1. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 — 12. 10. 2011

*(1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 5x - 6 \geq 0\}$.

(2) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} :\ 3|x-2| \leq 6 + 2x - x^2\}$.

Hinweis: Sie müssen die Fälle $x - 2 \geq 0$ und $x - 2 \leq 0$ unterscheiden! (Warum?)

(3) Für welche reelle x ist $\sqrt{2x+2} \geq 3 - x$?

Hinweis: Schreiben Sie zunächst L als Menge an! Unterscheiden Sie dann die Fälle $3 - x < 0$ und $3 - x \geq 0$ bevor Sie quadrieren! (Warum?)

(4) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 1\ \wedge\ \dfrac{1}{x-1} < x + 1\}$.

*(5) Geben Sie für die Gerade g im $\mathbb{R}^2$ durch $A = (3,1)$, $B = (2,4)$

(a) eine Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{r}$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$,

(c) eine Darstellung der Form $x_2 = kx_1 + d$ an.

Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

*(6) Geben Sie für die Ebene ϵ im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1,2,3)$, $B = (1,0,-1)$ und $C = (-2,1,-1)$

(a) eine Parameterdarstellung $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{r}_1 + \mu\mathbf{r}_2$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$,

(c) eine Darstellung der Form $x_3 = ax_1 + bx_2 + c$ an.

Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(7) Bestimmen Sie die Gerade h im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1,-1,2)$, $B = (3,1,-2)$

(a) durch eine Parameterdarstellung,

(b) als Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. durch 2 Gleichungen!

Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(8) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene ϵ aus Übung (6) mit der Geraden h aus Übung (7).

(Z1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} :\ \sqrt{|5x-1|} < x + 1\}$!

2. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 19. 10. 2011

(9) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der durch eine Gleichung gegebenen

(a) Gerade im $\mathbb{R}^2$: $2x - y = 1$,
(b) Gerade im $\mathbb{R}^2$: $x = 4$,
(c) Ebene im $\mathbb{R}^3$: $x + y - 2z = -1$,
(d) Ebene im $\mathbb{R}^3$: $x - y = -1$.

*(10) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 32 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= -2 \\ -4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 8 \\ 2x_4 + x_5 &= 7 \\ -3x_5 &= -3, \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \\ 3x + 2y &= 5 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

(11) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung mit sechs Unbekannten:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 + 2x_6 = 1.$$

*(12) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & -4 \\ & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3. \end{array}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in Matrizenschreibweise an.
(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.
(c) Machen Sie die Probe, indem Sie die Lösung in das lineare Gleichungssystem einsetzen, d.h. den Lösungsvektor $\mathbf{x}$ mit der Matrix $\mathbf{A}$ multiplizieren.

*(13) Wir betrachten das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

(a) Dividieren Sie P durch $x - 2$. Wie lässt sich der Rest direkt bestimmen?

(b) Zerlegen Sie P in Linearfaktoren und skizzieren Sie den Graph von P!

Hinweis zu (b): Die Nullstelle -1 findet man durch Probieren.

(14) Es seien $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x^2$.

(a) Was ist $f \circ g$ und was ist $g \circ f$? (b) Zeigen Sie, dass $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

(c) Skizzieren Sie nacheinander die Graphen der Funktionen $\cos x$, $\cos 2x$, $-\cos 2x$, $1-\cos 2x$, sowie $\sin^2 x$.

(15) Bestimmen Sie geometrisch (a) $\cos(-\frac{\pi}{3})$, (b) $\sin(-\frac{\pi}{3})$, (c) $\tan(-\frac{\pi}{3})$.

Hinweis: Zeichnen Sie im Einheitskreis das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(\cos(-\frac{\pi}{3}), \sin(-\frac{\pi}{3}))$. Überlegen Sie, dass alle Winkel $60°$ haben müssen, d.h. dass es gleichseitig ist.

(16) Leiten Sie aus dem Summensatz für den Cosinus die Formel $\cos a - \cos b = -2 \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}$ her!

Hinweis: Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$ und betrachten Sie $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$.

(Z2) Beweisen Sie geometrisch den Summensatz für den Cosinus, d.h. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
(Sie dürfen wie in der Vorlesung annehmen, dass $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in]0°, 90°[$.)

(F1) Auf welchen Intervallen ist das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 - 6x + 5$ monoton steigend bzw. fallend?
Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen auf diesen Intervallen!

(F2) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = -0.4\}$!
Hinweis: $\arccos(-0.4) \approx 1.98 \approx 113°35'$

(F3) Bestimmen Sie
(a) $\arccos \frac{1}{2}$; (b) $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right)$; (c) $\cos(\arccos x),\ x \in [-1, 1]$; (d) $\arccos(\cos x),\ x \in [0, \pi]$;
(e) $\arccos(\cos x),\ x \in [\pi, 2\pi]$.
Hinweis zu (e): $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = \cos(2\pi - x)$. Warum?

(F4) Es sei $a_n = \dfrac{2n-7}{n+3}$. Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, d.h. zeigen Sie

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - 2| < \epsilon.$$

Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = 0.1$?

(F5) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n + 1 - \dfrac{2n^3 + 5n^2}{n^2 + 1}\right)$ mit den Grenzwertsätzen!
Was ergibt sich für $n = 10, 100, 1000$?
Hinweis: Bringen Sie zuerst a_n auf einen gemeinsamen Bruchstrich.

(F6) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(F7) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von $\mathbf{A}$ und die Dimension des Lösungsraums.

(F8) Welche der Matrizenprodukte $\mathbf{AA}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AD}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{BB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{BD}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{CB}$, $\mathbf{CC}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{DA}$, $\mathbf{DB}$, $\mathbf{DC}$, $\mathbf{DD}$ sind möglich? Berechnen Sie diese.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(F9) Berechnen Sie das Matrizenprodukt $\mathbf{ABC}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 — 9. 11. 2011

*(17) Wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar ist und B die Bildmenge, so gilt

$$\forall x \in D : f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{und} \qquad \forall x \in B : f\big(f^{-1}(x)\big) = x.$$

(a) Was heißt das für $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$?

(b) Was heißt das für $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$?

(c) Warum ist $\sqrt{x^2} \neq x$ für $x < 0$? (d) Zeigen Sie $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$ für $x \in [\pi, 2\pi]$!

Hinweis zu (d): Überlegen Sie, dass $\cos(2\pi - x) = \cos x$ und dass $2\pi - x \in [0, \pi]$ wenn $x \in [\pi, 2\pi]$!

(18) Es sei $a_n = \dfrac{n+3}{1-2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n + \frac{1}{2}| < \epsilon$. Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = \frac{1}{4}$?

(19) Bestimmen Sie bei den folgenden Zahlenfolgen a_{10}, a_{99}, und, wenn das möglich ist, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Welche der Folgen sind konvergent?

(a) $\dfrac{n^2+1}{3n^2-7}$ (b) $\dfrac{n^2+1}{3n-7}$ (c) $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ (d) $\cos(n\pi)$

(20) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \big(x - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}\big)$. Welchen Typ $\big(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}$ etc.$\big)$ hat der Grenzwert zu Beginn bzw. im Lauf der Rechnung? Berechnen Sie auch am Taschenrechner $f(10)$, $f(50)$, $f(100)$. *Hinweis:* $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

*(21) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie Rg $\mathbf{A}$ sowie $\dim L$.

(22) Auf vier verschiedene lineare Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wird der Gauß'sche Algorithmus angewendet mit Resultaten (i), (ii), (iii) und (iv).

$$\text{(i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(ii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \text{(iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \text{(iv)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Welche Elemente sind die Pivotelemente?

Was kann mit Hilfe dieser Resultate (i), (ii), (iii) und (iv) über die Lösbarkeit (lösbar, eindeutig lösbar, unlösbar) der ursprünglichen linearen Gleichungssysteme ausgesagt werden?

Bestimmen Sie Rg $\mathbf{A}$ und Rg$(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Bei Lösbarkeit: Was ist die jeweilige Dimension des Lösungsraums?

(23) (a) Es seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

(b) Es seien $\mathbf{v} = (2 \ \ -2 \ \ 3)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{w} = (1 \ \ 3 \ \ 2)^\mathsf{T}$. Berechnen Sie $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}\mathbf{w}^\mathsf{T}$.

(24) (Die Inverse einer Matrix wird in der Vorlesung am Mittwoch eingeführt)

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse von $\mathbf{A}$ und machen Sie die Probe.

Verwenden Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ zur Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Bestimmen Sie weiters $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$ und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$.

(Z3) (a) Zeigen Sie, dass $2\arccos x = \begin{cases} \arccos(2x^2-1) & : \ x \in [0,1], \\ 2\pi - \arccos(2x^2-1) & : \ x \in [-1,0]. \end{cases}$

(b) Kontrollieren Sie (a) am Taschenrechner für $x = 0.6$ und $x = -0.6$!

Hinweis zu (a): Setzen Sie $u = \arccos x$, folgern Sie $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 2x^2 - 1$ und wenden Sie auf beide Seiten dieser Gleichung $\arccos$ an!

Name: ....

Gruppe: ....

1. Klausur zu Mathematik 1, WS 2011/12, 16. 11. 2011

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : 2|x+1| \geq x^2 + 2x - 7\}$.

(2) Es sei $a_n = \dfrac{1-5n}{3n-2}$.

(a) Berechnen Sie $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \epsilon$. Geben Sie für alle $\epsilon > 0$ eine Ungleichung der Art $N > \ldots$ an, sodass $|a_n - \alpha| < \epsilon$ für $n \geq N$ gilt!

(3) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+x} - \sqrt{2x^4+3x^3} + \sin x}{x}$.

(4) Bestimmen Sie die Gerade h im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 2)$

- als Parameterdarstellung,
- als Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. durch zwei Gleichungen!

(5) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(6) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und machen Sie die Probe.

4. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 — 23. 11. 2011

*(28) Es seien $\mathbf{v} = (2 \quad -1 \quad 2)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{w} = (1 \quad 2 \quad 3)^\mathsf{T}$ gegeben. Berechnen Sie $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{w}\|$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und $\measuredangle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

(29) (a) Es seien $\mathbf{u} = (-2 \quad -1 \quad 1)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v} = (2 \quad -1 \quad 2)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{w} = (1 \quad 2 \quad 3)^\mathsf{T}$ gegeben.
Berechnen Sie die Produkte $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w}$, $\mathbf{u}^\mathsf{T}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\, \mathbf{u}$ und $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{w}^\mathsf{T}$.

(b) Zeigen Sie allgemein, dass für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ folgendes gilt:
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^\mathsf{T}$, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\, \mathbf{u}$ und $\mathbf{u}^\mathsf{T}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{w}^\mathsf{T}$.

Hinweis: Setzen Sie für das Skalarprodukt und Tensorprodukt die entsprechenden Definitionen ein.

(30) Es seien $\mathbf{v} = (1 \quad 2 \quad 1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{w} = (-1 \quad 1 \quad 1)^\mathsf{T}$ gegeben. Zerlegen Sie $\mathbf{v}$ in einen Teil $\mathbf{v_w}$ in Richtung von $\mathbf{w}$ und in einen Teil $\mathbf{v_n}$ orthogonal auf $\mathbf{w}$.

*(31) Welche der folgenden Grenzwerte sind sinnvoll? Bestimmen Sie diese!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2^{\cos(\pi x)}}{\arctan x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\searrow 1} \frac{1}{x-1}$

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Verdoppelungsformel und $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ (vgl. Üb. 14) und nicht die Regel von l'Hôpital!

(32) Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano, dass das Polynom $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $I_1 = [0, 1]$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung das Teilintervall I_4 der Länge $\frac{1}{8}$, in dem eine Nullstelle von p liegt.

(33) (a) Was ergeben die Gleichungen in Üb. 17 für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \mathrm{e}^x$? (Skizze von f und f^{-1}!)

(b) Lösen Sie $\mathrm{e}^{-2x} = \frac{1}{4}$. (Wenden Sie $\ln$ auf beide Seiten an!)

(c) Vereinfachen Sie für $x > 0$ die Funktion $g(x) = \sqrt{\ln(\sqrt[4]{\mathrm{e}^x}\,)} + \sqrt{\mathrm{e}^{x^2}} + \ln\left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x}}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{x}{n})^n$.

(34) (a) Berechnen Sie die Ableitung von $y = f(x) = x^3$ mit der Definition, d.h. berechnen Sie

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}. \qquad (\textit{Hinweis: } \forall a, b \in \mathbb{R} : a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2))$$

(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = 1$!

(35) (a) Berechnen Sie die Ableitung von $y = \cos x$ mit der Definition d.h. berechnen Sie

$$\cos'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}.$$

(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = \frac{\pi}{3}$!

Hinweis: $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}$ (vgl. Üb. 16); substituieren Sie $t = \frac{x-x_0}{2}$!

(Z4) Zeigen Sie $\forall a, b > 0, 1 \neq u > 0$: (a) ${}^u\!\log(a \cdot b) = {}^u\!\log a + {}^u\!\log b$ (b) ${}^u\!\log a = \dfrac{\ln a}{\ln u}$.

Hinweis: Wenn $x = {}^u\!\log a$, $y = {}^u\!\log b$ gesetzt wird, so ist $a = u^x$, $b = u^y$, $a \cdot b = u^{x+y}$, und $\ln a = x \cdot \ln u$. (Warum?)

5. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 — 30. 11. 2011

(36) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so gilt für kleines h:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

Der Fehler in $\approx$ ist $\rho(h)$, d.h. $\rho(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)$. Bestimmen Sie $\rho(h)$

(a) für $f = \cos$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $h = 0.1$ (mit dem Taschenrechner);

(b) für $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, h beliebig. Zeigen Sie in diesem Fall $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{h} = 0$.

*(37) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! (a und b sind Konstanten.)

$$f(x) = \tan(\mathrm{e}^{a+b\cos^2 x}); \qquad z(t) = \frac{\sqrt[3]{t}}{\arccos(at)}$$

(38) (a) Zeigen Sie $\arctan'(t_0) = \dfrac{1}{1+t_0^2}$ entsprechend Bsp. 12, S. 60 im Skriptum!

(b) Bestimmen Sie die Tangente an $y = \arctan x$ in $x_0 = 1$!

(39) Die stetige Funktion $y = f(x)$ erfüllt $y^2 + 4xy - 7x^5 + 2 = 0$ und $f(1) = -5$.

(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung nach y auf und stellen Sie so $y = f(x)$ explizit dar. Berechnen Sie daraus $f'(1)$.

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f'(1)$ durch implizites Differenzieren!

*(40) Es seien $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ sind, oder eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind.

(i) $\mathbf{f}_1$, (ii) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, (iii) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, (iv) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$, (v) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_4$.

(41) Die Vektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ aus der vorherigen Aufgabe sind linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

(a) Finden Sie einen Vektor $\mathbf{v}$, der nicht als Linearkombination der drei Vektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ darstellbar ist.

(b) Finden Sie einen Vektor $\mathbf{w}$, der als Linearkombination der $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ darstellbar ist.
Ist diese Darstellung eindeutig?

(c) Versuchen Sie einen der drei Vektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ durch die restlichen zwei darzustellen.

(d) Finden Sie zwei verschiedene Darstellungen des Nullvektors $\mathbf{0}$.

(42) Bestimmen Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 von $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ des $\mathbb{R}^3$, sodass $\mathbf{v} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3$ gilt.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie auch die Koordinaten von $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_3$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$.

(43) Für eine invertierbare 2×2-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt es eine einfache Formel für $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Formel stimmt.

(Z5) Bestimmen Sie die Nullstelle von $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $]0, 1[$ (vgl. Üb. 32) mit dem Newton'schen Näherungsverfahren! Verwenden Sie 0 als Startwert x_0 und berechnen Sie x_3. Was passiert, wenn man 1 bzw. 2 als Startwert x_0 verwendet?

*(44) Es seien $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ und $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ zwei verschiedene Basen des $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiters sei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{E}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ und den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{F}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich $\mathcal{F}$.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$ (oder besser gleich $\mathbf{T}^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$).

(c) Berechnen Sie den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{F}$ aus dem Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{E}$ mit Hilfe der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

(45) Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die drei Vektoren eine Orthonormalbasis $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{F}$ des Vektors $\mathbf{v} = (1\ \ 2\ \ -1)^\mathsf{T}$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$.

(46) Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Weiters seien $\mathcal{F}$ und $\mathbf{v}$ wie in Aufgabe (45).

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen Sie die Koordinaten $x_{\mathcal{E},1}, x_{\mathcal{E},2}, x_{\mathcal{E},3}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{F}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$ direkt aus $\mathbf{x}_\mathcal{E}$.

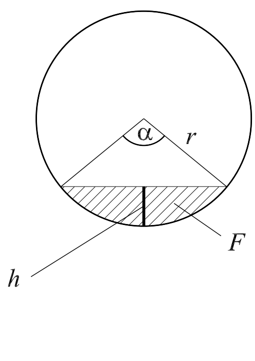
(47) (a) Es sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie, dass die drei Funktionen 1, $\sin x$ und $\cos x$ linear unabhängig sind und daher eine Basis $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (1, \sin x, \cos x)$ von V sind. Was ist die Dimension von V? Was sind die Koordinaten von $f(x) = \sin x - 2\cos x + 7$ bezüglich $\mathcal{F}$?

(b) Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ orthogonale Matrizen. Zeigen Sie, dass auch $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ orthogonal ist.
Hinweis: $(\mathbf{AB})^\mathsf{T}(\mathbf{AB}) = \ldots$

(48) Ein auf einer Mantellinie liegender zylindrischer Öltank enthält 3000 Liter. Seine Länge beträgt $5\,\mathrm{m}$, sein Radius r ist $70\,\mathrm{cm}$.

Bestimmen Sie näherungsweise die Höhe h des Flüssigkeitsstandes mit dem Newton'schen Näherungsverfahren. Verwenden Sie $\alpha_0 = \pi$ und berechnen Sie α_2. Dann ist $h \approx r\big(1 - \cos(\alpha_2/2)\big)$, vgl. die Skizze.

$$\begin{aligned} F &= r^2\,\frac{\alpha}{2} - \Big(r \sin\frac{\alpha}{2}\Big)\Big(r\cos\frac{\alpha}{2}\Big) \quad \text{(warum?)} \\ &= \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) \end{aligned}$$



Machen Sie bei den zwei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema und unterteilen Sie sie in globale bzw. lokale Maxima oder Minima. Machen Sie eine Skizze! Berechnen Sie in Üb. 50 auch $f'(1+)$ und $f'(1-)$!

*(49) $p : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ (vgl. auch Üb. 32 und Z5)

(50) $f(x) = (x^2 - 8)\,\mathrm{e}^{|x-1|}$, $x \in D = [-3, 3]$

(51) Welche der folgenden Grenzwerte lassen sich mit der Regel von l'Hôpital (eventuell öfters verwendet) berechnen, welche nicht? (Vgl. auch Üb. 31 (b).)

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{(\arccos x) - \pi/2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin x}{x^3}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln x$

Zusatzfrage: Warum hat es keinen Sinn, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$ in Üb. 34 (a) mit der Regel von l'Hôpital zu berechnen?

(Z6) Machen Sie bei der Funktion $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x| \cdot (x^2 - 3)$ eine Kurvendiskussion, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema und unterteilen Sie sie in globale bzw. lokale Maxima oder Minima. Machen Sie eine Skizze! Berechnen Sie auch $f'(0+)$ und $f'(0-)$!

Name: ....

2. Klausur zu Mathematik 1, WS 2011/12, 14. 12. 2011

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) (a) Berechnen Sie mit der Definition von $f'(x_0)$ (also ohne Quotientenregel) die Ableitung von $y = f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Hinweis: Doppelbruch vereinfachen und Summensatz.

(b) Bestimmen Sie die Tangente an $y = f(x)$ für $x_0 = \frac{\pi}{3}$!

(2) Die stetige Funktion $y = f(x)$ erfüllt $y^2 - 2e^x y = 3 \arcsin x$ und $f(0) = 0$.

(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung nach y auf und stellen Sie so $y = f(x)$ explizit dar. Berechnen Sie daraus $f'(0)$.

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f'(0)$ durch implizites Differenzieren!

(3) Machen Sie bei der Funktion $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 4|x| + 5 \arctan x$ eine Kurvendiskussion, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema und unterteilen Sie sie in globale bzw. lokale Maxima oder Minima. Berechnen Sie auch $f'(0+)$ und $f'(0-)$!

(4) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Sind die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$? (Begründung)
Falls nein, finden Sie einen Vektor, der sich nicht als Linearkombination von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ darstellen läßt.

(b) Sind die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ linear unabhängig? (Begründung)
Falls nein, finden Sie zwei unterschiedliche Darstellungen des Nullvektors.

(5) Gegeben seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Orthonormalbasen $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ bzw. $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ mit
$\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{E}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{F}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ von der Basis $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$.

(d) Bestimmen Sie nun den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_\mathcal{F}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$ mit Hilfe der Transformationsmatrix und des Koordinatenvektors $\mathbf{x}_\mathcal{E}$.

(6) (a) Untersuchen Sie, ob die Matrix $\mathbf{A} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

(b) Bestimmen Sie $\mathbf{A}^{-1}$.

7. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 — 11. 1. 2012

*(52) (a) Bestimmen Sie die Normale n_{x_0}, die Krümmung κ, den Krümmungsradius ϱ, und den Krümmungsmittelpunkt M zum Punkt $P = (x_0/y_0) = (1/0)$ auf dem Graphen von $y = \ln x$ mit den Formeln der Vorlesung. (Skizze!)

(b) Bestimmen Sie einen geeigneten Richtungsvektor $\mathbf{r}$ der Länge 1 auf der Normalen n_{x_0} und überprüfen Sie, dass $M = P + \varrho \cdot \mathbf{r}$.

(53) Berechnen Sie für $f : [0, \frac{3\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ und die Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ (Skizze!)

(a) die untere bzw. obere Darbouxsumme $UD(Z)$ bzw. $OD(Z)$;

(b) die Riemannsummen $R(Z, \Xi)$ für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ bzw. für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\}$.

(54) (a) Schreiben Sie Paragraph 10, Satz 3, 3), S. 87, des blauen Skriptums auf die Tafel!

(b) Zeigen Sie, dass $(\ln|\tan\frac{x}{2}|)' = \dfrac{1}{\sin x}$ und berechnen Sie damit $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Was sind hier f, Φ, a, b von (a)? Skizzieren Sie $f(x) = 1/\sin x$ und die Fläche, die dem bestimmten Integral (bis auf das Vorzeichen) entspricht!

(55) Es sei $f : [\frac{1}{2}, 4] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion Φ, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{1/2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $F(x) = \int_{1/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Skizzieren Sie f und F, sowie speziell $F(2)$ als Länge, $F(2)$ als Fläche, die Tangente an F in $x_0 = 2$ und ihre Steigung. ($\ln 2 \approx 0.7$)

(56) (a) Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrizen $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(g_i)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\binom{1}{0}, \binom{0}{1})$:

- g_1 spiegelt an der x_2-Achse;
- g_2 spiegelt an der Geraden $x_1 + x_2 = 0$;
- g_3 dreht um 60° im Gegenuhrzeigersinn.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von g_2^{-1}, $g_2 \circ g_2$ und $g_2 \circ g_1$ mit Hilfe der Sätze 5.3 und 5.7 im Skriptum.

*(57) Gegeben seien die Orthonormalbasis $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ des $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)^\mathsf{T}$, $\mathbf{f}_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)^\mathsf{T}$, und die Standardbasis $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\binom{1}{0}, \binom{0}{1})$ sowie die lineare Abbildung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die Vektoren an der von $\mathbf{f}_2$ erzeugten Geraden spiegelt.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(s)$ bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{F}$.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(s)$ bezüglich $\mathcal{E}$ mit Hilfe der Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(s)$, der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ und der Formel $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(s) = \mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(s)\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ für die Koordinatentransformation für Abbildungsmatrizen.

(58) (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(g)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ für die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die in Richtung der x_1-Achse um den Faktor 2 streckt.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(g)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ für die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die in Richtung des Vektors $\mathbf{s} = \binom{2}{1}$ um den Faktor 2 streckt.
Hinweis: Finden Sie eine günstige Basis $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Sie die Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(g)$ leicht bestimmen können und transformieren Sie dann $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(g)$ in die Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(g)$.

(59) $P_3 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0;\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ ist der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : P_3 \to P_3 : p \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p$, die Polynome differenziert, die Abbildungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ bezüglich der Basis $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = (1, x, x^2, x^3)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Abbildungsmatrix die Ableitung von $p(x) = 3 - x + 2x^2 - x^3$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2012!

(Z7) Um heftige Stöße aufgrund von plötzlichen Zentrifugalkräften zu vermeiden, werden geradlinige Eisenbahnstrecken mit kreisförmigen oft durch Übergangskurven der Form $y = cx^3$ ($c > 0$ eine Konstante) verbunden. Die geradlinige Strecke wird bei $x = 0$, die kreisförmige bei dem positiven x_0, wo κ maximal ist, angeschlossen.
(a) Für welches $x_0 > 0$ hat $y = cx^3$ maximale Krümmung?
(b) Was ergibt sich für c, x_0, y_0, wenn eine Kreisstrecke mit Radius $500\,\mathrm{m}$ angeschlossen wird?

8. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 — 18. 1. 2012

(60) Aufgabe (58) und zusätzlich:

Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(g)$ indem Sie die Bilder $g(\mathbf{e}_1)$ und $g(\mathbf{e}_2)$ direkt berechnen.

Hinweis: Orthogonale Zerlegung von $\mathbf{e}_i$ bezüglich $\mathbf{s}$ und den Anteil in $\mathbf{s}$-Richtung strecken, d.h. mit 2 multiplizieren und dann beide Anteile wieder addieren.

(61) Es sei $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\mathbf{n}\| = 1$ ein Normalvektor auf eine Ebene ϵ durch den Ursprung.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(p_{\mathbf{n}})$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ für die lineare Abbildung $p_{\mathbf{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ auf die Ebene ϵ projiziert.

Hinweis: $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} -$ Anteil von $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{n}$; Aufgabe (29); $\otimes$ ergibt eine Matrix; $\mathbf{x}$ herausheben; die daraus resultierende Matrix ist dann die gesuchte Abbildungsmatrix und sollte so aussehen: $\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$.

*(62) Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\det \mathbf{A}$ mit (i) der Regel von Sarrus bzw. (ii) mit dem Gauß'schen Algorithmus.

(63) Gegeben sind 6 Punkte (x_{1k}, x_{2k}), $k = 1, \ldots, 6$, mit Koordinaten

k	1	2	3	4	5	6
x_{1k}	0	2	2	1	1	0
x_{2k}	0	0	1	1	3	3

.

Zeichnen Sie den durch diese Punkte definierten geschlossenen Polygonzug. Wenden Sie auf die Punkte (als Ortsvektoren interpretiert) die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ an für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Wie ändert sich der Polygonzug?

(b) Bestimmen Sie die Fläche des durch den Polygonzug begrenzten Bereichs.

(c) Bestimmen Sie die Fläche des durch den transformierten Polygonzug begrenzten Bereichs.

(d) Bestimmen Sie $|\det g|$. (Hier ist $\mathbf{A}$ die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(g)$ bezüglich der Standardbasis)

Ebenso für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale! Machen Sie bei den bestimmten Integralen eine Skizze!

*(64) (a) $\displaystyle\int \left(\frac{a}{\cos^2 x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} \right) \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} y^2 \cos y \, \mathrm{d}y$ (65) (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan t}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin u \, \mathrm{d}u$

Zusatzfrage zu 65 (b): Wie lässt sich das mittels einer Fläche unter dem Sinus darstellen?

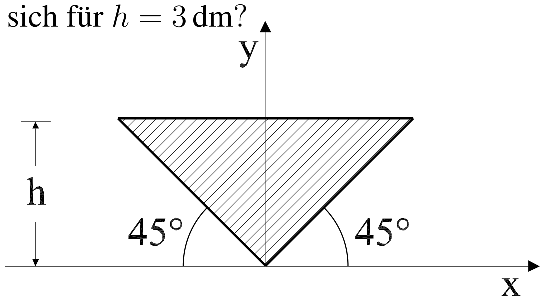
(66) (a) $\int \left(v\,\mathrm{e}^{v^2} + v^4 \sqrt[3]{1+2v^5} \right) \mathrm{d}v$ (b) $\displaystyle\int_0^1 (1-3z)^5 \, \mathrm{d}z$ (c) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \ln a \, \mathrm{d}a$

(67) (a) $\displaystyle\int \frac{4a-5}{a^2-a-2} \, \mathrm{d}a$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+2t+3} \, \mathrm{d}t$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+2t+3} \, \mathrm{d}t$

(Z8) Aus einem Überlauf von der Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks der Höhe h fließt Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g(h-y)}$ (Ausflussgesetz von Torricelli). Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Sekunde! Was ergibt sich für $h = 3\,\mathrm{dm}$?

Hinweis: $Q = \int\limits_0^h 2y\sqrt{2g(h-y)}\,\mathrm{d}y$

$g \approx 9.81$ m/sec^2



9. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2011/12 — 25. 1. 2012

(68) $\int \sqrt{4x - x^2 - 3}\,\mathrm{d}x$ *Hinweis:* Quadratisch ergänzen, $u = x - 2$, Winkelfunktionen substituieren.

*(69) Zeigen Sie $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$ (b) $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y$.

(70) Berechnen Sie $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2 + 2x + 3}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2+1}$. Nach der Substitution $u = \mathrm{sh}\, v$ werden die Gleichungen $\mathrm{ch}^2 v = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}\, 2v)$, $\mathrm{sh}\, 2v = 2\mathrm{sh}\, v\, \mathrm{ch}\, v$ und $\mathrm{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ verwendet.

(71) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $y = 2x - 4$ eingeschlossen wird, durch Integration (a) nach x; (b) nach y.

(72) Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ durch Entwickeln nach 3. Zeile bzw. 1. Spalte,

siehe Satz 6.14 und folgende Anleitung im Skriptum.

Berechnen Sie auch $\mathbf{A}^{-1}$ mit Hilfe von Satz 6.14.

Hinweis: `kapitel6_teil3.pdf` herunterladen.

*(73) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: 2 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

(74) Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis von jener linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die Vektoren orthogonal auf eine Gerade h durch den Ursprung projiziert.

Bestimmen einen Richtungsvektor dieser Geraden, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ bestimmen.

Welche Eigenvektoren sind Richtungsvektoren der Geraden h?

Hätte man die beiden Eigenwerte auch ohne zu rechnen bestimmen können?

(75) Es sei $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \left(\binom{2}{1}, \binom{-1}{2}\right)$ eine weitere Basis.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(s)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ für jene Abbildung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die an der x_1-Achse spiegelt.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(s)$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$ direkt, indem Sie die Koordinaten von den Bildern $s(\mathbf{f}_1)$ und $s(\mathbf{f}_2)$ bezüglich $\mathcal{F}$ berechnen.

(c) Bestimmen Sie $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(s)$ mit Hilfe $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(s)$ und der Formel $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(s) = \mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1}\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(s)\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(s)$.

(e) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(s)$.

(f) Sind die Eigenwerte von $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(s)$ und $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(s)$ gleich?
Können die Eigenvektoren von $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(s)$ und $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(s)$ zum selben Eigenwert λ_i mit Hilfe von $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ ineinander umgerechnet werden?

(Z9) (a) $\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

Hinweis zu (d): $\cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$

Name: .... Gruppe: ....

3. Klausur zu Mathematik 1, WS 2011/12, 1. 2. 2012

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) (a) Berechnen Sie zum Punkt $P = (x_0/y_0) = (0/1)$ auf dem Graphen von $y = \mathrm{e}^x$ die Normale n_{x_0}, die Krümmung κ und den Krümmungsradius ϱ.

(b) Nehmen Sie einen geeigneten Richtungsvektor $\vec{r}$ der Länge 1 auf der Normalen n_{x_0} und bestimmen Sie damit den Krümmungsmittelpunkt M. Skizze!

Hinweis: $\kappa = \dfrac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$

(2) Berechnen Sie

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[3]{1 - \tan x}}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \arctan x \, \mathrm{d}x.$$

(3) Berechnen Sie $\int_1^2 \sqrt{2x^2 - 1}\, \mathrm{d}x$.

Hinweis: $\mathrm{sh}^2 u = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 2u - 1)$, $\mathrm{sh}\, 2u = 2\, \mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, u = 2\sqrt{\mathrm{ch}^2 u - 1}\, \mathrm{ch}\, u$, $\mathrm{arch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(4) Es sei $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ mit $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine weitere Basis. Die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei jene lineare Abbildung, die Vektoren an der x_2-Achse spiegelt.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(g)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(g)$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$.

(c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(g)$ mit Hilfe der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$ und der Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(g)$.

(5) Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\det \mathbf{A}$ durch Entwickeln nach der 1. Spalte.

(b) Berechnen Sie $\det \mathbf{A}$ mit dem Gauß'schen Algorithmus.

(6) Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.