(1) Geben Sie für die Gerade g im $\mathbb{R}^2$ durch $A = (3/1)$, $B = (2/4)$

(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ an!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(2) Geben Sie für die Ebene ϵ im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/2/3)$, $B = (1/0/-1)$, und $C = (-2/1/-1)$

(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$ an!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(3) Bestimmen Sie die Gerade h im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/-1/2)$, $B = (3/1/-2)$

(a) durch eine Parameterdarstellung,

(b) als Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. durch 2 Gleichungen!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(4) Ermitteln Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$ und $|z|$:

$$z = 3 + 2i, \quad z = -i, \quad z = \frac{1}{i}, \quad z = \frac{1+i}{2-i}$$

Welche reellen Zahlen genügen folgenden Ungleichungen?

(5) $|2 - x| + |4 - x| - 1 \leq 0$

(6) $\dfrac{(x-2)\,(|x|-1)}{x+3} > 0$

(7) $|1 - x^2| \leq 2x + 2$

(8) (a) $4x^2 - 13x + 4 < 1$

(b) $\dfrac{1}{1-x} > 1 + x$

(Z1) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene ϵ aus Übung 2 mit der Geraden h aus Übung 3 !

(Z2) Beweisen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

2. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 2000 – 10 – 18

(9) a) Es sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$.
Skizzieren Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

b) Es sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 5\}$, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y - x \leq 4\}$.
$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.
Skizzieren Sie $K \cap L \cap M \cap N$, $\quad (K \cup L) \cap (M \cup N)$:

(10) a) Sei $A = [2, 3] \cup (4, 7]$, $\quad B = (-3, -2] \cup (1, 4)$:
Stellen Sie $A \times B$ graphisch dar.

b) Es bezeichnen x, y Variable für reelle Zahlen.
Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf Richtigkeit:

$$\forall x : \frac{x}{1} = x; \qquad \forall x : x \geq 0; \qquad \exists x : x \geq 0;$$
$$\forall x \exists y : x < y; \quad \exists x \forall y : x < y; \quad \exists y \forall x : xy = x.$$

(11) a) Finden Sie (mit Begründung) eine allgemeine Formel für die Umrechnung von $\log x$ in $\ln x$!

b) Bekannt seien die Nährwerte $\log 2 = 0.3010$, $\quad \log 3 = 0.4771$, $\quad \ln 10 = 2.3026$.
Berechnen Sie mit dieser Information: $\log 6$, $\ln 6$, $\log \frac{1}{12}$, $\log \sqrt[3]{3}$, $\log e$, $\log 5$.

(12) Berechnen Sie die Quadratwurzel(n) der folgenden komplexen Zahlen
$z = 7 - 24i$, $\quad z = -4i$, $\quad z = 9$.

(13) Ein Kredit der Höhe S sei mit jährlichen Zinsen von $Z\%$ und einer jährlichen Rückzahlungsrate R versehen. Ermitteln Sie eine Formel für den Schuldenstand S_j am Ende des j-ten Jahres sowie den Zeitpunkt n der Schuldentilgung $(S_n \leq 0)$.

Hinweis: $S_0 = S$, $S_{j+1} = q\, S_j - R$, $q = 1 + \frac{Z}{100}$ (warum?).

Lösen Sie die folgenden 4 linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Algorithmus:

(14)
$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &=& 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\qquad\qquad - 8x_5 &=& 3 \\ -2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &=& 0 \end{array}$$

(15)
$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &=& 5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 &=& 9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &=& -5 \\ -3x_1 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 &=& -9 \end{array}$$

(16)
$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &=& 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 0 \end{array}$$

(Z3)
$$\begin{array}{rcl} x + y + a\,z &=& 0 \\ a\,x - 2y + 4z &=& 0 \\ 2x - 3y + 2z &=& 0 \end{array}$$

für festes $a \in \mathbb{R}$ (Eine Fallunterscheidung ist nötig.)

3. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 2000 – 10 – 25

(17) Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.
Zeichnen Sie den Graphen von f für $D = [0,5]$, $D = [-2,0]$, $D = (1,5)$ und berechnen Sie für $D = \mathbb{R}$ $f([0,5])$, $f((-\infty,3])$, $f^{-1}([-3,-2] \cup [3,5])$ sowie die Bildmenge $f(\mathbb{R})$.

(18) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : &\quad n \mapsto n^2 + n - 1 \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : &\quad x \mapsto |x+1| - 3 \\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : &\quad x \mapsto x^3 \end{aligned}$$

(19) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$y = x^2, \quad y = ax^2, \quad y = a(x-b)^2, \quad y = a(x-b)^2 + c\,.$$

Unterscheiden Sie Fälle in Abhängigkeit der Vorzeichen von a, b, c .

20) Wie ändert sich der Graph einer beliebigen Funktion $y = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unter den entsprechenden Transformationen

$$y = af(x), \quad y = af(x-b), \quad y = af(x-b) + c$$

sowie unter der Transformation $y = f(ax)$?

(21) Untersuchen Sie, ob die Abbildung

$$f : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto x + \frac{\alpha^2}{x}\,,\ \alpha > 0$$

injektiv bzw. surjektiv ist. Falls dies nicht gilt, so schränken Sie Definitions- und Zielbereich so ein, dass die Abbildung bijektiv wird.

(22) Wir betrachten nochmals das inhomogene Gleichungssystem aus Übung 15. Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{hom}}$ und überprüfen Sie, dass $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$, d.h. $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$ (s. S. 13 im Skriptum). Überprüfen Sie auch die Gleichung $k = n -$ Anzahl der Pivotzeilen (S. 12). Warum ist L_{hom} ein Vektorraum, L_{inh} aber nicht? Geben Sie eine Basis und die Dimension von L_{hom} an!

(23) Welche Polynome vom Grad ≤ 3 gehen durch $(-1/0)$ und $(1/0)$? Warum ist das ein Unterraum U von P_3? Geben Sie eine Basis von U an! Was ist $\dim U$?

(24) Zeigen Sie, dass $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist! Zeigen Sie dazu, dass sich jedes $\vec{b}$ eindeutig als LK $\vec{b} = \lambda_1 \vec{f_1} + \lambda_2 \vec{f_2} + \lambda_3 \vec{f_3}$ schreiben lässt, indem Sie das Gleichungssystem $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b_1$, $2\lambda_1 + 2\lambda_3 = b_2$, $3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = b_3$ lösen. Was sind die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis?

(Z4) Bestimmen Sie die Parabel $y = a + bx + cx^2$ durch $(-1/9)$, $(1/3)$, $(2/6)$. Versuchen Sie, sich diese Parabel als Schnittpunkt von 3 Ebenen in P_2 vorzustellen!

4. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 2000 – 11 – 08

(25) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$? (Gauß) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig? Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Satz 4, 3b)

(26) Es seien $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3 = \vec{0}$? (Gauß; setze $\lambda_3 = \mu$) Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ linear unabhängig? Was bedeutet das geometrisch? Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(27) (a) Sind $\vec{v}_1 = 1 + x$, $\vec{v}_2 = x + x^2$, $\vec{v}_3 = 1 + 2x + x^2 \in P_2$ linear unabhängig?

(b) Sind $\vec{w}_1 = 1 - x + x^2$, $\vec{w}_2 = 3 + x - x^2$, $\vec{w}_3 = 1 - 4x + 2x^2 \in P_2$ linear unabhängig? Sind $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ eine Basis von P_2?

(28) (a) Drehen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ um $73°$ im Gegenuhrzeigersinn!

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der Geraden $y = -x$. Warum ist diese Abbildung linear? Was ist die Matrix von f?

(29) Zeigen Sie für die hyperbolischen Funktionen die Beziehungen

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

(30) Zeigen Sie, daß die beiden Funktionen

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty) \qquad \text{und} \qquad \tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

bijektiv sind. Berechnen Sie die entsprechenden Umkehrfunktionen arcosh und artanh.

(31) Beweisen beziehungsweise widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Das Produkt von zwei *geraden* Funktionen ist eine *gerade* Funktion.

b) Das Produkt von zwei *ungeraden* Funktionen ist eine *ungerade* Funktion.

c) Das Produkt von einer *geraden* mit einer *ungeraden* Funktion ist eine *ungerade* Funktion.

d) Das Produkt von zwei *monoton wachsenden* Funktionen ist eine *monoton wachsende* Funktion.

e) Das Produkt einer *monoton wachsenden* Funktion mit einer *streng monoton wachsenden* Funktion ist eine *streng monoton wachsende* Funktion.

f) Welche der obigen Aussagen gelten, wenn Sie *Produkt* durch *Summe* ersetzen?

(Z5) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. (a) Für welche $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^4$ gilt $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 = \vec{0}$? (Gauß) (b) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ linear unabhängig? (a oder Satz 4, 1b) (c) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig? (a mit $\lambda_4 = 0$) (d) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Satz 4, 3b) (e) Was sind die Koordinaten von $\vec{v}_4$ bezüglich $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$? (verwende a).

5. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 2000 – 11 – 15

(32) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & -3 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & x \\ -1 & c & 3 & f \\ -1 & -2 & b & 1 \end{pmatrix}$$

(mit $a, b, c, f, x \in \mathbb{R}$). Welche der Produkte AB, BA, AD, DA, CD, DC sind sinnvoll? Berechnen Sie diese!

(33) Es seien f bzw. g bzw. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehungen um die Winkel α bzw. β bzw. $\alpha + \beta$ im Gegenuhrzeigersinn.

a) Welche Matrizen A, B, C entsprechen f, g, h?

b) Überlegen Sie, dass $h = f \circ g$ und daher $C = A \cdot B$ (§4, Satz 2).

c) Folgern Sie aus (a,b) die Summensätze für Sinus und Cosinus.

(34) a) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$, $A + BC = D$, $B \cdot (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{z} = \vec{u}$, $ABC = D$ in Tensorschreibweise!

b) Alle Indizes seien 1 oder 2. Schreiben Sie $c_{kr} - a_{ki}b_{ir} = d_{kj}e_{jr}$ als Matrixgleichung sowie als 4 Gleichungen (für $k, r = 1, 2$) an!

(35) Berechnen Sie $\arg_H$ der folgenden komplexen Zahlen

$$3 + 4i, \qquad -3 + \sqrt{3}i, \qquad -3i, \qquad -1 - i, \qquad (1 + i)^{-1},$$

und schreiben Sie die Zahlen in Polardarstellung.

(36) Verifizieren Sie nachstehende Identitäten durch Überlegungen am Einheitskreis

$$\begin{aligned} \sin(\pi/6) &= \cos(\pi/3) = 1/2, \\ \sin(\pi/4) &= \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \\ \sin(\pi/3) &= \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

(37) a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 + 1 = 0$.

b) Berechnen Sie $\sqrt[4]{7 - 24i}$.

(38) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = te^{it},\ 0 \leq t \leq 4\pi\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(1/z) = 1\}$.

(39) Beweisen Sie für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ die Beziehung: $\cos 4\varphi = 8\cos^4 \varphi - 8\cos^2 \varphi + 1$.

(Z6) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $AB, BA; (AB)C, A(BC); (A + B)C, AC + BC$! Wie nennt man das Gesetz, das bei Matrizen nicht erfüllt ist, und die 2 Gesetze, die bei Matrizen erfüllt sind?

6. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 — 2000 – 11 – 29

(40) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1} wie in §4, Bsp. 10, S. 40 des Skriptums! Kontrollieren Sie $A \cdot A^{-1} = I$! Was ist die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = (1,3,5)^T$?

(41) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$ sowie $\operatorname{rg} A^T$! ($\operatorname{rg} A$ bzw. $\operatorname{rg} A^T$ ergeben sich als Anzahl der Pivotzeilen beim Gauß'schen Algorithmus angewendet auf $A\vec{x} = \vec{0}$ bzw. $A^T\vec{x} = \vec{0}$.) Ist A invertierbar?

(42) a) Bestimmen Sie die Fläche F des Vierecks im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $A = (2/1)$, $B = (1/3)$, $C = (3/2)$, $D = (4/4)$. Zeichnen Sie das Viereck, und überlegen Sie, dass hier gilt $F = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| + \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$. Erklären Sie die Vorzeichen der 2 Determinanten!

b) Berechnen Sie $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ mit der Regel von Sarrus! Machen Sie eine Skizze, die zeigt, warum diese Determinante negativ ist!

(43) Untersuchen Sie, ob folgende Folgen konvergieren oder divergieren. Geben Sie (falls existent) Grenzwert, obere und untere Schranken an.

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, \quad b_n = \frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{5n-3}{n^2+7}, \quad c_n = 1 + (-1)^n, \quad d_n = -n + \frac{1}{n}.$$

(44) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \quad \text{für alle} \quad x \in (-1,1).$$

(45) Besitzen die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen einen Grenzwert? Wenn ja, welchen?

a) $y = x^3 + 5x + 10, \quad x = 1$,

b) $y = \frac{x^2-1}{x^2+x}, \quad x = 0,\ x = 1,\ x = -1$.

(46) Berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n,$$

und skizzieren Sie die Graphen der so definierten Funktionen der Variablen $x \in \mathbb{R}$. Sind diese stetig?

(47) Sind die folgenden Funktionen bei $x = 0$ stetig? Wenn ja, geben Sie die Grenzwerte an.

a) $y = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (Hinweis: mit $1 + \cos x$ erweitern)

b) $y = |x| \cdot \operatorname{sign} x$.

(Z7) Es sei A wie in Übung 41, $\vec{b} = (1,-1,2)^T$ und $\tilde{A} = (A, \vec{b})$ die erweiterte Matrix. Berechnen Sie $\operatorname{rg} \tilde{A}$! Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

7. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 2000-12-06

(48) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, indem Sie $A \cdot A^{-1} = I$ überprüfen!

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie mit a) A^{-1} und die Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$.

(49) Bestimmen Sie $\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0 & -7 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -5 \end{vmatrix}$ so wie in §5, Bsp. 3 des Skriptums.

(50) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(51) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, also z.B. $[3.8] = 3$ und $[-7.5] = -8$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $x \mapsto [x]$. Ist diese Funktion stetig?

b) Zeichnen Sie den Graphen von $g(x) = \left|[x + \frac{1}{2}] - x\right|$. Ist g stetig?

(52) Man zeige: Die Funktion $f(x) = x^4 - x - 10$ besitzt eine positive Nullstelle. Mit dem Bisektionsverfahren berechne man sie auf 10^{-2} genau.

(53) Man berechne die erste und zweite Ableitung von

$$f(x) = \cos(3x), \qquad g(x) = \cos(x^3), \qquad h(x) = \cos^3 x.$$

(54) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen

$$a(x) = \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 7}, \qquad b(x) = \cos(1 + x\ln x), \qquad c(x) = (3x^2 - 2x + 6)^5,$$
$$d(x) = \ln(\sin x), \qquad f(x) = 2^{3x}, \qquad g(x) = x^x.$$

(55) Sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Falls ja, berechnen Sie die Ableitung

$$f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \qquad g(x) = x\,|x|\,.$$

Skizzieren Sie die Graphen.

(Z8) Was ergibt sich, wenn in der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$ zuerst I'=I, II'=II, III'=III- a_1 II und dann I"=I', II"=II'- a_1 I', III"=III' gemacht wird? Warum ändert sich die Determinante nicht? Warum erhält man $\det A = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$? Wie lässt sich das auf $A = (a_j^{i-1})_{i,j=1,\ldots,n}$ verallgemeinern?

8. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 2000 – 12 – 13

(56) Es seien $a, b > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei Streckung bzw. Stauchung (für $a, b > 1$ bzw. < 1) mit dem Faktor a in x_1–Richtung, mit dem Faktor b in x_2–Richtung.

a) Was ist $\vec{y} = f(\vec{x})$? Was ist die Matrix A von f?

b) Was ist der Flächenveränderungsfaktor von f?

c) Was ist das Bild des Vollkreises $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ unter f? (Skizze für $a = 2, b = 3$)

d) Welche Formel gilt daher für die Fläche der Ellipse $\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} \leq 1$?

e) Was ist das Volumen des Ellipsoides $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$? (Hier stehen x, y, z anstelle von y_1, y_2, y_3 entsprechend d; Einheitskugelvolumen $= 4\pi/3$.)

(57) Es sei A wie in Übung 40. Bestimmen Sie A^{-1} mit Streichungsdeterminanten.

(58) Wir betrachten das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ aus Übung 16.

a) Berechnen Sie $\det A$ durch Entwicklung nach der 2. Spalte!

b) Berechnen Sie x_2 mit der Cramer'schen Regel!

(59) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von $\sinh x$ und $\operatorname{arsinh} x$.

(60) a) Berechnen Sie eine Näherung an $\sqrt{60}$, indem Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 64$ durch ihre lineare Approximation ersetzen.

b) Berechnen Sie die Tangente an die Funktion $f(x) = x^4 - x - 10$ bei $x = 2$ und bestimmen Sie deren Schnittpunkt mit der x-Achse. Machen Sie eine Skizze.

(61) a) Zeigen Sie: Die Funktionen $f(x) = 2 \arcsin \sqrt{x}$ und $g(x) = \arcsin(2x - 1)$ unterscheiden sich nur um eine Konstante. Berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie, daß für alle positiven Zahlen x gilt: $\sqrt{1 + x} < 1 + x/2$.
(Hinweis: Untersuchen Sie die Monotonie von $f(x) = 1 + x/2 - \sqrt{1 + x}$.)

(62) a) Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang die größte Fläche?

b) Das Flächenmoment bezüglich der horizontalen Mittelachse eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt ist $J = bh^3/12$ (b Breite, h Höhe). Ermitteln Sie die Proportionen eines Balkens maximalen Flächenmoments, der aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt geschnitten wird.

(63) Differenzieren Sie die Identität $(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1-x) = 1-x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, und gewinnen Sie daraus eine Formel für den Ausdruck $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$.

(Z9) Die Ausbiegung eines axial mit Kraft F zentrisch gedrückten Stabes, der bei $x = 0$ mit dem Einspannmoment λ_1 eingespannt ist und bei $x = l$ frei drehbar gelagert ist, erfüllt die Differentialgleichung $w'' + \alpha^2 w = \dfrac{\lambda_1}{EJ}\big(1 - \dfrac{x}{l}\big)$, wobei $\alpha = \sqrt{\dfrac{F}{EJ}}$.
Dann gilt

$$w(x) = \frac{\lambda_1}{F}\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \lambda_2 \cos \alpha x + \lambda_3 \sin \alpha x \quad \text{und} \quad w(0) = w'(0) = w(l) = 0.$$

Schreiben Sie die letzten 3 Gleichungen als lineares Gleichungssystem in $\vec{\lambda}$ an und ermitteln Sie das kleinste positive F (= Knicklast), für das eine Lösung $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$ existiert, durch Berechnung einer Determinante!

9. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 2001 – 01 – 10

(64) ϵ, A, B, C seien wie in Übung 2. Bestimmen Sie die Längen und Winkel im Dreieck ABC sowie mittels des Kreuzprodukts eine Gleichung für ϵ.

(65) Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. a) Was ist der Abstand des Punktes $Q = (1/2/3)$ von der Ebene $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 9$? b) Was ist die Matrix der Spiegelung s_H an der Ebene $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

(66) Zeigen Sie durch Ausrechnen, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. (Merkregel: "baz minus zab") Was ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$? Ist $\times$ assoziativ?

(67) Auf zwei windschiefen (d.h. nicht parallelen und nicht schneidenden) Geraden g_i : $\vec{x} = \vec{p}_i + \lambda \vec{r}_i$, $i = 1, 2$, im $\mathbb{R}^3$ seien F_i die Fußpunkte, d.h. so, dass $\|\overrightarrow{F_1 F_2}\|$ der Minimalabstand D zwischen g_1 und g_2 ist. Skizze! Überlegen Sie: a) $\overrightarrow{F_1 F_2} \perp \vec{r}_1, \vec{r}_2$; b) $\overrightarrow{F_1 F_2} \parallel \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$; c) $\overrightarrow{F_1 F_2} = \vec{p}_2 + \lambda_2 \vec{r}_2 - \vec{p}_1 - \lambda_1 \vec{r}_1$; d) $D = \|\overrightarrow{F_1 F_2}\| = \dfrac{|\langle \overrightarrow{F_1 F_2}, \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \rangle|}{\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\|} = \dfrac{|\langle \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \rangle|}{\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\|}$. e) Berechnen Sie den Abstand D zwischen

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}!$$

(68) Diskutieren Sie die Funktion (Nullstellen, Extrema, Monotonie, Konvexität,...)

$$f(x) = \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x},$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

(69) Diskutieren Sie die Funktion (Nullstellen, Extrema, Monotonie, Konvexität,...)

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1},$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

(70) Berechnen Sie mit dem Newtonverfahren die Zahl π auf 6 Stellen genau als Nullstelle der Gleichung $\tan \dfrac{x}{4} = 1$. Wählen Sie als Startwert $x_0 = 3$.

(71) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Formeln von l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 2x}, \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \cdot \sinh x} - \frac{1}{x^2} \right), \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

(Z10) Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ und H die Ebene $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$. Weiters seien $\vec{b}_H = \mathrm{pr}_H(\vec{b})$ bzw. $\vec{c}_H = \mathrm{pr}_H(\vec{c})$ die senkrechten Projektionen von $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ in die Ebene H und $\vec{b} = \vec{b}_H + \lambda \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{c}_H + \mu \vec{a}$. Skizze! Überlegen Sie: a) $\lambda \vec{a} = k \vec{a}_0 = k \vec{a} / \|\vec{a}\|$, $\lambda = k / \|\vec{a}\|$, $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = k \|\vec{a}\|$ und somit $\lambda = \dfrac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ und ebenso $\mu = \dfrac{\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$; b) $\vec{b}_H \times \vec{c}_H \parallel \vec{a}$; c) $\vec{a} \times (\vec{b}_H \times \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2 \vec{b}_H$, $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}_H) = -\|\vec{a}\|^2 \vec{c}_H$; d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{b}_H \times \mu \vec{a} + \lambda \vec{a} \times \vec{c}_H) = \mu \|\vec{a}\|^2 \vec{b}_H - \lambda \|\vec{a}\|^2 \vec{c}_H = \mu \|\vec{a}\|^2 (\vec{b} - \lambda \vec{a}) - \lambda \|\vec{a}\|^2 (\vec{c} - \mu \vec{a}) = \vec{b} \mu \|\vec{a}\|^2 - \vec{c} \lambda \|\vec{a}\|^2 = \vec{b} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

10. Übungsblatt zu Mathematik A, WS 2000/2001 — 2001 – 01 – 17

(72) Berechnen (und vergleichen) Sie die Winkel a) zwischen den Vektoren $\vec{v} = (1,1,1,1,1)^T$ und $\vec{w} = (0, 0.5, 1, 1.5, 2)^T$ im $\mathbb{R}^5$; b) zwischen den Funktionen $f, g \in \mathcal{C}([0,2])$, die durch $f(x) = 1$ und $g(x) = x$ gegeben sind.

Hinweis: In b) ist $\cos\alpha = \dfrac{\langle f, g\rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}$ und α hat nichts mit dem Winkel $45°$ zu tun, unter dem sich die Graphen von f, g schneiden.

(73) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$!

(74) Für einen dreiachsigen Spannungszustand gelte $\sigma_x = 2.3$, $\sigma_y = -1.4$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 1.5$, $\tau_{xz} = 0.7$, $\tau_{yz} = 0$ (in $[\mathrm{N/m^2}]$). Ermitteln Sie näherungsweise (mit dem Newton-Verfahren) die Größe der maximalen Normalspannung, d.h. den größten Eigenwert der Spannungsmatrix!

(75) Zur Bestimmung des Volumens V einer Kugel misst man den Kugeldurchmesser x und bestimmt daraus V durch die bekannte Formel. Bis zu welchem Durchmesser kann dieses Verfahren verwendet werden, wenn man x auf $\mathrm{d}x = 0,01$ cm genau messen kann und V auf $\mathrm{d}V = 0,5\ \mathrm{cm}^3$ genau sein soll?

(76) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$ als Grenzwert einer Riemannsumme.
Hinweis: Bestimmen Sie eine Riemannsumme mit der linken Rechtecksregel und der Zerlegung $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\}$ von $[0,1]$; verwenden Sie weiters $\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^2(n-1)^2/4$.

(77) Berechnen Sie mit der Trapezregel eine Näherung an die folgenden Integrale:

a) $\int_0^2 (3x-2)\mathrm{d}x$ mit der Zerlegung $\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$;

b) $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ mit der Zerlegung $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

(78) (a) Beweisen Sie die Quotientenregel $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2}$ für Differentiale.

(b) Die maximale Durchbiegung D eines in der Mitte durch die Kraft p belasteten Trägers der Länge l, Höhe h und Breite b ist gegeben durch $D = \dfrac{p \cdot l^3}{4E \cdot b \cdot h^3}$. Berechnen Sie die Änderungsrate von D bei reiner Änderung von h.

(Z11) Es seien $s_k(x) = \sin(kx) \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\|s_k\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und dass die s_k paarweise aufeinander senkrecht stehen, d.h. $\langle s_k, s_l\rangle = 0$ für $k \neq l$.

1. Klausur zu 'Mathematik A' , WS 2000/2001 2000 – 11 – 22

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrrrl} -5\,x_1 + & 3\,x_2 - & 7\,x_3 + & 2\,x_4 & -x_5 = & 2 \\ x_1 & -x_2 + & 2\,x_3 & & +x_5 = & -3 \\ -3\,x_1 & -x_2 & & +4\,x_4 + & 5\,x_5 = & -17 \\ & -2\,x_2 & +3\,x_3 + & 2\,x_4 + & 4\,x_5 = & -13 \end{array}$$

Schreiben Sie die Lösung in der Form $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \underbrace{\lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k}_{\vec{x}_{\text{hom}}}$ an! Machen Sie eine Probe, indem Sie überprüfen, dass $\vec{p}$ das obige inhomogene Gleichungssystem löst, und $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ das zugehörige homogene Gleichungssystem lösen!

(2) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^4$ gilt $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 = \vec{0}$? Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ linear unabhängig? Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(3) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Drehung um $60°$ im Gegenuhrzeigersinn und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der Geraden $x_2 = x_1$ (vulgo $y = x$). Bestimmen Sie die Matrizen C von $f \circ g$ sowie D von $g \circ f$. Ermitteln Sie $\cos 60°, \sin 60°$ durch Überlegungen am Einheitskreis! ($\sqrt{3} \approx 1.7$)

(4) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x - x^2$$

injektiv bzw. surjektiv ist. Falls dies nicht gilt, schränken Sie Definitions- und Zielbereich so ein, dass die Funktion bijektiv wird.

(5) Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, $|z|$ und $\arg_H z$

$$z = \frac{-2}{1+i}, \qquad z = 3\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}.$$

(6) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen, die der folgenden Ungleichung genügen:

$$\frac{|4 - x^2|}{2x + 1} < 1.$$

2. Klausur zu 'Mathematik A' , WS 2000/2001 2001 – 01 – 31

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1} mit dem Gauß'schen Algorithmus und überprüfen Sie $A \cdot A^{-1} = I$!

(2) Es sei A wie in Aufgabe 1. Bestimmen Sie A^{-1} mit Streichungsdeterminanten!

(3) Es sei A wie in Aufgabe 1. Bestimmen sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A! Welche a.V. bzw. g.V. haben die verschiedenen Eigenwerte?

(4) (a) Berechnen Sie die erste Ableitung von $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, und geben Sie den Wert $g'(1)$ an.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin x}{\cos 2x - 1}$.

(5) Diskutieren Sie die Funktion (Nullstellen, Extrema, Monotonie,...)

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1},$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

(6) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-3)}.$$

Prüfung aus Mathematik A, WS 2000/01

PROBEEXEMPLAR

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 2, 3, 4, 7, 11, 13, 14 möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an! Beantworten Sie bitte die Fragen zu Linearer Algebra (1–7) und die zu Analysis (8–15) auf verschiedenen Blättern.

(In diesem Probeexemplar wurden die Fragen zum Stoff bis Weihnachten gestellt. In den Prüfungen wird natürlich auch der Stoff des Jänners abgefragt.)

(1) (a) Was ist ein $k-$dimensionaler affiner Raum (AR)?

(b) Ein wieviel dim. AR ist durch $\vec{x} = \binom{2}{1} + \lambda_1 \binom{-1}{-2} + \lambda_2 \binom{5}{10}$ gegeben?

(2) (a) Welcher Zusammenhang besteht bei linearen Gleichungssystemen zwischen L_{inh}, L_{hom} und einer partikulären Lösung $\vec{p}$ (falls diese existiert)?

(b) Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{inh}}$, $\vec{x}_{\text{hom}}$ sowie 2 partikuläre Lösungen zum Gleichungssystem $3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12$, $x_1 - x_2 + x_5 = 5$.

(3) (a) Z sei der Zeilenraum und L der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Unbekannten. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen n, $\dim L$, $\dim Z$, und der Anzahl der Pivotzeilen im Gauß'schen Algorithmus?

(b) Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem ergaben sich die Pivotzeilen $\boxed{1\ 2\ 3}$ und $\boxed{0\ 3\ 4}$. Was sind $\dim L$, $\dim Z$? Ist $(3, 0, 2) \in Z$?

(4) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Unter welchen Bedingungen hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y}$ genau eine Lösung $\vec{x}$?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ist $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y}$ eindeutig lösbar? Wenn ja, was ist die Lösung $\vec{x}$?

(5) (a) Was sind die Grundeigenschaften von $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ für $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$?

(b) Was ist $\det(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b})$, wenn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 5$?

(6) (a) Was ist die anschauliche Bedeutung von $\det f$ für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear?

(b) Es sei $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Welche Fläche hat $f(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 7\})$?

(7) (a) Was ist die Matrix der senkrechten Projektion pr_H auf $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

(b) Was ergibt sich für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

(8) (a) Wie erhält man den Graph von $y = 3f(x+2)$ aus dem von $y = f(x)$?

(b) Drücken Sie $\cos 3x$ durch $\cos x$ aus.

(9) (a) Wie lautet die Definition von injektiv?

(b) Beweisen Sie die Injektivität von $g(x) = x^3$.

(10) (a) Geben Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{a+ib}{c+id}$ an.

(b) Berechnen Sie die 4-ten Wurzeln von -4.

(11) (a) Was besagt die Konvergenz durch Einschließung?

(b) Berechnen Sie damit $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\cos 2n}{n}$.

(12) (a) Wie ist $f'(x_0)$ definiert?

(b) Berechnen Sie damit $(\sqrt{x})'(3)$.

(13) (a) Wie lautet die Kettenregel?

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = (\sin x)^x$ bei $x = \frac{\pi}{2}$.

(14) (a) Wie lauten die de l'Hospital'schen Regeln?

(b) Sind die Voraussetzungen im Fall $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \cos x}{x}$ erfüllt? Welchen Wert hat dieser Limes?

(15) (a) Wie bestimmt man Kandidaten für lokale Extrema und Wendepunkte einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

(b) Ist $x = 0$ ein Wendepunkt von $f(x) = x^4$?

LÖSUNGEN

(1) (a) Eine Menge von Vektoren der Form $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k$, die nicht mit weniger als k Richtungsvektoren dargestellt werden kann.

(b) $\vec{x} = \binom{2}{1} + (\lambda_1 - 5\lambda_2)\binom{-1}{-2}$; das ist ein 1−dim. AR, d.h. eine Gerade.

(2) (a) $L_{\text{inh}} = \{\}$ oder $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$

(b)

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 3 \; -3 \;\; 1 \;\; 1 \;\;\; 0 \mid 12 \\ \text{II:} & \boxed{1 \; -1 \;\; 0 \;\; 0 \;\;\; 1 \mid 5} \\ \text{I-3II:} & \boxed{0 \;\;\; 0 \;\;\; 1 \;\; 1 \; -3 \mid -3} \end{array}$$

$k = 5-2 = 3$, $x_3 + x_4 - 3x_5 = -3$, $x_4 = \lambda_1$, $x_5 = \lambda_2$, $x_3 = -3 - \lambda_1 + 3\lambda_2$,

$$x_1 - x_2 + x_5 = 5, \quad x_2 = \lambda_3, \quad x_1 = 5 + \lambda_3 - \lambda_2 \Longrightarrow \vec{x}_{\text{inh}} = \begin{pmatrix} 5+\lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -3-\lambda_1+3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$\vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}} = \vec{p} + \lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \lambda_3\vec{r}_3 \text{ wobei } \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ eine andere partikuläre Lösung ist z.B. } \vec{p} + \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) $\dim Z =$ Anzahl der Pivotzeilen; $\dim L = n - \dim Z = n -$ [Anzahl der Pivotzeilen]

(b) $\dim Z =$ Anzahl der Pivotzeilen $= 2 \Longrightarrow \dim L = 3 - 2 = 1$; $Z = \{\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,3,4) : \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^2\}$; $(3,0,2) \in Z \Longleftrightarrow (3,0,2) = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,3,4) \Longleftrightarrow 3 = \lambda_1$, $0 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$, $2 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2$. Die ersten zwei Gleichungen geben $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$; in der dritten Gleichung eingesetzt folgt ein Widerspruch: $2 = 3 \times 3 + 4 \times (-2)$. Also ist $(3,0,2) \notin Z$.

(4) (a) Hier müsste eine der Bedingungen von §4, Satz 4 angegeben werden, z.B. "A ist invertierbar" oder "A hat Rang n" etc. Auch "$\det A \neq 0$" (§5, Satz 7) wäre richtig.

(b) $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ ja; $\vec{x} = A^{-1}\vec{y} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\vec{y} = \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 \\ \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{pmatrix}$

(5) (a) det ist linear in $\vec{v}_1$, d.h. $\det(\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) + \lambda\det(\vec{v}_1', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$; det ist alternierend, d.h. det(2 Vektoren $\vec{v}_i$ vertauscht) $= -\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$; det ist normiert, d.h. $\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$ für die Standardbasis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

(b) $\det(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b}) = \det(\vec{a},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b}) - \underbrace{\det(\vec{b},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b})}_{0} + 2\det(\vec{c},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b}) =$

$\det(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) - 3\underbrace{\det(\vec{a},\vec{a},\vec{b})}_{0} + 2\underbrace{\det(\vec{c},\vec{c},\vec{b})}_{0} - 6\det(\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + 6\det(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) =$

$-7\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -35$

(6) (a) $\det f = \pm\mathbb{R}^n$ – Volumsveränderungsfaktor, wobei $\pm$ je nachdem f die Orientierung erhält oder umkehrt.

(b) Flächenveränderungsfaktor $= |\det f| = |4-6| = 2 \Longrightarrow f(\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x_1 \le 5,\ \ 2 \le x_2 \le 7\})$ ist ein Parallelogramm mit Fläche $2\cdot(5-1)\cdot(7-2) = 40$ Flächeneinheiten.

(7) (a) pr_H hat die Matrix $A = I - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}\cdot\vec{a}^T$.

(b) $A = I - \frac{1}{1+4+9}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(1,2,3) = I - \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}13&-2&-3\\-2&10&-6\\-3&-6&5\end{pmatrix}$

(8) (a) Durch Verschiebung um 2 Einheiten nach links und Streckung um den Faktor 3 in y – Richtung.

(b) Aufgrund der Summensätze für Sinus $\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y$ und Cosinus $\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$ gilt

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x+x) &= \cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x\\ &= \cos^3 x - \sin^2 x\cdot\cos x - 2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x\\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x\cdot\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. (Man könnte das Beispiel auch mit den Formeln von Moivre lösen; siehe Übungen.)

(9) (a) Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt injektiv $:\Leftrightarrow$

für alle $x_1,\ x_2 \in X$ gilt: $\Big(f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2\Big)$.

(b) Aus $g(a) = g(b)$, d.h. $a^3 = b^3$ folgt: $0 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
1.Fall: $a - b = 0$, d.h. $a = b$;
2.Fall: $0 = a^2+ab+b^2 = (a+b/2)^2 + 3b^2/4$. Das ist nur möglich für $a = b = 0$.
Insgesamt also $a = b$.

(10) (a) $\mathrm{Re}\,z = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $\quad\mathrm{Im}\,z = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

(b) In Polarkoordinaten gilt $-4 = 4\,\mathrm{e}^{\pi i}$.
Somit ist $\sqrt[4]{-4} = \{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi i/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\pi i/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-3\pi i/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi i/4}\} = \{\pm1\pm i\}$, da
$\mathrm{e}^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\mathrm{e}^{3\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$, etc. (Skizze!)

(11) (a) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$;
(ii) Es gibt einen Index N, sodass für alle $n \geq N$: $a_n \leq b_n \leq c_n$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

(b) Wegen $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ gilt: $0 \leq \dfrac{1+\cos 2n}{n} \leq \dfrac{2}{n}$. Man setzt $a_n := 0$ und $c_n := 2/n$. Dann ergibt sich wegen $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ der gesuchte Grenzwert $\beta = 0$.

(12) (a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(b) $(\sqrt{x})'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$
$= (\sqrt{x}$ ist stetig$) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(13) (a) Es sei $h(x) = f(g(x))$. Falls f und g differenzierbar sind, so ist auch h differenzierbar und es gilt $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

(b) Für $0 < x < \pi$ gilt die Identität $(\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}$. Somit erhält man durch zweimaliger Anwendung der Kettenregel (und der Produktregel)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} \cdot \Big(\ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}\Big) = \big(\ln(\sin x) + x\cot x\big) \cdot (\sin x)^x.$$

Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ ergibt sich $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(14) (a) Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte für alle $x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$. Gelte weiters (i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to b^-$ (oder $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to b^-$); (ii) $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. Dann gilt $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b) Man hat $f(x) = x + \cos x$, $g(x) = x$ und wählt $b = \infty$. Beide Funktionen sind differenzierbar, $g'(x) = 1$ und $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Allerdings existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\sin x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} (1-\sin x)$ nicht. Somit ist Voraussetzung (ii) nicht erfüllt und die Regel ist nicht anwendbar. Nach dem Einschließungssatz gilt jedoch $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 1$.

(15) (a) Die Kandidaten für lokale Extrema sind (i) die Randpunkte des Definitionsintervalls, also a und b; (ii) alle Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist; (iii) die stationären Punkte (d.h. die Punkte x mit Ableitung $f'(x) = 0$). Kandidaten für Wendepunkte sind (i) alle Punkte, in den f nicht zweimal differenzierbar ist; (ii) alle Punkte x mit $f''(x) = 0$.

(b) Nein. Der Graph der Funktion ist überall konvex, er liegt stets oberhalb der Tangente (Skizze!).

BEISPIELE VON UNZUREICHENDEN ANTWORTEN

(1) (a) $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{r}_k$ A

(1) (b) 1 B

(3) (b) 1, 2, nein C

(4) (a) Wenn L_{inh} für jedes $\vec{y}$ aus genau einem Element besteht. D

(8) (a) Durch Verschiebung und Streckung. E

(9) (a) Eine Funktion ist injektiv, wenn ihr Graph jede Parallele zur x-Achse höchstens einmal schneidet. F

(10) (b) $\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{-1} = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{i} = 1 + i.$ G

(12) (a) $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente. H

(15) (a) Kandidat für Extremum, falls $f'(x) = 0$;
Kandidat für Wendepunkt, falls $f''(x) = 0$. I

KOMMENTAR: A, B, C, E sind zu wenig ausführlich. D ist zwar wahr, aber in einer sehr trivialen, d.h. offensichtlichen Weise, die man in der Logik “Tautologie” nennt. F ist nur für reelle Funktionen zutreffend. G ist unvollständig, es waren alle 4-ten Wurzeln gefragt. H ist nicht die in der Vorlesung gegebene Definition von $f'(x_0)$, sondern eine Folgerung daraus. Zudem müsste man hier genauer sagen: $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. I ist unvollständig.

BEISPIELE VON ZUSATZPUNKTEN

(2) (a) Beweis von $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$ wenn $\vec{p}$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$ ist (in Matrixnotation):

(α) $\vec{v} \in L_{\text{hom}} \Longrightarrow A\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow A(\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{p} + A\vec{v} = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y} \Longrightarrow \vec{p} + \vec{v} \in L_{\text{inh}}.$

(β) $\vec{x} \in L_{\text{inh}} \Longrightarrow A\vec{x} = \vec{y};\ \ \vec{v} = \vec{x} - \vec{p} \Longrightarrow A\vec{v} = A(\vec{x} - \vec{p}) = A\vec{x} - A\vec{p} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0} \Longrightarrow$ $\vec{v} \in L_{\text{hom}}$ und $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$

(13) (a) Beweis der Kettenregel:
Man verwendet: $$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

(α) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$, da g differenzierbar.

(β) Sei $y = g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$. Dann ist
$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = f'(g(x_0))$, da g stetig und f differenzierbar.

Somit ist h differenzierbar, und es gilt $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ nach den Rechenregeln für Grenzwerte.

1. Prüfung aus Mathematik A, WS 2000/01 2001 – 02 – 02

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 2, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 14, 15 möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an! Beantworten Sie bitte die Fragen zu Linearer Algebra (1–7) und die zu Analysis (8–15) auf verschiedenen Blättern.

(1) (a) Wie ist der Begriff "Koordinaten bzgl. einer Basis" definiert?

(b) Was sind die Koordinaten von $\binom{-5}{7}$ bzgl. der Basis $\vec{f_1} = \binom{1}{1}$, $\vec{f_2} = \binom{2}{-1}$ im $\mathbb{R}^2$?

(2) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und L der Lösungsraum von $A\vec{x} = \vec{0}$. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen n, $\dim L$, $\operatorname{rg} A$, und der Anzahl der Pivotzeilen im Gauß'schen Algorithmus?

(b) Was sind $\operatorname{rg} A$ bzw. $\dim L$, wenn $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$?

(3) (a) Es seien $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, $g(\vec{x}) = B\vec{x}$, $f\big(g(\vec{x})\big) = C\vec{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Wie sind c_{ij} durch A, B bestimmt?

(b) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A^T \cdot B = D$ in Tensorschreibweise an!

(4) (a) Was besagt die Cramer'sche Regel?

(b) Bestimmen Sie damit x_2, wenn $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$, $-2x_1 - x_3 = 2$, $2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 3$.

(5) (a) Wie ist $\vec{v} \times \vec{w}$ durch die Determinante und $\langle\ ,\ \rangle$ definiert?

(b) Welche Fläche hat das von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm?

(6) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $P(-\lambda) = \det(A + \lambda I) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$. Wie erhält man c_0, c_1, c_2 aus A?

(b) Bestimmen Sie so das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ von $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$!

(7) (a) Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix A?

(b) Überprüfen Sie die Aussagen in (a) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$!

(8) (a) Wie lautet die Definition von $|x|$?

(b) Welche $x \in \mathbb{R}$ genügen der Ungleichung $|x - 1| < x + 3$?

(9) (a) Wie lautet die geometrische Summenformel?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$.

(10) (a) Skizzieren Sie die Funktionen $y = \arcsin x$ und $y = \ln x$.

(b) Schreiben Sie die Zahlen $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}$ und $3\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}$ in der Form $a + \mathrm{i}\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(11) (a) Was besagt der Zwischenwertsatz?

(b) Ist er auf $\operatorname{sign} 2x$ am Intervall $[-1, 1]$ anwendbar? Warum bzw. warum nicht?

(12) (a) Wie lautet die Produktregel?

(b) Berechnen Sie damit die zweite Ableitung von $\sin x \cdot \cos x$.

(13) (a) Was bedeutet *quadratische Konvergenz* beim Newtonverfahren?

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newtonverfahrens zur Lösung von $x^2 = 3$ durch. Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 1$.

(14) (a) Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{6 - 2x}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

(15) (a) Wie lautet der Satz von Taylor?

(b) Berechnen Sie die ersten 3 Terme des Taylorpolynoms von $g(x) = \sqrt{2x + 1}$ mit Entwicklungspunkt 0 .

Statistik.	Note:	1	2	3	4	5	$\sum$
	#:	2	6	6	3	14	31

2. Prüfung aus Mathematik A, WS 2000/01 2001 – 03 – 30

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 1–7, 9, 11–15 möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) V sei ein VR, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sei eine Basis von V und $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m \in V$. Was sagt der Basissatz jeweils über m, wenn $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$ l.u. bzw. ein Erz.system bzw. eine Basis sind?

(b) Es seien $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ l.u.? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ ein Erz.system von $\mathbb{R}^3$? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(2) (a) Bei der Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, mit Gauß ergaben sich j Pivotzeilen und die Lösungsmenge $L = \{\lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{r}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$. Wie hängen j und k zusammen?

(b) Was sind j, k, L für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$?

(3) (a) Wann heißt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar? Wie lässt sich das mit der Determinante feststellen?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar?

(4) (a) Was gilt für $\det A$ (α) bei Zeilenvertauschungen, (β) bei Gauß-Schritten?

(b) Es sei A wie in (3b). Bestimmen Sie $\det A$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

(5) (a) Was ist die Hessesche Normalform von $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b$?

(b) Was ist der Abstand von $Q = (1/1/1/1)$ von der Hyperebene $-3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 6$?

(6) (a) Die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ habe bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ Matrix A, bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ Matrix B, und T sei die Transformationsmatrix von der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zur Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Wie hängen A und B zusammen?

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$, $\vec{f}_1 = \binom{1}{2}$, $\vec{f}_2 = \binom{3}{4}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Was sind T und B?

(7) (a) Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix A?

(b) Überprüfen Sie die Aussagen in (a) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$!

(8) (a) Es sei $f : D \to Y$ und $B \subseteq Y$. Definieren Sie das Urbild von B.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5$. Geben Sie $f^{-1}(\{-4\})$ und $f^{-1}([-1, 4))$ an.

(9) (a) Wie lautet die Umrechnungsformel von kartesischen in Polarkoordinaten?

(b) Rechnen Sie die Punkte $(3, 4)$, $(-2, -2)$ und $(-4, 3)$ in Polarkoordinaten um.

(10) (a) Wie ist der Grenzwert von Funktionen definiert?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - x - 2x^2}{3x^2 - 4}$.

(11) (a) Wie lautet das Bisektionsverfahren? Unter welchen Voraussetzungen liefert es eine Nullstelle?

(b) Machen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens für die Funktion $f(x) = x^4 - x - 3$ auf dem Intervall $[0, 2]$.

(12) (a) Wie lautet die Quotientenregel?

(b) Berechnen Sie damit die Ableitung von $\dfrac{x}{\log x}$.

(13) (a) Wie lautet die Formel für partielle Integration?

(b) Berechnen Sie $\int_0^b x\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$. Was ergibt sich für $b \to \infty$?

(14) (a) Wie lautet die Formel für das Volumen eines Drehkörpers?

(b) Berechnen Sie das durch Rotation des Parabelstücks $y = (2 - x)^2$, $0 \le x \le 1$ um die x-Achse entstehende Volumen.

(15) (a) Wie lautet der Satz von Taylor?

(b) Geben Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion mit Entwicklungspunkt 0 an.

Statistik. Note:	1	2	3	4	5	$\sum$
#:	3	8	7	10	17	45