9. Übungsblatt zu Höherer Analysis I, SoSe 1998

(39) Vergleichen Sie den Winkel α

(a) zwischen den Vektoren $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^5$;

(b) zwischen den Funktionen $f, g \in F_1$, die für $0 < x \leq 1 = p$ durch $f(x) = 1$ bzw. $g(x) = x$ gegeben sind.

Hinweis: In beiden Fällen ist $\cos\alpha = \dfrac{\langle f, g\rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}$. (Dieser Winkel hat nichts mit dem Winkel 45° zu tun, unter dem sich die Graphen der beiden Funktionen in (b) schneiden!)

(40) (a) Berechnen Sie die Norm der periodischen Funktion $f \in F_{2\pi}$, die für $0 < x \leq 2\pi$ durch $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie ebenfalls in $F_{2\pi}$ die Norm des trigonometrischen Polynoms (der Ordnung 3) $g(x) = 5 + 4\cos x + 3\sin x + 2\cos 2x + \sin 3x$ (vgl. die Rückseite).

(41) Zeigen Sie, dass

(a) $\langle c_k, s_l\rangle = 0$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $l \in \mathbb{N}$;

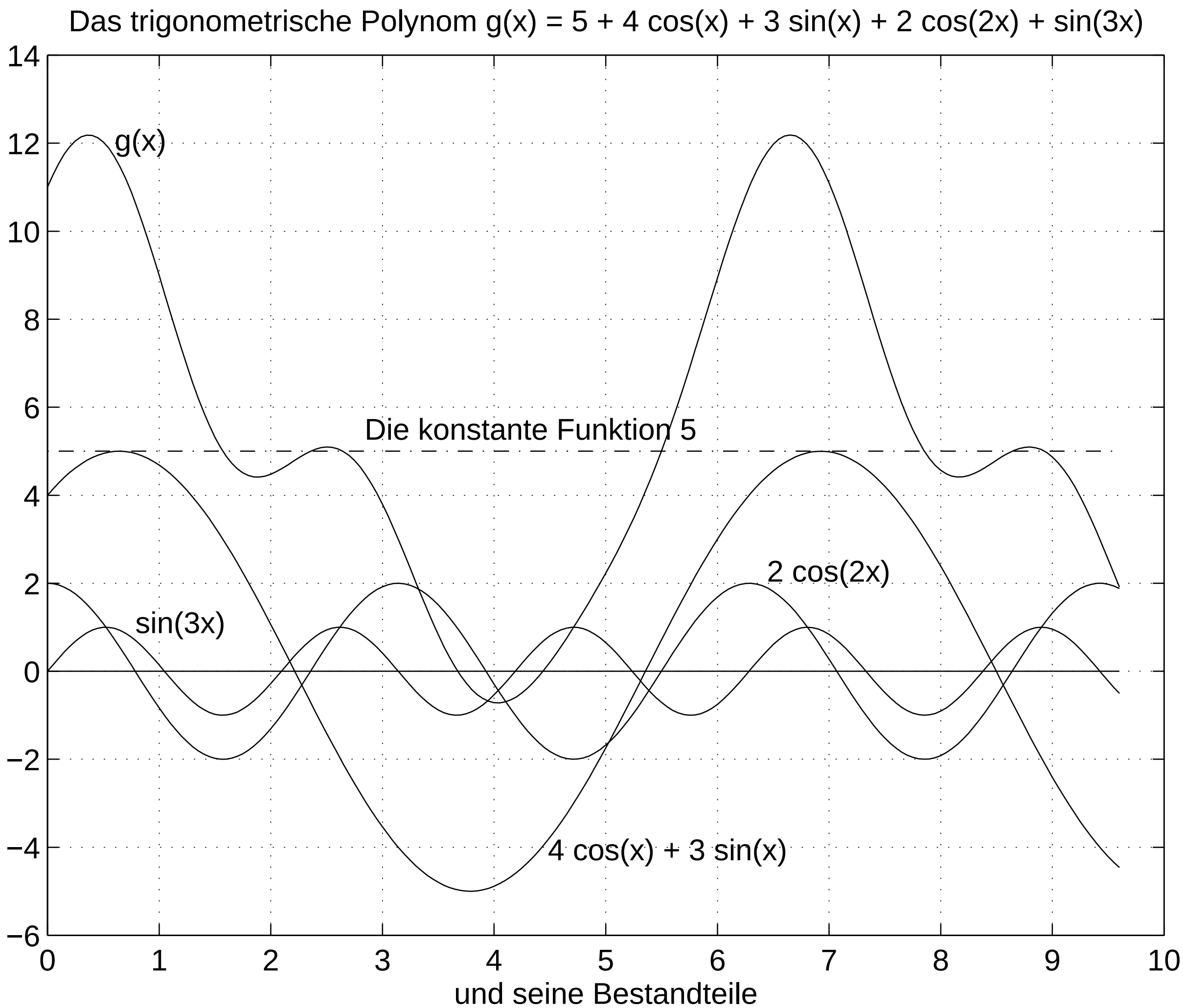
(b) $\langle s_k, s_l\rangle = \begin{cases} 0 : k \neq l \\ \dfrac{1}{2} : k = l \end{cases}$ für $k, l \in \mathbb{N}$.

(42) Es sei $p = \pi$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k von $f(x) = |\cos x| \in F_p$, d.h. bestimmen Sie $a_0 = \langle f, c_0\rangle$, $a_k = 2\langle f, c_k\rangle$, und $b_k = 2\langle f, s_k\rangle$. Zeichnen Sie dann f und die Fourierapproximationen $f_0 = a_0$, $f_1 = a_0 + a_1 c_1(x) + b_1 s_1(x)$, und $f_2 = a_0 + \sum_{k=1}^{2} \big(a_k c_k(x) + b_k s_k(x)\big)$.

(Z1) Zeigen Sie, dass für eine periodische Funktion $f \in F_p$ gilt $(k = 0, 1, 2, \dots)$:

(a) $\langle f, s_k\rangle = 0$, falls f gerade ist; (b) $\langle f, c_k\rangle = 0$, falls f ungerade ist.

Was folgt daraus für Aufgabe 42?


Das trigonometrische Polynom g(x) = 5 + 4 cos(x) + 3 sin(x) + 2 cos(2x) + sin(3x)
g(x)
Die konstante Funktion 5
2 cos(2x)
sin(3x)
4 cos(x) + 3 sin(x)
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
und seine Bestandteile

1998 - 06 - 03

11. Übungsblatt zu Höherer Analysis I, SoSe 1998

(47) Es sei $p = 2$ und $f \in F_p$ durch $f(x) = \left\{ \begin{array}{rl} -1 : & -1 \leq x < 0 \\ 1 : & 0 \leq x < 1 \end{array} \right\}$ gegeben. Skizzieren Sie f und entwickeln Sie f in eine Fourierreihe! Was ergibt sich für $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = \frac{1}{2}$?

(48) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1,3,5,\ldots} \dfrac{1}{k^2}$, indem Sie auf die Funktion f aus der vorigen Aufgabe die Parseval'sche Gleichung anwenden!

(49) Es sei $p = 1$ und $f \in F_p$ durch $f(x) = x^2$, $0 < x \leq 1$, gegeben. (Skizze!) Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe und betrachten Sie speziell $x_0 = 0$!

(50) Es sei $p = \pi$ und $f \in F_p$ durch $f(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, gegeben. (Skizze!) Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe! Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Fourierreihe aus Aufgabe 42 gliedweise differenzieren! Was ergibt sich für $x_0 = \frac{\pi}{4}$ bzw. $x_0 = \frac{\pi}{2}$?

(Z2) Es seien $e_k(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx/p}$, $k \in \mathbb{Z}$, $f \in F_p$, und

$$z_k := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{p} \int_a^{a+p} f(x)\, \overline{e_k(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, daß

$$z_0 = a_0, \quad z_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i} b_k), \quad z_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i} b_k) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

und daß die Fourierreihe von f in komplexer Schreibweise die Form $\sum_{k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots} z_k e_k(x)$ hat!

1998 - 06 - 09

12. Übungsblatt zu Höherer Analysis I, SoSe 1998

(51) Entwickeln Sie $h(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x & : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{array} \right\}$ in eine Fouriersinusreihe! (Skizze!)
Was ergibt sich für $x = \frac{\pi}{2}$?
Bemerkung: h ist die Anfangsauslenkung einer in der Mitte "gezupften" Saite.

(52) Entwickeln Sie $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ in ein Fourierintegral! Was ergibt sich für $x = 0$?

(53) Entwickeln Sie $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 : \ \text{sonst} \end{array} \right\}$ (Skizze!) in eine Fourierintegral! Was ergibt sich für $x = 0$ bzw. $x = 1$?

(54) Die Fourierkoeffizienten von $f \in F_\infty$ seien $a(\kappa), b(\kappa)$. Zeigen Sie, daß dann die Fourierkoeffizienten von

(a) $f_1(x) = f'(x)$ durch $a_1(\kappa) = \kappa b(\kappa), \quad b_1(\kappa) = -\kappa a(\kappa)$,

(b) $f_2(x) = x \cdot f(x)$ durch $a_2(\kappa) = b'(\kappa), \quad b_2(\kappa) = -a'(\kappa)$

gegeben sind (falls $f_1, f_2 \in F_\infty$). Wenden Sie (b) auf die vorige Aufgabe an! Läßt sich auch (a) anwenden?

(Z3) Zeigen Sie heuristisch, daß sich aus der Parseval'schen Gleichung im Limes $p \to \infty$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^\infty \big(a(\kappa)^2 + b(\kappa)^2\big) \, \mathrm{d}\kappa}$$

(die "Plancherel'sche Formel") ergibt.

1998 - 06 - 24

13. Übungsblatt zu Höherer Analysis I, SoSe 1998

(55) Geben Sie die Fourierreihendarstellung der Auslenkung $u(t,x)$ einer bei $x = 0$ und bei $x = \pi$ eingespannten und in der Mitte gezupften Saite an, d.h. zu den Anfangsbedingungen $h_0(x) = u(0,x) = a \left\{ \begin{array}{ll} x & : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{array} \right\}$, $h_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0.$ Welche Obertöne treten beim Grundton $A = 110\,[\mathrm{Hz}]$ auf, und wie ist das Verhältnis ihrer Amplituden zur Amplitude der Grundfrequenz?

(56) Die (eindimensionale) Wärmeleitungsgleichung lautet $\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Q(t,x)$. Es werde ein Stab der Länge l betrachtet, dessen Enden auf Temperatur 0 gehalten werden, und der ansonsten isoliert ist, d.h. $\forall t : u(t,0) = u(t,l) = 0$ und $Q = 0$. Leiten Sie mit dem Separationsansatz die folgende Lösungsdarstellung her:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \exp\Big(-\frac{k^2\pi^2 D}{l^2}\,t\Big)\sin\Big(\frac{k\pi}{l}\,x\Big)$$

(57) Was ergibt sich in der vorigen Aufgabe, wenn $l = 1$ und der Stab die Anfangstemperatur 1 hat? (D.h. $\forall x \in]0,1[: h(x) = u(0,x) = 1$)
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 47!

(58) (a) Zeigen Sie, daß $u(t,x) = f(x - ct)$ und $u(t,x) = f(x + ct)$ für beliebiges (zweimal differenzierbares) f die Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ lösen!

(b) Zeigen Sie, daß $u(t,x) = \frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]$ außerdem die Anfangsbedingungen $\forall x : u(0,x) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$ sowie die Randbedingung $\forall t : u(t,0) = 0$, $u(t,l) = 0$ erfüllt, falls f ungerade ist und Periode $2l$ hat.

(c) Bestimmen Sie so u zu Aufgabe 55 für $0 < ct < \frac{\pi}{2}$!

Bemerkung: Wegen (a) wird die Konstante c "Wellengeschwindigkeit" genannt.

(Z4) (a) Zeigen Sie, daß die Energie einer schwingenden Saite zur Zeit t in den Bezeichnungen der Vorlesung durch

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\sigma\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2(t,x) + \tau\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2(t,x)\right] \mathrm{d}x\,[\mathrm{Nm}]$$

gegeben ist.

(b) Folgern Sie mit der Parseval'schen Gleichung, daß im homogenen Fall (keine äußeren Kräfte) $E = \dfrac{\pi^2 \tau}{4l} \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ gilt!

(c) Überprüfen Sie (b) für Aufgabe 55!

1998 - 07 - 01

14. Übungsblatt zu Höherer Analysis I, SoSe 1998

(59) Eine ruhende, rechteckige Membran ist folgendermaßen eingespannt: Für $0 \le x \le \pi$ und $0 \le y \le b$ ist $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ und $u(x,0) = u(x,b) = h(x) = A \left\{ \begin{array}{ccc} x & : & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{array} \right\}$. Bestimmen Sie u! Was ist bei einer quadratischen Membran (d.h. $b = \pi$) das Verhältnis der Höhe über dem Mittelpunkt zur größten Höhe, d.h. was ist $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})/(A\frac{\pi}{2})$?

(60) Das Torsionsmoment eines Stabes ist durch $M = G\vartheta J$ gegeben, wobei $J =$ "Drillwiderstand von U" $= 2\iint_U \psi \, dx dy$. Bestimmen Sie J für einen Stab mit Rechteckquerschnitt! Vergleichen Sie J für zwei Stäbe mit quadratischem bzw. flächengleichem Kreis-Querschnitt!
Hinweis: Die Torsionsfunktion des Kreises $r \le R$ ist $\psi = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)$.

(61) Welche Lösungen liefert der Separationsansatz $u(t,x,y) = T(t)X(x)Y(y)$ bei der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 u = 0$ für eine schwingende, eben eingespannte, rechteckige Membran? Was ist die tiefste Frequenz?

(62) Bestimmen Sie mit dem Separationsansatz $u(t,r) = T(t)X(r)$ rotationssymmetrische Lösungen ("Radialschwingungen") einer schwingenden, eben eingespannten, kreisförmigen Membran! Vergleichen Sie die Grundfrequenz mit der einer flächengleichen, quadratischen Membran!
Hinweis: In Polarkoordinaten ist $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. Die Besselfunktion J_0 erfüllt die Differentialgleichung $J_0''(s) + \frac{1}{s}J_0'(s) + J_0(s) = 0$ sowie $J_0(0) = 1$, und ihre erste Nullstelle s_1 ist ≈ 2.4048. Daher löst $X(r) := J_0(dr)$ die Differentialgleichung $X''(r) + \frac{1}{r}X'(r) + d^2X(r) = 0$.

(Z5) (a) Bestimmen Sie die Torsionsfunktion des Kreissektors $\{(r,\varphi) : 0 \le r \le R, \ -\alpha \le \varphi \le \alpha\}$ (in Polarkoordinaten).

(b) Um wieviel Prozent nimmt der Drillwiderstand eines Kreises ab, wenn dieser durch einen geraden Schnitt vom Kreisrand bis zum Mittelpunkt eingeschnitten wird? (Das entspricht $\alpha = \pi$ in (a).)