1. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(1) Bestimmen Sie $L = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x \neq -1 \ \wedge \ \dfrac{1}{x+1} \leq |x-1| \right\}$.

(2) Bestimmen Sie $L = \{ x \in \mathbb{R} : \ x \geq -1 \ \wedge \ \sqrt{2x+2} > 3 - x \}$.

<u>Hinweis:</u> Unterscheiden Sie die Fälle $3 - x < 0$ und $3 - x \geq 0$.

(3) Bestimmen Sie $L = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x \neq 3 \ \wedge \ \dfrac{(2 - |x|)(x+1)}{3 - x} \leq 0 \right\}$.

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Methode der kritischen Punkte!

(4) Für welche reelle x ist $\sqrt{x-1} < |x-4| - 3$?

(5) Geben Sie für die Gerade g im $\mathbb{R}^2$ durch $A = (3/1)$, $B = (2/4)$

- (a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}$,
- (b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$,
- (c) eine Darstellung der Form $x_2 = k x_1 + d$ an.

Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(6) Geben Sie für die Ebene ϵ im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/2/3)$, $B = (1/0/-1)$ und $C = (-2/1/-1)$

- (a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2$,
- (b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$,
- (c) eine Darstellung der Form $x_3 = a x_1 + b x_2 + c$ an.

Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(7) Bestimmen Sie die Gerade h im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/-1/2)$, $B = (3/1/-2)$

- (a) durch eine Parameterdarstellung,
- (b) als Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. durch 2 Gleichungen!

Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(8) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene ϵ aus Übung (6) mit der Geraden h aus Übung 7.

(Z1) Welche reellen Zahlen erfüllen $\left| \dfrac{x^2 + 5x + 8}{x + 6} \right| + x < 3$?

2. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

In den Aufgaben (9)-(12) sind die Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus zu lösen. Geben Sie auch jeweils die Lösungsmenge an.

(9)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\qquad\qquad - 8x_5 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \qquad &= -5 \\ -3x_1 \qquad - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= -9 \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} 5x_1 \qquad + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} x + y + a\,z &= 0 \\ a\,x - 2y + 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

für festes $a \in \mathbb{R}$.
Eine Fallunterscheidung ist nötig!

(13) Wir betrachten das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x^3 - 2x^2 - 5x + 2$.

(a) Dividieren Sie P durch $x + 1$. Wie lässt sich der Rest direkt bestimmen?

(b) Zerlegen Sie P in Linearfaktoren!

Hinweis zu (b): Die Nullstelle 2 findet man durch Probieren.

(14) Es seien $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. Bestimmen Sie $g \circ f$ und zeigen Sie, dass $g \circ f = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Skizzieren Sie den Graphen von $g \circ f$!

Zusatzfrage: Was ist $f \circ g$?

(15) Bestimmen Sie geometrisch (a) $\cos(-\frac{\pi}{3})$, (b) $\sin(-\frac{\pi}{3})$, (c) $\tan(-\frac{\pi}{3})$.

(16) Leiten Sie aus dem Summensatz für den Sinus die Formel $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ her!

Hinweis: Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$ und betrachten Sie $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$.

(Z2) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos 3x + 6 \cos 2x + 5 \cos x + 2 \sin^2 x = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$!

3. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(17) Auf welchen Intervallen ist das Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 - 6x + 5$ monoton steigend bzw. fallend? Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen auf diesen Intervallen!

(18) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = -0.4\}$! Hinweis: $\arccos(-0.4) \approx 1.98 \approx 113°35'$

(19) Bestimmen Sie (a) $\arccos \frac{1}{2}$; (b) $\arccos\big(\cos \frac{5\pi}{3}\big)$; (c) $\cos(\arccos x),\ x \in [-1, 1]$; (d) $\arccos(\cos x),\ x \in [0, \pi]$; (e) $\arccos(\cos x),\ x \in [\pi, 2\pi]$.

Hinweis zu (e): $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = \cos(2\pi - x)$ (Warum?)

(20) (a) Zeigen Sie $2 \arccos x = \begin{cases} \arccos\big(2x^2 - 1\big) & : \ x \in [0, 1], \\ 2\pi - \arccos\big(2x^2 - 1\big) : & x \in [-1, 0]. \end{cases}$

(b) Kontrollieren Sie (a) am Taschenrechner für $x = 0.6$ und $x = -0.6$!

Hinweis zu (a): Setzen Sie $u = \arccos x$, folgern Sie $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 2x^2 - 1$ und wenden Sie auf beide Seiten dieser Gleichung arccos an!

(21) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(22) Wir betrachten nochmals das inhomogene Gleichungssystem aus Übung 10.
Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{hom}}$ und überprüfen Sie, dass $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$ gilt.
Überprüfen Sie auch die Gleichung $k = n -$ Anzahl der Pivotzeilen (Pivotelemente).
Warum ist L_{hom} ein Vektorraum, L_{inh} aber nicht?
Geben Sie eine Basis und die Dimension von L_{hom} an!

(23) Zeigen Sie, dass $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist!

Geben Sie die Koordinaten von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ an.

(24) Gegeben sind vier Vektoren

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie auf lineare Unabhängigkeit:
(a) $\vec{f_1}$, (b) $\vec{f_1}, \vec{f_2}$, (c) $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$, (d) $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4}$.

(Z3) Zeigen Sie geometrisch für $x > 0$: (a) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$; (b) $\operatorname{arccot} x = \arctan \dfrac{1}{x}$.

4. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(25) Nocheinmal das Gleichungssystem aus Aufgabe 10.

(a) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass die Richtungsvektoren, die L_{hom} erzeugen, linear unabhängig sind. Vergleichen Sie dazu auch den Beweis von Satz 5, §3.

(b) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass die Pivotzeilen, die den Zeilenraum erzeugen, linear unabhängig sind.

(26) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{v} \mapsto A\vec{v}$ jene Abbildung, die Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}$ an der Geraden $x_1 - x_2 = 0$ spiegelt. Berechnen Sie die Matrix A. Was ist $f(f(\vec{v}))$ bzw. $A \cdot A$?
Wenden Sie die Abbildung auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

(27) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & -3 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & x \\ -1 & c & 3 & f \\ -1 & -2 & b & 1 \end{pmatrix}$$

(mit $a, b, c, f, x \in \mathbb{R}$). Welche der Produkte AB, BA, AD, DA, CD, DC sind sinnvoll? Berechnen Sie diese!

(28) (a) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$, $A + BC = D$, $B \cdot (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{z} = \vec{u}$, $ABC = D$ in Tensorschreibweise!

(b) Alle Indizes seien 1 oder 2. Schreiben Sie $c_{kr} - a_{ki}b_{ir} = d_{kj}e_{jr}$ als Matrixgleichung sowie als 4 Gleichungen (für $k, r = 1, 2$) an!

(c) Was bedeutet $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$?

(29) Es sei $a_n = \dfrac{5n+1}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5}{2}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left| a_n - \dfrac{5}{2} \right| < \epsilon$. Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = \frac{1}{8}$?

(30) Bestimmen Sie bei den folgenden Zahlenfolgen a_{10}, a_{99}, und, wenn das möglich ist, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Welche der Folgen sind konvergent?
(a) $\dfrac{n^2+1}{3n^2-7}$ (b) $\dfrac{n^2+1}{3n-7}$ (c) $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ (d) $\cos(n\pi)$

(31) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} \right)$. Welchen Typ („$\frac{0}{0}$" etc.) hat der Grenzwert zu Beginn bzw. im Lauf der Rechnung? Berechnen Sie auch am Taschenrechner $f(10)$, $f(50)$, $f(100)$.
Hinweis: $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(32) Welche der folgenden Grenzwerte sind sinnvoll? Bestimmen Sie diese!
(a) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - \sqrt[3]{x} - 6}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\searrow 1} \dfrac{1}{x-1}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2^{\cos(\pi x)}}{\arctan x}$
Hinweis zu (a): Setzen Sie $t = \sqrt[3]{x}$ und kürzen Sie!

(Z4) (a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$, d.h. $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \geq 0$ mit $0 < |x-4| < \delta : |\sqrt{x} - 2| < \epsilon$.
(b) Wie ist δ für $\epsilon = 0.1$ zu wählen?
(c) Wie kann man den Grenzwert in (a) mit dem Wort "stetig" formulieren?

5. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(33) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

Hinweis: $\forall x \in \mathbb{R} : 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ (Warum?)

(34) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\arccos x}{x} - \dfrac{\pi}{2x}\right]$.

Hinweis: Substituieren Sie $t = \arccos x$ und $u = t - \frac{\pi}{2}$.

(35) Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano, dass das Polynom $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $I_1 = [0, 1]$ eine Nullstelle hat. Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung das Teilintervall I_4 der Länge $\frac{1}{8}$, in dem eine Nullstelle von p liegt.

(36) Berechnen Sie (für festes $x_0 \in \mathbb{R}$) den Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$. Unterscheiden Sie die Fälle $x_0 \neq 0$ und $x_0 = 0$.

(37) Es seien f bzw. g bzw. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehungen um die Winkel α bzw. β bzw. $\alpha + \beta$ im Gegenuhrzeigersinn.

(a) Welche Matrizen A, B, C entsprechen f, g, h?

(b) Überlegen Sie, dass $h = f \circ g$ und daher $C = A \cdot B$.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b) die Summensätze für Sinus und Cosinus.

(38) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1}. Kontrollieren Sie $A \cdot A^{-1} = I$!
Was ist die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = (1, 3, 5)^T$?

(39) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$ sowie $\operatorname{rg} A^T$! Ist A invertierbar?
Hinweis: $\operatorname{rg} A$ bzw. $\operatorname{rg} A^T$ ergeben sich als Anzahl der Pivotzeilen beim Gauß'schen Algorithmus angewendet auf $A\vec{x} = \vec{0}$ bzw. $A^T\vec{x} = \vec{0}$.

(40) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, indem Sie $A \cdot A^{-1} = I$ überprüfen!

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie mit (a) A^{-1} und die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

(Z5) Bestimmen Sie $k, d \in \mathbb{R}$ so, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{2x^2 - 5x} - (kx + d)\right] = 0$. Welche Bedeutung hat die Gerade $y = kx + d$ für den Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x}$?

6. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(41) Es sei A wie in Übung (39), $\vec{b} = (1, -1, 2)^T$ und $\tilde{A} = (A, \vec{b})$ die erweiterte Matrix. Berechnen Sie rg $\tilde{A}$! Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

(42) (a) Bestimmen Sie die Fläche F des Vierecks im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $A = (2/1)$, $B = (1/3)$, $C = (3/2)$, $D = (4/4)$. Zeichnen Sie das Viereck, und überlegen Sie, dass hier gilt

$$F = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| + \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}).$$

Erklären Sie die Vorzeichen der 2 Determinanten!

(b) Berechnen Sie $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ mit der Regel von Sarrus!

Machen Sie eine Skizze, die zeigt, warum diese Determinante negativ ist!

(43) Berechnen Sie die folgende Determinante mit Hilfe der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

(44) Wenn ein Gegenstand mit der Temperatur c zur Zeit $t = 0$ in eine Umgebung der Temperatur d gebracht wird, so hat der Gegenstand zur Zeit t die Temperatur $f(t) = d + (c - d)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

(a) Mit welcher Zahl α ist die Temperatur einer Tasse Kaffee zu beschreiben, die sich in der Umgebungstemperatur $20°$ nach einer $\frac{1}{2}$ Minute von $100°$ auf $70°$ abgekühlt hat? Geben Sie eine Formel für α an! (t werde in Sekunden gemessen.)

(b) Nach wieviel Sekunden hat der Kaffee die Temperatur $40°$? Bestimmen Sie diese Zeit t_1 auch ohne Taschenrechner näherungsweise aus $\ln 2 \approx 0.7$, $\ln 5 \approx 1.6$!

(45) Vereinfachen Sie für $x > 0$ die folgende Funktion:

$$f(x) = \sqrt{\ln(\sqrt[4]{\mathrm{e}^x}\,)} + \ln(x^{4/3}\sqrt[5]{\mathrm{e}^3}\,) + \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}^{\ln x})} + 4\sin\Bigl(\frac{7\pi}{6}\Bigr)$$

$$+ \ln\Bigl(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x}}\Bigr) + \arccos(\cos(-2.4)) + x\sqrt[3]{2^{-\ln(\mathrm{e}^6)}}.$$

(46) (a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \cos x$, d.h. berechnen Sie $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$.

(b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = \frac{\pi}{3}$!

<u>Hinweis:</u> $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}$; substituieren Sie $t = \frac{x-x_0}{2}$!

(Z6) Zeigen Sie $\forall a, b > 0, 1 \neq u > 0$: (a) ${}^u\!\log(a \cdot b) = {}^u\!\log a + {}^u\!\log b$ (b) ${}^u\!\log a = \dfrac{\ln a}{\ln u}$.

<u>Hinweis:</u> Wenn $x = {}^u\!\log a$, $y = {}^u\!\log b$ gesetzt wird, so ist $a = u^x$, $b = u^y$, $a \cdot b = u^{x+y}$, und $\ln a = x \cdot \ln u$. (Warum?)

7. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(47) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen. (a, b, c sind Konstante.)

$$f(x) = \sqrt[3]{\arcsin(\tfrac{1}{x}) + a\tan x}\,; \qquad z(t) = \frac{\mathrm{e}^{\cos^2 t}}{\ln(b\,t^{-3} + c)}$$

(48) (a) Zeigen Sie $\arctan'(t_0) = \dfrac{1}{1+t_0^2}$ mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.
(b) Bestimmen Sie die Tangente an $y = \arctan x$ in $x_0 = 1$!

(49) Die Funktion $y = f(x)$ erfüllt die Gleichung $y^2 - 2\mathrm{e}^x y = 3\cos x$ sowie $f(0) = -1$.
(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung nach y auf und stellen Sie so $y = f(x)$ explizit dar. Berechnen Sie daraus $f'(0)$.
(b) Überprüfen Sie das Ergebnis für $f'(0)$ durch implizites Differenzieren!

(50) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(51) Bestimmen Sie durch geschicktes Entwickeln

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Streichungsdeterminanten können natürlich selbst wieder durch Entwickeln berechnet werden.

(52) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Drehung um $\varphi = 90°$ im Gegenuhrzeigersinn und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der y-Achse.

Geben Sie die dazugehörigen Matrizen an und berechnen Sie $\det f$, $\det g$ und $\det(f \circ g)$. Welche Abbildung ändert den Orientierungssinn? Wenden Sie f bzw. g auf das Einheitsquadrat an (Skizze). Nummerieren Sie die Ecken des Quadrats, damit Sie sehen, ob sich der Orientierungssinn ändert.

(Z7) Differenzieren Sie die Funktionen $x^{\sin x}$ und x^{x^x} (d.h. genauer $x^{(x^x)}$).
Hinweis: $\forall u > 0 : \forall v \in \mathbb{R} : u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$

8. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(53) ϵ, A, B, C seien wie in Übung (6). Bestimmen Sie die Längen und Winkel im Dreieck ABC sowie mittels des Kreuzprodukts eine Gleichung für die Ebene ϵ.

(54) Es sei $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$.

a) Was ist der Abstand des Punktes $Q = (1/2/3)$ von der Ebene $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 9$?

b) Was ist die Matrix der senkrechten Projektion pr_H auf die Ebene $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$? Berechnen Sie dazu die Fußpunkte der Standardbasisvektoren $\mathrm{pr}_H(\vec{e}_i) = \vec{e}_i - \lambda \vec{a}$ wie im Beweis von Satz 3, Seite 68 im Skriptum.

(55) Zeigen Sie durch Ausrechnen, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Merkregel: "baz minus zab". Was ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$? Ist $\times$ assoziativ?

(56) **Gram-Schmidt-Orthogonalisierung:**
Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ eine Basis von V. Dann kann die Basis wie folgt orthogonalisiert werden:

(1) Setze $\vec{g}_1 := \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$.
(2) Für $k = 2, \ldots, n$
(3) $\qquad \vec{v} := \vec{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{f}_k, \vec{g}_i \rangle \, \vec{g}_i$
(4) $\qquad \vec{g}_k := \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Dann ist $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ eine ONB von V.

Es seien

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie mit Hilfe von det, dass $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und orthogonalisieren Sie die Basis mit dem obigen Verfahren. Erklären Sie den Schritt in Zeile (3) im Algorithmus.

(57) Berechnen Sie mit dem Newton'schen Näherungsverfahren den Schnittpunkt der Kurven $y = \ln x$ und $y = 2 - x$! Machen Sie eine Skizze! Verwenden Sie $x_0 = 1$ als Startwert und berechnen Sie x_4!

Machen Sie bei den zwei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema und unterteilen Sie sie in globale bzw. lokale Maxima oder Minima. Machen Sie eine Skizze! Berechnen Sie in (59) auch $f'(1+)$ und $f'(1-)$!

(58) $p : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$

(59) $f(x) = (x^2 - 8)\, \mathrm{e}^{|x-1|}$, $x \in D = [-3, 3]$

(60) Welche der folgenden Grenzwerte lassen sich mit der Regel von l'Hôpital (eventuell zweimal verwendet) berechnen, welche nicht?

(a) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\arctan x}{\sin x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\cot x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - \cos x}{x^2}$ (d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{2x + \cos x}$

Frohe Weihnachten und viel Schwung auf der Piste und beim Lernen!

(Z8) Aus einem Stamm vom Durchmesser d soll ein Balken geschnitten werden, der sich unter Last möglichst wenig biegt. Wenn x, y seine Breite und Höhe sind, so bedeutet dies (Festigkeitslehre), dass xy^3 maximal wird. Bestimmen Sie y/x!

9. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(61) Bestimmen Sie die Normale n_{x_0}, die Krümmung κ, den Krümmungsradius ϱ, und den Krümmungsmittelpunkt M zum Punkt $P = (x_0/y_0) = (\frac{\pi}{6}/\frac{1}{2})$ auf dem Graphen von $y = \sin x$. (Skizze!)

Hinweis: $\kappa = \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{|y_0''|}{(1+{y_0'}^2)^{3/2}}$, $M = P + \dfrac{1+{y_0'}^2}{y_0''}\begin{pmatrix} -y_0' \\ 1 \end{pmatrix}$

(62) Berechnen Sie für $f : [0, \frac{3\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ und die Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ (Skizze!)

(a) die untere bzw. obere Darbouxsumme $UD(Z)$ bzw. $OD(Z)$;

(b) die Riemannsummen $R(Z, \Xi)$ für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ bzw. für $\Xi = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\}$.

(63) Es sei $f : [\frac{1}{2}, 4] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion Φ, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{1/2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$, $F(x) = \int_{1/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Skizzieren Sie f und F, sowie speziell $F(2)$ als Länge, $F(2)$ als Fläche, die Tangente an F in $x_0 = 2$ und ihre Steigung. ($\ln 2 \approx 0.7$)

(64) Bestimmen Sie die Matrix A jener Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die an der Geraden

$$g:\ x_1 - x_2 = 0$$

spiegelt, und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von f (bzw. A).

Welche geometrische Bedeutung haben hier die Eigenwerte und Eigenvektoren?

(65) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}!$$

(66) Für einen dreiachsigen Spannungszustand gelte $\sigma_x = 2.3$, $\sigma_y = -1.4$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 1.5$, $\tau_{xz} = 0.7$, $\tau_{yz} = 0$ (in [N/m^2]).

Ermitteln Sie näherungsweise (zum Beispiel mit dem Newton-Verfahren aus Programmiersprache 1) die Größe der maximalen Normalspannung, d.h. den absolutgrößten Eigenwert der Spannungsmatrix!

(Z9) Um heftige Stöße aufgrund von plötzlichen Zentrifugalkräften zu vermeiden, werden geradlinige Eisenbahnstrecken mit kreisförmigen oft durch Übergangskurven der Form $y = cx^3$ ($c > 0$ eine Konstante) verbunden. Die geradlinige Strecke wird bei $x = 0$, die kreisförmige bei dem positiven x_0, wo κ maximal ist, angeschlossen.

(a) Für welches $x_0 > 0$ hat $y = cx^3$ maximale Krümmung?

(b) Was ergibt sich für c, x_0, y_0, wenn eine Kreisstrecke mit Radius 500 m angeschlossen wird?

10. Übungsblatt zu Mathematik 1, WS 2006/07

(67) A sei die Matrix aus Übung 65.
(a) Schreiben Sie $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda + c_0$ an!
(b)Überprüfen Sie, dass $c_0 = \det A$, $c_1 = \sum_{i=1}^{3} \det(A_{\cancel{i}\cancel{i}})$ und $c_2 = \operatorname{sp} A$.
(c) Überprüfen Sie, dass $c_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $c_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ und $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$!

(68) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ sind schon 2 Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -6$ bekannt.
(a) Bestimmen Sie aus $\operatorname{sp} A$ den dritten Eigenwert!
(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den 3 Eigenwerten. Was sind hier a.V. und g.V.?

(69) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ sei die Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Übung 23. A sei wie in Übung 68.
(a) Was ist die Transformationsmatrix T von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ zu $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$?
(b) Bestimmen Sie T^{-1}!
(c) Berechnen Sie mit (b) die Koordinaten von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$!
(d) Welche Matrix B hat $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$?

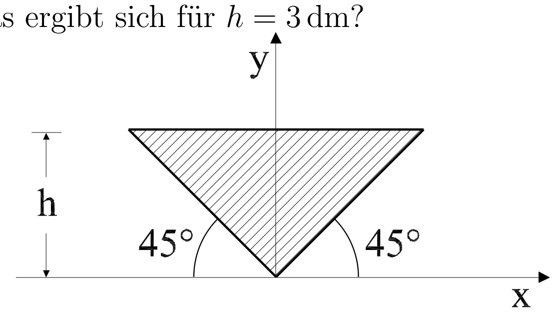
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale! Machen Sie bei den bestimmten Integralen eine Skizze!

(70) (a) $\displaystyle\int \left(\frac{a}{1+x^2} + b\sqrt[3]{x}\ln x + x\,\mathrm{e}^{cx^2} \right) \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos t \,\mathrm{d}t$

(71) (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{1 + 3\tan x}}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin y \,\mathrm{d}y$
Zusatzfrage zu (b): Wie lässt sich das Integral mittels einer Fläche unter dem Sinus darstellen?

(72) (a) $\displaystyle\int_0^{1} (1 - 3x)^5 \,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{2} |x^2 - 1| \,\mathrm{d}x$

(Z10) Aus einem Überlauf von der Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks der Höhe h fließt Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g(h-y)}$ (Ausflussgesetz von Torricelli). Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Sekunde! Was ergibt sich für $h = 3\,\mathrm{dm}$?
Hinweis: $Q = \displaystyle\int_0^{h} 2y\sqrt{2g(h-y)} \,\mathrm{d}y$



1. Klausur zu 'Mathematik 1' , WS 2006/2007

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Für welche reelle x ist $\sqrt{x+3} \geq |x-1| - 2$?

(2) Leiten Sie aus dem Summensatz für den Cosinus die Formel $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ her!

Hinweise: Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$; beachten Sie, dass $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta))$ und dass Cosinus gerade und Sinus ungerade ist.

(3) Bestimmen Sie (a) $\tan(\frac{\pi}{4})$ und $\arctan\big(\tan(\frac{5\pi}{4})\big)$; (b) $\arctan(\tan x)$, $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Hinweis zu (b): Der Tangens hat die Periode π, d.h. $\tan(x + k\pi) = \tan x$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichunssystems:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\
-x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\
-2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1
\end{aligned}$$

Welche Dimension hat die Lösungsmenge?

(5) Überprüfen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind.

(6) Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{f_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{f_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ des } \mathbb{R}^4.$$

2. Klausur zu 'Mathematik 1' , WS 2006/2007

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Es sei $a_n = \dfrac{3n-4}{4n-3}$, $n \in \mathbb{N}$. (a) Zeigen Sie mit der Definition des Grenzwertes, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{4}$, d.h. zeigen Sie $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left| a_n - \dfrac{3}{4} \right| < \epsilon$.
(b) Wie groß muss N mindestens gewählt werden, wenn $\epsilon = 0.1$? (Sie könnten das Ergebnis mittels a_N und a_{N-1} kontrollieren!)

(2) (a) Berechnen Sie mit der Definition von $f'(x_0)$ (und ohne Quotientenregel) die Ableitung von $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. (b) Bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

(3) Differenzieren Sie die folgenden zwei Funktionen! Sie brauchen das Ergebnis nicht weiter zu vereinfachen. Wenn Sie nicht *sehr* sicher rechnen, sollten Sie aber Ihre Rechnung genauestens kontrollieren. (a und b sind Konstante.)

$$f(x) = \mathrm{e}^{a^2 + \arccos\sqrt{x}} \cdot \arctan(bx^{-3})\,; \qquad z(t) = \frac{a\sin^2 t + b^2\cos t}{\ln(\mathrm{e}^{\ln(\sqrt[3]{t})})}$$

(4) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1}. Kontrollieren Sie $A \cdot A^{-1} = I$! Was ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = (4,1,7)^T$?

(5) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus $\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (Hoffentlich sind Sie nicht abergläubisch ...)

(6) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ sei die Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \longmapsto B\vec{x}$ sei die Spiegelung an der Geraden $x_1 + x_2 = 0$. Bestimmen Sie die zu f und g gehörigen Matrizen A, B sowie die zu $f \circ g$ gehörige Matrix C!

3. Klausur zu 'Mathematik 1' , WS 2006/2007

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift! Beachten Sie, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen!

(1) Machen Sie für die Funktion $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \mathrm{e}^{x/2} \cdot |2x - 1|$ eine Kurvendiskussion, d.h. bestimmen Sie die "Kandidaten" für Extrema und unterteilen Sie sie in globale bzw. lokale Maxima oder Minima. Machen Sie eine Skizze! ($\mathrm{e}^{-1} \approx 0.37$, $\mathrm{e}^{-3/4} \approx 0.47$, $\mathrm{e} \approx 2.7$)

(2) (a) Berechnen Sie zum Punkt $P = (1/0)$ auf dem Graphen von $y = \ln x$ die Normale n_{x_0}, die Krümmung $\kappa = \frac{|y_0''|}{(1+y_0'^2)^{3/2}}$ und den Krümmungsradius ϱ!

(b) Nehmen Sie einen Richtungsvektor von n_{x_0}, bringen Sie ihn auf die richtige Länge, und bestimmen Sie damit den Krümmungsmittelpunkt $M = P + \overrightarrow{PM}$. Skizze!

(3) Bestimmen Sie (a) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \sin(\pi \ln x) \, \frac{\mathrm{d}x}{x}$ und (b) $\int\limits_0^{1/2} \arccos t \, \mathrm{d}t$.

(4) Berechnen Sie $\|\vec{v}\|$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\vec{v} \times \vec{w}$ und $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$ für die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(5) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Der Faktor $(2 - \lambda)$ lässt sich beim charakteristischen Polynom herausheben.

(6) A sei wie in Aufgabe 5 und $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \ \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ die lineare Abbildung mit Matrix A bezüglich der Standardbasis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Bestimmen Sie die Matrix B der Abbildung f bezüglich der Basis

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die beiden Basen sind ONBasen. Daher ist die Transformationsmatrix T orthogonal und somit T^{-1} leicht zu berechnen, da $T^{-1} = T^{\mathrm{T}}$.