# Über die Fouriertransformation O(p,q)-invarianter Distributionen

Vortrag an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien am 16. Februar 2017

Peter Wagner, Universität Innsbruck

Dieser Vortrag behandelt eine gemeinsame Arbeit mit N. Ortner, deren Details großteils in [OW1] und [OW2] zu finden sind.

## 1. Allgemeine Einordnung

In folgenden seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $n = p + q$. Eine $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit $M$ mit einem symmetrischen zweifach kovarianten Tensor $g$ heißt pseudoriemannsch von der Signatur $(p, q)$, wenn $g$ in jedem Punkt Signatur $(p, q)$ hat, d.h., wenn $g_{ij} = \operatorname{sign}(p-i+\frac{1}{2})\delta_{ij}$ in geeigneten Koordinaten. Wenn wir außerdem voraussetzen, dass $M$ "isotrop" ist (d.h. die Isometrien, die $m \in M$ festlassen, wirken transitiv auf den Mengen $\{x \in T_m M \setminus \{0\};\, g_m(x, x) = c\}, \quad m \in M, c \in \mathbb{R}$), so hat $M$ konstante Schnittkrümmung und ist durch diese bis auf Isometrie festgelegt, vgl. [H1, Ch. I, Thm. 6.1, p. 200].

Wenn $M$ flach ist (d.h. die Krümmung verschwindet), so ergibt sich $M = \mathbb{R}^n$ mit

$$g_m(x, x) = [x, x] := \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2, \qquad x \in T_m M \simeq \mathbb{R}^n.$$

Die Isometrien, die den Ursprung festlassen, sind

$$O(p, q) = \{A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R});\, \forall x \in \mathbb{R}^n : [Ax, Ax] = [x, x]\}.$$

Diese Liegruppe ist diffeomorph zu $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ und hat daher vier Zusammenhangskomponenten. $O(p, q)$ operiert transitiv auf den Niveaumengen $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};\, [x, x] = c\}, \quad c \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Räume $O(p, q)$-invarianter Distributionen $\mathcal{D}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n)$ sowie die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n)$ untersuchen.

## 2. Pullback

L. Hörmander gab in [H2] eine allgemeine Konstruktion des pullbacks mittels wave front sets. Wir brauchen nur den folgenden Spezialfall, der so vielleicht zuerst in [F, § 7] beschrieben wurde. Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ und submersiv ist (d.h. $\forall x \in \Omega : \mathrm{d}h(x) \neq 0$) und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, so ist $T \circ h = h^* T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert durch

$$\langle \phi, h^* T \rangle = \Big\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big( \int_\Omega Y(t - h(x)) \phi(x) \, \mathrm{d}x \Big), T_t \Big\rangle,$$

$\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad Y =$ Heaviside-Funktion.

Speziell ist $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto [x,x]$ submersiv und daher ist

$$h^* : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : S \longmapsto h^*S =: S([x,x])$$

wohldefiniert, linear und stetig. Weil $O(p,q)$ auf $h^{-1}(c) \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, transitiv operiert, ist

$$h^* : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}); \forall A \in O(p,q) : T \circ A = T\}$$

ein Isomorphismus.

Wenn ebenso $\mathcal{D}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); \forall A \in O(p,q) : T \circ A = T\}$ definiert wird, so ist die Restriktionsabbildung $\mathcal{D}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ surjektiv (mit Kern $\{\sum_{j=0}^k a_j [\partial,\partial]^j \delta;\ k \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{C}\}$). Wir definieren analog $\mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n) = \{T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \forall A \in O(p,q) : T \circ A = T\}$ sowie $\mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \{T|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}};\ T \in \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n)\}$. Dann ist auch $h^* : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ein Isomorphismus und es erhebt sich die Frage, ob und wie wir $h^*S \in \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ für $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ kanonisch in $0$ fortsetzen können.

## 3. Die Fortsetzung in den Ursprung

Wenn wir $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ in der Form $S = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}S) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma s} (\mathcal{F}S)(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ schreiben, so folgt heuristisch

$$S([x,x]) = \langle \tfrac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma[x,x]}, (\mathcal{F}S)(\sigma) \rangle.$$

Es zeigt sich, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma[x,x]} \in \mathcal{D}_{L^\infty, n/2}(\mathbb{R}^1_\sigma) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, und daher ist die Abbildung

$$H : \mathcal{F}(\mathcal{D}'_{L^1, -n/2}(\mathbb{R}^1)) \longrightarrow \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n) : S \longmapsto \langle \tfrac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma[x,x]}, (\mathcal{F}S)(\sigma) \rangle$$

wohldefiniert, linear, stetig und injektiv. Hierin ist $\mathcal{D}^{(\prime)}_{L^p,\lambda} := (1+|\sigma|^2)^{-\lambda/2} \cdot \mathcal{D}^{(\prime)}_{L^p}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$.

Allgemeiner erhält man aus den Entwicklungen von $\langle \phi, \delta(s - [x,x]) \rangle$ bei $s = 0$ in [T] eine injektive stetige lineare Abbildung

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}'_{L^1, -n/2-k}(\mathbb{R}^1)) \longrightarrow \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n) \Big/ \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{C} [\partial,\partial]^j \delta$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. A. Tengstrand erhält einen Isomorphismus $N' : H'_{s,m} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n)$ (Thm. 5.1), allerdings nur um den Preis, dass $H_{s,m}$ kein Raum von $\mathcal{C}^\infty$ Testfunktionen ist und somit der Raum $H'_{s,m}$ mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nicht in Beziehung steht.

## 4. Die Fouriertransformation

Klarerweise ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus. Mit

$$\begin{aligned} K(\sigma,\xi) &:= \mathcal{F}_x(\tfrac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma[x,x]}) \\ &= \frac{\pi^{n/2-1}}{2|\sigma|^{n/2}} \exp\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{4}(p-q)\,\mathrm{sign}\,\sigma - \frac{\mathrm{i}[\xi,\xi]}{4\sigma}\Big) \in \mathcal{D}_{L^\infty, n/2}(\mathbb{R}^1_\sigma) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi) \end{aligned}$$

erhalten wir für $S \in \mathcal{F}(\mathcal{D}'_{L^1,-n/2}(\mathbb{R}^1))$

$$\mathcal{F}(S([x,x])) = (\mathcal{F} \circ H)(S) = {}_{\mathcal{D}'_{L^1,-n/2}}\langle (\mathcal{F}S)(\sigma), K(\sigma,\xi)\rangle_{\mathcal{D}'_{L^\infty,n/2}\hat{\otimes}\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)}$$

wie N. Ortner für $S \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^1)$ schon in [O] bewies.

Leider ist $\operatorname{im}(\mathcal{F} \circ H) \not\subset \operatorname{im} H$. Z.B. ist $1 \in \mathcal{F}(\mathcal{D}'_{L^1,-n/2}(\mathbb{R}^1))$, aber $\mathcal{F}(H1) = \mathcal{F}1 = (2\pi)^n \delta \notin \operatorname{im} H$. Also lässt sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{D}'_{L^1,-n/2}(\mathbb{R}^1)) & & \mathcal{F}(\mathcal{D}'_{L^1,-n/2}(\mathbb{R}^1)) \\ {\scriptstyle H}\big\downarrow & & {\scriptstyle H}\big\downarrow \\ \mathcal{S}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\mathcal{F}]{\sim} & \mathcal{S}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

nicht kommutativ vervollständigen. Zum Rechnen erweist sich die folgende Version als günstiger (vgl. [OW1, Cor. 2.5]):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(L^1_{-n/2}(\mathbb{R}^1)) & \xrightarrow[F]{\sim} & \mathcal{F}(L^1_{-n/2}(\mathbb{R}^1)) \\ {\scriptstyle H}\big\downarrow & & {\scriptstyle H}\big\downarrow \\ \mathcal{S}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\mathcal{F}]{\sim} & \mathcal{S}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

wobei $L^1_{-n/2} = L^1 \cdot (1+|x|)^{n/2}$ und $FS = \mathcal{F}U$ mit

$$(*) \qquad U = 2^{n-3}\pi^{n/2-1} \exp\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{4}\,(p-q)\operatorname{sign} u\Big)|u|^{n/2-2} \cdot (\mathcal{F}S)(\tfrac{1}{4u}) \in L^1_{-n/2}(\mathbb{R}^1_u).$$

Aus der letzten Formel wird auch sehr durchsichtig, wie die Fouriertransformation $O(p,q)$-invarianter Distributionen von $p$ und $q$ abhängt, vgl. [OW1, Cor. 2.6]. Wenn wir $U = U_{p,q}$ und $T_{p,q} = \mathcal{F}(U_{p,q})$ setzen, so ist z.B. $U_{p+2,q} = 4\pi\mathrm{i}u\,U_{p,q}$ und daher $T_{p+2,q} = -4\pi T'_{p,q}$ oder $U_{p+1,q-1} = \mathrm{i}\operatorname{sign}(u)U_{p,q}$ und daher $T_{p+1,q-1} = \mathcal{H}(T_{p,q})$ wobei $\mathcal{H}$ die Hilbertransformation bezeichnet.

## 5. Fundamentallösungen

Als Anwendungsbeispiel wollen wir eine Fundamentallösung $E$ des ultrahyperbolischen Operators $[\partial,\partial]$ bestimmen. Wenn $E \in \mathcal{S}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung $[\partial,\partial]E = \delta$ erfüllt, so folgt $-[x,x]\mathcal{F}E = 1$. Falls $\mathcal{F}E \in H(\mathcal{F}\mathcal{D}'_{L^1,-n/2})$ und $n \geq 3$, so ergibt sich $\mathcal{F}E = H(-\operatorname{vp}\frac{1}{t} + C\delta)$, $C \in \mathbb{C}$. Wegen $-\operatorname{vp}\frac{1}{t} + C\delta \in \mathcal{F}L^1_{-n/2}$ folgt

$$E = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}E) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F} \circ H(-\operatorname{vp}\tfrac{1}{t} + C\delta) = H(T) = T([x,x])$$

mit $T = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}U$ und $U$ wie oben. Aus $S = -\operatorname{vp}\frac{1}{t} + C\delta$ erhalten wir dann sukzessive $\mathcal{F}S = \mathrm{i}\pi\operatorname{sign}(\sigma) + C$ sowie $(\mathcal{F}S)(\frac{1}{4u}) = \mathrm{i}\pi\operatorname{sign}(u) + C$ und

$$T = 2^{-3}\pi^{-n/2-1}\mathcal{F}\bigg(\exp\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{4}\,(p-q)\operatorname{sign} u\Big)|u|^{n/2-2}[\mathrm{i}\pi\operatorname{sign}(u) + C]\bigg),$$

was sich leicht berechnen lässt. Es ergibt sich (vgl. [OW1, Props. 2.8, 3.1]):

$$T = \frac{1}{4\pi^{n/2}} \cdot \begin{cases} \Gamma(\frac{n}{2}-1)[(-1)^{q/2+1}t_+^{1-n/2} + C\pi^{-1}(-1)^{(p-1)/2}t_-^{1-n/2}] & : n, p \text{ ungerade}, \\ \Gamma(\frac{n}{2}-1)[(-1)^{p/2}t_-^{1-n/2} + C\pi^{-1}(-1)^{(q-1)/2}t_+^{1-n/2}] & : n, q \text{ ungerade}, \\ (-1)^{p/2+1}[(\mathrm{vp}\,\frac{1}{t})^{(n/2-2)} + C\delta^{(n/2-2)}] & : p, q \text{ gerade}, \\ (-1)^{(p-1)/2}[\pi\delta^{(n/2-2)} - C\pi^{-1}(\mathrm{vp}\,\frac{1}{t})^{(n/2-2)}] & : p, q \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Jede $O(p,q)$-invariante Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'_{\mathrm{inv}}(\mathbb{R}^n)$ von $[\partial, \partial]$ ist dann durch $E = D + T([x,x])$ gegeben mit $T$ wie oben und $D \in \mathbb{C}$. Es ist auch beachtenswert, dass, außer im Fall $pq$ ungerade, ein Vielfaches von $(\mathrm{vp}\,\frac{1}{t})^{(n/2-2)}([x,x])$ immer eine Fundamentallösung liefert.

Die erste Berechnung der obigen Formeln geht auf G. de Rham zurück, vgl. [R], wenig später wurden sie hergeleitet von I.M. Gel'fand und G.E. Shilov aus der genauen Untersuchung der analytischen Fortsetzung der distributionswertigen Funktionen $\lambda \mapsto [x,x]_+^\lambda$ und $\lambda \mapsto ([x,x] \pm \mathrm{i}0)^\lambda$, vgl. [GS] sowie den Vortrag von N. Ortner. In [OW1] werden Fundamentallösungen von $[\partial, \partial]$ und weiteren $O(p,q)$-invarianten Operatoren (z.B. $z - [\partial,\partial]$, $\partial_0 - [\partial,\partial]$, $\partial_{y_1} - [\partial,\partial]\partial_{y_2}$) mittels der Formel $(*)$ gewonnen.

## 6. Schnell fallende $O(p,q)$-invariante Distributionen

Der Raum $\mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n)$ der schnell fallenden Distributionen besteht aus den Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, für die $\phi * T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\phi \in \mathcal{D}$, vgl. [S, p. 244]. Alternativ kann $\mathcal{O}'_C$ als Fourierbild von $\mathcal{O}_M$, den $\mathcal{C}^\infty$ Funktionen mit höchstens polynomialem Wachstum aller Ableitungen beschrieben werden. Wir setzen

$$\mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\});\ \exists T_1 \in \mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n) \text{ mit } T = T_1 \text{ auf } \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| > 1\}\}$$

und wollen eine einfache Charakterisierung dafür angeben, dass $h^*S = S([x,x]) \in \mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ wenn $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

L. Schwartz gibt in [S, p. 245] zunächst einen direkten Beweis, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}|x|^2} \in \mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n)$, und weist dann im Anschluss an die Definition der distributionellen Fouriertransformation darauf hin, dass das viel leichter aus $\mathcal{F}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|x|^2} = (\mathrm{i}\pi)^{n/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|x|^2/4} \in \mathcal{O}_M$ folgt, vgl. [S, p. 270]. Ähnlich verhält es sich mit der obigen Frage: Die Charakterisierung von $S([x,x]) \in \mathcal{O}'_C$ erfolgt über die Fouriertransformation. Und zwar gilt für $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, dass $S([x,x]) \in \mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ dann und nur dann, wenn $\mathcal{F}S$ "schnell fällt bei 0."

Allgemein definieren wir für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dass "$T$ schnell fällt" bei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn (a) $T(x_0 + \frac{x}{|x|^2}) \in \mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und (b) $T$ "keine Distribution mit Träger in $x_0$ enthält," d.h. $T = \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{-1/(k|x-x_0|)}T$. Alternativ sind (a) und (b) äquivalent zur Bedingung

$$\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall \epsilon > 0 : \forall \phi \in \mathcal{D}(\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_0| < \epsilon\}) :$$
$$|\langle \phi, T\rangle| \le N\epsilon^k \sum_{|\alpha| \le N} \epsilon^{|\alpha|} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty.$$

Jedenfalls fällt $T$ schnell bei $x_0$ wenn $x_0 \notin \operatorname{supp} T$; diese Bedingung ist aber nicht notwendig, z.B. fallen auch $\mathrm{e}^{-1/|x|} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathrm{e}^{\mathrm{i}/x^2} \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$ schnell bei $0$. (Ich bemerke noch, dass ich diesen so grundlegenden Begriff des schnellen Fallens einer Distribution bei einem Punkt in der Literatur nicht gefunden habe. Für Hinweise dazu wäre ich dankbar.)

Als Beispiel für die Anwendung der Charakterisierung von $S([x,x]) \in \mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ betrachten wir den Operator $P(\partial) = [\partial, \partial] - z : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M$ für $z \in \mathbb{C}$. Nach Fouriertransformation ist die Surjektivität von $P(\partial)$ äquivalent zu der von

$$A : \mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^n) : T \mapsto ([x,x] + z) \cdot T.$$

M.S. Baouendi zeigte in [B] mit einem indirekten Beweis, dass $A$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nicht surjektiv ist.

Um konstruktiv zu zeigen, dass der Multiplikationsoperator $A$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nicht surjektiv ist, genügt es nachzuweisen, dass $\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{i}[x,x]}$ für $\rho = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)$ nicht im Bild von $A$ liegt, bzw. dass

$$S([x,x]) = \frac{\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{i}[x,x]}}{[x,x] + z} \notin \mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^n).$$

Hier ist also $S = \mathrm{e}^{-\rho\mathrm{i}t}/(t+z)$ und $(\mathcal{F}S)(\sigma) = -2\pi\mathrm{i}\rho Y(\sigma+1)\mathrm{e}^{\rho\mathrm{i}(\sigma+1)z} \in L^1_{-n/2}$. Da $\mathcal{F}S$ bei $\sigma = 0$ nicht schnell fällt, folgt $S([x,x]) \notin \mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^n)$. (Beachte aber, dass $S_1([x,x]) = \mathrm{e}^{\rho\mathrm{i}[x,x]}/([x,x]+z) \in \mathcal{O}_C'$, da $0 \notin \operatorname{supp}(\mathcal{F}S_1)$. Allgemeiner erhalten wir für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ und $\mu \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu[x,x]}([x,x]+z)^\lambda \in \mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \mu \cdot \operatorname{Im} z > 0.)$$

Schließlich möchte ich noch anmerken, dass eine radialsymmetrische Distribution $R(|x|) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (mit $R \in \mathcal{D}'((0,\infty))$) genau dann in $\mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ liegt, wenn $R(|t|) \in \mathcal{O}_C'(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$. Somit liegt hier eine grundlegend andere Charakterisierung vor.

## References


[B] Baouendi, M.S., *Impossibilité de la division par un polynome dans* $\mathcal{O}_C'$, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 760–762.

[F] Friedlander, G., *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.

[GS] Gel'fand, I.M., and G.E. Shilov, *Generalized functions. Vol. I*, Academic Press, New York, 1964; Transl. from И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов: Обобщённые функции, Вып. 1, Физматгиз, Москва, 1959.

[H1] Helgason, S., *Groups and geometric analysis*, Academic Press, Orlando, 1984.

[H2] Hörmander, L., *The analysis of linear partial differential operators. Vol. I*, Grundlehren Math. Wiss. 256, 2nd ed., Springer, Berlin, 1990.

[O] Ortner, N., *Fourier transforms in the "classical sense", Schur spaces and a new formula for the Fourier transforms of slowly increasing,* $O(p,q)$*-invariant functions*, Indag. Math. **24** (2013), 142–160.

[OW1] Ortner, N., and P. Wagner, *Fourier transformation of O(p,q)-invariant distributions. Fundamental solutions of ultra-hyperbolic operators*, J. Math. Anal. Appl. **450** (2017), 262–292.

[OW2] Ortner, N., and P. Wagner, *Applications of O(p,q)-invariant distributions*, manuscript, Innsbruck, 2016.

[R] de Rham, G., *Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **8** (1958), 337–366.

[S] Schwartz, L., *Théorie des distributions*, Nouv. éd., Hermann, Paris, 1966.

[T] Tengstrand, A., *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*, Math. Scand. **8** (1960), 201–218.