschenrechner a_{10}, a_{20}, und a_{100} für diese Folge!)

(Z7) (a) Zeigen Sie, dass $2\arccos x = \begin{cases} \arccos\big(2x^2-1\big) & : \; x \in [0,1], \\ 2\pi - \arccos\big(2x^2-1\big) & : \; x \in [-1,0]. \end{cases}$

(b) Kontrollieren Sie (a) am Taschenrechner für $x = 0.6$ und $x = -0.6$!

Hinweis zu (a): Setzen Sie $u = \arccos x$, folgern Sie $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 2x^2 - 1$ und wenden Sie auf beide Seiten dieser Gleichung $\arccos$ an!

2012 - 12 - 05

8. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(57) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)$. Welchen Typ $\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\ \text{etc.}\right)$ hat der Grenzwert zu Beginn bzw. im Lauf der Rechnung? Berechnen Sie auch am Taschenrechner $f(10)$, $f(50)$, $f(100)$.
Hinweis: $\forall a,b\in\mathbb{R}:(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(58) (a) Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$, d.h.

$$\forall\epsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\geq 0 \text{ mit } 0<|x-4|<\delta:|\sqrt{x}-2|<\epsilon.$$

(b) Wie ist δ für $\epsilon=0.1$ zu wählen?

(c) Wie kann man den Grenzwert in (a) mit dem Wort “stetig” formulieren?

(59) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

Hinweise: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$; $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ (Vgl. Üb. 46 (b))

(60) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arccos x}{x}-\dfrac{\pi}{2x}\right)$.
Hinweis: Substituieren Sie $t=\arccos x$ und $u=t-\frac{\pi}{2}$.

(61) Welche der folgenden Grenzwerte sind sinnvoll? Bestimmen Sie diese!

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{\cos(\pi x)}}{\arctan x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-\sqrt[3]{x}-6}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ (d) $\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{1}{x-1}$

Hinweis zu (b): Substituieren Sie $t=\sqrt[3]{x}$ und kürzen Sie!

(62) Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano, dass das Polynom $p(x)=x^3-3x+1$ im Intervall $I_1=[0,1]$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung das Teilintervall I_4 der Länge $\frac{1}{8}$, in dem eine Nullstelle von p liegt.

(63) Berechnen Sie (für festes $x_0\in\mathbb{R}$) den Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^4-x_0^4}{x-x_0}$.
Hinweis: Dividieren Sie zuerst das Polynom $x^4-x_0^4$ durch $x-x_0$!

(64) (a) Was ergeben die eingerahmten Gleichungen in Üb. 51 für $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto \mathrm{e}^x$? Skizzieren Sie f und f^{-1}!
(b) Lösen Sie $\mathrm{e}^{-2x}=\frac{1}{4}$. (Wenden Sie ln auf beide Seiten an!)

(c) Vereinfachen Sie für $x>0$ die Funktion

$$g(x)=\sqrt{\ln(\sqrt[4]{\mathrm{e}^x}\,)}+\ln\left(x^{4/3}\sqrt[5]{\mathrm{e}^3}\,\right)+\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}^{\ln x})}+4\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$
$$+\ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}\right)+\arccos(\cos(-2.4))+x\sqrt[3]{2^{-\ln(\mathrm{e}^6)}}+\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

(Z8) Wir betrachten die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ bzw. $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$. Wie muss c gesetzt werden, damit $\lim\limits_{x\to\infty}\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}-cx\right)=0$? Konstruieren Sie damit die Asymptoten!

2012 - 12 - 12

2. Klausur zu 'Mathematik 1' , WS 2012/2013

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ hat den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

(a) Berechnen Sie den dritten Eigenwert λ_3 aus $\operatorname{sp} A$ oder $\det A$ (oder, wenn Sie das nicht können, mittels $\det(A - \lambda I) = 0$, was etwas mühsamer ist).

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu λ_3!

(2) (a) Bestimmen Sie $\arctan 1$! (b) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \tan x = 1\}$!

(c) Bestimmen Sie $\arctan(\tan \frac{5\pi}{4})$! Warum ist es nicht $\frac{5\pi}{4}$?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von $y = \arctan x$!

(3) Es sei $a_n = \dfrac{5n+1}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5}{2}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left| a_n - \dfrac{5}{2} \right| < \epsilon$.

(b) Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = \frac{1}{8}$?

(4) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+x}}$ (ohne Benützung der Regel von l'Hôpital).

(5) Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano, dass die Funktion $f(x) = 5\cos x + x$ im Intervall $I_1 = [\frac{\pi}{3}, \pi]$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung das Teilintervall I_3 der Länge $\frac{\pi}{6}$, in dem eine Nullstelle von f liegt.
<u>Hinweis:</u> $\pi \approx 3.15$

(6) Bestimmen Sie $L = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge \dfrac{3\,|2x-1| - 23}{x-1} \leq 6 - x \right\}$!
<u>Hinweis:</u> $\sqrt{225} = 15$

2013 - 01 - 09

9. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(65) (a) Berechnen Sie die Ableitung von $y = \cos x$ mit der Definition, d.h. berechnen Sie $\cos'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$.
(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = \frac{\pi}{3}$!
Hinweis: $\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}$ (Das wird analog zu Üb. 48 bewiesen.)

(66) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so gilt für kleines h: $\boxed{f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)}$
Der Fehler in $\approx$ ist $\rho(h)$, d.h. $\rho(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)$. Bestimmen Sie $\rho(h)$ (a) für $f = \cos$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $h = 0.1$ (mit dem Taschenrechner);
(b) für $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, h beliebig. Zeigen Sie in diesem Fall $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\rho(h)}{h} = 0$.

(67) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen. (a, b, c sind Konstante.)

$$f(x) = (1 - ax)^{-5/2} \cos\bigl(\mathrm{e}^{b + c \sin x}\bigr); \qquad z(t) = \frac{\tan(t^2) + \tan^2 t}{\ln(\arctan t)}$$

(68) (a) Zeigen Sie $\arctan'(t_0) = \dfrac{1}{1 + t_0^2}$ entsprechend Bsp. 12, S. 60 im Skriptum!
(b) Bestimmen Sie die Tangente an $y = \arctan x$ in $x_0 = 1$!

(69) Die stetige Funktion $y = f(x)$ erfüllt die Gleichung $y^2 - 2\mathrm{e}^x y = 3 \cos x$ sowie $f(0) = -1$.
(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung nach y auf und stellen Sie so $y = f(x)$ explizit dar. Berechnen Sie daraus $f'(0)$.
(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f'(0)$ durch implizites Differenzieren!

Machen Sie bei den zwei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion wie im Skriptum, S. 68–70, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema, untersuchen Sie, wo $p' > 0$ bzw. $f' > 0$, und bestimmen Sie die globalen bzw. lokalen Maxima und Minima. Machen Sie eine Skizze! Berechnen Sie in Üb. 71 auch $f'(\frac{1}{2}+)$ und $f'(\frac{1}{2}-)$!

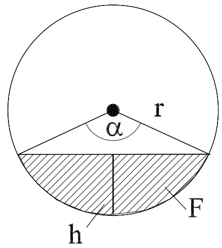
(70) $p : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ (71) $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \mathrm{e}^{x/2} \cdot |2x - 1|$

(72) Bestimmen Sie die Nullstelle von $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $]0, 1[$ (vgl. die Übungen 62 und 70) mit dem Newtonschen Näherungsverfahren! Verwenden Sie 0 als Startwert x_0 und berechnen Sie x_3. Was passiert, wenn man 1 bzw. 2 als Startwert x_0 verwendet?

Frohe Weihnachten und viel Erfolg beim Lernen!
(wünscht dir, liebe/r Leser/in, der Schreiber dieser Zeilen, Peter Wagner)

(Z9) Ein auf einer Mantellinie liegender zylindrischer Öltank enthält 3000 Liter. Seine Länge beträgt 5 m, sein Radius r ist 70 cm. Bestimmen Sie näherungsweise die Höhe h des Flüssigkeitsstandes mit dem Newtonschen Näherungsverfahren. Verwenden Sie $\alpha_0 = \pi$ und berechnen Sie α_2. Dann ist $h \approx r\bigl(1 - \cos(\alpha_2/2)\bigr)$, vgl. die Skizze.

$$F = r^2 \frac{\alpha}{2} - \Bigl(r \sin \frac{\alpha}{2}\Bigr)\Bigl(r \cos \frac{\alpha}{2}\Bigr)$$
$$= \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha) \quad \text{(warum?)}$$



2013 - 01 - 16

10. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

(73) Welche der folgenden Grenzwerte lassen sich mit der Regel von l'Hôpital (eventuell öfters verwendet) berechnen, welche nicht?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(2\pi x)+\cos(\pi x)}{\ln^2 x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$ Zusatzfrage: Was ergibt sich, wenn man $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}$ in Übung 65 (a) mit der Regel von l'Hôpital berechnet? Ist das sinnvoll?

(74) (a) Bestimmen Sie die Normale n_{x_0}, die Krümmung κ, den Krümmungsradius ϱ, und den Krümmungsmittelpunkt M zum Punkt $P=(x_0/y_0)=(1/0)$ auf dem Graphen von $y=\ln x$ mit den Formeln der Vorlesung. (Skizze!)

(b) Bestimmen Sie einen geeigneten Richtungsvektor $\vec{r}$ der Länge 1 auf der Normalen n_{x_0} und überprüfen Sie, dass $M=P+\varrho\cdot\vec{r}$.

(75) Berechnen Sie für $f:[0,\frac{3\pi}{2}]\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto\sin x$ und die Zerlegung $Z=\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{3\pi}{2}\}$ (Skizze!) (a) die untere bzw. obere Darbouxsumme $UD(Z)$ bzw. $OD(Z)$;

(b) die Riemannsummen $R(Z,\Xi)$ für $\Xi=\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi\}$ bzw. für $\Xi=\{0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{6}\}$.

(76) (a) Schreiben Sie § 10, Satz 3, 3), S. 87, des blauen Skriptums auf die Tafel!

(b) Zeigen Sie, dass $(\ln|\tan\frac{x}{2}|)'=\dfrac{1}{\sin x}$ und berechnen Sie damit $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-\pi/3}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. Was sind hier f,Φ,a,b von (a)? Skizzieren Sie $f(x)=1/\sin x$ und die Fläche, die dem bestimmten Integral (bis auf das Vorzeichen) entspricht!

(77) Es sei $f:[\frac{1}{2},4]\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto\frac{1}{x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion Φ, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{1/2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ und $F(x)=\int_{1/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Skizzieren Sie f und F, sowie speziell $F(2)$ als Länge, $F(2)$ als Fläche, die Tangente an F in $x_0=2$ und ihre Steigung. $(\ln 2\approx 0.7)$

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale! Machen Sie bei den bestimmten Integralen eine Skizze!

(78) (a) $\displaystyle\int\Big(\frac{a}{\cos^2 x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos t\,\mathrm{d}t$

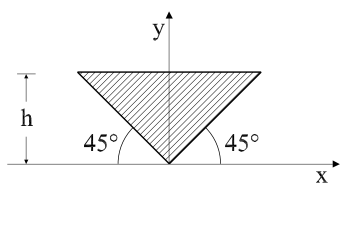
(79) (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{1+3\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{1/2}\arcsin y\,\mathrm{d}y$ (Zusatzfrage: Wie lässt sich dieses Integral mittels einer Fläche unter dem Sinus darstellen?)

(80) (a) $\int\big(v\,\mathrm{e}^{v^2}+v^4\sqrt[3]{1+2v^5}\,\big)\mathrm{d}v$ (b) $\displaystyle\int_0^1(1-3z)^5\,\mathrm{d}z$

(Z10) Aus einem Überlauf von der Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks der Höhe h fließt Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g(h-y)}$ (Ausflussgesetz von Torricelli). Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Sekunde! Was ergibt sich für $h=3\,\mathrm{dm}$?

<u>Hinweis:</u> $Q=\displaystyle\int_0^h 2y\sqrt{2g(h-y)}\,\mathrm{d}y$

$g\approx 9.81\,\mathrm{m/sec}^2$



2013 - 01 - 23

11. und letztes Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2012/13

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale!

(81) (a) $\displaystyle\int \frac{4t-5}{t^2-t-2}\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$

(82) (a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\pi \ln y)\frac{\mathrm{d}y}{y}$ (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^{2u}-4\mathrm{e}^u+3}\,\mathrm{d}u$

(83) (a) $\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$
Hinweis zu (d): $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$

(84) $\int \sqrt{6x-x^2-8}\,\mathrm{d}x$
Hinweis: Quadratisch ergänzen, $u = x-3$, Winkelfunktionen substituieren.

(85) Zeigen Sie $\forall x, y \in \mathbb{R}$: (a) $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$ (b) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$.

(86) Berechnen Sie $\int_{-1}^2 \sqrt{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2+1}$. Nach der Substitution $u = \mathrm{sh}\,v$ werden die Gleichungen $\mathrm{ch}^2 v = \frac{1}{2}(1+\mathrm{ch}\,2v)$, $\mathrm{sh}\,2v = 2\,\mathrm{sh}\,v\,\mathrm{ch}\,v$ und $\mathrm{arsh}\,x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ verwendet.

(87) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $y = 2x-4$ eingeschlossen wird, durch Integration (a) nach x; (b) nach y.

(88) Bestimmen Sie die Volumina, die entstehen, wenn die Kurve $y = \mathrm{e}^x$, $0 \le x \le 1$, (a) um die $x-$Achse, (b) um die $y-$Achse rotiert.

Hinweis zu (b): Schreiben Sie 1 als Faktor ins Integral.

(Z11) (a) Zeigen Sie $\forall t_0 > 1 : \mathrm{arch}'(t_0) = \dfrac{1}{\sqrt{t_0^2-1}}$ mit dem Satz über die Ableitung einer Umkehrfunktion!

(b) Zeigen Sie $\forall x \ge 1 : \mathrm{arch}\,x = \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)$.

(c) Kontrollieren Sie das Ergebnis in (a) mit Hilfe von (b)!

3. Klausur zu 'Mathematik 1' , WS 2012/2013

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) (a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$ mit der Definition, d.h. berechnen Sie $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (ohne l'Hôpital)!
(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = 4$!

(2) Machen Sie bei der Funktion

$$f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 5 \arctan(x) + 4|x - 1|$$

eine Kurvendiskussion wie im Skriptum, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema, untersuchen Sie, wo $f' > 0$, und bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima. (Die globalen Extrema müssen Sie nicht bestimmen.) Berechnen Sie auch $f'(1+)$ und $f'(1-)$!

(3) (a) Was gilt für $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, wenn $\Phi' = f$?
(b) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{2}{3} \arcsin(x^{3/2})\right)' = \sqrt{\dfrac{x}{1 - x^3}}$ und berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt[3]{4}} \sqrt{\frac{x}{1 - x^3}}\,\mathrm{d}x$!

(4) Bestimmen Sie (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \sin(2 \arctan x) \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$.

(5) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\sqrt{2}-2}^{0} \sqrt{x^2 + 4x + 2}\,\mathrm{d}x$.
Hinweis: $\operatorname{sh}^2 v = \frac{1}{2}(-1 + \operatorname{ch} 2v)$, $\operatorname{sh} 2v = 2 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v$, $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(6) Bestimmen Sie die Volumina, die entstehen, wenn die Kurve $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, (a) um die $x-$ Achse, (b) um die $y-$ Achse rotiert.

Hinweis zu (b): Substituieren Sie $y = \sin t$ und verwenden Sie Aufgabe 4 (a)!