Über das Theorem von Malgrange und Ehrenpreis

Vortrag in Karlsruhe am Freitag, den 13. Februar 2015

Peter Wagner, Universität Innsbruck

1. Definition der Fundamentallösung

Wenn wir $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ setzen, so hat ein allgemeiner linearer partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten in $\mathbb{R}^n$ die Form

$$(1) \qquad P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\alpha \in \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n] \text{ mit } c_\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Schon sehr früh erkannten Mathematiker und Physiker, dass gewisse Lösungen u von $P(\partial)u = 0$ "fundamentaler" sind als andere. Z.B. wurde $\frac{1}{|x|}$ als eine solche "fundamentale Lösung" angesehen, nachdem P.S. de Laplace 1789 den Zusammenhang des Gravitationspotentials mit dem nach ihm benannten Operator $\Delta_3 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ erkannte, vgl. [L]. Aber erst 1950 gab L. Schwartz in Rahmen der Distributionentheorie eine exakte

Definition. Für $P(\partial)$ wie oben heißt $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *Fundamentallösung* ("solution élémentaire" im Original) genau dann, wenn $P(\partial)E = \delta$, d.h. $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\langle P(-\partial)\phi, E\rangle = \phi(0)$.

L. Schwartz schreibt dazu: "Les définitions habituelles d'une solution élémentaire comme solution *usuelle* du système homogène ayant en un point une singularité d'un certain type, doivent, à notre avis, être totalement rejetées" ([S1], p. 135, 136).

Wegen $\Delta_3 \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta$ ist dann $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$ eine Fundamentallösung von Δ_3. Man beachte, dass Fundamentallösungen erst durch (meist physikalisch motivierte) Zusatzbedingungen eindeutig werden. Z.B. für Δ_3 wäre $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$ die einzige Fundamentallösung mit $\lim_{|x|\to\infty} E(x) = 0$.

Mehr zur geschichtlichen Entwicklung in [OW2] und [W3, "A brief history of fundamental solutions", pp. 404–408].

2. Bedeutung der Fundamentallösung

Wenn z.B. ein unendlich langer homogener Stab von konstantem Querschnitt durch die Last $q(t,x)$ auf Biegung beansprucht wird, so gilt für die Durchbiegung $u(t,x)$ in der linearen Näherung nach Euler und Bernoulli

$$P(\partial)u = f \text{ mit } P(\partial) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

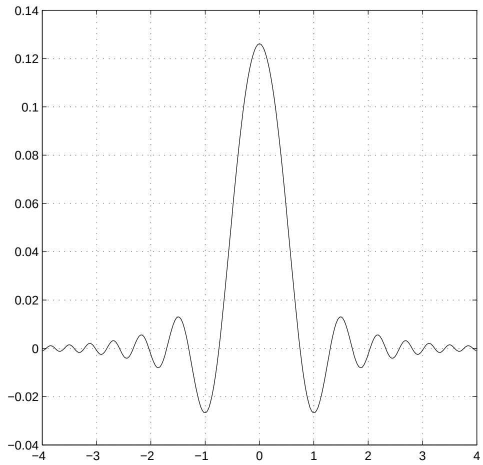
wobei $f = \frac{q}{\epsilon J}$, $a = \sqrt{\frac{\rho F}{\epsilon J}}$, $\epsilon =$ Elastizitätsmodul, $J =$ Trägheitsmoment, $\rho =$ Dichte, $F =$ Querschnittsfläche. Die einzige Fundamentallösung E von $P(\partial)$, die $E = 0$ für $t < 0$ und eine gewisse Wachstumsbedingung (d.h. $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$) erfüllt, ist

$$E(t,x) = \frac{Y(t)}{2a^{3/2}\sqrt{\pi}} \int_0^t \sin\Big(\frac{ax^2}{4\tau} + \frac{\pi}{4}\Big) \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\tau}},$$

wobei Y die Heaviside-Funktion bezeichnet.

E beschreibt also die Durchbiegung des Balkens unter einer punktförmigen instantanen Kraft, d.h. für $f = \frac{q}{\epsilon J} = \delta = \delta(t)\delta(x)$.

(Man sieht aus der Formel, dass $E(t,x) \neq 0$ für jedes feste $t > 0$ und beliebig große x, d.h. die nur in $t = 0$, $x = 0$ gegebene Störung wirkt sich bereits nach beliebig kurzer Zeit in beliebig großer Entfernung aus. Dies ist natürlich physikalisch falsch und nur eine Folge der Vereinfachungen bei der Herleitung von P.)



E für $a = 1$ und $t = 0.1$

E ist insofern "fundamental", als daraus die Durchbiegung u zu einer beliebigen Last $q = \epsilon J f$ mittels "Faltung" gewonnen werden kann. Man denkt sich f durch eine Summe von $\delta-$ Funktionen approximiert, d.h.

$$f \approx \sum_{i,j} f(t_i, x_j)\Delta t_i \Delta x_j \delta(t - t_i)\delta(x - x_j).$$

Da P konstante Koeffizienten hat, ist die Durchbiegung, die $f = \delta(t - t_i)\delta(x - x_j)$ entspricht, durch $E(t - t_i, x - x_j)$ gegeben; da P linear ist, gilt das "Superpositionsprinzip" und ein Grenzübergang, der von der Riemannsumme zum Integral führt, liefert

$$\begin{aligned} u &= \lim_{\Delta t_i, \Delta x_j \to 0} \sum_{i,j} f(t_i, x_j)\Delta t_i \Delta x_j E(t - t_i, x - x_j) \\ &= \iint f(\tau, \xi) E(t - \tau, x - \xi)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\xi = f * E. \end{aligned}$$

Unter geeigneten Bedingungen an f kann diese heuristische Überlegung im Rahmen der Distributionentheorie exakt durchgeführt werden.

Allgemein gilt ebenso für $P(\partial)$ wie in (1) und eine Fundamentallösung E von $P(\partial)$:

$$u = f * E \text{ löst die Gleichung } P(\partial)u = f \text{ falls } f, E \text{ "faltbar" sind.}$$

Weiters ist E auch der Grundbaustein zur Konstruktion von *Greenschen Funktionen*, bei denen $P(\partial)u = f$ in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt und in $\partial\Omega$ Randbedingungen gegeben sind.

3. Das Theorem von Malgrange und Ehrenpreis

1948 stellte L. Schwartz die Frage, ob für jedes $P(\partial)$ wie in (1) (abgesehen vom Fall, dass P identisch verschwindet) eine Fundamentallösung E existiert, vgl. [TPY, p. 1078]. Dieses Problem wurde 1954/55 unabhängig von B. Malgrange und L. Ehrenpreis gelöst, vgl. [M, Thm. 1, p. 288], [E1, Thm. 6, p. 892].

Theorem. $\forall P(\partial) \in \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n] \setminus \{0\} : \exists E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : P(\partial)E = \delta.$

Die ursprünglichen Beweise beruhten auf dem Theorem von Hahn–Banach. Es wird das lineare Funktional

$$F : P(-\partial)\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} : P(-\partial)\phi \longmapsto \phi(0) \tag{2}$$

auf dem Unterraum $P(-\partial)\mathcal{D} = \{P(-\partial)\phi : \phi \in \mathcal{D}\}$ von $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ betrachtet und gezeigt, dass es stetig ist. Nach Hahn–Banach existiert dann eine stetige lineare Fortsetzung $E : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ von F, und klarerweise ist E eine Fundamentallösung von $P(\partial)$, denn

$$\langle \phi, P(\partial)E \rangle = \langle P(-\partial)\phi, E \rangle = \langle P(-\partial)\phi, F \rangle = \phi(0), \text{ d.h. } P(\partial)E = \delta.$$

Der nichttriviale Teil des Beweises besteht also darin, die Stetigkeit von (2) zu zeigen. Dazu wird z.B. die folgende Ungleichung

$$\exists C > 0 : \forall \phi \in \mathcal{D} : |\phi(0)| \le C \left\| \mathcal{F}^{-1}\Big(\cosh(|\xi|) P(-\partial)\phi(\xi)\Big) \right\|_{L^1}$$

hergeleitet, vgl. [H3, (3.1.3), p. 64].

Allerdings ist diese Beweismethode nicht konstruktiv, da es keine kanonische Fortsetzung auf $\mathcal{D}$ für das Funktional in (2) gibt, d.h. man findet so keine explizite Darstellung einer Fundamentallösung E.

4. Die Idee der konstruktiven Beweise des M.-E.-Theorems

Der historisch erste konstruktive Beweis des Satzes von Malgrange und Ehrenpreis beruht auf der Verallgemeinerung einer Konstruktion von L. Hörmander, welche von Gel'fand und Shilov "Hörmandersche Treppe" genannt wurde, vgl. [T1], [GS, p. 103]. Das Grundprinzip, das ich im folgenden beschreibe, liegt in gewisser Weise allen konstruktiven Beweisen zugrunde.

Zunächst wenden wir heuristisch die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf die Gleichung $P(\partial)E = \delta$ an und erhalten $P(\mathrm{i}\xi)\mathcal{F}E = 1$, wobei $(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und allgemein

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}' : T \longmapsto (\phi \mapsto \langle \mathcal{F}\phi, T \rangle).$$

Das sogenannte "Divisionsproblem" $P(\mathrm{i}\xi)T = 1$, $T \in \mathcal{S}'$, ist äußerst schwer zu lösen. Dies gelang 1957/58 L. Hörmander und S. Łojasiewicz, vgl. [H2], [Ł], die damit die Existenz einer *temperierten* Fundamentallösung nachwiesen. Allerdings sind ihre

Beweise nicht konstruktiv, so wenig wie die später gefundenen Existenzbeweise für das Divisionsproblem von I.N. Bernstein oder M.F. Atiyah, s. [A], [B1]. Ein konstruktiver Beweis für die Existenz einer temperierten Fundamentallösung wurde bis heute nicht gefunden; F. Trèves schreibt dazu folgendes: "Finally, I should mention that nobody has yet succeeded in *constructing* a tempered fundamental solution for general differential polynomials. In a way, this is the last 'big' problem which is still unsolved about general fundamental solutions", vgl. [T2, p. 261].

Die Grundidee der konstruktiven Beweise des M.–E.–Theorems besteht im "Ausweichen ins Komplexe". Dies beruht darauf, dass $P(\partial)[\mathrm{e}^{\eta x}U] = \mathrm{e}^{\eta x}P(\partial+\eta)U$ für $U \in \mathcal{D}'$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$ und daher

$$P(\partial)[\mathrm{e}^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}T] = \mathrm{e}^{\eta x}P(\partial+\eta)\mathcal{F}^{-1}T = \mathrm{e}^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}[P(\mathrm{i}\xi+\eta)T]$$

für $T \in \mathcal{S}'$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$. Man beachte, dass $\mathrm{i}\xi + \eta = \mathrm{i}(\xi - \mathrm{i}\eta)$ und wir also statt der reellen Variablen ξ im "Impulsraum" die komplexe Variable $\xi - \mathrm{i}\eta$ ins Spiel bringen. Wenn wir also z.B. statt $P(\mathrm{i}\xi)T = 1$ das Divisionsproblem $P(\mathrm{i}\xi + \eta)T = 1$ lösen können, so wird $E = \mathrm{e}^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}T$ eine Fundamentallösung von $P(\partial)$, da

$$P(\partial)E = P(\partial)[\mathrm{e}^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}T] = \mathrm{e}^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}[P(\mathrm{i}\xi+\eta)T] = \mathrm{e}^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}1 = \mathrm{e}^{\eta x}\delta = \delta.$$

Bei der Hörmanderschen Treppe (vgl. [H1], [T1], [GS, p. 103], [OW1, p. 345], [OW2, Thm. 2.3, p. 107]) verwenden wir nun eine endliche Zerlegung der Eins, d.h. $1 = \sum_{k=0}^{m} \chi_k(\xi)$, die so konstruiert ist, dass für feste $\eta \in \mathbb{R}^n$ und $C > 0$ und für alle ξ in $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k = 0, \dots, m$ gilt

$$\text{(i) } \chi_k(\xi + \lambda\eta) = \chi_k(\xi) \quad \text{und (ii) } \chi_k(\xi) \neq 0 \Rightarrow |P(\mathrm{i}\xi + k\eta)| \geq C.$$

Dann sind die Divisionsprobleme $P(\mathrm{i}\xi + k\eta)T_k = \chi_k(\xi)$ leicht zu lösen und die Formel

$$E = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{k\eta x}\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\chi_k(\xi)}{P(\mathrm{i}\xi + k\eta)}\Big) \tag{3}$$

liefert eine Fundamentallösung von $P(\partial)$. (Hierbei ist zu beachten, dass wegen (i) $f(\eta x) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\chi_k) = f(0)\mathcal{F}^{-1}\chi_k$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ gilt.)

5. Der Beweis nach König, Ortner, Wagner, Leinfelder

Die Konstruktion von E mittels Hörmanderscher Treppe in (3) ist allerdings auch nicht vollständig explizit, da die Wahl der Zerlegungsfunktionen χ_k von der Lage der komplexen Nullstellen $\zeta \in \mathbb{C}^n$ von $P(\zeta)$ abhängt, und somit für allgemeine P nicht explizit gemacht werden kann. Im Jahr 1994 publizierte H. König in [K] die erste wirklich explizite allgemeine Formel für eine Fundamentallösung in der Form eines $n-$fachen Integrals. Eine Formel mit einem einfachen Integral wurde in [OW1, (2), p. 346] gegeben, der derzeit einfachste Beweis des M.–E.–Theorems mittels Summen stammt aus dem Jahr 2009, vgl. [W5, Prop. 1, p. 459]. In einer von H. Leinfelder weiter entwickelten Version nahm R. Brigola diesen Beweis erstmals in ein Lehrbuch auf, vgl. [B2, pp. 347–354].

Ich will nun die entsprechende Formel, wie sie auch in Wikipedia erscheint, angeben. Es sei $P(\partial)$ wie in (1) und vom Grad m und $P_m(\partial) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \partial^\alpha$ bezeichne den Hauptteil des Operators. Wenn dann $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $P_m(\eta) \neq 0$, $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind und $a_j = \prod_{k=0,k\neq j}^m (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$, $j = 0, \dots, m$, so ist

$$E = \frac{1}{\overline{P_m(2\eta)}} \sum_{j=0}^m a_j \, \mathrm{e}^{\lambda_j \eta x} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\overline{P(\mathrm{i}\xi + \lambda_j \eta)}}{P(\mathrm{i}\xi + \lambda_j \eta)} \Big) \tag{4}$$

eine Fundamentallösung von $P(\partial)$. (Wie üblich bezeichnet $\overline{w}$ die konjugiert komplexe Zahl von $w \in \mathbb{C}$.)

6. Ausblick

Fundamentallösungen der wichtigsten in der Physik auftretenden Operatoren wurden schon im 19. Jahrhundert berechnet und verwendet. Z.B. gilt für den Laplaceoperator Δ_n, den Wärmeleitungsoperator $\partial_t - \Delta_n$ bzw. den Wellenoperator $\partial_t^2 - \Delta_n$ jeweils:

$$\Delta_n E = \delta \quad \text{mit } E = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x| & : n = 2, \\ \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})|x|^{2-n}}{(2-n)2\pi^{n/2}} & : n \neq 2, \end{cases}$$

$$(\partial_t - \Delta_n)E = \delta \quad \text{mit } E = \frac{Y(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \, \mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)},$$

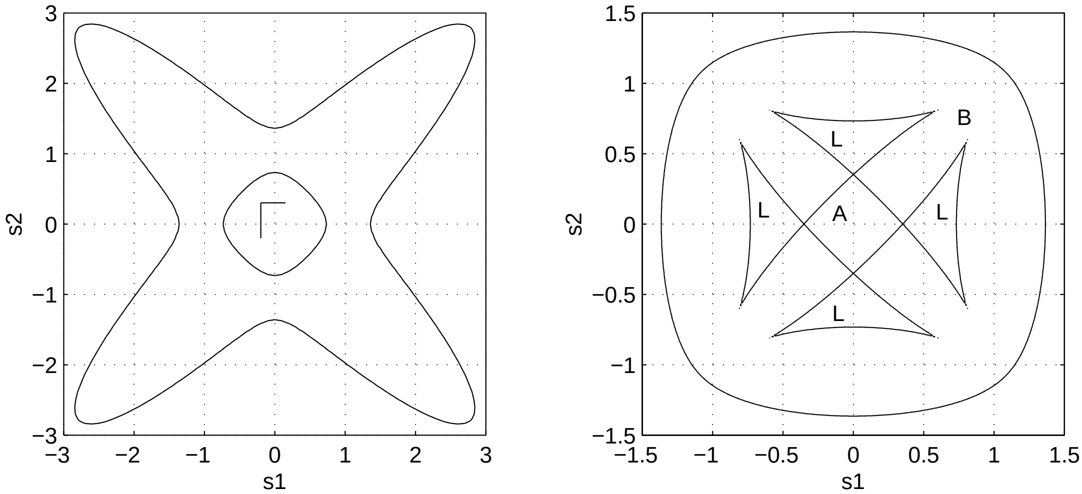
bzw.

$$(\partial_t^2 - \Delta_n)E = \delta \quad \text{mit } E = \begin{cases} \frac{1}{2} Y(t - |x|) & : n = 1, \\ \dfrac{Y(t)}{(2\pi)^{(n-1)/2}} (\frac{1}{t}\partial_t)^{(n-3)/2} \Big(\dfrac{\delta(t-|x|)}{2t} \Big) & : n = 3, 5, \dots, \\ \dfrac{(-1)^{n/2-1}(n-3)!!}{(2\pi)^{n/2}} \, Y(t)(t^2 - |x|^2)_+^{(1-n)/2} & : n = 2, 4, \dots, \end{cases}$$

vgl. [S1], [O].

Zur Bestimmung solcher und schwierigerer Fundamentallösungen verwendet man allerdings nicht Formel (4) sondern benützt Invarianzeigenschaften der Operatoren (z.B. im obigen Fall die Rotationsinvarianz) bzw. löst das Divisionsproblem. Der Großteil der bescheidenen Publikationen von N. Ortner und mir beschäftigt sich mit der Berechnung von Fundamentallösungen komplizierterer Operatoren und Systeme. Z.B. werden in [W1] Fundamentallösungen der kubischen homogenen Operatoren vom Haupttyp im $\mathbb{R}^3$ hergeleitet. Nach Koordinatentransformation haben sie die Form

$$P(\partial) = \partial_1^3 + \partial_2^3 + \partial_3^3 + 3a\partial_1\partial_2\partial_3, \quad a \in \mathbb{R};$$



X bzw. X^* für $\partial_1^4 + \partial_2^4 + \partial_3^4 + 2a\partial_1^2\partial_2^2 + 2b\partial_3^2(\partial_1^2 + \partial_2^2)$, $a = -0.7$, $b = -1.2$

der Spezialfall $a = 0$ wurde erstmals in [Z1] betrachtet. In [W2], [W4] werden homogene Operatoren vierter Ordnung im $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Für den einfachsten Fall $\partial_1^4 + \partial_2^4 + \partial_3^4$ wurde schon von I. Fredholm eine Fundamentallösung berechnet (vgl. [F], p. 351); im hyperbolischen Fall treten komplizierte Lacunen auf, siehe das Bild.

Diese drei Arbeiten dienten als Vorbereitung für die Artikel [OW3], [OW4], [OW5], [W6], in denen die Wellenausbreitung in hexagonalen und kubischen Medien sowie in biaxialen Kristallen untersucht wird. Eine Zusammenfassung und Übersicht in Buchform zum Thema Fundamentallösungen wird (hoffentlich) heuer erscheinen ([OW6]).

Zurückkommend auf das M.–E.–Theorem möchte ich noch auf die Verallgemeinerungen hinweisen, die dieses inzwischen erfahren hat. Dass E Fundamentallösung von $P(\partial)$ ist, lässt sich auch durch die Faltungsgleichung $E * P(\partial)\delta = \delta$ ausdrücken, und man kann allgemeiner nach Fundamentallösungen von Faltungskernen $K \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ fragen, d.h. nach $E \in \mathcal{D}'$ mit $E * K = \delta$. In [E2] zeigte L. Ehrenpreis, dass für (nicht identisch verschwindende) Differenzendifferentialoperatoren

$$K = \sum_{k=1}^{r} P_k(\partial)\delta(x - x_k), \quad r \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n,\ P_k(\partial) \in \mathbb{C}[\partial], \tag{5}$$

wie sie in der Systemtheorie auftreten, Fundamentallösungen existieren. (Das M.–E.–Theorem ergibt sich dann aus dem Spezialfall $r = 1, x_1 = 0$.) L. Hörmander gab allgemeine Bedingungen für die "Invertierbarkeit" von $K \in \mathcal{E}'$, die das Resultat von Ehrenpreis implizieren, vgl. [H4, Cor. 16.3.18, p. 333]. In [W5, Prop. 2, p. 461] wird eine explizite Darstellung einer Fundamentallösung für K wie in (5) angegeben.

Schließlich weise ich noch auf die diskrete Version des M.–E.–Theorems von D. Zeilberger hin ([Z2]), sowie auf die von der Kontrolltheorie motivierte Suche nach Fundamentallösungen bei "räumlich invarianten Systemen", vgl. [S2], [SW].

References

[A] Atiyah, M.F., *Resolution of singularities*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 145–150.

[B1] Bernstein, I.N., *Modules over a ring of differential operators. Study of fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 89–101; Transl. from И.Н. Бернштейн: Модули над кольцом дифференциальных оператороб. Иследование фундаментальных решений уравнений с постоянными коэфициентами, Функц. Анализ и Прил. **5** (2) (1971), 1–16.

[B2] Brigola, R., *Fourier–Analysis und Distributionen (Eine Einführung mit Anwendungen)*, tredition, Hamburg, 2012.

[E1] Ehrenpreis, L., *Solution of some problems of division. Part I. Division by a polynomial of derivation*, Am. J. Math. **76** (1954), 883–903.

[E2] ______ , *Solution of some problems of division. Part II. Division by a punctual distribution*, Am. J. Math. **77** (1955), 286-292.

[F] Fredholm, I., *Sur l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique à coefficients constants*, Rend. Circ. Mat. Palermo **25** (1908), 346–351; Œuvres complètes: 117–122.

[GS] Gel'fand, I.M., and G.E. Shilov, *Generalized functions. Vol. II (Spaces of fundamental and generalized functions)*, Academic Press, New York, 1968; Transl. from И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов: Обобщённые функции, Вып. 2, Физматгиз, Москва, 1958.

[H1] Hörmander, L., *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math. **94** (1955), 161–248.

[H2] ______ , *On the division of distributions by polynomials*, Ark. Mat. **3** (1958), 555–568.

[H3] ______ , *Linear partial differential operators*, Grundlehren Math. Wiss. 116, 3rd ed., Springer, Berlin, 1969.

[H4] ______ , *The analysis of linear partial differential operators. Vol. II (Differential operators with constant coefficients)*, Grundlehren Math. Wiss. 257, Springer, Berlin, 1983.

[K] König, H., *An explicit formula for fundamental solutions of linear partial differential equations with constant coefficients*, Proc. AMS **120** (1994), 1315–1318.

[L] Laplace, P.S., *Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris (1787/1789), 201–234; cf. also Traité de mécanique céleste II, no. 11, and Œuvres XI, 275–292.

[Ł] Łojasiewicz, S., *Sur le problème de la division*, Studia Math. **18** (1959), 87–136.

[M] Malgrange, B., *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier **6** (1955/56), 271–355.

[O] Ortner, N., *Regularisierte Faltung von Distributionen. Teil 1: Zur Berechnung von Fundamentallösungen. Teil 2: Eine Tabelle von Fundamentallösungen*, ZAMP **31** (1980), 133–173.

[OW1] Ortner, N., and P. Wagner, *A short proof of the Malgrange–Ehrenpreis theorem*, In: Functional analysis, Proc. 1st Int. Workshop in Trier, Germany, 1994 (ed. by S. Dierolf, S. Dineen and P. Domański), 343–352, de Gruyter, Berlin, 1996.

[OW2] ______ , *A survey on explicit representation formulae for fundamental solutions of linear partial differential operators*, Acta Appl. Math. **47** (1997), 101–124.

[OW3] ______ , *Fundamental matrices of homogeneous hyperbolic systems. Applications to crystal optics, elastodynamics and piezoelectromagnetism*, Z. Angew. Math. Mech. **84** (2004), 314–346.

[OW4] ______ , *The fundamental matrix of the system of linear elastodynamics in hexagonal media. Solution to the problem of conical refraction*, IMA J. Appl. Math. **73** (2008), 412–447.

[OW5] ______ , *On conical refraction in hexagonal and cubic media*, SIAM J. Appl. Math. **70** (2009), 1239–1259.

[OW6] ______ , *Fundamental solutions of linear partial differential operators / Theory and practice*, Springer, 2015 (to appear).

[S1] Schwartz, L., *Théorie des distributions*, Nouv. éd., Hermann, Paris, 1966.

[S2] Sasane, A., *Algebraic characterization of autonomy and controllability of behaviours of spatially invariant systems*, preprint, http://arxiv.org/abs/1208.6496.

[SW] Sasane, A., and P. Wagner, *Division problem for spatially periodic distributions*, J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), 70–75.

[T1] Trèves, F., *Solution élémentaire d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre*, C. R. Acad. Sci. Paris **242** (1956), 1250–1252.

[T2] ______ , *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, New York, 1967.

[TPY] Treves, F., G. Pisier and M. Yor, *Laurent Schwartz (1915–2002)*, Notices of the AMS **50** (2003), 1072–1078.

[W1] Wagner, P., *Fundamental solutions of real homogeneous cubic operators of principal type in three dimensions*, Acta Math. **182** (1999), 283-300.

[W2] ______ , *On the fundamental solutions of a class of elliptic quartic operators in dimension 3*, J. Math. Pures Appl. **81** (2002), 1191–1206.

[W3] ______ , *On the explicit calculation of fundamental solutions*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 404–418.

[W4] ______ , *On the fundamental solutions of a class of hyperbolic quartic operators in dimension 3*, Ann. Mat. Pura Appl. **184** (2005), 139–159.

[W5] ______ , *A new constructive proof of the Malgrange–Ehrenpreis theorem*, Amer. Math. Monthly **116** (2009), 457–462.

[W6] ______ , *The singular terms in the fundamental matrix of crystal optics*, Proc. Roy. Soc. A **467** (2011), 2663–2689.

[Z1] Zeilon, N., *Sur les intégrales fondamentales des équations à charactéristique réelle de la Physique Mathématique*, Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. **9** (1913/14), no. 18, 1–70.

[Z2] Zeilberger, D., *The dicrete analog of the Malgrange-Ehrenpreis theorem*, In: From Fourier analysis and number theory to Radon transforms and geometry, Developments in Math. 28 (In memory of L. Ehrenpreis, ed. by H. Farkas, R. Gunning, M. Knopp and B.A. Taylor), 537–541, Springer, New York, 2013.