Skriptum zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Peter Wagner

VO 4 SoSe 2005

Institut für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften, Arbeitsbereich Technische Mathematik Fakultät für Bauingenieurwissenschaften, Universität Innsbruck

Inhaltsverzeichnis

Übersicht:

Partielle Differentialgleichungen sind Differentialgleichungen für Funktionen in mehreren Variablen. Die Methoden unterscheiden sich etwas bei linearen bzw. nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Wir beschränken uns auf erstere. Die drei prototypischen linearen partiellen Differentialgleichungen sind:

a) Laplacegleichung: $\Delta_n f = g$ („elliptisch")

b) Wellengleichung: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n\right) f = g$ („hyperbolisch")

c) Wärmeleitungsgleichung: $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n\right) f = g$ („parabolisch")

Nach einem pädagogischen Einführungsteil (Fourier-Analysis und partielle Differentialgleichungen, siehe *http://techmath.uibk.ac.at/wagner/lehre/*) werden, in Fortsetzung der Vorlesung Funktionalanalysis (FA) WS 2004/05, weitere Teile des Buches *H. Triebel: Höhere Analysis* durchstudiert.

§ 5 Soboleveräume

(vgl. Skriptum ‚Funktionalanalysis', § 5, p. 30)

Def.: Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Es sei

1) $\overline{C}^{\infty}(\Omega) := \big\{f \in C^\infty(\Omega);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n:\ \partial^\alpha f$ lässt sich stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen und $\exists N \in \mathbb{N}:$ $\forall x \in \Omega$ mit $|x| \geq N : f(x) = 0\big\}$;

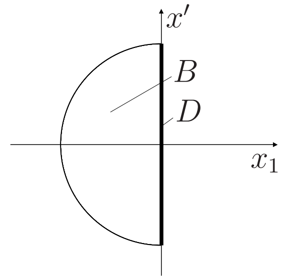
2) $W_p^k(\Omega) :=$ Abschluss von $\overline{C}^{\infty}(\Omega)$ in $W^{p,k}(\Omega)$.

Bemerkungen

1) $W_p^k(\Omega)$ ist wieder ein Banachraum mit $\|f\|_{W^{p,k}} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}$, vgl. FA, p. 30 und Übung 1 zu FA.

2) Nach FA, Satz 5.2, p. 30, ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset W^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ dicht und daher auch $W_p^k(\mathbb{R}^n) = W^{p,k}(\mathbb{R}^n)$. Allgemein gilt $W_p^k(\Omega) = W^{p,k}(\Omega)$, wenn $\partial\Omega$ genügend glatt ist (o.B.). $\mathcal{D}(\Omega)$ ist aber im Allgemeinen nicht dicht in $W_p^k(\Omega)$, vgl. Satz 5.4.

Lemma 5.1
Es sei $1 \le p < \infty,\ D = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1};\ |x'| < 1\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < 1,\ x_1 < 0\},\ f \in \overline{C}^1(B)$ mit $f(x) = 0$ für $|x| = 1$.



Dann gilt

$$\big\| f(0, x') \big\|_{L^p(D)} \le \|f\|_{W^{p,1}(B)}.$$

Beweis: Wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x' \in D$, so ist

$$\begin{aligned}
\big|f(0,x')\big| &= \Big| f(0,x') - f\big(-\sqrt{1-|x'|^2}\,, x'\big)\Big| \le \\
&\le \int\limits_{-\sqrt{1-|x'|^2}}^{0} 1 \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x')\right| \mathrm{d}t \le \text{ (Hölder)} \\
&\le \underbrace{\|1\|_{L^q\left(\left[-\sqrt{1-|x'|^2}\,,0\right]\right)}}_{\le 1} \cdot \left(\int\limits_{-\sqrt{1-|x'|^2}}^{0} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x')\right|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ \big\|f(0,x')\big\|^p_{L^p(D)} = \int\limits_D \big|f(0,x')\big|^p \,\mathrm{d}x' \le$$

$$\le \int\limits_D \left(\int\limits_{-\sqrt{1-|x'|^2}}^{0} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x')\right|^p \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x' = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|^p_{L^p(B)}$$

$$\Longrightarrow \ \big\|f(0,x')\big\|_{L^p(D)} \le \|f\|_{W^{p,1}(B)}$$

$\square$

Bemerkung Wie in FA, p. 38 sei $\Omega \in C^1$, d.h. Ω ist beschränkt und $\partial\Omega$ ist eine C^1–Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. $\partial\Omega$ ist ein Riemannscher Raum mit der von der Standardmetrik induzierten Metrik $i^*\big(\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^j\big)$. Das zugehörige Oberflächenmaß $\mu = \hat{\Omega}_{i*g}$ ist in Koordinaten $\sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \xi^k}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^l}\right)\right)_{k,l}}\,\mathrm{d}\xi^1 \ldots \mathrm{d}\xi^{n-1}$, vgl. Diffb. Mfkt., p. 91, oder Analysis

3, pp. 77, 78. (Z.B. für $\partial\Omega = R\cdot\mathbb{S}^2$ ist in Kugelkoordinaten $\mu = R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$.) Da Ω beschränkt ist, ist $(\partial\Omega,\mu)$ ein endlicher Maßraum. Wir setzen $L^p(\partial\Omega) := L^p(\partial\Omega,\mu)$ und fixieren nun $p\in[1,\infty)$.

Lemma 5.2 $\forall\Omega\in C^1 : \exists C>0 :$

$$\forall f\in \overline{C}^1(\Omega) : \big\| f\,|_{\partial\Omega}\big\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\cdot \|f\|_{W^{p,1}(\Omega)}$$

Beweis: Wie in FA, p. 38, ist $\overline{\Omega}\subset U\cup\bigcup\limits_{i=1}^{N} W_i$ mit $\overline{U}\subset\Omega$ und W_i Kartengebiete,

$\varphi_i : W_i \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \big\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|<1\big\},\ \varphi_i\ C^1,\ \varphi_i$ bijektiv, $\varphi_i^{-1}\ C^1$, φ_i', $(\varphi_i^{-1})'$ beschränkt,

$\varphi_i(W_i\cap\Omega) = B = \big\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|<1,\ x_1<0\big\}$.

Wenn $W_0 := U$ und χ_i, $i=0,\dots,N$, eine C^1–Zerlegung der 1 zur Überdeckung $\bigcup\limits_{i=0}^{N} W_i$ ist (s. Diffb. Mfkt., p. 59), und $f_i = \chi_i\cdot f$, so folgt

$$\big\| f\,|_{\partial\Omega}\big\|_{L^p(\partial\Omega)} = \Big\| \sum_{i=1}^{N} f_i\,|_{\partial\Omega}\Big\|_{L^p(\partial\Omega)} \le \sum_{i=1}^{N}\big\|f_i\,|_{\partial\Omega}\big\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C_1\sum_{i=1}^{N}\big\|(f_i\circ\varphi_i^{-1})(0,x')\big\|_{L^p(D)}$$

$$\underset{\text{L. 5.1}}{\le} C_1\sum_{i=1}^{N}\|f_i\circ\varphi_i^{-1}\|_{W^{p,1}(B)} \le C\cdot\|f\|_{W^{p,1}(\Omega)},$$

denn z.B. $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(f_i\circ\varphi_i^{-1}) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \sum\limits_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\circ\varphi_i^{-1}\cdot\underbrace{\dfrac{\partial(\varphi_i^{-1})_k}{\partial x_j}}_{\text{beschränkt}}$,

$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} = \underbrace{\dfrac{\partial\chi_i}{\partial x_k}}_{\text{beschränkt}}\cdot f + \underbrace{\chi_i}_{\text{beschränkt}}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ (Produktregel) und

$\displaystyle\int\limits_B \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ\varphi_i^{-1}\right|^p \mathrm{d}x \underset{\substack{\downarrow\\ x=\varphi_i(y)}}{=} \int\limits_{W_i\cap\Omega}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(y)\right|^p\cdot\big|h(y)\big|\,\mathrm{d}y \le C_2\left\|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\|^p_{L^p(\Omega)}$, weil $h:=\det(\varphi_i')$

beschränkt ist. $\square$

Satz 5.3 + Def.
Für $\Omega\in C^1$ existiert genau ein **Spuroperator** $S : W_p^1(\Omega)\longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ mit

i) $\forall f\in\overline{C}^\infty(\Omega) : Sf = f|_{\partial\Omega}$,

ii) S ist stetig und linear.

Für $f \in W_p^1(\Omega)$ schreiben wir $f|_{\partial\Omega}$ statt Sf.

Weiters sei $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) := \ker S = \big\{f \in W_p^1(\Omega);\ f|_{\partial\Omega} = 0\big\}$.

Beweis: $\overline{C}^\infty(\Omega) \subset W_p^1(\Omega)$ dicht, $A : \overline{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega), f \longmapsto f|_{\partial\Omega}$ ist stetig (bzgl. $\|\cdot\|_{W^{p,1}(\Omega)}$ links) nach Lemma 5.2 $\Longrightarrow$ (Satz 1.3', FA, p. 5) $\Longrightarrow$ $\exists_1$ stetige Fortsetzung $S = \hat{A}$. $\square$

Satz 5.4

Für $\Omega \in C^1$ ist $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ der Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{p,1}(\Omega)$.

Beweis: Klarerweise ist $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) = \ker S$ abgeschlossen in $W^{p,1}(\Omega)$ und $\mathcal{D}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Wir haben noch zu zeigen, dass sich $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ durch Funktionen in $\mathcal{D}(\Omega)$ approximieren lässt. $\varphi_i, W_i, \chi_i, f_i$ seien wie in Seite 3.

a) $\operatorname{supp} f_0 \subset W_0 = U$, $\overline{U} \subset \Omega \implies (f_0)_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ für $0 < h < \delta$ und $(f_0)_h \longrightarrow f_0$ in $W^{p,1}(\Omega)$ für $h \searrow 0$, vgl. Lemma 3.4, FA, p. 19, oder Satz 5.2, Beweis, b), FA, p. 30.

b) Es bleibt noch f_i für $1 \le i \le N$ fest durch Funktionen in $\mathcal{D}(\Omega)$ zu approximieren. Es seien $g_k \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ mit $g_k \longrightarrow f$ in $W^{p,1}(\Omega)$ und $v := (\chi_i \cdot f) \circ \varphi_i^{-1} \in W^{p,1}(B)$, $v_k := (\chi_i \cdot g_k) \circ \varphi_i^{-1} \in \overline{C}^1(B) \implies v_k \longrightarrow v$ in $W^{p,1}(B)$;

$$g_k\big|_{\partial\Omega} \longrightarrow f\big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ in } L^p(\partial\Omega),\ \chi_i\big|_{\Omega\cap\partial W_i} = 0 \implies v_k\big|_{\partial B} \longrightarrow 0 \text{ in } L^p(\partial B).$$

Wenn $V(x) := \left\{\begin{array}{ccc} v(x) & : & x \in B, \\ 0 & : & x \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{array}\right\}$, so gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le j \le n$,

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(\varphi) = -T_V\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\int\limits_B v(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = -\lim_{k\to\infty}\int\limits_B v_k(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x.$$

Wir wenden den Satz von Gauß auf das Vektorfeld $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ v_k\cdot\varphi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – j–te Stelle an;

$$\operatorname{div} X = v_k\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\,\varphi \text{ und } \int\limits_{\partial B} X^T\cdot N\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\partial B} \underbrace{v_k\varphi}_{\substack{\to 0 \text{ in} \\ L^1(\partial B)}} N_j\,\mathrm{d}s \to 0 \text{ für } k\to\infty$$

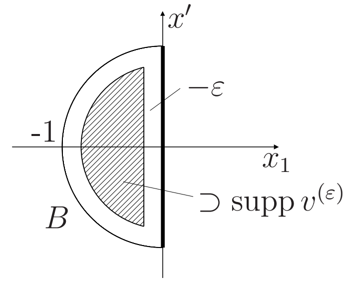
(mit N = Außeneinheitsnormale) $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(\varphi) = \lim_{k\to\infty}\int\limits_B \varphi\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int\limits_B \varphi(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n) \implies V \in W^{p,1}(\mathbb{R}^n).$$

c) Für $\varepsilon > 0$ sei $V^{(\varepsilon)}(x) := V(x_1+\varepsilon, x')$ (mit $x = (x_1, x')$) $\implies V^{(\varepsilon)} \longrightarrow V$ in $W^{p,1}(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \searrow 0$ (vgl. FA, Übung 16) $\implies v^{(\varepsilon)} := V^{(\varepsilon)}\big|_B \longrightarrow v$ in $W^{p,1}(B)$ und $\operatorname{supp} v^{(\varepsilon)} \subset B$ für ε klein:

$\implies v^{(\varepsilon)} \circ \varphi_i \longrightarrow f_i$ in $W^{p,1}(\Omega)$ für $\varepsilon \searrow 0$ und $\operatorname{supp} v^{(\varepsilon)} \circ \varphi_i \subset \Omega$ kompakt.



Wenn $(v^{(\varepsilon)} \circ \varphi_i)_h$ wieder Regularisierungen wie in a) sind, so ist (für $0 < h < \delta$) $(v^{(\varepsilon)} \circ \varphi_i)_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $(v^{(\varepsilon)} \circ \varphi_i)_h \longrightarrow v^{(\varepsilon)} \circ \varphi_i$ in $W^{p,1}(\Omega)$ für $h \searrow 0$ $\square$

Bemerkung Für $\Omega \in C^1$ und $f \in W_p^k(\Omega)$ ist $\partial^\alpha f \in W_p^1(\Omega)$ für $0 \le |\alpha| < k$ und daher erhalten wir den Spuroperator $S : W_p^k(\Omega) \longrightarrow \prod_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|<k}} L^p(\partial\Omega) : f \longmapsto \big(\partial^\alpha f|_{\partial\Omega}\big)_\alpha$.

Analog zu Satz 5.4 gilt: $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega) := \ker S = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ in $W^{p,k}(\Omega)$ falls $\Omega \in C^k$.

§ 12 Schwach singuläre Integraloperatoren

Im Folgenden sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $H = L^2(\Omega)$.
Wenn $K(x,y) \in L^2(\Omega\times\Omega)$, so ist der zugehörige Integraloperator $K \in \operatorname{Com}(H)$ (s. Satz 7.5, FA, p. 40) und K^* hat den Kern $\overline{K(y,x)}$ (vgl. FA, pp. 70, 71). Wir betrachten nun andere Kerne.

Lemma 12.1
$K : \Omega\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sei messbar, $\forall f \in H$ seien $K(x,y)f(y)$ und $K(x,y)f(x) \in L^1(\Omega\times\Omega)$, $K : H \longrightarrow H : f \longmapsto \int_\Omega K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ sei wohldefiniert und stetig. Dann hat K^* den Kern $\overline{K(y,x)}$, d.h. $(K^*g)(x) = \int_\Omega \overline{K(y,x)}g(y)\,\mathrm{d}y$.

Bemerkung
Wenn $K(x,y)f(y) \in L^1(\Omega\times\Omega)$, so ist $Kf = \left[x \longmapsto \int_\Omega K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right] \in L^1(\Omega)$ nach Fubini.
Dass $K : H \longrightarrow H$ wohldefiniert ist, bedeutet, dass $Kf \in H = L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Beweis: $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ g \in H \implies K(x,y)\varphi(y)\overline{g(x)} \in L^1(\Omega\times\Omega)$

$$\underset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} (K\varphi, g) = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right) \overline{g(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_\Omega \varphi(y) \overline{\left(\int\limits_\Omega \overline{K(x,y)}\, g(x)\,\mathrm{d}x \right)}\,\mathrm{d}y = (\text{Umbenennung})$$

$$= \int\limits_\Omega \varphi(x) \overline{\underbrace{\left(\int\limits_\Omega \overline{K(y,x)}\, g(y)\mathrm{d}y \right)}_{\in L^1(\Omega),\text{ vgl. Bemerkung}}}\,\mathrm{d}x.$$

Andererseits ist $(K\varphi, g) = (\varphi, K^* g)$ mit $K^* g \in H = L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ und daher $(K^* g)(x) = \int\limits_\Omega \overline{K(y,x)} g(y)\,\mathrm{d}y.$ □

Def.:
Für $A(x,y) \in L^\infty(\Omega\times\Omega)$ und $0 \le \alpha < n$ heißt der Kern $K(x,y) = \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ **schwach singulär**.

Satz 12.1
$K(x,y)$ sei schwach singulär. Dann ist $K : H \longrightarrow H : f \longmapsto \int\limits_\Omega K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$ wohldefiniert, stetig und kompakt. K^* hat den Kern $\overline{K(y,x)}$.

Beweis:

a) Für $N > 0$ ist $\displaystyle\int\limits_{\{u\in\mathbb{R}^n;|u|\le N\}} \frac{\mathrm{d}u}{|u|^\alpha} = |\mathbb{S}^{n-1}| \cdot \int\limits_0^N r^{-\alpha+n-1}\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left.\frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right|_{r=0}^N =$

$$= \frac{2\pi^{n/2} N^{n-\alpha}}{(n-\alpha)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} =: C < \infty,\ \text{da } \alpha < n.$$

Wenn daher $\Omega \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \le \frac{N}{2}\right\}$, und $f \in L^1(\Omega)$, so ist $\displaystyle\int\limits_{\Omega\times\Omega} \big|K(x,y)f(y)\big|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le$

$$\le \|A\|_\infty \cdot \int\limits_\Omega \big|f(y)\big| \cdot \left(\int\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{|x-y|^\alpha} \right) \mathrm{d}y \underset{|u|\le N}{\overset{u=x-y}{\le}} \|A\|_\infty \cdot \|f\|_1 \cdot C < \infty$$

Damit ist die 1. Voraussetzung in Lemma 12.1 erfüllt.

b) $f \in L^2(\Omega) \implies \|Kf\|_2^2 = \int\limits_\Omega \big|Kf(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \leq$

$$\leq \|A\|_\infty^2 \cdot \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_\Omega \frac{\big|f(y)\big|}{|x-y|^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha/2}} \,\mathrm{d}y \Bigg)^2 \mathrm{d}x \overset{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq \|A\|_\infty^2 \cdot \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_\Omega \frac{\big|f(y)\big|^2}{|x-y|^{\alpha}} \,\mathrm{d}y \Bigg) \cdot \underbrace{\Bigg(\int\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{\alpha}} \Bigg)}_{\leq C} \mathrm{d}x \overset{\text{Fubini-Tonelli}}{\leq}$$

$$\leq \|A\|_\infty^2 \cdot C \cdot \int\limits_\Omega \big|f(y)\big|^2 \cdot \underbrace{\Bigg(\int\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{|x-y|^{\alpha}} \Bigg)}_{\leq C} \mathrm{d}y \leq \|A\|_\infty^2 C^2 \|f\|_2^2$$

$$\implies K \in L(H), \quad \underbrace{\|K\|}_{\text{Op.norm}} \leq \|A\|_\infty \cdot C.$$

Nach a), b) und Lemma 12.1 hat K^* den Kern $\overline{K(y,x)}$.

c) Noch zu zeigen ist $K \in \mathrm{Com}(H)$.

Für $\varepsilon > 0$ ist $K(x,y) = \underbrace{\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \cdot Y\big(|x-y| - \varepsilon\big)}_{K_{1,\varepsilon}(x,y)} + \underbrace{\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \cdot Y\big(\varepsilon - |x-y|\big)}_{K_{2,\varepsilon}(x,y)}$

$K_{1,\varepsilon}(x,y) \in L^\infty(\Omega \times \Omega) \subset L^2(\Omega \times \Omega) \underset{\text{Satz 7.5}}{\implies} K_{1,\varepsilon} \in \mathrm{Com}(H)$,

$$\|K_{2,\varepsilon} f\|^2 \underset{\text{wie in b)}}{\leq} \|A\|_\infty^2 \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_\Omega \frac{\big|f(y)\big|^2}{|x-y|^{\alpha}} \,\mathrm{d}y \Bigg) \cdot \underbrace{\Bigg(\int\limits_{\{y \in \Omega;\, |x-y| \leq \varepsilon\}} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{\alpha}} \Bigg)}_{\underset{\text{a)}}{\leq} |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{\varepsilon^{n-\alpha}}{n-\alpha}} \mathrm{d}x$$

$$\leq \|A\|_\infty^2 \cdot C \cdot \|f\|_2^2 \cdot |\mathbb{S}^{n-1}| \cdot \frac{\varepsilon^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$

d.h. $\|K_{2,\varepsilon}\| \leq C_1 \cdot \varepsilon^{(n-\alpha)/2} \to 0$ für $\varepsilon \searrow 0 \underset{\text{Satz 6.4, FA, p. 32}}{\implies} K = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} K_{1,\varepsilon} \in \mathrm{Com}(H)$ $\square$

Bemerkung Für schwach singuläre Integraloperatoren gilt also die Fredholmsche Alternative, vgl. FA, p. 71.

Lemma 12.2
K_1, K_2 seien schwach singulär mit $0 \le \alpha_1, \alpha_2 < n$. Dann ist auch $K_1 \cdot K_2 =: K$ ein schwach singulärer Integraloperator. Für seinen Kern gilt

$$\exists C > 0 : \forall x \neq y \in \Omega : \big|K(x,y)\big| \le C \cdot \begin{cases} 1 & : \ \alpha_1 + \alpha_2 < n \\ 1 + \big|\ln|x-y|\big| & : \ \alpha_1 + \alpha_2 = n \\ \dfrac{1}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}} & : \ \alpha_1 + \alpha_2 > n \end{cases}$$

[bei geeigneter Wahl von $K(x,y)$, das durch K nur fast überall bestimmt ist].

Beweis:

a) Für $f \in H = L^2(\Omega)$ ist ($x-$ f.ü.)

$$(K_1K_2f)(x) = \int\limits_\Omega \frac{A_1(x,y)}{|x-y|^{\alpha_1}} \underbrace{\left(\int\limits_\Omega \frac{A_2(y,z)}{|y-z|^{\alpha_2}} f(z)\,\mathrm{d}z\right)}_{(K_2f)(y)} \mathrm{d}y.$$

In c) sehen wir, dass der Satz von Fubini anwendbar ist und daher ($x-$f.ü.)

$$(K_1K_2f)(x) = \int\limits_\Omega f(z) \underbrace{\left(\int\limits_\Omega \frac{A_1(x,y)A_2(y,z)}{|x-y|^{\alpha_1}\cdot|y-z|^{\alpha_2}}\,\mathrm{d}y\right)}_{K(x,z)} \mathrm{d}z.$$

Außerdem ergibt sich in b) die obige Abschätzung für K und daher ist K wieder ein schwach singulärer Integraloperator, denn $0 \le \alpha_1+\alpha_2-n < n$ für $0 \le \alpha_i < n$, $\alpha_1+\alpha_2 > n$ und für $\alpha_1+\alpha_2 = n$ verwenden wir

$$\forall N \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists C > 0 : \forall t \in (0,N] : 1 + |\ln t| \le Ct^{-\varepsilon}$$

b) Wir betrachten zuerst $I = I_{x,z} := \displaystyle\int\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{\alpha_1}\cdot|y-z|^{\alpha_2}}$ für $x \neq z \in \Omega$. Wie früher sei $\Omega \subset \left\{u \in \mathbb{R}^n;\ |u| \le \frac{N}{2}\right\}$.
Wenn $v := \dfrac{z-x}{|x-z|}$ und $\eta = \dfrac{y-x}{|x-z|} \implies |\eta| \le \dfrac{N}{|x-z|}$, $\mathrm{d}\eta = \dfrac{\mathrm{d}y}{|x-z|^n}$,

$|x-y|^{\alpha_1} = |x-z|^{\alpha_1}|\eta|^{\alpha_1}$ und $|y-z|^{\alpha_2} = |y-x+x-z|^{\alpha_2} = \Big|\eta|x-z| + x - z\Big|^{\alpha_2} =$

$$= |x-z|^{\alpha_2}\cdot|\eta - v|^{\alpha_2} \implies I \le |x-z|^{n-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{|\eta| \le \frac{N}{|x-z|}} \frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-v|^{\alpha_2}}.$$

$\alpha)$ $|v| = 1,\ \alpha_i < n \implies C_1 := \int\limits_{|\eta|\le 2} \dfrac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta - v|^{\alpha_2}} < \infty$ und ist unabhängig von v, d.h. von x, z.

$\beta)$ $|\eta| \ge 2 \implies |\eta - v| \ge |\eta| - 1 \ge \frac{1}{2}|\eta| \implies$ für $M \ge 2$ ist

$$\int\limits_{2\le|\eta|\le M} \frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta - v|^{\alpha_2}} \le 2^{\alpha_2} \int\limits_{2\le|\eta|\le M} \frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{\alpha_1+\alpha_2}} = 2^{\alpha_2} \cdot |\mathbb{S}^{n-1}| \cdot \int\limits_2^M r^{-\alpha_1-\alpha_2+n-1}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{O}(M^{n-\alpha_1-\alpha_2}) & : & \alpha_1 + \alpha_2 < n \\ \mathcal{O}(\log M) & : & \alpha_1 + \alpha_2 = n \\ \mathcal{O}(1) & : & \alpha_1 + \alpha_2 > n \end{array} \right\} \text{ für } M \to \infty. \text{ Wegen } M = \frac{N}{|x - z|}$$

folgt

$$\exists C > 0 : \forall x \ne z \in \Omega : I_{x,z} \le C|x - z|^{n-\alpha_1-\alpha_2} \left\{ \begin{array}{rcl} |x - z|^{\alpha_1+\alpha_2-n} & : & \alpha_1 + \alpha_2 < n \\ 1 + \big|\ln|x - z|\big| & : & \alpha_1 + \alpha_2 = n \\ 1 & : & \alpha_1 + \alpha_2 > n. \end{array} \right.$$

c) Nach b) ist $K(x, z)$ schwach singulär und gilt die Abschätzung im Lemma. [Genau genommen ist $\big|K(x, z)\big| \le \|A_1\|_\infty \|A_2\|_\infty \cdot I_{x,z}$ für $x \ne z,\ (x, z) \in \Omega^2 \setminus (N_1 \times N_2)$, wobei $N_1 = \big\{x \in \Omega; \int\limits_{|A_1(x,y)|>\|A_1\|_\infty} \mathrm{d}y > 0\big\},\ N_2 = \big\{z \in \Omega; \int\limits_{|A_2(y,z)|>\|A_2\|_\infty} \mathrm{d}y > 0\big\}$ Nullmengen sind (da z.B. $\int\limits_{N_1} \mathrm{d}x = \iint\limits_{|A_1(x,y)|>\|A_1\|_\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\big)$.]

Für $x \in \Omega \setminus N_1$ ist $\displaystyle\int\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{\big|A_1(x, y)\big| \cdot \big|A_2(y, z)\big|}{|x - y|^{\alpha_1} \cdot |y - z|^{\alpha_2}} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le$

$\le \|A_1\|_\infty \cdot \|A_2\|_\infty \cdot \displaystyle\int\limits_\Omega I_{x,z}\big|f(z)\big|\,\mathrm{d}z < \infty$ $x-$f.ü. nach Satz 12.1 und daher ist Fubini in a) anwendbar. □

Satz 12.6
K sei ein schwach singulärer Integraloperator, $h \in L^\infty(\Omega) \subset H,\ \lambda \ne 0$ und $f \in H = L^2(\Omega)$ mit $(K - \lambda I)f = h$. Dann ist auch $f \in L^\infty(\Omega)$.

Beweis:

a) $K(x,y) = \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha_1}} \underset{\text{L. 12.2}}{\Longrightarrow} K \cdot K = K^2$ hat einen Kern mit

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0 & : \quad 2\alpha_1 < n \\ \varepsilon & : \quad 2\alpha_1 = n \qquad \text{(mit } \varepsilon > 0 \text{ beliebig)} \\ 2\alpha_1 - n & : \quad 2\alpha_1 > n \end{cases}$$

Für den Kern von K^3 ist $\alpha_3 = 0$ falls $\alpha_1 + \alpha_2 < n$, d.h. für $2\alpha_1 \leq n$ oder

$3\alpha_1 - n < n$, d.h. wenn $\alpha_1 < \frac{2}{3}n$. Ansonsten ist $\alpha_3 = \begin{cases} \varepsilon & : \quad \alpha_1 = \frac{2}{3}n \\ 3\alpha_1 - 2n & : \quad \alpha_1 > \frac{2}{3}n. \end{cases}$

Induktiv erhalten wir $\alpha_k = 0$ falls $\alpha_1 < \frac{k-1}{k} \cdot n$.

b) Wenn $k \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_1 < \frac{k-1}{k}n$, so ist nach a) der Kern $K^{(k)}(x,y)$ von K^k beschränkt und daher

$$\left|K^k f(x)\right| = \left| \int_\Omega K^{(k)}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq C\|f\|_1,$$

d.h. $K^k f \in L^\infty(\Omega)$.

Weiters ist $K^j h \in L^\infty(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$, denn

$$\left|K^j h(x)\right| = \left| \int_\Omega K^{(j)}(x,y) h(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq \|h\|_\infty \cdot \int_\Omega \left|K^{(j)}(x,y)\right| \mathrm{d}y \leq C_j \|h\|_\infty,$$

vgl. Seite 6 unten.

c) $(K - \lambda I) f = h \implies \Big(\underbrace{\frac{1}{\lambda}K}_{K_{\text{neu}}} - I\Big) f = \underbrace{\frac{1}{\lambda}h}_{h_{\text{neu}}} \implies$ oEdA $\lambda = 1$

$\implies (K^k - I)f = (K^{k-1} + \ldots + K + I)(K - I) f = (K^{k-1} + \ldots + I)h$

$\underset{\text{b)}}{\Longrightarrow} f = K^k f - (K^{k-1} + \ldots + I) h \in L^\infty(\Omega)$ $\square$

Satz 12.7
$A : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei stetig, $0 \leq \alpha < n$, $K(x,y) = \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}$, $h \in \overline{C}(\Omega)$, $\lambda \neq 0$ und $f \in H = L^2(\Omega)$ mit $(K - \lambda I) f = h$. Dann ist auch $f \in \overline{C}(\Omega)$.

Beweis:

a) Nach Satz 12.6 ist $f \in L^\infty(\Omega)$; in b) zeigen wir, dass dann $Kf \in \overline{C}(\Omega)$; wegen $(K - \lambda I)f = h \implies f = \frac{1}{\lambda}(Kf - h)$ folgt dann $f \in \overline{C}(\Omega)$.

b) Es sei $\varepsilon > 0$, $K_{1,\varepsilon}(x,y) := \begin{cases} \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} & : \quad |x-y| \geq \varepsilon \\ \dfrac{A(x,y)}{\varepsilon^\alpha} & : \quad |x-y| \leq \varepsilon \end{cases}$ und

$K_{2,\varepsilon}(x,y) = K(x,y) - K_{1,\varepsilon}(x,y) \implies K_{1,\varepsilon} \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \implies$

$K_{1,\varepsilon}$ gleichmäßig stetig auf $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \implies \forall x, x' \in \overline{\Omega}:$

$$\left|K_{1,\varepsilon}f(x) - K_{1,\varepsilon}f(x')\right| \leq \int\limits_\Omega \underbrace{\left|K_{1,\varepsilon}(x,y) - K_{1,\varepsilon}(x',y)\right|}_{\leq \varepsilon_1 \text{ für } |x-x'| \leq \delta} \left|f(y)\right| \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 \|f\|_1 \text{ für } |x-x'| \leq \delta \implies K_{1,\varepsilon}f \in \overline{C}(\Omega).$$

Andererseits ist $\left|K_{2,\varepsilon}f(x)\right| = \left|\int\limits_\Omega K_{2,\varepsilon}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq$

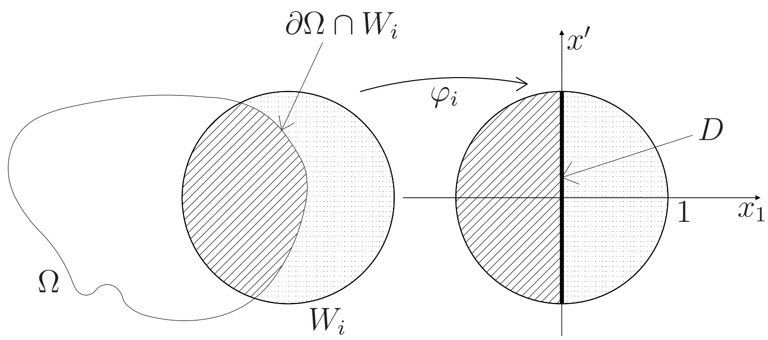
$$\leq \|f\|_\infty \cdot \|A\|_\infty \cdot \underbrace{\int\limits_{|u| \leq \varepsilon} \left(\frac{1}{|u|^\alpha} - \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right) \mathrm{d}u}_{|\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\varepsilon (r^{-\alpha+n-1} - \varepsilon^{-\alpha} r^{n-1})\,\mathrm{d}r} = \|f\|_\infty \|A\|_\infty \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\varepsilon^{n-\alpha}}{n-\alpha} - \frac{\varepsilon^{n-\alpha}}{n}\right) \to 0$$

für $\varepsilon \searrow 0$, d.h. $K_{2,\varepsilon}f \to 0$ in $L^\infty(\Omega) \implies$

$$Kf = \lim_{\varepsilon \searrow 0}\big(\text{in } L^\infty(\Omega)\big) K_{1,\varepsilon}f \in \overline{C}(\Omega) = C(\overline{\Omega}).$$ □

Bemerkung In § 16 brauchen wir Integraloperatoren auf $\partial\Omega$ für $\Omega \in C^1$. Wir setzen $H = L^2(\partial\Omega, \mu)$ (vgl. Seite 2) und setzen entweder $K \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ oder $K(x,y) = \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ voraus, wobei $A \in L^\infty(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ und $0 \leq \alpha < n-1$ (beachte, dass $\dim \partial\Omega = n-1$!)

φ_i, W_i, χ_i seien wie in Seite 3.



$$\forall j : \forall x \in \partial\Omega : 1 = \chi_{W_j}(x) + \chi_{\partial\Omega\setminus W_j}(x) = \chi_{W_j}(x) + \sum_{i\neq j} \chi_{\partial\Omega\setminus W_j}(x) \cdot \chi_i(x) \qquad \Big| \cdot \chi_j(y)$$

$$\Longrightarrow \ \forall x, y \in \partial\Omega : 1 = \sum_{j=1}^{N} \chi_j(y) = \sum_{j=1}^{N} \chi_{W_j}(x) \cdot \chi_j(y) + \sum_{i\neq j}\sum \chi_{\partial\Omega\setminus W_j}(x)\chi_i(x)\chi_j(y) \ \Longrightarrow$$

$$K = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K_{ij} \text{ mit } K_{ij}(x,y) = K(x,y) \cdot \begin{cases} \chi_{W_j}(x)\chi_j(y) & : \ i = j \\ \chi_{\partial\Omega\setminus W_j}(x)\chi_i(x)\chi_j(y) & : \ i \neq j. \end{cases}$$

Wenn $D := \big\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1};\ |\xi| < 1\big\}$, so ist die Kartendarstellung $\hat{\varphi}_i : L^2(\partial\Omega \cap W_i, \mu) \longrightarrow L^2(D) : f \longmapsto f \circ \varphi_i^{-1} =$ "$f(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$" zwar kein Hilbertraumisomorphismus, aber ein Homöomorphismus, d.h. die Normen sind äquivalent, denn

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(\partial\Omega\cap W_i,\mu)} &= \int\limits_{\partial\Omega\cap W_i} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}s(x) = \\ &= \int\limits_{D} \big|f(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}\big|^2 \underbrace{\sqrt{\det\Big(\big(\tfrac{\partial x^T}{\partial \xi^k} \cdot \tfrac{\partial x}{\partial \xi^l}\big)_{k,l}\Big)}}_{0<C_1\le d(\xi)\le C_2} \,\mathrm{d}\xi^1 \ldots \mathrm{d}\xi^{n-1}. \end{aligned}$$

Der übertragene Kern $\tilde{K}_{ij}(\xi, \eta)$ ist in $L^2(D \times D)$ oder schwach singulär, wobei

$$\tilde{K}_{ij} \circ \hat{\varphi}_j = \hat{\varphi}_i \circ K_{ij} \text{ und } \tilde{K}_{ij}(\xi,\eta) = K_{ij}(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, \eta^1, \ldots, \eta^{n-1})\, d(\eta^1, \ldots, \eta^{n-1}).$$

Nach Satz 12.1 sind $\tilde{K}_{ij}$ und daher auch K_{ij} kompakt. Also ist auch

$$K : L^2(\partial\Omega, \mu) \longrightarrow L^2(\partial\Omega, \mu) : f \longmapsto \int\limits_{\Omega} K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}s(y)$$

kompakt. Ebenso übertragen sich Lemma 12.2 (mit $n-1$ statt n) und die Sätze 12.6, 12.7.

Kapitel 3

Partielle Differentialgleichungen und Distributionen

§ 13 Tensorprodukte und Faltungen von Distributionen

Wenn $f \in C(\mathbb{R}^m),\ g \in C(\mathbb{R}^n)$, so definiert man

$$f \otimes g : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{C} : \underbrace{(x, y)}_{(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)} \longmapsto f(x)g(y).$$

(Z.B. bezeichnet $\sin \otimes \cos$ die Funktion $(x, y) \longmapsto \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$.) Dann ist $f \otimes g \in C(\mathbb{R}^{m+n})$. Ebenso ist $f \otimes g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{m+n})$ für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m),\ g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$, so gilt

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(\varphi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x)g(y)\varphi(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \underset{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = f_x\Big(g_y\big(\varphi(x, y)\big)\Big),\end{aligned}$$

wobei, für festes $x \in \mathbb{R}^m$, $\big(y \longmapsto \varphi(x, y)\big) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und g (d.h. T_g) darauf wirkt und dann f auf $\Big(\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto g_y\big(\varphi(x, y)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ angewendet wird.

Daher definiert man $(S \otimes T)(\varphi) = S_x\Big(T_y\big(\varphi(x, y)\big)\Big)$ (vgl. Seite 16) für $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$. Die Indices x bzw. y deuten an, bezüglich welcher Variablen die Distributionen S bzw. T wirken.

Lemma 13.1
Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_y)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ sei $\psi(x) := T_y\big(\varphi(x,y)\big) = T\big(\underbrace{y \longmapsto \varphi(x,y)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_y)}\big)$.

Dann ist $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m_x)$, $\partial^\alpha \psi = T_y\big(\partial^\alpha_x \varphi(x,y)\big)$ für $\alpha \in \mathbb{N}^m_0$,
und $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n}) \implies \psi_k = T_y\big(\varphi_k(x,y)\big) \to \psi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Beweis:

a) Es sei $\operatorname{supp}\varphi \subset \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n};\ |x| \le N,\ |y| \le N\big\}$;
$x^k \to x$ in $\mathbb{R}^m \implies \varphi(x^k,y) \to \varphi(x,y)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, weil

$$\big|\partial^\beta_y \varphi(x^k,y) - \partial^\beta_y \varphi(x,y)\big| = \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial^\beta_y \varphi\big(x+t(x^k-x),y\big)\,\mathrm{d}t\right| \le |x^k-x|_1 \cdot \max_{j=1,\dots,m} \left\|\frac{\partial \partial^\beta_y \varphi}{\partial x_j}\right\|_\infty \to 0$$

$\implies \partial^\beta_y \varphi(x^k,y) \to \partial^\beta_y \varphi$ gleichmäßig für $\beta \in \mathbb{N}^n_0$;
weiters ist $\operatorname{supp}\big(y \mapsto \varphi(x^k,y)\big) \subset \big\{y \in \mathbb{R}^n;\ |y| \le N\big\}$.
Aus $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_y)$ folgt dann $\psi(x^k) \to \psi(x)$, d.h. $\psi \in C(\mathbb{R}^m_x)$.
Wegen $\operatorname{supp}\psi \subset \big\{x \in \mathbb{R}^m;\ |x| \le N\big\}$ ist sogar $\psi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$.

b) Weiters ist für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\left|\frac{\varphi(x_1+h,x_2,\dots,x_m,y) - \varphi(x,y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x,y)\right| \overset{\overset{\text{MWS}}{\downarrow}}{=}$$

$$= \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\overbrace{(x_1+\vartheta_{x,y}\cdot h, x_2,\dots,x_m}^{\hat{=}x^k},y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x,y)\right| \underset{\text{glm.}}{\overset{\text{a)}}{\to}} 0 \text{ für } h \to 0 \text{ und ebenso für}$$

die Ableitungen nach $y \implies \dfrac{\varphi(x_1+h,x_2,\dots,x_m,y) - \varphi(x,y)}{h} \longrightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x,y)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_y) \implies$
$\dfrac{\psi(x_1+h,x_2,\dots,x_m) - \psi(x)}{h} \longrightarrow T_y\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x,y)\right)$, wenn $h \to 0 \implies \psi$ partiell differen-
zierbar, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} = T_y\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x,y)\right)$ stetig nach a) $\implies \psi \in C^1$ und

durch Induktion folgt $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\partial^\alpha_x \psi = T_y\big(\partial^\alpha_x \varphi(x,y)\big)$.

c) Es sei $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$; wenn
$\forall k : \operatorname{supp}\varphi_k \subset \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n};\ |x| \le N,\ |y| \le N\big\} \implies$
$\forall k : \operatorname{supp}\psi_k \subset \big\{x \in \mathbb{R}^m;\ |x| \le N\big\}$; weiters ist
$\big|\psi_k(x) - \psi(x)\big| = \Big|T_y\big(\varphi_k(x,y) - \varphi(x,y)\big)\Big| \le$ (Satz 4.4, FA, p. 28)

$$\le C \sum_{|\beta|\le M} \left\| \partial_y^\beta \big(\varphi_k(x,y) - \varphi(x,y)\big) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_y)}$$

$\Longrightarrow\ \|\psi_k - \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m_x)} \le C \sum_{|\beta|\le M} \left\|\partial_y^\beta(\varphi_k - \varphi)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{m+n})} \to 0$ für $k \to \infty \implies \psi_k \longrightarrow \psi$ gleichmäßig und ebenso $\partial^\alpha \psi_k = T_y\big(\partial_x^\alpha \varphi_k(x,y)\big) \longrightarrow \partial^\alpha\psi$ gleichmäßig $\implies \psi_k \longrightarrow \psi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Lemma 13.2
$V := \Big\{ \sum\limits_{i=1}^m \prod\limits_{j=1}^n \varphi_{ij}(x_j);\ m \in \mathbb{N},\ \varphi_{ij} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \Big\}$ ist dicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

a) Wir zeigen zuerst, dass $V \subset L^2_{q_1}$ dicht ist, $q_1(x) = \big(1+|x|\big)^k$, vgl. FA, p. 64. Wenn $f = [\tilde f] \in L^2_{q_1}$ und $f \perp V \implies$

$$\forall \varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1):\quad \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|x|\big)^{2k} \tilde f(x) \overline{\varphi_1(x_1)} \cdots \overline{\varphi_n(x_n)}\,\mathrm{d}x}_{\text{Fubini: } \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_n(x_n)} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|x|)^{2k} \tilde f(x) \overline{\varphi_1(x_1)} \cdots \overline{\varphi_{n-1}(x_{n-1})}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \Big)\,\mathrm{d}x_n} = 0$$

$$\tilde g(x_n) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(1+|x|\big)^{2k} \tilde f(x) \overline{\varphi_1(x_1)} \cdots \overline{\varphi_{n-1}(x_{n-1})}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1),$$

$\forall \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) : T_g(\varphi_n) = 0 \underset{\text{FA p. 23, L. 4.1}}{\Longrightarrow} \tilde g(x_n) = 0$ x_n–f.ü. $\underset{\text{induktiv}}{\Longrightarrow}$
$\tilde f(x) \cdot \big(1+|x|\big)^{2k} = 0$ x–f.ü. $\implies f = 0$ in $L^2_{q_1} \implies V^\perp = \{0\} \implies \overline{V} = L^2_{q_1}$.

b) $\mathcal{F} : W^{2,k}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2_{q_1}$ ist Homöomorphismus (vgl. Satz 10.7, FA, p. 64)
$\implies \mathcal{F}^{-1}(V) \subset W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$ dicht; $\mathcal{F}^{-1}\big(\prod\limits_{j=1}^n \varphi_j(x_j)\big) = \prod\limits_{j=1}^n (\mathcal{F}^{-1}\varphi_j)(x_j) \implies$
$W := \Big\{ \sum\limits_{i=1}^m \prod\limits_{j=1}^n \psi_{ij}(x_j);\ m \in \mathbb{N},\ \psi_{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \Big\} \subset W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$ dicht.

c) Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|_\infty \le N\big\} =: K,\ \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ mit $\eta(t) = 1$ für $|t| \le N,\ w(x) := \prod\limits_{j=1}^n \eta(x_j) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $k, l \in \mathbb{N},\ l > \frac{n}{2}$. Nach b) gilt
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \psi \in W : \|\varphi - \psi\|_{W^{2,k+l}} \le \varepsilon \implies$ (Satz 10.10, Sobolevscher Einbettungssatz, FA, p. 66)
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \psi \in W : \|\varphi - \psi\|_{\overline{C}^k} \le \varepsilon$;

$$\|\psi - \psi \cdot w\|_{\overline{C}^k} = \big\|\psi(1-w)\big\|_{\overline{C}^k} = \sum_{|\alpha|\le k} \Big\| \partial^\alpha\big(\psi(1-w)\big)\Big\|_\infty$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } w(x)=1 \\ \text{für } |x|\le N}}{=} \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{|x|_\infty \ge N} \Big| \partial^\alpha \big(\psi(1-w)\big)(x) \Big| = \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{|x|_\infty \ge N} \Big| \partial^\alpha \big[(\psi-\varphi)\cdot(1-w)\big](x) \Big| \le$$

$\le c_k \cdot \varepsilon,\ c_k > 0$. Mit $\varepsilon = \dfrac{1}{k(c_k+1)}$ und $\psi_k := \psi \cdot w$ erhalten wir $\forall k \in \mathbb{N} : \exists \psi_k \in V$

mit $\operatorname{supp} \psi_k \subset K_1 := \operatorname{supp} w : \ \|\varphi - \psi_k\|_{\overline{C}^k(\mathbb{R}^n)} \le \dfrac{1}{k} \implies \psi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ □

Satz 13.1 und Def.
$\forall S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) : \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \exists_1 U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n}) : \forall \varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) : \forall \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) :$

$$U\big(\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\big) = S(\varphi_1)\cdot T(\varphi_2).$$

Weiters gilt dann

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n}) : U(\varphi) = S_x\Big(T_y\big(\varphi(x,y)\big)\Big) = T_y\Big(S_x\big(\varphi(x,y)\big)\Big).$$

U heißt **Tensorprodukt** von S, T und wird mit $S \otimes T$ bezeichnet.

Beweis: Existenz:
$U : \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n}) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto S_x\Big(\underbrace{T_y\big(\varphi(x,y)\big)}_{\psi(x)}\Big)$ ist wohldefiniert nach Lemma 13.1, offenbar linear und wenn $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$, so ist $\psi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ (Lemma 13.1), $\implies U(\varphi_k) \to 0$. Also ist $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n})$.
Für $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ ist $U(\varphi) = S_x\Big(\underbrace{T_y\big(\varphi_1(x)\varphi_2(y)\big)}_{\varphi_1(x)\cdot\underbrace{T(\varphi_2)}_{\in\mathbb{C}}}\Big) = S(\varphi_1)T(\varphi_2)$.

Dasselbe gilt für $\tilde{U} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n}) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto T_y\Big(S_x\big(\varphi(x,y)\big)\Big)$.
$U = \tilde{U}$ aufgrund der **Eindeutigkeit**, die aus der Dichtheit von

$$M := \Big\{ \sum_{i=1}^{l} \varphi_{i1}(x)\varphi_{i2}(y);\ \varphi_{i1} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),\ \varphi_{i2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Big\}$$

in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ folgt. (Letztere gilt wegen $V \subset M$ und Lemma 13.2). □

Bsp.:

1) Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m),\ g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist einfach $f \otimes g = f(x)g(y)$, vgl. Seite 13.

2) Wenn $S = \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),\ T = \delta_{y_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ x_0 \in \mathbb{R}^m,\ y_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\implies (S \otimes T)\big(\varphi(x,y)\big) = S_x\Big(\underbrace{T_y\big(\varphi(x,y)\big)}_{\varphi(x,y_0)}\Big) = \varphi(x_0,y_0) = \delta_{(x_0,y_0)}(\varphi)$$

$$\implies \delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} = \delta_{(x_0,y_0)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n}).$$

Satz 13.2

a) $\partial^{(\alpha,\beta)}(S \otimes T) = \partial^\alpha S \otimes \partial^\beta T$ für $(\alpha,\beta) = (\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{N}_0^{m+n}$

b) $\operatorname{supp}(S \otimes T) = \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}^{m+n}$

c) $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$

Beweis:
Z.B. a): $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n}) \implies \big(\partial^{(\alpha,\beta)}(S \otimes T)\big)(\varphi) = (-1)^{|(\alpha,\beta)|}(S \otimes T)(\partial^{(\alpha,\beta)}\varphi) =$

$$= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} S_x\Big(T_y\big(\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\big)\Big) = \text{(Lemma 13.1)}=$$

$$(-1)^{|\alpha|+|\beta|} S_x\Big(\partial_x^\alpha \underbrace{T_y\big(\partial_y^\beta \varphi(x,y)\big)}_{(-1)^{|\beta|}(\partial_y^\beta T)(\varphi(x,y))}\Big) = (\partial_x^\alpha S)\Big((\partial_y^\beta T)\big(\varphi(x,y)\big)\Big) = \big((\partial^\alpha S) \otimes (\partial^\beta T)\big)(\varphi).$$

Ähnlich zeigt man b) und c). □

Bemerkung Als nächstes wollen wir die Faltung für Distributionen definieren. Wenn $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert $I = \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ absolut;

wenn man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v-u \end{pmatrix}$ substituiert, so ist $I = \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \underset{\text{Fubini}}{=}$

$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}v$, d.h.

$$\boxed{(f * g)(v) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u}$$

existiert v–f.ü. und ist wieder in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(v)\,\mathrm{d}v$.

Weiters ist $\|f*g\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\Big|\,\mathrm{d}v \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(u)g(v-u)\big|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1,$

d.h. $\big(L^1(\mathbb{R}^n), *\big)$ ist eine Banachalgebra.

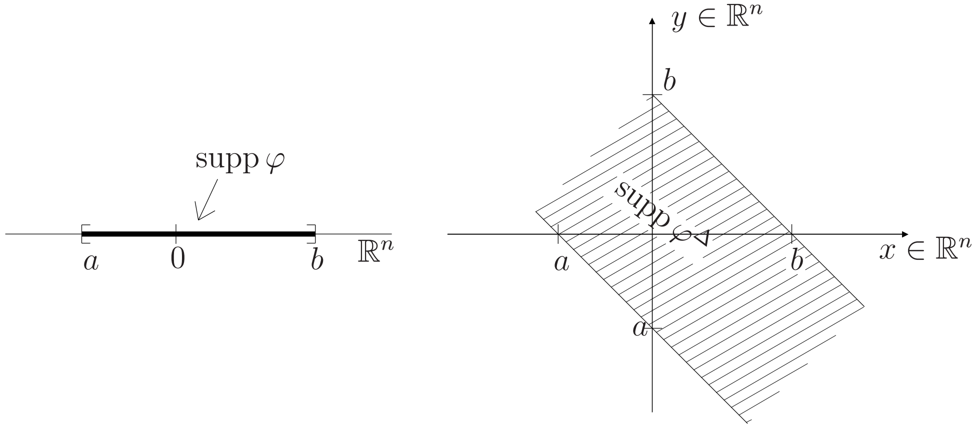
Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist $(f * g)(\varphi) = T_{f*g}(\varphi) = \displaystyle\int \left(\int f(u) g(v-u)\,\mathrm{d}u \right) \cdot \varphi(v)\,\mathrm{d}v \underset{\text{Fubini}}{=}$

$$= \int f(x) g(y) \varphi(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (f \otimes g)(\varphi^\Delta) \text{ wenn } \varphi^\Delta(x,y) := \varphi(x+y).$$

Beachte, dass $\varphi^\Delta \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ (für $\varphi \not\equiv 0$), weil $\operatorname{supp} \varphi^\Delta$ nicht beschränkt ist. Die Faltung ist daher nicht für beliebige $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ möglich (weil $(S \otimes T)(\underbrace{\varphi^\Delta}_{\notin \mathcal{D}})$ im Allgemeinen nicht sinnvoll ist). Eine Distribution U (hier $S \otimes T$) lässt sich aber auf eine $\mathcal{C}^\infty$–Funktion h (hier φ^Δ) anwenden, wenn $\operatorname{supp} U \cap \operatorname{supp} h$ beschränkt ist.

Lemma 13.3
Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist
$$\operatorname{supp} \varphi^\Delta = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n};\ x + y \in \operatorname{supp} \varphi \big\}.$$

Bild:



Beweis:
$\operatorname{supp} \varphi^\Delta = \overline{\big\{ (x,y);\, \varphi(x+y) \neq 0 \big\}} = \big\{ (x,y);\, x+y \in \operatorname{supp} \varphi \big\}$ $\square$

Def.:

1) Wenn $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^l)$ und $h \in C^\infty(\mathbb{R}^l)$ und $K := \operatorname{supp} U \cap \operatorname{supp} h$ kompakt (d.h. beschränkt) ist, so definiert man $U(h) := U(h \cdot \chi)$, wobei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^l)$, $\chi(x) = 1$ in einer Umgebung von K.
[Wenn $\tilde{\chi}$ dasselbe erfüllt, ist $h \cdot (\chi - \tilde{\chi}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^l \setminus \operatorname{supp} U) \implies U(h \cdot \chi) = U(h \cdot \tilde{\chi})$, vgl. FA, p. 28. Speziell ist $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^l)$ auf jedes $h \in C^\infty(\mathbb{R}^l)$ anwendbar.]

2) $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißen **trägerfaltbar** (tf.) $\iff \forall N \in \mathbb{N} : \operatorname{supp}(S \otimes T) \cap \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n};\ |x+y| \leq N \big\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ kompakt (d.h. beschränkt, weil sowieso abgeschlossen).

Satz 13.3 + Def.

1) S, T tf. $\Longrightarrow$

$$\big(S * T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto (S \otimes T)(\varphi^{\Delta})\big) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

$S * T$ heißt **Faltung** von S, T.

2) S, T tf. $\Longrightarrow$ T, S tf. und $S * T = T * S$.

3) S, T tf., $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ $\Longrightarrow$ $S, \partial^\alpha T$ tf. und $\partial^\alpha(S * T) = S * \partial^\alpha T = \partial^\alpha S * T$

4) S, T_i tf., $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ $S, T_1 + \lambda T_2$ tf., $S * (T_1 + \lambda T_2) = S * T_1 + \lambda S * T_2$.

5) S, T tf. $\Longrightarrow$ $\operatorname{supp}(S * T) \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$

Beweis:

1) Wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n;\, |x| \le N\big\}$ und $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\chi = 1$ in Umgebung von $\operatorname{supp}(S \otimes T) \cap \big\{(x, y);\, |x+y| \le N\big\}$ $\Longrightarrow$ $(S*T)(\varphi) = (S \otimes T)(\varphi^{\Delta} \cdot \chi)$ $\Longrightarrow$ $S * T$ linear und stetig (weil $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\Longrightarrow$ $\varphi_k^{\Delta} \cdot \chi \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$) $\Longrightarrow$ $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2) oEdA $\chi(x, y) = \eta(x) \cdot \eta(y)$ $\Longrightarrow$ $(S*T)(\varphi) = (S \otimes T)\big(\varphi(x+y)\eta(x)\eta(y)\big) = S_x\Big(T_y\big(\varphi(x+y)\eta(x)\eta(y)\big)\Big) =$ (Umbenennung) $= S_y\Big(T_x\big(\underbrace{\varphi(y+x)\eta(y)\eta(x)}_{=\varphi(x+y)\eta(x)\eta(y)}\big)\Big) =$

$\underset{\text{Satz 13.1}}{=} (T \otimes S)\big(\varphi(x+y)\eta(x)\eta(y)\big) = (T * S)(\varphi)$.

Ähnlich zeigt man 3), 4), 5). $\square$

Bsp.: Das elektrostatische Potential der Hohlkugel $\big\{x \in \mathbb{R}^3;\, |x| = R\big\}$ ($R > 0$ fest) erfüllt $-\Delta U = \delta_{R\mathbb{S}^2}$, wobei $\delta_{R\mathbb{S}^2} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ durch $\delta_{R\mathbb{S}^2}(\psi) = \displaystyle\int_{|x|=R} \psi(x)\,\mathrm{d}s(x)$ (für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$) gegeben ist (vgl. auch Bsp. 2, FA, p. 62).

Nach § 14 ist dann $U = \underbrace{\dfrac{1}{4\pi|x|}}_{E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)} * \underbrace{\delta_{R\mathbb{S}^2}}_{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)}$.

Hier ist $\operatorname{supp} E = \mathbb{R}^3$, $\operatorname{supp} T = R \cdot \mathbb{S}^2$ (denn $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus R\mathbb{S}^2)$ $\Longrightarrow$ $T(\psi) = 0$) $\underset{\text{Satz 13.2}}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{supp}(E \otimes T) = \mathbb{R}^2 \times R\mathbb{S}^2$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{supp}(E \otimes T) \cap \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^6;\, |x + y| \le N\big\} \subset$
$\subset \big\{(x, y);\, |x + y| \le N,\, |y| \le R\big\} \subset \big\{(x, y);\, |x| \le R + N,\, |y| \le R\big\}$ $\Longrightarrow$ E, T tf. (vgl. auch Satz 13.4).

Daher ist $U(\psi) = (E \otimes T)(\psi^\Delta) = T_y\big(E_x(\psi^\Delta)\big) =$

$$= \int\limits_{|y|=R} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(x+y)}{4\pi|x|}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s(y) = \qquad \text{(Substitution } z = x+y\text{)}$$

$$= \int\limits_{|y|=R} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(z)}{4\pi|z-y|}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}s(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(z) \underbrace{\left(\int\limits_{|y|=R} \frac{\mathrm{d}s(y)}{4\pi|z-y|} \right)}_{U(z)} \mathrm{d}z;$$

$\Longrightarrow\ U \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und U ist radialsymmetrisch,

$$U(z) = U\big(0,0,|z|\big) = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}{4\pi \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |z| \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} \right|} =$$

$$= \frac{R^2}{4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\underbrace{R^2\sin^2\vartheta + (R\cos\vartheta - |z|)^2}_{R^2 - 2R|z|\cos\vartheta + |z|^2}}} = \frac{R^2}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{\sqrt{R^2 - 2R|z|\cos\vartheta + |z|^2}}{R|z|} \right|_{\vartheta=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{R}{2|z|} \cdot \left(\sqrt{\big(R+|z|\big)^2} - \sqrt{\big(R-|z|\big)^2} \right) = \frac{R}{2|z|}\big(R + |z| - \big|R - |z|\big|\big) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lcl} R & : & |z| \le R \\ \\ \frac{R^2}{|z|} & : & |z| \ge R \\ \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{lcl} \text{konstant} & : & |z| \le R \\ \\ \text{Potential der} & & \\ \text{Punktladung} & : & |z| \ge R \\ 4\pi R^2 \delta & & \end{array} \right.$$

Wie in diesem Beispiel sind S, T immer tf., wenn $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ oder $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$:

Satz 13.4 + Def.
$S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \implies S, T$ tf.
Speziell für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist $(S{*}\delta_{x_0})(\varphi) = S\big(\varphi(x{+}x_0)\big),\ S{*}\delta = S$. $S{*}\delta_{x_0}$ heißt um x_0 **verschobene Distribution** zu S.

Beweis:
$\operatorname{supp} T \subset \big\{x;\ |x| \le R\big\} \implies \operatorname{supp}(S \otimes T) \cap \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n};\ |x+y| \le N\big\} \subset$
$\subset \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n};\ |x| \le R+N,\ |y| \le R\big\} \implies S, T$ tf.
$(S * \delta_{x_0})(\varphi) = \big(S_x \otimes (\delta_{x_0})_y\big)\big(\varphi(x+y)\big) = S_x\big(\varphi(x+x_0)\big).$ $\square$

[**Bemerkung** Allgemein, wenn $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, so ist

$(f\circ h)(\varphi) = T_{f\circ h}(\varphi) = \int f\big(\underbrace{h(x)}_{y}\big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\varphi\big(h^{-1}(y)\big)\cdot\big|\det(h^{-1})'(y)\big|\,\mathrm{d}y =$

$= T_f\Big((\varphi\circ h^{-1})\cdot\big|\det(h^{-1})'\big|\Big)$ und daher setzt man $(T\circ h)(\varphi) := T\Big((\varphi\circ h^{-1})\cdot\big|\det(h^{-1})'\big|\Big)$ für $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Speziell für $h:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n : x\longrightarrow x-x_0$ ist $f\circ h = [f$ um x_0 verschoben] und $S\circ h = S*\delta_{x_0}$.]

Satz 13.5
Wenn $f,g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tf. sind, so ist

$$f*g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ und } (f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \ x\text{–f.ü.}$$

Beweis:
$(f*g)(\varphi) = (f\otimes g)(\varphi^{\Delta}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \underbrace{f(x)g(y)\varphi(x+y)}_{\substack{\in L^1(\mathbb{R}^{2n}) \\ \text{(weil der Träger beschränkt ist)}}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$\overset{\binom{x}{y}=\binom{u}{v-u}}{\overset{\downarrow}{=}} \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(u)g(v-u)\varphi(v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \underset{\text{Fubini}}{=} \int \varphi(v)\Big(\int f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}v,$$

d.h. $\varphi(v)f(u)g(v-u)\in L^1(\mathbb{R}^n_u)$ v–f.ü. und $\varphi(v)\cdot\int f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\in L^1(\mathbb{R}^n_v)$ und $\int\varphi(v)\cdot\int f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \overset{\circledast}{=} (f*g)(\varphi)$ für $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Wenn $N\in\mathbb{N}$ und $\varphi(v)\geq 1$ für $|v|\leq N$ folgt

$$\int\limits_{|v|\leq N}\Big|\int f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\Big|\mathrm{d}v < \infty,$$

d.h. $h(v) := \int f(u)g(v-u)\,\mathrm{d}u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\ f*g\overset{\circledast}{=} h$ □

Satz 13.6
Wenn $S\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, so ist $S*T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$(S*T)(\varphi) = S_x\Big(\underbrace{T_y\big(\varphi(x+y)\big)}_{\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)}\Big) = T_y\Big(\underbrace{S_x\big(\varphi(x+y)\big)}_{\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_y)}\Big).$$

Weiters gilt $\mathcal{F}(S*T) = \mathcal{F}T\cdot\mathcal{F}S$.

Beweis:

a) $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \big(x \longmapsto \varphi(x+y)\big) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x) \implies \psi(y) := S_x\big(\varphi(x+y)\big)$ ist sinnvoll. Wie im Beweis von Lemma 13.1 sehen wir, dass $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (weil $y^k \longrightarrow y \implies \varphi(x+y^k) \longrightarrow \varphi(x+y)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ etc.) $\implies T(\psi)$ ist sinnvoll definiert durch $T(\chi \cdot \psi),\ \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \chi = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} T$ (vgl. Seite 18).
$U : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto T_y\Big(S_x\big(\varphi(x+y)\big)\Big)$ ist also wohldefiniert und linear. $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\begin{aligned}
\varphi \in \mathcal{S} \implies \big|U(\varphi)\big| \quad &= \quad \Big|T_y\Big(\chi \cdot S_x\big(\varphi(x+y)\big)\Big)\Big| \le \qquad \text{(Satz 4.4)}\\
&\le \quad C \sum_{|\alpha| \le m} \Big\|\partial_y^\alpha\Big(\chi \cdot S_x\big(\varphi(x+y)\big)\Big)\Big\|_\infty\\
\begin{matrix}\text{(mit } \chi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\\ \chi_1 = 1 \text{ auf } \operatorname{supp}\chi)\end{matrix} \quad &\le \quad C_1 \sum_{|\alpha| \le m} \Big\|\chi_1 \cdot \underbrace{\partial_y^\alpha S_x\big(\varphi(x+y)\big)}_{=S_x\left(\partial_y^\alpha \varphi(x+y)\right) \text{ vgl. L. 13.1}}\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_y)}\\
&\underset{\text{Satz 10.2}}{\le} \quad C_2 \sum_{|\alpha| \le m} \sum_{|\beta| \le m_1} \Big\|\underbrace{\chi_1(y) \cdot \big(1+|x|\big)^{m_1}}_{|\cdot| \le C_3(1+|x+y|)^{m_1}} \partial^{\alpha+\beta}\varphi(x+y)\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,y})}\\
&\le \quad C_4 \sum_{|\gamma| \le m+m_1} \Big\|\big(1+|z|\big)^{m+m_1}(\partial^\gamma\varphi)(z)\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_z)}.
\end{aligned}$$

$U\big|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = S * T$ nach der Definition in Seite 19 und Satz 13.1 $\implies$

$$S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

b) Ähnlich wie in a) zeigt man, dass, für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \psi(x) := T_y\big(\varphi(x+y)\big) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ und $\varphi_k \longrightarrow \varphi \implies \psi_k \longrightarrow \psi$ in $\mathcal{S}$; weil $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ dicht ist und $S_x\Big(T_y\big(\varphi(x+y)\big)\Big) = (S \otimes T)(\varphi^\Delta) = T_y\Big(S_x\big(\varphi(x+y)\big)\Big)$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ (Satz 13.1), gilt das auch für $\varphi \in \mathcal{S}$.

c) $\varphi \in \mathcal{D} \implies \big(\mathcal{F}(S*T)\big)(\varphi) = (S*T)(\mathcal{F}\varphi) = S_x\Big(T_y\big(\mathcal{F}\varphi(x+y)\big)\Big)$;
$(\mathcal{F}\varphi)(x+y) = \displaystyle\int \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi - \mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathcal{F}\big(\varphi(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\big)(y)$, $\forall x$

$$\implies \big(\mathcal{F}(S*T)\big)(\varphi) = S_x\Big(\underbrace{(\mathcal{F}T)_\xi}_{\substack{\in C^\infty \subset L^1_{\text{loc}}\\ \text{s.u.}}}\underbrace{\big(\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\big)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\xi)}\Big) = S_x\underbrace{\Big(\int (\mathcal{F}T(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big)}_{\mathcal{F}(\mathcal{F}T\cdot\varphi)} =$$

$$= (\mathcal{F}S)(\underbrace{\mathcal{F}T}_{\in C^\infty}\cdot\underbrace{\ \varphi\ }_{\in \mathcal{D}}) = (\mathcal{F}T \cdot \mathcal{F}S)(\varphi), \text{ d.h. } \mathcal{F}(S*T) = \underbrace{\mathcal{F}T}_{\in C^\infty}\cdot\underbrace{\mathcal{F}S}_{\in \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \qquad \square$$

NB:

1) Distributionen können mit $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen multipliziert werden, vgl. FA, p. 25.

2) $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \implies \mathcal{F}T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, denn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp} T \implies$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}T)(\varphi) &= T(\chi \cdot \mathcal{F}\varphi) = T_x\Big(\chi(x) \cdot \int \chi(y)\varphi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\Big) = \\
&= T_x\Big(\varphi_y\big(\underbrace{\chi(x)\chi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})}\big)\Big) \underset{\text{Satz 13.1}}{=} \varphi_y\Big(T_x\big(\chi(x)\chi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\big)\Big) \\
&= \int \varphi(y)\,\underbrace{\chi(y)T_x\big(\chi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\big)}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_y)\text{ nach L. 13.1}}\,\mathrm{d}y \underset{\text{(Def. S. 18)}}{=} \int \varphi(y)T_x(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy})\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$\implies (\mathcal{F}T)(y) = T_x(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_y)$.

§ 14 Fundamentallösungen partieller Differentialoperatoren

Ein **linearer partieller Differentialoperator** (LPDO) mit **mit $\mathcal{C}^\infty$–Koeffizienten**, d.h. $P(x,\partial) = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ (wobei $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ C^∞) lässt sich auf $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ anwenden: $P(x,\partial)U = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\cdot\partial^\alpha U \in \mathcal{D}'(\Omega)$, vgl. Def. FA, p. 25. Wir betrachten daher die partielle Differentialgleichung $P(x,\partial)U = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und suchen U zu gegebenem T. Falls $a_\alpha \in \mathbb{C}$ konstant, heißt $P(\partial)$ LPDO **mit konstanten Koeffizienten**.

Lemma 14.1
Falls $U = T_u,\ u \in C^m(\Omega)$, so gilt: $P(\partial)U = T \iff T \in C(\Omega)$ und u ist eine klassische Lösung, d.h.

$$\forall x \in \Omega : \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\,\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x) = T(x).$$

Beweis Es ist $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \displaystyle\int \varphi(x)u(x)\,\mathrm{d}x$ und $\partial^\alpha T_u = T_{\partial^\alpha u}$, vgl. FA, p. 26, und daher ist

$$P(\partial)U = T \iff \sum a_\alpha\partial^\alpha T_u = T \iff T_{\underbrace{\sum a_\alpha\partial^\alpha u}_{\in C(\Omega)}} = T \iff T \in C(\Omega)$$

und $\forall x : T(x) = \sum a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x)$. □

Beachte Meist steht für T_u wieder u!

Def.:
Es sei $P(\partial)$ ein LPDO mit konstanten Koeffizienten. $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt **Fundamentallösung** (FL) von $P(\partial) \Longleftrightarrow P(\partial)E = \delta$ (wobei $\delta = \delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \varphi(0)$).

Bemerkung Wenn $z \in \mathbb{C}^n$ eine Nullstelle von P ist (d.h. $P(z) = 0$), so ist $P(\partial)\,\mathrm{e}^{z\cdot x} = \sum\limits_\alpha a_\alpha \big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big)^{\alpha_1} \cdots \big(\frac{\partial}{\partial x_n}\big)^{\alpha_n} \mathrm{e}^{z_1x_1+\cdots+z_nx_n} = \sum\limits_\alpha a_\alpha z_1^{\alpha_1} \mathrm{e}^{z_1x_1} \cdots z_n^{\alpha_n}\,\mathrm{e}^{z_nx_n} =$ $\big(\sum a_\alpha z^\alpha\big)\,\mathrm{e}^{z\cdot x} = P(z)\,\mathrm{e}^{z\cdot x} = 0$, d.h. wenn E FL von $P(\partial) \implies E + c\,\mathrm{e}^{z\cdot x},\ c \in \mathbb{C}$, sind auch FL von $P(\partial) \implies$ FL sind nicht eindeutig außer für $P \equiv$ konstant.

Aus der FL E erhält man oft auch eine Lösung von $P(\partial)U = T$:

Satz 14.1
$P(\partial)$ LPDO mit konstanten Koeffizienten, $P(\partial)E = \delta,\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

a) E, T tf. $\implies P(\partial)(E * T) = T$.

b) Wenn $P(\partial)U = T$ und E, U tf. $\implies U = E * T$

[**Bemerkung** b) sagt: Es gibt höchstens eine Lösung U von $P(\partial)U = T$, die mit E tf. ist und diese kann nur $E * T$ sein. Vorsicht: Selbst wenn E, T tf., so sind $E, E * T$ i.A. NICHT tf. und dann gibt es gar keine solche Lösung U.
Ein schwieriger Satz von Ehrenpreis (1956) sagt: $\forall P \not\equiv 0 : \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \exists U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) :$ $P(\partial)U = T$. Für $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ ist das i.A. falsch.]

Beweis von Satz 14.1 Wenn S, T tf., so ist nach Satz 13.3, 3) $\partial^\alpha(S*T) = (\partial^\alpha S)*T = S*\partial^\alpha T$ und daher auch $P(\partial)(S * T) = \big(P(\partial)S\big) * T = S * P(\partial)T$.

a) $P(\partial)(E * T) = \big(P(\partial)E\big) * T = \delta * T = T$

b) $P(\partial)(E * U) = \big(\underbrace{P(\partial)E}_{\delta}\big) * U = E * \underbrace{P(\partial)U}_{T} \implies U = E * T$ $\square$

Satz 14.2
Es sei $c := |\mathbb{S}^{n-1}| = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}$. Dann ist

$$E(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{2\pi}\log|x| & : & n = 2 \\ -\frac{|x|^{2-n}}{(n-2)c} & : & n \neq 2 \end{array} \right\} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ eine FL von } \Delta_n. \text{ (vgl. auch FA, Übung 24)}$$

Beweis z. B. für $n \neq 2$

a) $$\int\limits_{|x|\le N} \big|E(x)\big|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|n-2|\cdot c}\cdot c\cdot \int\limits_0^N \underbrace{r^{2-n}\cdot r^{n-1}}_{r}\,\mathrm{d}r < \infty \implies E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

b) Für radialsymmetrische Funktionen gilt mit

$$r = |x| : \Delta\Big(f\big(|x|\big)\Big) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f(r) \implies \text{für } x \neq 0 \text{ ist } \Delta|x|^{2-n} =$$

$$= (r^{2-n})'' + \frac{n-1}{r}(r^{2-n})' = (2-n)(1-n)r^{-n} + (n-1)(2-n)r^{-n} = 0$$

c) Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies (\Delta E)(\varphi) = E(\Delta\varphi) =$

$$= -\frac{1}{(n-2)c}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(x)\cdot|x|^{2-n}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Lebesgue}\\ \downarrow}}{=} -\frac{1}{(n-2)c}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{|x|\ge\varepsilon} \Delta\varphi(x)|x|^{2-n}\,\mathrm{d}x.$$

Allgemein gilt für f Funktion, X Vektorfeld (beide C^1) :

$$\operatorname{div}(f\cdot X) = \sum \frac{\partial}{\partial x_j}(f\cdot X_j) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot X_j + f\cdot \sum\frac{\partial X_j}{\partial x_j} = \nabla f\cdot X + f\cdot \operatorname{div} X$$

$$\implies \text{für } x \neq 0 \text{ ist } \Delta\varphi\cdot|x|^{2-n} = \operatorname{div}\big(|x|^{2-n}\cdot\nabla\varphi\big) - \nabla|x|^{2-n}\cdot\nabla\varphi =$$

$$\operatorname{div}\big(|x|^{2-n}\cdot\nabla\varphi\big) - \operatorname{div}\big(\varphi\cdot\nabla|x|^{2-n}\big) + \varphi\cdot\underbrace{\Delta|x|^{2-n}}_{=0}$$

$$\implies (\Delta E)(\varphi) = -\frac{1}{(n-2)\cdot c}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}\Big[\operatorname{div}\big(|x|^{2-n}\nabla\varphi\big) - \operatorname{div}\big(\varphi\cdot\nabla|x|^{2-n}\big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\substack{\text{Gauß}\\ \downarrow}}{=} -\frac{1}{(n-2)\cdot c}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{|x|=\varepsilon}\big(|x|^{2-n}\nabla\varphi - \varphi\cdot\nabla|x|^{2-n}\big)\cdot N\,\mathrm{d}s;$$

auf der Kugel $|x| = \varepsilon$ ist $N =$ [Außeneinheitsnormale von $|x| \ge \varepsilon$ aus] $= -\dfrac{x}{\varepsilon}$ und $\nabla|x|^{2-n} = (2-n)\cdot\dfrac{x}{\varepsilon^n} \implies$

$$(\Delta E)(\varphi) = -\frac{1}{(n-2)c}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{|x|=\varepsilon}\left(\varepsilon^{2-n}\nabla\varphi - \varphi\cdot(2-n)\,\frac{x}{\varepsilon^n}\right)\cdot\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}s(x)$$

$$\underset{(\mathrm{d}s(x)=\varepsilon^{n-1}\,\mathrm{d}s(y))}{\overset{\substack{x=\varepsilon y\\ \downarrow}}{=}} -\frac{1}{(n-2)c}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{|y|=1}\Big(\varepsilon\cancelto{0}{\nabla\varphi}(\varepsilon y)-\varphi(\varepsilon y)\cdot(2-n)y\Big)\cdot(-y)\,\mathrm{d}s(y)$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{=} -\frac{1}{(n-2)c}\cdot\big(-\varphi(0)\big)\cdot(2-n)\cdot\underbrace{\int\limits_{|y|=1}\underbrace{-|y|^2}_{-1}\,\mathrm{d}s(y)}_{-c}=\varphi(0)=\delta(\varphi)\qquad\square$$

Def.:
Ein Polynom $P(x)=P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ im $\mathbb{R}^n$ heißt **harmonisches Polynom** $\Longleftrightarrow \Delta P=0$

Bsp. $1,\ x_j,\ x_j^2-x_k^2,\ x_jx_k$ für $j\neq k$, sind harmonische Polynome.

Satz 14.3
E sei wie in Satz 14.2 und $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

a) $\big\{U\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \Delta U=T\big\}=\{E*T+P;\ P \text{ harm. Polynom}\}$

b) falls zusätzlich $T\in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$E*T\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\ E*T(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x-y)T(y)\,\mathrm{d}y\qquad (x\text{–f.ü.})$$

Beweis

a) α) $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|E(x)|}{\big(1+|x|\big)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|n-2|\cdot c}\int\limits_0^\infty\frac{r^{2-n}}{(1+r)^3}r^{n-1}\,\mathrm{d}r<\infty$ für $n\neq 2$ und analog für $n=2 \implies \displaystyle\frac{E(x)}{\big(1+|x|\big)^3}\in L^1(\mathbb{R}^n)\implies$

$$\implies \big|E(\varphi)\big| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{E(x)}{\big(1+|x|\big)^3}\cdot\varphi(x)\cdot\big(1+|x|\big)^3\,\mathrm{d}x\right|\underset{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq \left\|\frac{E}{\big(1+|x|\big)^3}\right\|_1\cdot\left\|\big(1+|x|\big)^3\cdot\varphi\right\|_\infty\underset{\text{Satz 10.2}}{\implies}$$

$\implies E\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\underset{\text{Satz 13.6}}{\implies} E*T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta(E*T)=T$ nach Satz 13.3.

β) Wenn $U\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \Delta U=T\implies \Delta(U-E*T)=0\,\big|\mathcal{F}$

$$\implies -|x|^2\cdot\underbrace{\mathcal{F}(U-E*T)}_{=:S}=0\implies \forall\varphi\in\mathcal{D}\big(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\big):$$

$$S(\varphi) = S\left(-|x|^2 \cdot \frac{\varphi}{-|x|^2}\right) = (-|x|^2 \cdot S)\left(\frac{\varphi}{-|x|^2}\right) = 0 \implies \operatorname{supp} S \subset \{0\}$$

$$\underset{\text{Satz 4.5}}{\implies} S = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta \implies U - E * T = \mathcal{F}^{-1} S = (2\pi)^{-n} (\mathcal{F}S)\check{} =$$

$$(2\pi)^{-n} \left(\sum c_\alpha \mathrm{i}^{|\alpha|} x^\alpha\right)\check{} =: P, \text{ wobei } P \text{ Polynom und } \Delta P = \Delta(U - E * T) = 0.$$

b) gilt nach Satz 13.5. □

Bemerkungen

1) Satz 14.3 zeigt z.B., dass U aus S. 19 die Gleichung $-\Delta U = \delta_{R\mathbb{S}^2}$ löst und die einzige Lösung in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ bis auf harmonische Polynome ist, und daher auch die einzige Lösung ist, die in ∞ Null wird.

2) Satz 14.3 a) verallgemeinert den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie (d.h. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt $\implies$ f konstant), denn f holomorph $\implies$ $\Delta f = 0 \underset{\text{Satz 14.3}}{\implies} f$ Polynom in x, y; ein beschränktes Polynom ist aber konstant.

Satz 14.4

$$E(t,x) := \frac{Y(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \, \mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$$

ist eine Fundamentallösung des **Wärmeleitungsoperators** $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_n$.

Beweis

a) $$\int_{t=-N}^{N} \int_{|x|\leq N} \underbrace{E(t,x)}_{\geq 0} \, \mathrm{d}t\mathrm{d}x \underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{t=0}^{N} (4\pi t)^{-n/2} \left(\int_{|x|\leq N} \mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t =$$

$$\begin{pmatrix} y = x/\left(2\sqrt{t}\right) \\ \mathrm{d}x = (4t)^{n/2} \, \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \pi^{-n/2} \int_{t=0}^{N} \underbrace{\left(\int_{|y|\leq \frac{N}{2\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-|y|^2} \, \mathrm{d}y \right)}_{\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|y|^2} \mathrm{d}y = \pi^{n/2}} \mathrm{d}t \leq N \implies E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$$

b) Für $t \neq 0$ ist E C^∞ und $(\partial_t - \Delta_n)E = 0$, denn $\partial_t(t^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}) =$

$$= \left(-\frac{n}{2} \, t^{-n/2-1} + \frac{r^2}{4t^2} \, t^{-n/2}\right) \mathrm{e}^{-r^2/(4t)} \, ,$$

$$\partial_r(t^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}) = -\frac{r}{2t}\,t^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2/(4t)},$$

$$\partial_r^2(t^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}) = \left(-\frac{1}{2}\,t^{-n/2-1} + \frac{r^2}{4t^2}\,t^{-n/2}\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}$$

$$\Delta_n(t^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}) = \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\,\partial_r\right)(t^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}) =$$

$$= \left(-\frac{n}{2}\,t^{-n/2-1} + \frac{r^2}{4t^2}\,t^{-n/2}\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}.$$

(Es gilt sogar $E \in C^\infty\big(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\big)$, vgl. FA p. 18, und daher muss $(\partial_t - \Delta_n)E = \sum\limits_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^{n+1}}} c_\alpha \partial^\alpha\delta$ sein, vgl. Satz 4.5, FA p. 28.]

c) Es sei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ mit $\chi(t) = 1$ für t bei 0

$$\overset{\text{(Lebesgue)}}{\Longrightarrow}\ E = \lim_{k\to\infty}\big(\text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})\big)\,\underbrace{E\cdot\big(\overbrace{1-\chi(k\cdot t)}^{\to 1 \text{ für } k\to\infty}\big)}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$$

$$\Longrightarrow\ (\partial_t - \Delta_n)E = \lim_{k\to\infty}\underbrace{(\partial_t-\Delta_n)\Big(E\cdot\big(1-\chi(k\cdot t)\big)\Big)}_{E\cdot(-k\cdot\chi'(kt)) \text{ nach b)}};$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) \implies \big((\partial_t-\Delta_n)E\big)(\varphi) = \lim_{k\to\infty}\int \varphi\cdot E\cdot\big(-k\cdot\chi'(kt)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= -\lim_{k\to\infty} k\int_0^\infty (4\pi t)^{-n/2}\chi'(kt)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)}\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

$$\overset{\substack{\text{vgl. a)}\\ \downarrow}}{=}\ -\lim_{k\to\infty} k\pi^{-n/2}\int_0^\infty \chi'\,\underbrace{(kt)}_{s}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|y|^2}\varphi\big(t, 2\sqrt{t}\,y\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\pi^{-n/2}\int_0^\infty \chi'(s)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|y|^2}\varphi\left(\frac{s}{k},\ \frac{2\sqrt{s}\,y}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{=}\ -\pi^{-n/2}\int_0^\infty \chi'(s)\varphi(0,0)\underbrace{\int \mathrm{e}^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y}_{\pi^{n/2}}\,\mathrm{d}s = \underbrace{\chi(0)}_{1}\cdot\delta(\varphi)$$

□

Satz 14.5
E sei wie in Satz 14.4 und $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

a) $\{U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1});\, (\partial_t - \Delta_n)U = T\} = \{E * T + P;\, P \text{ Polynom}, (\partial_t - \Delta_n)P = 0\}$

b) falls zusätzlich $T \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$, so ist $E * T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$(E * T)(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} T(\tau,\xi) \exp\Big(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\Big)\, \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathrm{d}\tau}{\big(4\pi(t-\tau)\big)^{n/2}}\,.$$

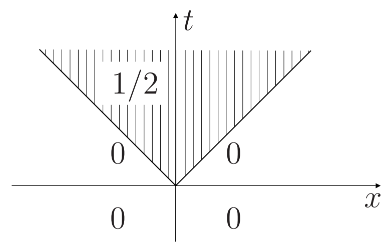
Beweis wie bei Satz 14.3. Beachte, dass $\mathrm{i}t - |x|^2 = 0 \iff (t,x) = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Nun zur Wellengleichung:

Satz 14.6

a) $E(t,x) := \frac{1}{2} Y\big(t - |x|\big) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ist eine Fundamentallösung der 1-dimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,.$$



b) Wenn $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_{t,x})$ mit $\operatorname{supp} T \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\, t \geq 0\}$, so sind E, T tf. und $U := E * T$ ist die einzige Lösung von $(\partial_t^2 - \partial_x^2)U = T$ mit $\operatorname{supp} U \subset \{(t,x);\; t \geq 0\}$.

c) Wenn zusätzlich $T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$, so ist $U \in C(\mathbb{R}^2)$ und $U(t,x) = \frac{1}{2} \iint\limits_{|x-\xi| \leq t-\tau} T(\tau,\xi)\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau$.

Beweis:

a) α) Wenn $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, so ist auch $f \circ A \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und

$$(f \circ A)(\varphi) = T_{f \circ A}(\varphi) = \int f(\underbrace{Ax}_{y})\varphi(x)\, \mathrm{d} \underbrace{x}_{=A^{-1}y} =$$

$$= |\det A^{-1}| \cdot \int f(y)\varphi(A^{-1}y)\, \mathrm{d}y = |\det A^{-1}| \cdot T_f(\varphi \circ A^{-1}),$$ vgl. auch die Bemerkung in Seite 20 unten. Daher definiert man für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Def.:
$T \circ A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $(T \circ A)(\varphi) := |\det A|^{-1} \cdot T(\varphi \circ A^{-1})$.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass die Kettenregel wieder gilt:

$$\frac{\partial T \circ A}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial x_k} \circ A \cdot \underbrace{\frac{\partial (Ax)_k}{\partial x_j}}_{= a_{kj}} .$$

β) Wenn $T := Y(t) \cdot Y(x) = Y \otimes Y \implies \dfrac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} \underset{\text{Satz 13.2, a)}}{=}$

$= Y' \otimes Y' = \delta(t) \otimes \delta(x) = \delta;$

$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \binom{t}{x} \longmapsto \binom{t-x}{t+x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \binom{t}{x} \implies$

$T \circ A = Y(t-x) \cdot Y(t+x) = Y\big(t - |x|\big)$ und

$$\frac{\partial T \circ A}{\partial t} = \partial_t T \circ A + \partial_x T \circ A, \ \frac{\partial^2 T \circ A}{\partial t^2} = \big((\partial_t + \partial_x)^2 T\big) \circ A,$$

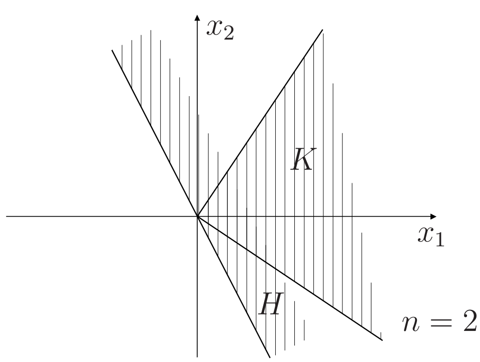
$$\frac{\partial T \circ A}{\partial x} = -\partial_t T \circ A + \partial_x T \circ A, \ \frac{\partial^2 T \circ A}{\partial x^2} = \big((\partial_t - \partial_x)^2 T\big) \circ A,$$

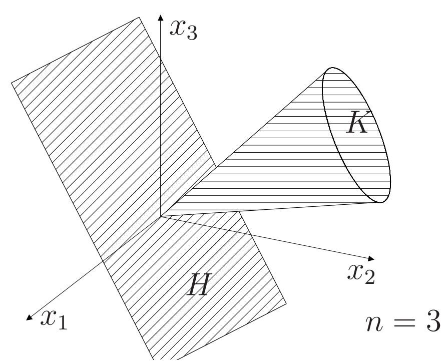
$(\partial_t^2 - \partial_x^2)(T \circ A) = (4 \partial_t \partial_x T) \circ A = 4\delta \circ A;$

$$(\delta \circ A)(\varphi) = \underbrace{|\det A^{-1}|}_{1/2} \cdot \underbrace{\delta\Big(\varphi\big(A^{-1}\tbinom{t}{x}\big)\Big)}_{\varphi(A^{-1}0)} = \frac{1}{2}\varphi(0)$$

$$\implies \delta \circ A = \frac{1}{2}\delta \implies (\partial_t^2 - \partial_x^2)E = \delta \text{ für } E := \frac{1}{2} T \circ A = \frac{1}{2} Y\big(t - |x|\big).$$

b) Es sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $H := \{x \in \mathbb{R}^n;\ v^T \cdot x \geq 0\}$ und K ein abg. Kegel in $\overset{\circ}{H} \cup \{0\}$.





Wenn $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} T_1 \subset K,\ \operatorname{supp} T_2 \subset H \implies T_1, T_2$ tf., denn wenn

$(x,y) \in \operatorname{supp} T_1 \otimes T_2 \cap \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n};\ |x+y| \le N\big\} \implies$

$$x \in K,\ y \in H,\ |x+y| \le N \implies \underbrace{v^T \cdot (x+y)}_{\underbrace{v^T\cdot x}_{\ge 0} + \underbrace{v^T \cdot y}_{\ge 0}} \le |v| \cdot N$$

$\implies 0 \le v^T \cdot x \le |v| \cdot N \underset{(\text{weil } x \in K)}{\implies} x$ beschränkt $\implies y$ beschränkt.

Hier ist speziell $v = \binom{1}{0} \implies E, T$ tf.; der Rest folgt aus Satz 14.1.

c) Nach Satz 13.5 ist $U(t,x) = \displaystyle\iint T(\tau,\xi) \cdot \underbrace{E(t-\tau, x-\xi)}_{\frac{1}{2}Y(t-\tau-|x-\xi|)} \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau =$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{|x-\xi|<t-\tau} T(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \in C(\mathbb{R}^2_{t,x}) \text{ nach Lebesgue.} \qquad \square$$

Bemerkungen

1) Im Wesentlichen macht $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Drehung um 45°.

2) Wenn man in b) von Satz 14.6 $T = \delta$ setzt, folgt, dass E die einzige Fundamentallösung mit $\operatorname{supp} E \subset \big\{(t,x);\ t \ge 0\big\}$ ist. Operatoren, für die das gilt, heißen „hyperbolisch” (bzgl. $\big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ t \ge 0\big\}$).

3) Aus der Kettenregel in a) α), Seite 29, folgt allgemein

$$P(\partial)(T \circ A) = \big((P \circ A^T)(\partial) T\big) \circ A;$$

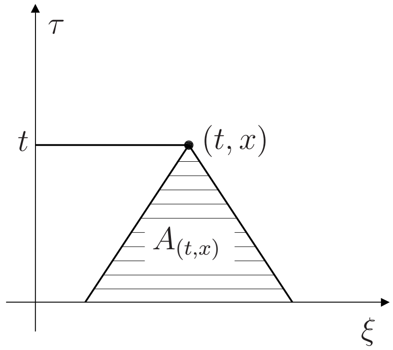
wenn daher $T \circ A = E,\ P(\partial)E = \delta$, so ist

$(P \circ A^T)(\partial) T = \delta \circ A^{-1} = |\det A| \cdot \delta$, d.h.

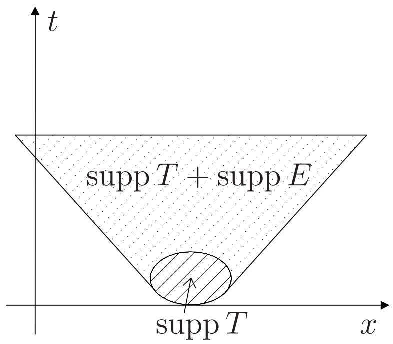
$|\det A|^{-1} T = |\det A|^{-1} \cdot E \circ A^{-1}$ ist Fundamentallösung von $(P \circ A^T)(\partial)$.

Z.B. wenn $A(t,x) = \binom{t}{cx},\ c > 0 \implies$ eine Fundamentallösung von $(P \circ A^T)(\partial) = \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2$ ist $|\det A|^{-1} \frac{1}{2} Y\big(t - |x|\big) \circ A^{-1} = \frac{1}{2c} Y\big(t - \frac{|x|}{c}\big)$.

4)



Für $T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} T \subset \big\{(t,x);\ t \geq 0\big\}$ ist $U(t,x)$ bereits durch die Werte von T im „Abhängigkeitsgebiet“ $A_{(t,x)} = \big\{(\tau,\xi);\ \tau \geq 0,\ |x-\xi| \leq t-\tau\big\}$ bestimmt.



Weiters ist $\operatorname{supp} U \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} E = \big\{(t,x);\ \exists(\tau,\xi) \in \operatorname{supp} T : |x-\xi| \leq t-\tau\big\}$, d.h. die Schallwelle breitet sich mit der Geschwindigkeit $c = 1$ aus. Bei $\partial_t - \Delta_n$ ist hingegen $A_{(t,x)} = \big\{(\tau,\xi);\ 0 \leq \tau \leq t\big\}$ (s. Satz 14.5), die Wärmequellen $T(\tau,\xi)$ wirken „kausal“ (d.h. $\tau \leq t$), aber mit unendlich großer Geschwindigkeit. ($\partial_t - \Delta_n$ ist „parabolisch“.)

Satz 14.7

a) $E := \dfrac{1}{4\pi t}\,\delta\big(t-|x|\big) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$ sei definiert durch

$$E(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\big(|x|,x\big)}{4\pi|x|}\,\mathrm{d}x \qquad \big(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4_{t,x})\big).$$

Dann ist E eine Fundamentallösung der 3–dimensionalen Wellengleichung $\partial_t^2 - \Delta_3$.

b) Analog Satz 14.6 b): Wenn $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$ mit …

c) Wenn zusätzlich $T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4)$, so ist $U = E * T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4)$ und es gilt (t,x)–f.ü.

$$U(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\substack{\mathbb{R}^3 \\ |x-\xi|=t-\tau \\ (\text{d.h. } \tau=\tau(\xi)=t-|x-\xi|)}} \frac{T(\tau,\xi)}{|x-\xi|}\,\mathrm{d}\xi \qquad \text{(Kirchhoff)}$$

Beweis

a) α) $E : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist linear und

$$\varphi_k \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \implies E(\varphi_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{\varphi_k\big(|x|, x\big)}{4\pi|x|}}_{\leq \frac{c}{|x|}\cdot Y(N-|x|)\in L^1(\mathbb{R}^3)} \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{Leb.}} 0.$$

Also ist $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$. [$E$ ist sogar ein Radonmaß.]

β) Wir verwenden die **partielle Fouriertransformation**

$$\mathcal{F}_x : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4_{t,x}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R}^4_{t,x}) : \varphi(t, x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \varphi(t, \xi)\, \mathrm{d}\xi$$

mit $(\mathcal{F}_x \circ \mathcal{F}_x)\varphi = (2\pi)^3 \cdot \varphi(t, -x)$ und

$$\mathcal{F}_x : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4_{t,x}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4_{t,x}) : T \longmapsto \big(\varphi \longmapsto T(\mathcal{F}_x\varphi)\big).$$

$$\begin{aligned} \text{Aus } E(\varphi) &= \int\limits_{t=0}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{|x|=t} \frac{\varphi(t, x)}{4\pi t}\, \mathrm{d}s(x) \Bigg)\, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t} \delta_{t\mathbb{S}^2}\big(\varphi(t, -)\big)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

folgt $(\mathcal{F}_x E)(\varphi) = E(\mathcal{F}_x\varphi) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{1}{t} \underbrace{\delta_{t\mathbb{S}^2}\big(\mathcal{F}_x\varphi(t, -)\big)}_{\underbrace{(\mathcal{F}\delta_{t\mathbb{S}^2})}_{\frac{4\pi t}{|x|}\sin(t|x|),\ \text{vgl. FA, p. 62}}(\varphi(t,-))} =$

$$= \int\limits_{t=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin\big(t|x|\big)}{|x|} \varphi(t, x)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \text{ d.h. } \mathcal{F}_x E = Y(t) \cdot \frac{\sin\big(t|x|\big)}{|x|} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4).$$

Wie für die gewöhnliche Fouriertransformation ist $\mathcal{F}_x\left(\dfrac{\partial E}{\partial x_j}\right) = \mathrm{i}x_j \mathcal{F}_x E$;

weiters ist

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathcal{F}_x E)(\varphi) &= -(\mathcal{F}_x E)(\partial_t\varphi) = -E(\underbrace{\mathcal{F}_x\partial_t\varphi}_{\partial_t\mathcal{F}_x\varphi}) = (\partial_t E)(\mathcal{F}_x\varphi) \\ &= (\mathcal{F}_x\partial_t E)(\varphi) \implies \partial_t\mathcal{F}_x E = \mathcal{F}_x\partial_t E \implies \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{F}_x\big((\partial_t^2-\Delta_3)E\big)=\big(\partial_t^2+|x|^2\big)\mathcal{F}_xE=\big(\partial_t^2+|x|^2\big)Y(t)\frac{\sin\big(t|x|\big)}{|x|}\,;$$

$$\partial_t\cdot Y(t)\frac{\sin\big(t|x|\big)}{|x|}=Y(t)\cos\big(t|x|\big)\ \Longrightarrow\ \partial_t^2Y(t)\frac{\sin\big(t|x|\big)}{|x|}=$$

$$=\partial_tY(t)\cos\big(t|x|\big)=-|x|Y(t)\sin\big(t|x|\big)+\delta(t)\otimes 1_x,\text{ vgl. Übung 4}$$

$$\Longrightarrow\ (\partial_t^2-\Delta_3)E=\mathcal{F}_x^{-1}\big(\delta(t)\otimes 1_x\big)=\delta\otimes\delta=\delta.$$

b) folgt aus b) in S. 30.

c) $T\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4)$ mit $\operatorname{supp}T\subset\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^4;\ t\geq 0\big\}$,

$$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)\ \Longrightarrow\ U(\varphi)=T*E(\varphi)=(T\otimes E)(\varphi^\Delta)=$$

$$=T_{\tau,\xi}\Big(\underbrace{E_{\sigma,\eta}\big(\varphi(\tau+\sigma,\xi+\eta)\big)}_{\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(\tau+|\eta|,\,\xi+\eta)}{4\pi|\eta|}\,\mathrm{d}\eta}\Big)=\int\limits_{\xi\in\mathbb{R}^3}\int\limits_{\tau=0}^{\infty}\int\limits_{\eta\in\mathbb{R}^3}T(\tau,\xi)\frac{\varphi\big(\tau+|\eta|,\,\xi+\eta\big)}{4\pi|\eta|}\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi$$

Substitution für festes ξ : $\left\{\begin{array}{lcl} x&=&\xi+\eta\\ t&=&\tau+|\eta|\end{array}\right.\ \Longrightarrow\ \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\mathrm{d}t$

$$\Longrightarrow\ U(\varphi)=\int\limits_{\xi\in\mathbb{R}^3}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^4}T\big(t-|x-\xi|,\xi\big)\,\frac{\varphi(t,x)}{4\pi|x-\xi|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Bigg)\,\mathrm{d}\xi$$

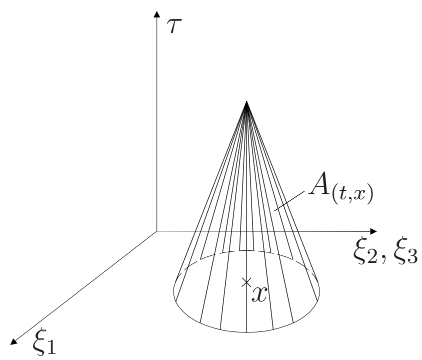
$$\stackrel{\text{Fubini}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\varphi(t,x)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{T\big(\tau(\xi),\xi\big)}{4\pi|x-\xi|}\,\mathrm{d}\xi\Bigg)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x,\ \ \tau(\xi):=t-|x-\xi|.\qquad\square$$

(Der Satz von Fubini ist anwendbar, weil der Integrand in der viertletzten Zeile in $L^1(\mathbb{R}^7_{\xi,\tau,\eta})$ ist.)

Bemerkungen

1) Für $T\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4)$ mit $\operatorname{supp}T\subset\big\{(t,x);\ t\geq 0\big\}$ wird also $(E*T)(t,x)$ bestimmt durch die Werte von T auf dem Kegel**mantel**

$$A_{(t,x)}=\big\{(\tau,\xi)\in\mathbb{R}^4;\ \tau\geq 0,\ |x-\xi|=t-\tau\big\}.$$



Ebenso ist für $\partial_t^2 - c^2\Delta_3$
$A_{(t,x)} = \big\{(\tau,\xi);\ \tau \geq 0,\ |x-\xi| = c(t-\tau)\big\}$
(vgl. S. 31, 3)) bzw.

$$E = \frac{1}{4\pi t c^3}\,\delta\Big(t - \frac{|x|}{c}\Big).$$

Wir hören also $T = \delta_{(\tau,\xi)} \mathrel{\hat=}$ [Donnerschlag zur Zeit τ am Ort ξ] zur Zeit t im Ort x, wenn $|x-\xi| = s$ und $t = \tau + \frac{s}{c}$ ($c \approx 330\big[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\big]$), und hören ihn nicht davor **und nicht danach** ($\operatorname{supp} U = \operatorname{supp}(E * T) = \Big\{(\sigma+\tau, \eta+\xi);\ \sigma = \frac{|\eta|}{c}\Big\}$). Im $\mathbb{R}^3_{(t,x)}$, s. S. 37.

2) Ganz allgemein erhält man die Fundamentallösung von $\partial_t^2 - \Delta_n$ mit Träger in $t \geq 0$ als $\mathcal{F}_x^{-1}\bigg(Y(t)\dfrac{\sin\big(t|x|\big)}{|x|}\bigg)$. Für die 2–dimensionale Wellengleichung verwenden wir zur Abwechslung die „Abstiegsmethode”:

Satz 14.8

a) $E(t,x) := \dfrac{Y\big(t-|x|\big)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3_{t,x})$ ist eine Fundamentallösung der 2–dimensionalen Wellengleichung $\partial_t^2 - \Delta_2$.

b) Analog Satz 14.6 b): Wenn $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_{t,x})$ mit …

c) Wenn zusätzlich $T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, so ist $U = E * T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und es gilt (t,x)–f.ü.

$$U(t,x) = \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{|x-\xi|\leq t-\tau} \frac{T(\tau,\xi)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\tau \qquad \text{(Poisson)}$$

Beweis

a) α) $$\int\limits_{\substack{|t|<N\\|x|<N}} \underbrace{E(t,x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{N}\Bigg(\int\limits_{|x|<t}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\Bigg)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} x = t\cdot y\\ \mathrm{d}x = t^2\,\mathrm{d}y\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{N}\Bigg(\int\limits_{|y|\leq 1}\frac{t^2\,\mathrm{d}y}{t\sqrt{1-|y|^2}}\Bigg)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{N} t\,\mathrm{d}t\cdot 2\pi\cdot\int_{r=0}^{1}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= \frac{N^2}{2} < \infty \implies E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3).$$

β) Es sei $F = \dfrac{1}{4\pi t}\,\delta\big(t-|x|\big) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ wie in Satz 14.7,

$T = \delta_{t,x_1,x_2} \otimes 1_{x_3} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$, d.h. $T(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,0,0,x_3)\,\mathrm{d}x_3$,

$$U = F * T \implies U(\varphi) = (T\otimes F)(\varphi^\Delta) = T_{\tau,\xi}\Big(F_{\sigma,\eta}\big(\varphi(\tau+\sigma,\xi+\eta)\big)\Big)$$

$$= T_{\tau,\xi}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\big(\tau+|\eta|,\xi+\eta\big)}{4\pi|\eta|}\,\mathrm{d}\eta\bigg) = (\text{mit } \lambda := \xi_3,\ e_3 := \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\big(|\eta|,\overbrace{\lambda e_3+\eta}^{x}\big)}{4\pi|\eta|}\,\mathrm{d}\eta\bigg)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\big(|x-\lambda e_3|,x\big)}{4\pi|x-\lambda e_3|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\big(|x-\lambda e_3|,x\big)}{|x-\lambda e_3|}\,\mathrm{d}\lambda}_{J_x}\,\mathrm{d}x;$$

In J_x substituieren wir $t := |x-\lambda e_3| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+(\lambda-x_3)^2}$; für $\lambda \in (x_3,\infty)$ läuft t in $\Big(\sqrt{x_1^2+x_2^2},\infty\Big)$ und ebenso für $\lambda\in(-\infty,x_3)$;
weiters ist $\left|\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right| = \dfrac{|\lambda-x_3|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(\lambda-x_3)^2}} = \dfrac{\sqrt{t^2-x_1^2-x_2^2}}{|x-\lambda e_3|}$

$$\implies J_x = 2\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\infty} \frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{t^2-x_1^2-x_2^2}}\,\mathrm{d}t \implies$$

$$U(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y\Big(t-\sqrt{x_1^2+x_2^2}\Big)}{\sqrt{t^2-x_1^2-x_2^2}}\,\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x = (E\otimes 1_{x_3})(\varphi)$$

d.h. $U = E\otimes 1_{x_3}$; wegen $(\partial_t^2-\Delta_3)U = T$ folgt

$$\begin{aligned}\delta_{t,x_1,x_2}\otimes 1_{x_3} &= T = (\partial_t^2-\Delta_3)U = (\partial_t^2-\Delta_3)(E\otimes 1_{x_3}) = \\ &= \big((\partial_t^2-\Delta_2)E\big)\otimes 1_{x_3} - E\otimes \underbrace{\partial_{x_3}^2 1}_{0} \implies (\partial_t^2-\Delta_2)E = \delta\end{aligned}$$

[denn $S \otimes T = \tilde{S} \otimes T,\ T \neq 0,\ T(\varphi_2) \neq 0 \implies$

$$\implies \forall \varphi_1 : \underbrace{(S \otimes T)\big(\varphi_1(x)\varphi_2(y)\big)}_{S(\varphi_1)\cdot T(\varphi_2)} = \underbrace{(\tilde{S} \otimes T)\big(\varphi_1(x)\varphi_2(y)\big)}_{\tilde{S}(\varphi_1)T(\varphi_2)} \implies S = \tilde{S}.]$$

b) folgt aus b) in S. 30.

c) Nach Satz 13.5 ist $U(t,x) = \iiint T(\tau,\xi)E(t-\tau, x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$ □

Bemerkung

$\partial_t^2 - c^2\Delta_2$ hat die Fundamentallösung $\dfrac{Y\big(t-|x|/c\big)}{2\pi c^2\sqrt{t^2-|x|^2/c^2}}$ (vgl. S. 31, 3) und

$A_{(t,x)} = \big\{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^3;\ \tau \geq 0,\ |x-\xi| \leq c(t-\tau)\big\}.$

Für 2–dimensionale Menschen wäre ein [Donnerschlag zur Zeit τ am Ort ξ] im Ort x mit der Entfernung $s = |x-\xi|$ hörbar ab der Zeit $t = \tau + \frac{s}{c}$ und bliebe **auch danach** hörbar (mit abnehmender Amplitude $\dfrac{1}{2\pi c^2\sqrt{(t-\tau)^2 - s^2/c^2}}$). Im Gegensatz zu $E_{\text{Satz 14.8}}$ hat $E_{\text{Satz 14.7}}$ das Kegelinnere $|x| < ct$ als **Lacuna** (d.h. ist dort 0). Das gilt allgemein für ungerade Raumdimensionen ≥ 3.

§ 15 Das Cauchyproblem für die Wellen- und die Wärmeleitungsgleichung

Def.:

1) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\overline{C}^k\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big) := \Big\{u : (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}\ C^k;\ \dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}$ lässt sich stetig auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ fortsetzen, $j = 0,1,\ldots,k\Big\}.$

2) Es seien $u_0, u_1 \in C(\mathbb{R}^n),\ f \in C\big([0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$. Dann heißt $u \in C^2\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big) \cap \overline{C}^1\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$ **klassische Lösung des Cauchyproblems** (= Anfangswertproblems) **der Wellengleichung** (CPW) zu $u_0, u_1, f \iff$

   α) $\forall (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n : (\partial_t^2 - \Delta_n)u(t,x) = f(t,x) \qquad \wedge$

   β) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim\limits_{t\searrow 0} u(t,x) = u_0(x),\ \lim\limits_{t\searrow 0} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = u_1(x).$

3) Es seien $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ U, F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\operatorname{supp} U, \operatorname{supp} F \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Dann heißt U **distributionelle Lösung des CPW** zu $u_0, u_1, F \iff$
$(\partial_t^2 - \Delta_n)U = F + \delta'(t) \otimes u_0 + \delta(t) \otimes u_1$.

Lemma 15.1
Es seien $u_0, u_1 \in C(\mathbb{R}^n),\ f \in C\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big),\ u \in C^2\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big) \cap \overline{C}^1\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big)$ und

$$F(t,x) := \left\{ \begin{array}{ccc} f(t,x) & ; & t > 0 \\ 0 & ; & t \leq 0 \end{array} \right\},\ U(t,x) := \left\{ \begin{array}{ccc} u(t,x) & : & t > 0 \\ 0 & : & t \leq 0 \end{array} \right\} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Dann gilt: u klassische Lösung des CPW zu $u_0, u_1, f \iff U$ distributionelle Lösung des CPW zu u_0, u_1, F.

Beweis
„$\Longrightarrow$“ Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt $\big((\partial_t^2 - \Delta_n)U\big)(\varphi) =$

$$= U\big((\partial_t^2 - \Delta_n)\varphi\big) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} (\partial_t^2 - \Delta_n)\varphi(t,x) u(t,x) \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{partiell}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\partial_t \varphi \cdot u \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \varphi \cdot \partial_t u \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(t,x) \underbrace{(\partial_t^2 - \Delta_n)u(t,x)}_{f(t,x)} \,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big[-\partial_t \varphi(0,x) u_0(x) + \varphi(0,x) u_1(x) \Big] \mathrm{d}x + F(\varphi)$$

$$= \big(\delta'(t) \otimes u_0 + \delta(t) \otimes u_1 + F\big)(\varphi) \implies U \text{ distributionelle Lösung.}$$

„$\Longleftarrow$“ U distributionelle Lösung $\implies (\partial_t^2 - \Delta_n)U = F$ in $\mathcal{D}'\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big) \underset{L.\ 14.1}{\Longrightarrow} (\partial_t^2 - \Delta_n)u = f$ klassisch in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n \implies \alpha)$ in Seite 37; wenn weiters
$v_j(x) := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \partial_t^j u(\varepsilon, x)$ für $j = 0, 1$, so zeigt die obige Rechnung, dass
$(\partial_t^2 - \Delta_n)U = \delta'(t) \otimes v_0 + \delta(t) \otimes v_1 + F$; weil U eine distributionelle Lösung des CPW ist aber auch $(\partial_t^2 - \Delta_n)U = \delta'(t) \otimes u_0 + \delta(t) \otimes u_1 + F$; wenn $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ mit $\psi_1 = 1$ bei $0 \implies \forall \psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\delta' \otimes (v_0 - u_0) + \delta \otimes (v_1 - u_1)\big)\big(\psi_1(t)\psi_2(x)\big) \\ &= (v_1 - u_1)(\psi_2) \implies v_1 = u_1 \implies v_0 = u_0 \implies u \text{ klassische Lösung.} \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung
Beachte, dass u_0, u_1, F durch die distributionelle Lösung U des CPW nicht eindeutig gegeben sind. Z.B. haben u_0, u_1, F und $0, u_1, F + \delta' \otimes u_0$ dieselbe distrib. Lösung U.

Satz 15.1
Das CPW besitzt für $n = 1, 2, 3$ genau eine distributionelle Lösung U. Diese hängt in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ stetig von u_0, u_1, F ab, d.h. $u_0^k \to u_0,\ u_1^k \to u_1,\ F^k \to F$ in $\mathcal{D}' \implies U^k \to U$ in $\mathcal{D}'$.

Beweis

a) Wenn E die Fundamentallösung von $\partial_t^2 - \Delta_n,\ n = 1, 2, 3$ entsprechend Satz 14.6 bis 14.8 ist und $T := F + \delta'(t) \otimes u_0 + \delta(t) \otimes u_1$, so sind E, T tf. (vgl. Seite 30, b); $U := E * T \implies \operatorname{supp} U \subset \operatorname{supp} E + \operatorname{supp} T \subset \{(t,x); t \geq 0\},\ P(\partial)U = T \implies U$ distributionelle Lösung; U ist eindeutig nach Satz 14.1 b).

b) α) **Vorsicht:** Wenn S, T_k tf. und z.B. $T_k \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}'$ folgt **nicht** $S * T_k \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}'$. Z.B. sind $S = 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ und $T_k = \chi_{[k,k+1]} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ tf. und $T_k \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ (weil $T_k(\varphi) = \int\limits_k^{k+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \to 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$), aber $(S * T_k)(x) \underset{S.\ 13.5}{=} \int \underbrace{S(x-y)}_{1} T_k(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_k^{k+1} \mathrm{d}y = 1$, d.h. $S * T_k = S = 1 \nrightarrow 0$.

β) Hier ist die Situation zunächst ähnlich:
$T^k := F^k + \delta'(t) \otimes u_0^k + \delta(t) \otimes u_1^k,\ U^k = E * T^k$,
$T := F + \delta'(t) \otimes u_0 + \delta(t) \otimes u_1,\ U = E * T$.
Nach Voraussetzung gilt $T^k \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'$, daraus folgt nach α) aber nicht generell $U^k \longrightarrow U$ in $\mathcal{D}'$. Wir haben hier aber einen Vorteil:
$\operatorname{supp} E \subset \{(t,x); t \geq |x|\}$ und $\underline{\underline{\forall k}}: \operatorname{supp} T^k \subset \{(t,x); t \geq 0\}$ und daher sind alle $\operatorname{supp}(E \otimes T^k) \cap \left\{(t,x,s,y) \in \mathbb{R}^{2(n+1)}; \left|\binom{t}{x} + \binom{s}{y}\right| \leq N\right\}$ in einem $\underline{\underline{\text{festen}}}$ (von k unabhängigen) Kompaktum K enthalten (vgl. Seite 30) $\implies$
$\exists \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2(n+1)}) : \chi = 1$ in einer Umgebung von $K \implies \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \{(t,x); |(t,x)| \leq N\} : U^k(\varphi) = (E * T^k)(\varphi) \overset{\text{(vgl. S. 18)}}{=}$
$(E \otimes T^k)(\varphi^\Delta \cdot \chi) \longrightarrow (E \otimes T)(\varphi^\Delta \cdot \chi) = (E * T)(\varphi) = U(\varphi)$, d.h.
$U^k \longrightarrow U$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$. $\square$

Bemerkung
Satz 15.1 gilt natürlich auch für $n \geq 4$, aber die Bestimmung der Fundamentallösung ist dort mühsamer.

Satz 15.2/3/4
Es sei $n \in \{1,2,3\}, u_0, u_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),\ F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\operatorname{supp} F \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, und U sei die distributionelle Lösung des CPW (d.h. $(\partial_t^2 - \Delta_n)U = F + \delta'(t) \otimes u_0 + \delta(t) \otimes u_1$). Dann gilt:

a) $U \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}) + \dfrac{\partial}{\partial t} L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ und $U(t,x) =$

$$
= \begin{cases}
\dfrac{1}{2} \displaystyle\iint\limits_{|x-\xi|<t-\tau} F(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau + \dfrac{1}{2} \int\limits_{|x-\xi|\le t} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \dfrac{Y(t)}{2}\big[u_0(x+t) + u_0(x-t)\big] & : \quad n = 1 \\
 & \text{(d'Alembert)} \\
\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iiint\limits_{|x-\xi|<t-\tau} \dfrac{F(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \dfrac{1}{2\pi} \iint\limits_{|x-\xi|\le t} \dfrac{u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}} + & \\
\qquad + \dfrac{1}{2\pi} \partial_t \Bigg[\displaystyle\iint\limits_{|x-\xi|<t} \dfrac{u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}} \Bigg] & : \quad n = 2 \\
 & \text{(Poisson)} \\
\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\iiint\limits_{|x-\xi|=t-\tau} \dfrac{F(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi}{|x-\xi|} + \dfrac{1}{4\pi t} \iint\limits_{|x-\xi|=t} u_1(\xi)\,\mathrm{d}s(\xi) + & \\
\qquad + \dfrac{1}{4\pi} \partial_t \Bigg[\dfrac{1}{t} \displaystyle\iint\limits_{|x-\xi|=t} u_0(\xi)\,\mathrm{d}s(\xi) \Bigg] & : \quad n = 3 \\
 & \text{(Kirchhoff)}
\end{cases}
$$

(Dabei ist $\mathrm{d}s$ das Oberflächenmaß; für $n = 2, 3$ sind die letzten Terme t–Ableitungen (im $\mathcal{D}'$–Sinn) von L^1_{loc}–Funktionen.)

b) Wenn

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \le 1 : \partial^\alpha F \in \overline{C}^0\big((0,\infty) \times \mathbb{R}\big),\ u_0 \in C^2(\mathbb{R}),\ u_1 \in C^1(\mathbb{R}) : n = 1 \\
\forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \le 2 : \partial^\alpha F \in \overline{C}^0\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big),\ u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n),\ u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n) : n = 2, 3
\end{array} \right\},
$$

so ist $u = U\big|_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^n}$ eine klassische Lösung des CPW.

Beweis

a) Nach Satz 15.1 ist $U = E * T$, wenn $T = F + \delta(t) \otimes u_1 + \delta'(t) \otimes u_0$; bzgl. $E * F$ vgl. c) in den Sätzen 14.6 - 14.8. Es bleibt

$$E * \big(\delta(t) \otimes u_1 + \delta'(t) \otimes u_0\big) = E * \delta(t) \otimes u_1 + \partial_t\big(E * \delta(t) \otimes u_0\big)$$

zu berechnen. Heuristisch setzt man einfach $F(\tau,\xi)=\delta(\tau)\otimes u_j,\ j=0,1$, d.h. $\tau=0$ statt des τ–Integrals. Exakt z.B. für $n=3$:

$$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)\implies\big(E*\delta(t)\otimes u_1\big)(\varphi)=E_{\tau,\xi}\Big(\delta(\sigma)\otimes u_1(\eta)\big(\varphi(\tau+\sigma,\xi+\eta)\big)\Big)$$

$$=E_{\tau,\xi}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(\tau,\xi+\eta)u_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta\Big)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi\big(|\xi|,\overbrace{\xi+\eta}^{x}\big)}{4\pi|\xi|}\,u_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta\Big)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi\big(|\xi|,x\big)}{4\pi|\xi|}\,u_1(x-\xi)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}\xi\overset{\text{Fubini}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi\big(|\xi|,x\big)}{4\pi|\xi|}\,u_1(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\substack{(t=|\xi|)\\ \downarrow}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big(\int\limits_{t=0}^{\infty}\frac{\varphi(t,x)}{4\pi t}\cdot\int\limits_{|\xi|=t}u_1(x-\xi)\,\mathrm{d}s(\xi)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\varphi(t,x)\Big(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|\xi|=t}u_1(x-\xi)\,\mathrm{d}s(\xi)\Big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$\implies E*\big(\delta(t)\otimes u_1\big)=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|\xi|=t}u_1(x-\xi)\,\mathrm{d}s(\xi)=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t}u_1(\xi)\,\mathrm{d}s(\xi),$$

wobei zuletzt $\xi_{\text{neu}}=x-\xi$ substituiert wurde und das Ergebnis (nach Fubini) in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4_{t,x})$ liegt.

b) Unter den zusätzlichen Voraussetzungen ist $u=U\big|_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^n}\in\overline{C}^2\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$. Z.B.:

$$\int\limits_{|x-\xi|\le t}u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{für } t>0}}{=}\ \int\limits_{x-t}^{x+t}u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\in C^2(\mathbb{R}^2_{t,x})\text{ für }u_1\in C^1(\mathbb{R}^1),$$

$$\iint\limits_{|x-\xi|<t}\frac{u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{t^2-|\underbrace{x-\xi}_{t\eta}|^2}}\ \overset{\uparrow}{=}\ t\iint\limits_{|\eta|<1}\frac{u_1(x-t\eta)}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\,\mathrm{d}\eta\in C^2(\mathbb{R}^3_{t,x})\text{ für }u_1\in C^2(\mathbb{R}^2),$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{F\big(t-|x-\xi|,\xi\big)}{|\underbrace{x-\xi}_{t\eta}|}\,\mathrm{d}\xi\ =\ t^2\iiint\limits_{|\eta|<1}\frac{F\Big(t\big(1-|\eta|\big),x-t\eta\Big)}{|\eta|}\,\mathrm{d}\eta\in\overline{C}^2\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^3\big)$$

für $\partial^\alpha F\in\overline{C}^0\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^3\big),\ |\alpha|\le 2$ etc.

Daher ist u eine klassische Lösung nach Lemma 15.1. $\square$

Bei der Wärmeleitungsgleichung ist manches analog: Zu $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big)$ heißt $u \in C^2\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big) \cap \overline{C}^0\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big)$ **klassische Lösung**

$$\begin{aligned} \iff \quad & \alpha) \quad \forall (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n : (\partial_t - \Delta_n) u(t,x) = f(t,x) \\ \wedge \quad & \beta) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \searrow 0} u(t,x) = u_0(x) \end{aligned}$$

Für $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $F, U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\operatorname{supp} U$, $\operatorname{supp} F \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ heißt U **distributionelle Lösung** $\iff (\partial_t - \Delta_n) U = F + \delta(t) \otimes u_0$.

Lemma 15.2
Für u_0, f, u wie oben und F, U dazu wie in Lemma 15.1 gilt (bzgl. $\partial_t - \Delta_n$) :

$$u \text{ klassische Lösung } \iff U \text{ distributionelle Lösung.}$$

Beweis Wie bei Lemma 15.1.

Satz 15.5
E sei wie in Satz 14.4. Dann besitzt das CP der Wärmeleitungsgleichung für $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\operatorname{supp} F \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ die distributionelle Lösung

$$U = E * \big(F + \delta(t) \otimes u_0\big),$$

die in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ stetig von u_0, F abhängt, falls die Träger von u_0, F beschränkt bleiben.

Der **Beweis** ist analog dem von Satz 15.1.

Bemerkung Wegen $\operatorname{supp} E = [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ ist E nun nicht mehr (wie bei der Wellengleichung) mit allen T faltbar, die Träger in $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ haben. Daher wird $u_0, F \in \mathcal{E}'$ vorausgesetzt und es geht auch die Eindeutigkeit verloren, die nur mehr unter zusätzlichen Wachstumsbedingungen gilt.

Satz 15.6
Wenn u_0, F, U wie in Satz 15.5 sind und zusätzlich u_0, F integrierbar sind, so ist $U \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ und

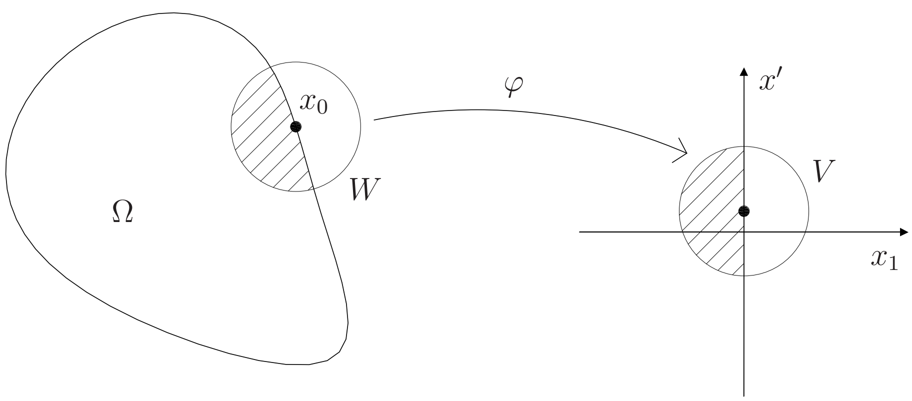
$$\begin{aligned} U(t,x) = & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} F(\tau,\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \mathrm{d}\xi \, \frac{\mathrm{d}\tau}{\big(4\pi(t-\tau)\big)^{n/2}} \\ & + \frac{Y(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Der **Beweis** ist wie bei Satz 15.2/3/4.

Bemerkung De facto lässt sich das CP der Wärmeleitungsgleichung unter viel allgemeineren Bedingungen lösen. Man erhält z.B. für lokalintegrable u_0, F mit höchstens exp. Wachsum durch die obige Formel die eindeutige Lösung mit höchstens exp. Wachstum (bzgl. x). Dafür bräuchten wir zusätzliche distributionentheoretische Hilfsmittel (allg. Faltung, parameterabhängige Distributionen etc.).

Wiederholung (vgl. FA, S. 38) $m \in \mathbb{N}$;

$$\Omega \in C^m \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{i)} & \emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und beschränkt.} \\ \text{ii)} & \forall x_0 \in \partial\Omega : \exists \varphi : W \longrightarrow V \text{ mit } V, W \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,} \\ & x_0 \in W,\ \varphi\ C^m,\ \varphi \text{ bijektiv, } \varphi^{-1}\ C^m,\ \varphi(W \cap \Omega) = \{x \in V; x_1 < 0\} \end{cases}$$



§ 16 Das 1. und 2. Randwertproblem für Δ_n

Motivation
Wenn eine am Rand von $\Omega \in C^1$ eingespannte Membran schwingt, so gilt
$(\partial_t^2 - c^2\Delta_n)u = 0$ (wobei $n = 2$) und $\forall t \in \mathbb{R} : \forall x \in \partial\Omega : u(t, x) = 0$.
Der Separationsansatz $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$ liefert

$$\ddot{T} \cdot X - c^2 T \cdot \Delta_n X = 0, \quad \frac{\ddot{T}}{T} = K,\ T(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t \text{ für } K = -\lambda^2 \leq 0$$

($K > 0$ ist physikalisch unsinnig, kann aber auch rein mathematisch ausgeschlossen werden), $K \cdot X - c^2\Delta_n X = 0$, d.h. $\Delta_n X + \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 X = 0$. Die Frequenzen λ sind also bestimmt durch die

Eigenwerte $\left(\frac{\lambda}{c}\right)^2$ des Operators $A = -\Delta_n$. [Genauer ist A die „Friedrichsche Erweiterung“ von $\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) = H : f \longmapsto -\Delta_n f$. Es ist $D(A) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $A \in \mathrm{Lsa}(H)$, A hat reines Punktspektrum (d.h. $\sigma_{\text{ess}}(A) = \emptyset$), vgl. Triebel Sätze 29.1, 43.1.] Dazu benötigt man ziemlich viel Spektraltheorie. Wir betrachten stattdessen die einfacheren statischen Probleme, wofür die Fredholmsche Theorie ausreicht. Weiters setzen wir $n \geq 3$ voraus, für $n = 2$ sind technische Änderungen nötig, weil $E = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$ in ∞ nicht 0 wird.

Def.:
Es seien $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n \supset \Omega \in C^1$, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, N_x = Einheitsnormale in $x \in \partial\Omega$ von Ω nach außen.

Problem	Name	Abk.
$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\Delta_n u = 0$ in Ω, $u\big\vert_{\partial\Omega} = g$	Inneres Dirichletproblem bzw. inneres 1. Randwertproblem	IDP
$u \in C(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$, $\Delta_n u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $u\big\vert_{\partial\Omega} = g$ $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} u(x) = 0$	Äußeres Dirichletproblem bzw. äußeres 1. Randwertproblem	ADP
$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\Delta_n u = 0$ in Ω, $\forall x \in \partial\Omega : \partial_n^i u(x) := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} N_x^T \cdot \nabla u(x - \varepsilon N_x)$ $= g(x)$ gleichmäßig bzgl. $x \in \partial\Omega$	Inneres Neumannproblem bzw. inneres 2. Randwertproblem	INP
$u \in C(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$, $\Delta_n u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} u(x) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega : \partial_n^a u(x) := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} N_x^T \cdot \nabla u(x + \varepsilon N_x) = g(x)$	Äußeres Neumannproblem bzw. äußeres 2. Randwertproblem	ANP

Bemerkung Beim INP und ANP wird also die Steigung von u am Rand vorgegeben.

Satz 16.1
$\Omega \in C^2$ zusammenhängend, $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und C^2 in Ω, $\Delta_n u = 0$ in Ω, u nicht konstant, $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit $u(x_0) = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ (bzw. $u(x_0) = \min\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$). Dann gilt:

a) $x_0 \in \partial\Omega$ („Maximum-Prinzip“)

b) (Hopf) Falls $\partial_n^i u(x_0) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} N_{x_0}^T \cdot \nabla u(x_0 - \varepsilon N_{x_0})$ existiert, so ist $\partial_n^i u(x_0) > 0$ (bzw. $\partial_n^i u(x_0) < 0$).

Beweis

α) Zunächst sei $0 < R_2 < R_1 < \infty$, $V := \{x \in \mathbb{R}^n;\ R_2 < |x| < R_1\}$ und $g(x) := \mathrm{e}^{-\alpha r^2} - \mathrm{e}^{-\alpha R_1^2}$ mit $r^2 = |x|^2$ und $\alpha > 0 \implies g(x) = 0$ für $|x| = R_1$ und $\partial_r g = -2\alpha r \mathrm{e}^{-\alpha r^2}$, $\partial_r^2 g = (-2\alpha + 4\alpha^2 r^2)\mathrm{e}^{-\alpha r^2}$

$$\begin{aligned}\implies \Delta_n g &= \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\,\partial_r\right) g = \big(-2\alpha + 4\alpha^2 r^2 - 2\alpha(n-1)\big)\mathrm{e}^{-\alpha r^2} \\ &= 2\alpha(-n + 2\alpha r^2)\mathrm{e}^{-\alpha r^2} > 0 \text{ in } V \text{ für } \alpha > \frac{n}{2R_2^2}.\end{aligned}$$

Weiters ist für $|x| = R_1$:

$$\partial_n^i g = \frac{x^T}{R_1} \cdot \nabla g(x) = \frac{x^T}{R_1}(\partial_r g)(R_1) \cdot \underbrace{\nabla r(x)}_{x/R_1} = (\partial_r g)(R_1) = -2\alpha R_1 \mathrm{e}^{-\alpha R_1^2} < 0.$$

β) Es sei nun $u : \overline{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, u C^2 in V, $\Delta u = 0$ in V, $|y| = R_1$, $\forall x \in \overline{V} \setminus \{y\} : u(x) < u(y)$, $\partial_n^i u(y)$ existiere. Wir zeigen, dass dann $\partial_n^i u(y) > 0$.

Beweis: Es sei $\alpha > \dfrac{n}{2R_2^2}$ und $\delta > 0$ sodass $u(y) > \max\limits_{|x|=R_2}\big(u(x) + \delta g(x)\big)$.
Für die Funktion $v := u + \delta \cdot g$ gilt $\Delta v > 0$ in $V \implies v$ hat in V kein Maximum (da sonst $\exists x \in V$ mit $\nabla v(x) = 0$, $\forall j : \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x) \le 0 \implies \Delta v(x) \le 0$ ↯)

$$\implies \max_{x \in \overline{V}} v(x) = \max\Big\{\max_{|x|=R_1} \underbrace{v(x)}_{\substack{\shortparallel \\ u(x) \le v(y)}},\qquad \underbrace{\max_{|x|=R_2} v(x)}_{< u(y) = v(y)}\Big\} = v(y)$$

$\implies$ mit $N := \dfrac{y}{R_1}$ gilt

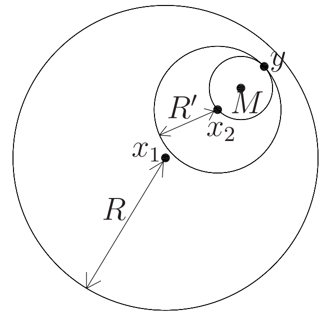
$$\forall k \ge K : 0 \le v(y) - v\left(y - \frac{1}{k}\,N\right) = \frac{1}{k} N^T \cdot \nabla v(y - \varepsilon_k N),\ \ 0 < \varepsilon_k < \frac{1}{k}$$

$$\implies \underbrace{\partial_n^i v(y)}_{} = \lim_{k \to \infty} N^T \cdot \nabla v(y - \varepsilon_k N) \ge 0$$
$$= \partial_n^i u(y) + \delta \cdot \underbrace{\partial_n^i g(y)}_{<0} \implies \partial_n^i u(y) > 0. \qquad \square$$

γ) **Beweis von a):** Annahme: $x_0 \in \Omega$.
$a := u(x_0)$; u nicht konstant $\implies A := u^{-1}(a) \not\supset \Omega$;
Ω zusammenhängend $\implies \underbrace{\overset{\circ}{A}}_{\subsetneq \Omega} \,\dot\cup\, \underbrace{(\Omega \setminus A)}_{\substack{\subsetneq \Omega \\ (\text{weil } x_0 \in A)}} \neq \Omega$

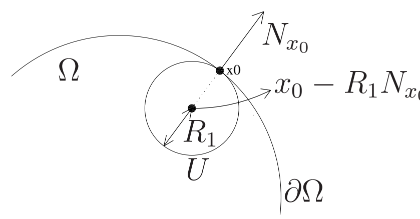
$\implies \exists x_1 \in \Omega \setminus \big(\overset{\circ}{A} \cup (\Omega \setminus A)\big) \implies x_1 \in \Omega \cap \partial A \implies u(x_1) = a;$

es sei $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_1| < R\} \subset \Omega;\ x_1 \in \partial A$
$\implies \exists x_2$ mit $|x_1 - x_2| < \dfrac{R}{2} : u(x_2) < a$; es sei
$R' := \sup\{t;\ \forall x \text{ mit } |x - x_2| < t : u(x) < a\} \le \dfrac{R}{2}$ und
y mit $|y - x_2| = R',\ u(y) = a$.
Wenn $M := \dfrac{x_2 + y}{2}$ als Nullpunkt genommen wird (d.h. betrachte $u_{\text{neu}}(x) := u(M + x)$ statt u), $R_1 := \dfrac{1}{2}R'$ und $0 < R_2 < R_1$, so sind die Voraussetzungen von β) erfüllt (denn $\forall x \neq y$ mit $|x - M| \le R_1$ ist $u(x) < u(y) = a$) und daher ist $(y - x_2) \cdot \nabla u(y) > 0$
$\implies u\big(y + \varepsilon(y - x_2)\big) > u(y) = a = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ für kleines $\varepsilon > 0 \implies \lightning$



δ) **Beweis von b):** Nach a) ist $x_0 \in \partial\Omega$.

Für kleines $R_1 > 0$ ist
$U := \Big\{x \in \mathbb{R}^n;\ \big|x - (x_0 - R_1 N_{x_0})\big| < R_1\Big\} \subset \Omega$ weil $\Omega \in C^2$, und $\overline{U} \subset \Omega \cup \{x_0\}$.
[In einem geeigneten affin-linearen Koordinatensystem ist U durch $(x_1+\varepsilon)^2 + |x'|^2 < \varepsilon^2$ gegeben und Ω lokal durch $x_1 < f(x')$, $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$, f C^2;
$x \in U \implies x_1 < -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - |x'|^2} \le -\dfrac{|x'|^2}{2\varepsilon} \le f(x')$ für $0 < \varepsilon$ klein.]



Auf $V = \Big\{x \in \mathbb{R}^n;\ R_2 < \big|x - (x_0 - R_1 N_{x_0})\big| < R_1\Big\}$ kann (nach Verschiebung) β) mit $y = x_0$ angewendet werden, da $x \in \overline{V} \setminus \{x_0\} \implies x \in \Omega \implies u(x) < u(x_0)$.
Also ist $\partial_n^i u(x_0) > 0$.

ϵ) Die Aussagen über $\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ erhält man durch Betrachtung von $-u$ an Stelle von u. $\square$

Satz 16.2
$\Omega \in C^2$, Ω zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend.

a) IDP, ADP, ANP besitzen höchstens eine Lösung.

b) INP ist nur lösbar, falls $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g(y)\, \mathrm{d}s(y) = 0$; falls u INP löst, so ist $u + c,\ c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung.

Beweis

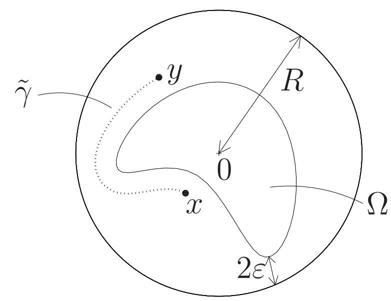
a) Wenn u_1, u_2 2 Lösungen sind, so ist $u_1 - u_2$ eine Lösung zu $g = 0$. Es genügt also $u = 0$ zu zeigen, wenn $g = 0$.

   α) IDP: Nach Satz 16.1 a) ist $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x\in\partial\Omega} g(x) = 0$ und
   $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min\limits_{x\in\partial\Omega} g(x) = 0 \implies u \equiv 0.$

   β) ADP, ANP: Wenn $\overline{\Omega} \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < R\big\} \implies$
   $U_R := (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < R\big\}$ ist zusammenhängend.
   [*Beweis:* $\exists \varepsilon > 0 : \overline{\Omega} \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq R - 2\varepsilon\big\}$; $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend, offen
   $\implies \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ wegzusammenhängend
   $\implies \forall x, y \in U_R : \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ stetig mit $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$;

$$c := \max\big\{|x|,\ |y|,\ R - \varepsilon\big\} \implies \tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma(t) & : \ \big|\gamma(t)\big| \leq c \\ \dfrac{\gamma(t)}{\big|\gamma(t)\big|} \cdot c & : \ \big|\gamma(t)\big| \geq c \end{cases}$$

   ist ein Weg in U_R von x nach y.]



   Nach Satz 16.1 a) und b) ist dann

$$\max_{x\in\overline{U}_R} u(x) = \max_{|x|=R \vee x\in\partial\Omega} u(x) \to 0 \text{ für } R \to \infty$$

   und analog für das Minimum $\implies u \equiv 0.$

b) INP:

   α) Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass u eine Lösung von INP ist, die C^2 in eine Umgebung von $\overline{\Omega}$ fortsetzbar ist. Dann ist

$$\int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,\mathrm{d}s(y) = \int\limits_{\partial\Omega} N_y^T \cdot \nabla u(y)\,\mathrm{d}s(y) \underset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

   β) Im allgemeinen Fall approximieren wir Ω durch die C^1–Gebiete Ω_ε von innen, wobei $\partial\Omega_\varepsilon = \{x - \varepsilon N_x;\ x \in \partial\Omega\},\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon < \varepsilon_1$. Dann ist nach α)

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} N_x^T \cdot \nabla u(x)\,\mathrm{d}s(x) \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \int\limits_{\partial\Omega} \partial_n^i u(x)\,\mathrm{d}s(x).$$

γ) Wenn u, v 2 Lösungen zu g sind und $w = u - v$ nicht konstant wäre und $w(y) = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} w(x) \underset{\text{Satz 16.1}}{\Longrightarrow} y \in \partial\Omega,\ 0 < \partial_n^i w(y) = \underbrace{\partial_n^i u(y)}_{g(y)} - \underbrace{\partial_n^i v(y)}_{g(y)}$ ↯ $\square$

Def.:

$n \geq 3,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n\ C^2,\ h : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $E := -\dfrac{|x|^{2-n}}{(n-2)c}$, $c = |\mathbb{S}^{n-1}|$ wie in Seite 24. Dann heißen

$$\left\{\begin{array}{l} P_1(h) := \int\limits_{\partial\Omega} E(x-y)h(y)\,\mathrm{d}s(y) \\ P_2(h) := \int\limits_{\partial\Omega} N_y^T \cdot \nabla_y E(x-y) \cdot h(y)\,\mathrm{d}s(y) \end{array}\right\} \textbf{ Potentiale der}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{einfachen} \\ \textbf{doppelten} \end{array}\right\} \textbf{ Schicht} \text{ zur Dichte } h \text{ (mit } \nabla_y := \begin{pmatrix} \partial/\partial y_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial y_n \end{pmatrix}\text{)}.$$

Bemerkungen:

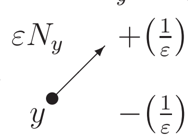
1) $P_i(h)$ sind also Funktionen von x. In $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ sind $P_i(h)\ C^\infty,\ \Delta_n P_i(h) = 0$, und $\lim\limits_{|x| \to \infty} P_i(h)(x) = 0$ (Lebesgue).

2) $P_1(h)$ ist ein schwach singulärer Integraloperator auf $L^2(\partial\Omega)$ nach Seite 12 ($\alpha = n-2 < n-1$). Für $P_2(h)$ wird das in Lemma 16.1 gezeigt.

3) Im $\mathbb{R}^3$ ist $-E = \dfrac{1}{4\pi|x|}$ das (Coulomb-)Potential einer Einheitsladung in 0 und $-P_1(h)$ daher das Potential der mit Ladungsdichte h belegten Fläche $\partial\Omega$. Mathematisch ist $P_1(h) = E * (h \cdot \delta_{\partial\Omega})$, wenn $(h \cdot \delta_{\partial\Omega})(\psi) = \int\limits_{\partial\Omega} h(x)\psi(x)\,\mathrm{d}s(x),\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Seite 19)

$\Longrightarrow\ \Delta_n P_1(h) = h \cdot \delta_{\partial\Omega}$.

Ebenso ist $-N_y^T \cdot \nabla_y E(x-y) = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{E\big(x - (y + \varepsilon N_y)\big) - E(x-y)}{\varepsilon}$ das Potential des

Dipols 

, $\varepsilon \searrow 0$, und $-P_2(h)$ das Potential einer Dipolbelegung mit der

Dichte h auf $\partial\Omega$.

Die nächsten 4 Lemmata werden oft als **Sprungrelationen** bezeichnet.

Lemma 16.1
$\exists A \in C(\partial\Omega \times \partial\Omega) : \forall x \in \partial\Omega :$

$$P_2(h)(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{A(x,y)}{|x-y|^{n-3/2}} \cdot h(y)\,\mathrm{d}s(y).$$

Speziell: P_2 ist ein schwach singulärer Integraloperator auf $\partial\Omega$.

Beweis
$\nabla E = -\dfrac{1}{(n-2)c} \cdot (2-n) \cdot |x|^{1-n} \nabla |x| = \dfrac{x}{c|x|^n}$,

$$\begin{aligned} \nabla_y E(x-y) &= -(\nabla E)(x-y) \implies \\ P_2(h)(x) &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{-N_y^T \cdot (x-y)}{c|x-y|^n}}_{K(x,y)} \cdot h(y)\,\mathrm{d}s(y). \end{aligned}$$

Es sei $\partial\Omega$ lokal durch $f(x)=0$, f C^2, mit $N_y = \dfrac{\nabla f(y)}{\left|\nabla f(y)\right|}$ gegeben $\implies$

$$\left|N_y^T \cdot (x-y)\right| = \frac{\left|\nabla f(y)^T \cdot (x-y)\right|}{\left|\nabla f(y)\right|} = \frac{\left|f(y) + \nabla f(y)^T \cdot (x-y) - f(x)\right|}{\left|\nabla f(y)\right|} \le C|x-y|^2$$

für $x, y \in \partial\Omega \implies A(x,y) := \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & : & x = y \\ \dfrac{-N_y^T \cdot (x-y)}{c|x-y|^{3/2}} & : & x \neq y \end{array} \right\}$ ist stetig auf $\partial\Omega \times \partial\Omega$,

$K(x,y) = \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^{n-3/2}}$. □

Lemma 16.2 $P_1(h)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis
Wir müssen noch zeigen, dass $P_1(h)$ in $x_0 \in \partial\Omega$ stetig ist (vgl. Bemerkung 1 in Seite 48).

$$(n-2)c \cdot \left|P_1(h)(x) - P_1(h)(x_0)\right| \le \|h\|_\infty \cdot \int_{\partial\Omega} \left| \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_0-y|^{n-2}} \right| \mathrm{d}s(y)$$

$$\le \|h\|_\infty \Bigg[\underbrace{\int_{\substack{y\in\partial\Omega \\ |y-x_0|\le R}} \frac{\mathrm{d}s(y)}{|x-y|^{n-2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\substack{y\in\partial\Omega \\ |y-x_0|\le R}} \frac{\mathrm{d}s(y)}{|x_0-y|^{n-2}}}_{I_2} + \underbrace{\int_{\substack{y\in\partial\Omega \\ |y-x_0|> R}} \left| \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_0-y|^{n-2}} \right| \mathrm{d}s(y)}_{I_3} \Bigg]$$

I_1 und I_2 werden beliebig klein, wenn R klein genug ist, denn in einer Karte $\varphi : W \longrightarrow V$ wie in Seite 43 mit $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi(x) = \binom{a}{\xi}$, $\varphi(y) = \binom{0}{\eta}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt

$$\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \le C|x-y| \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists R > 0 : I_1 \le C_1 \int_{|\eta|\le\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\eta_1 \ldots \mathrm{d}\eta_{n-1}}{\left|\varphi(x) - \binom{0}{\eta}\right|^{n-2}}$$

$$\leq C_1 \int\limits_{|\eta|\leq\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\eta}{|\xi-\eta|^{n-2}} \leq C_1 \int\limits_{\substack{|u|\leq\varepsilon\\ u\in\mathbb{R}^{n-1}}} \frac{\mathrm{d}u}{|u|^{n-2}} = C_1\cdot|\mathbb{S}^{n-2}|\cdot\varepsilon$$

Andererseits wird I_3 für festes R beliebig klein, wenn $|x-x_0|\leq\delta,\ 0<\delta<R,\ \delta$ klein genug.

$\square$

Lemma 16.3
Für $x_0\in\partial\Omega$ gilt

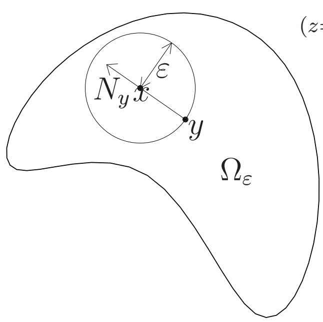
$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} P_2(h)(x) &= P_2(h)(x_0)+\tfrac{1}{2}\,h(x_0) \text{ und}\\
\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}}} P_2(h)(x) &= P_2(h)(x_0)-\tfrac{1}{2}\,h(x_0).
\end{aligned}$$

Beweis

a) Zunächst sei $h\equiv 1$.
Wenn $x\in\Omega$ und $\varepsilon>0$ mit $K_\varepsilon:=\big\{y;\ |x-y|\leq\varepsilon\big\}\subset\Omega$, und $\Omega_\varepsilon:=\Omega\setminus K_\varepsilon$

$$\Longrightarrow\ P_2(h)(x)=\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} N_y^T\cdot\nabla_y E(x-y)\,\mathrm{d}s(y)-\int\limits_{\partial K_\varepsilon} N_y^T\cdot\underbrace{\nabla_y E(x-y)}_{\substack{\shortparallel\\ \text{vgl. S. 49}}}\,\mathrm{d}s(y)$$

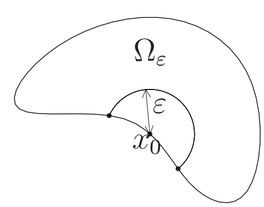
$$\overset{(\text{Gauß})}{\underset{(z=x-y)}{=}}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\underbrace{\Delta_y E(x-y)}_{0}\,\mathrm{d}y-\int\limits_{|z|=\varepsilon}\frac{z^T}{|z|}\cdot\overbrace{\frac{-z}{c|z|^n}}^{\shortparallel}\,\mathrm{d}s(z)$$



$$=\frac{1}{c\,\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{|z|=\varepsilon}\mathrm{d}s(z)=1,\text{ d.h. } P_2(h)(x)=1.$$

Für $x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$ ist $P_2(h)(x)=\int\limits_{\partial\Omega}N_y^T\cdot\nabla_y E(x-y)\,\mathrm{d}s(y)\overset{(\text{Gauß})}{=}\int\limits_{\Omega}\Delta_y E(x-y)\,\mathrm{d}y=0.$

Für $x_0\in\partial\Omega$ ist hingegen $P_2(h)(x_0)=\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{(\partial\Omega)\setminus K_\varepsilon}\ldots\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Gauß}}}{=}$



$$-\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{(\partial K_\varepsilon)\cap\Omega}N_y^T\cdot\nabla_y E(x_0-y)\,\mathrm{d}s(y)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{c\ \varepsilon^{n-1}}\int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon\\ f(x_0+z)>0}}\mathrm{d}s(z)$$

$$\underset{(z=\varepsilon u)}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{c} \int\limits_{\substack{|u|=1\\ f(x_0+\varepsilon u)>0}} \mathrm{d}s(u) \overset{\substack{\text{Lebesgue}\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{c}\left|\left\{u \in \mathbb{S}^{n-1};\ \nabla f(x_0)^T \cdot u > 0\right\}\right| = \frac{1}{2},$$

wenn Ω bei x_0 durch $f(x) > 0$ gegeben ist. Daher gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0\\ x \in \left\{\substack{\Omega\\ \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}\right\}}} \underbrace{P_2(h)(x)}_{=\left\{\substack{1\\0}\right\}} = \underbrace{P_2(h)(x_0)}_{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} \underbrace{h(x_0)}_{1}.$$

b) Für allgemeines $h \in C(\partial\Omega)$ sei $\tilde{h}(x) := h(x) - h(x_0)$. Wenn wir zeigen, dass $P_2(\tilde{h})$ in x_0 stetig ist, folgt $\lim\limits_{\substack{x \to x_0\\ x \in \Omega}} \underbrace{P_2(h)(x)}_{=P_2(\tilde{h})(x) + h(x_0)\underbrace{P_2(1)(x)}_{=1}} = P_2(\tilde{h})(x_0) + h(x_0)$

$= P_2(\tilde{h})(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=P_2(1)(x_0)} h(x_0) + \frac{1}{2}h(x_0) = P_2(h)(x_0) + \frac{1}{2}h(x_0)$ und ähnlich für $x \to x_0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

c) $\tilde{h}(x_0) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0:\ \exists R > 0:\ \left|\tilde{h}(y)\right| \le \varepsilon$ falls $|y - x_0| \le R$; für $|x - x_0| \le \dfrac{R}{2}$ gilt also

$$\left|P_2(\tilde{h})(x) - P_2(\tilde{h})(x_0)\right| = \frac{1}{c}\left|\int\limits_{\partial\Omega} N_y^T \cdot \left(\frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|^n}\right)\tilde{h}(y)\,\mathrm{d}s(y)\right|$$

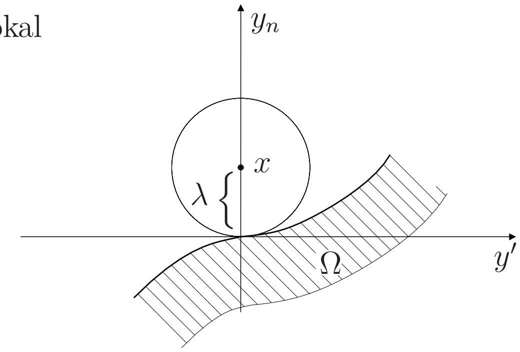
$$\le \frac{\varepsilon}{c} \cdot \underbrace{\int\limits_{\substack{y \in \partial\Omega,\\ |y - x_0| \le R}} \frac{\left|N_y^T \cdot (x-y)\right|}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}s(y)}_{\le \int\limits_{y \in \partial\Omega} \frac{\left|N_y^T \cdot (x-y)\right|}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}s(y) =: I(x)} + \frac{\varepsilon}{c} \int\limits_{\substack{y \in \partial\Omega\\ |y - x_0| \le R}} \frac{\left|N_y^T \cdot (x_0-y)\right|}{|x_0-y|^n}\,\mathrm{d}s(y) +$$

$$+ \frac{1}{c} \int\limits_{\substack{y \in \partial\Omega\\ |y - x_0| > R}} \underbrace{\left|\frac{N_y^T \cdot (x-y)}{|x-y|^n} - \frac{N_y^T \cdot (x_0-y)}{|x_0-y|^n}\right|}_{\substack{\le \varepsilon \text{ für } |x-x_0| \le \delta\\ \text{und } |y-x_0| > R}} \cdot \left|\tilde{h}(y)\right| \mathrm{d}s(y).$$

Es genügt daher zu zeigen, dass I beschränkt ist.

d) Klarerweise ist I für $d(x, \partial\Omega) \ge \delta > 0$ beschränkt.

Nach Verschiebung und Drehung ist $\partial\Omega$ lokal gegeben durch $y_n = g(\underbrace{y_1, \ldots, y_{n-1}}_{y'})$,



$|y'| \leq R,\ g \in C^2,\ g(0) = 0,\ \nabla g(0) = 0,$

$N = \binom{-\nabla g}{1} / \sqrt{1 + |\nabla g|^2},\ x = \binom{0}{\lambda},$

$|x - y| \geq |x| = |\lambda|,\ |x - y| \geq |y'|$

für $y \in \partial\Omega$ und daher genügt es, $J := \int\limits_{|y'| \leq R} \frac{\left|(-\nabla g, 1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -y' \\ \lambda - g(y') \end{smallmatrix}\right)\right|}{\big(|\lambda| + |y'|\big)^n} \, \mathrm{d}y'$ unabhängig von λ abzuschätzen.

$$y' = \lambda \cdot u \implies J \leq \frac{1}{|\lambda|} \int\limits_{\substack{|u| \leq R/|\lambda| \\ u \in \mathbb{R}^{n-1}}} \underbrace{\left|\lambda - g(\lambda u) + \lambda u^T \cdot \nabla g(\lambda u)\right|}_{\leq |\lambda| + C\ \lambda^2 |u|^2} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\big(1 + |u|\big)^n}$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\big(1 + |u|\big)^n} + C|\lambda| \underbrace{\int\limits_{|u| \leq R/|\lambda|} |u|^{2-n} \, \mathrm{d}u}_{|\mathbb{S}^{n-2}| \cdot \frac{R}{|\lambda|}} \leq C_1. \qquad \square$$

Bemerkung Da h gleichmäßig stetig auf $\partial\Omega$ ist, konvergieren die Limites in Lemma 16.3 gleichmäßig bzgl. $x_0 \in \partial\Omega$.

Lemma 16.4
Für $x_0 \in \partial\Omega$ gilt

$$\partial_n^i P_1(h)(x_0) = -\frac{1}{2} h(x_0) + \int\limits_{\partial\Omega} h(y) N_{x_0}^T \cdot (\nabla E)(x_0 - y) \, \mathrm{d}s(y)$$

und

$$\partial_n^a P_1(h)(x_0) = \frac{1}{2} h(x_0) + \int\limits_{\partial\Omega} h(y) N_{x_0}^T \cdot (\nabla E)(x_0 - y) \, \mathrm{d}s(y).$$

Bemerkung P_2 hat auf $L^2(\partial\Omega)$ den Kern $K(x, y) = N_y^T \cdot \nabla_y E(x - y) = -N_y^T \cdot (\nabla E)(x - y)$. Der obige Integraloperator hat den Kern $N_x^T \cdot (\nabla E)(x - y) = -N_x^T \cdot (\nabla E)(y - x) = K(y, x)$, d.h. er ist der adjungierte Operator zu P_2.

Beweis

a) Für $N \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ ist (nach Lebesgue)

$$N^T \cdot \nabla P_1(h)(x) = \int\limits_{\partial\Omega} h(y) N^T \cdot \nabla_x E(x-y)\,\mathrm{d}s(y).$$

Für $x_0 \in \partial\Omega$ und $N = N_{x_0}$ und $\varepsilon \neq 0$ ist daher

$$N_{x_0}^T \cdot \nabla P_1(h)(x_0 + \varepsilon N_{x_0}) + P_2(h)(x_0 + \varepsilon N_{x_0}) =$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} h(y)(N_{x_0} - N_y)^T \cdot (\nabla E)(x_0 + \varepsilon N_{x_0} - y)\,\mathrm{d}s(y) =: I(x_0, \varepsilon).$$

Wenn wir zeigen, dass $I : \partial\Omega \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist (für kleines $\varepsilon_1 > 0$), so folgt

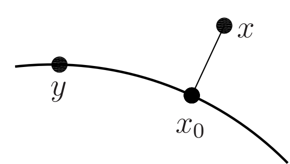
$$\partial_n^{i/a} P_1(h)(x_0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} N_{x_0}^T \cdot \nabla P_1(h)(x_0 \mp \varepsilon N_{x_0}) = I(x_0, 0) - \lim_{\varepsilon \searrow 0} P_2(h)(x_0 \mp \varepsilon N_{x_0}) \underset{\text{L. 16.3}}{=}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} h(y)(N_{x_0} - N_y)^T \cdot (\nabla E)(x_0 - y)\,\mathrm{d}s(y) - \Big[\underbrace{P_2(h)(x_0)}_{-\int_{\partial\Omega} h(y) N_y^T \cdot (\nabla E)(x_0 - y)\,\mathrm{d}s(y)} \pm \frac{1}{2} h(x_0) \Big] =$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} h(y) N_{x_0}^T \cdot (\nabla E)(x_0 - y)\,\mathrm{d}s(y) \mp \frac{1}{2} h(x_0).$$

b) Für $x_0, y \in \partial\Omega,\ x = x_0 + \varepsilon N_{x_0}$ und $|\varepsilon|$ klein ist

$|N_{x_0} - N_y| \leq C|x_0 - y| \leq C_1 |x - y|$
und daher
$\big|(N_{x_0} - N_y)^T (\nabla E)(x - y)\big| \leq \dfrac{C_2}{|x-y|^{n-2}}$.



Das liefert $\forall \eta > 0 : \exists \delta > 0 :$

$$\big|I(\tilde{x}_0, \tilde{\varepsilon}) - I(x_0, \varepsilon)\big| \leq \|h\|_\infty \cdot \Bigg[C_2 \int\limits_{\substack{y \in \partial\Omega \\ |y - x_0| \leq R}} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n-2}} \right) \mathrm{d}s(y)$$

$$+ \int\limits_{\substack{y \in \partial\Omega \\ |y - x_0| > R}} \big|(N_{x_0} - N_y)^T \cdot (\nabla E)(x - y) - (N_{\tilde{x}_0} - N_y)^T (\nabla E)(\tilde{x} - y)\big| \mathrm{d}s(y) \Bigg] \leq \eta,$$

wenn $\tilde{x} = \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon} N_{\tilde{x}_0},\ |x_0 - \tilde{x}_0| \leq \delta,\ |\varepsilon - \tilde{\varepsilon}| \leq \delta < \dfrac{R}{2}$ (vgl. Seite 49). $\square$

Bemerkung Wieder konvergieren $\partial_n^{i/a} P_1(h)(x_0) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} N_{x_0}^T \cdot \nabla P_1(h)(x_0 \mp \varepsilon N_{x_0})$ gleichmäßig bzgl. $x_0 \in \partial\Omega$, da $\partial\Omega \times [-\varepsilon_1, \varepsilon]$ kompakt und daher I gleichmäßig stetig ist.

Satz 16.3
Es sei $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n \supset \Omega \in C^2$ zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:
IDP bzw. ANP besitzen jeweils genau eine Lösung u bzw. $\tilde{u}$. Diese können als Potentiale der doppelten bzw. einfachen Schicht dargestellt werden.

Beweis

a) Nach Satz 16.2 brauchen wir nur die Existenz der Lösungen zeigen. Für die Lösungen $\left\{ \begin{array}{c} u \\ \tilde{u} \end{array} \right\}$ von $\left\{ \begin{array}{c} \text{IDP} \\ \text{ANP} \end{array} \right\}$ machen wir die Ansätze $\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & P_2(h) \\ \tilde{u} & = & P_1(\tilde{h}) \end{array} \right\}$ mit unbekannten $h, \tilde{h} \in C(\partial\Omega)$. Nach Lemma 16.1 ist $K = P_2 : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ kompakt und K^* tritt in Lemma 16.4 auf. Damit $\left\{ \begin{array}{cc} u & \text{IDP} \\ \tilde{u} & \text{ANP} \end{array} \right\}$ lösen, muss $\forall x_0 \in \partial\Omega$ gelten

$$\begin{array}{rcl} g(x_0) & = & \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) \underset{\text{L. 16.3}}{=} K(h)(x_0) + \tfrac{1}{2}\, h(x_0), \\ g(x_0) & = & \partial_n^a \tilde{u}(x_0) \underset{\text{L. 16.4}}{=} K^*(\tilde{h})(x_0) + \tfrac{1}{2}\, \tilde{h}(x_0), \\ \text{d.h. } g & = & \big(K + \tfrac{1}{2}\, I\big) h \quad = \quad \big(K^* + \tfrac{1}{2}\, I\big) \tilde{h}. \end{array}$$

Nach der Fredholmschen Alternative sind diese beiden Gleichungen $\forall g \in L^2(\partial\Omega)$ (eindeutig) lösbar $\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \notin \sigma(K)$ (beachte $\sigma(K^*) = \big\{\overline{z};\ z \in \sigma(K)\big\}$). Das zeigen wir in b).
Nach Satz 12.7 sind die Lösungen $h, \tilde{h} \in C(\partial\Omega)$ und, weil K, K^* reellwertig sind, ist auch $g = \overline{g} = \big(K + \frac{1}{2}\, I\big) \overline{h} \implies h = \overline{h}$ etc., d.h. $h, \tilde{h}$ reellwertig.

b) **Annahme** $-\frac{1}{2} \in \sigma(K^*)$, d.h. $\exists 0 \neq h \in L^2(\partial\Omega) : K^* h = -\frac{1}{2}\, h$. oEdA sei h reellwertig. Dann ist $h \in C(\partial\Omega)$ (Satz 12.7) und $v := P_1(h)$ löst ANP mit Randwert $0 \underset{\text{Satz 16.2}}{\implies} v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$; nach Lemma 16.2 ist v stetig in $\mathbb{R}^n \implies \forall x_0 \in \partial\Omega : \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} v(x) = 0 \implies$
$\implies v$ löst IDP mit Randwert $0 \underset{\text{Satz 16.2}}{\implies} v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \underset{\text{L. 16.4}}{\implies} \forall x_0 \in \partial\Omega : h(x_0) = \partial_n^a v(x_0) - \partial_n^i v(x_0) = 0$ ↯ $\square$

Satz 16.4
Ω, g seien wie in Satz 16.3. Dann gilt: ADP besitzt genau eine Lösung; INP besitzt eine (bis

auf Konstante eindeutige) Lösung $\Longleftrightarrow \int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,\mathrm{d}s(y) = 0$. Diese Lösungen können jeweils als $\big[a\cdot|x-x_1|^{2-n} +$ Potentiale der doppelten Schicht $(a\in\mathbb{R}, x_1\in\Omega)\big]$ bzw. als Potentiale der einfachen Schicht dargestellt werden.

Beweis

a) Für die Lösung $\tilde{u}$ von INP machen wir den Ansatz $\tilde{u} = P_1(\tilde{h})$ mit unbekanntem $\tilde{h} \in C(\partial\Omega)$. Damit $\tilde{u}$ INP löst, muss $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$g(x_0) = \partial_n^i \tilde{u}(x_0) \underset{\text{L. 16.4}}{=} K^*(\tilde{h})(x_0) - \frac{1}{2}\tilde{h}(x_0)$ gelten, d.h. $g = \big(K^* - \frac{1}{2}\,I\big)\tilde{h}$ (mit $K = P_2 : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ wie vorher). In b) zeigen wir, dass $\ker\big(K - \frac{1}{2}\,I\big) = \mathbb{C}\cdot 1$. Nach der Fredholmschen Alternative ist daher
$g = \big(K^* - \frac{1}{2}\,I\big)\tilde{h}$ lösbar $\Longleftrightarrow g \perp \ker\big(K - \frac{1}{2}\,I\big) = \mathbb{C}\cdot 1$, d.h. $\int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,\mathrm{d}s(y) = 0$.

Wie oben ist dann $\tilde{h} \in C(\partial\Omega)$ und $g = \operatorname{Re} g = \big(K^* - \frac{1}{2}\,I\big)\operatorname{Re}\tilde{h}$, d.h. $\tilde{u} = P_1(\operatorname{Re}\tilde{h})$ löst INP.

b) Nach Seite 51 ist $P_2(1) = \frac{1}{2}$, d.h. $\mathbb{C}\cdot 1 \subset \ker\big(K - \frac{1}{2}\,I\big)$.
Annahme $\dim\ker\big(K - \frac{1}{2}\,I\big) > 1$.
Nach Satz 11.3 ist dann auch $\dim\ker\big(K^* - \frac{1}{2}\,I\big) > 1$, d.h. $\exists \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \ker\big(K^* - \frac{1}{2}\,I\big)$ (oEdA) reellwertig und linear unabhängig $\underset{\text{Satz 12.7}}{\Longrightarrow} \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in C(\partial\Omega) \Longrightarrow \tilde{u}_i := P_1(\tilde{h}_i)$ lösen INP mit Randwert 0 $\underset{\text{Satz 16.2 b)}}{\Longrightarrow} \tilde{u}_i\big|_\Omega$ sind konstant; es seien $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $v := \lambda_1\tilde{u}_1 + \lambda_2\tilde{u}_2$ mit $v\big|_\Omega = 0$; nach Lemma 16.2 ist $v = P_1(\lambda_1\tilde{h} + \lambda_2\tilde{h})$ stetig in $\mathbb{R}^n$;
$\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$, $v(x) \to 0$ für $|x| \to \infty \Longrightarrow v$ löst ADP mit Randwert 0 $\underset{\text{Satz 16.2}}{\Longrightarrow}$ $v \equiv 0 \underset{\text{Satz 16.4}}{\Longrightarrow} \forall x_0 \in \partial\Omega : (\lambda_1\tilde{h}_1 + \lambda_2\tilde{h}_2)(x_0) = \partial_n^a v(x_0) - \partial_n^i v(x_0) = 0 \Longrightarrow \tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ linear abhängig. $\lightning$

c) Nun zu ADP. Nach Verschiebung können wir oEdA $0 \in \Omega$ annehmen. Für $h : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig setzen wir $P_3(h) := P_2(h) + \dfrac{1}{|x|^{n-2}} \int\limits_{\partial\Omega} h(y)\,\mathrm{d}s(y)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Dann ist wieder $\Delta_n P_3(h) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ und $P_3(h)(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$.
Wir machen den Ansatz $u = P_3(h)$ mit unbekanntem $h \in L^2(\partial\Omega)$. Damit u ADP löst, muss $h \in C(\partial\Omega)$ sein und

$$\forall x_0 \in \partial\Omega : g(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}}} u(x) \underset{\text{L. 16.3}}{=} -\frac{1}{2}\,h(x_0) + K(h)(x_0) + \frac{1}{|x_0|^{n-2}} \int\limits_{\partial\Omega} h(y)\,\mathrm{d}s(y),$$

d.h. $\big(K_1 - \frac{1}{2}\,I\big)h = g$, wobei $K_1 : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ mit Kern $K_1(x,y) = |x|^{2-n} + K(x,y)$. In d) zeigen wir, dass $\frac{1}{2} \notin \sigma(K_1)$. Nach Fredholm ist dann $\big(K_1 - \frac{1}{2}\,I\big)h = g$ (eindeutig) lösbar und wie bisher $h \in C(\partial\Omega)$ und reellwertig, d.h. $u = P_3(h)$ löst ADP.

d) **Annahme** $\frac{1}{2} \in \sigma(K_1)$, d.h. $\exists 0 \neq h \in L^2(\partial\Omega) : K_1 h = \frac{1}{2}\,h$.
Dann ist $h \in C(\partial\Omega)$ (Satz 12.7) und $v := P_3(h)$ löst ADP mit Randwert 0 $\underset{\text{Satz 16.2}}{\Longrightarrow}$ $v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} : \int\limits_{\partial\Omega} h(y)\big[1 + |x|^{n-2} \cdot N_y^T \cdot \nabla_y E(x-y)\big]\,\mathrm{d}s(y) = 0.$$

Wegen $|x|^{n-2} N_y^T \cdot \nabla_y E(x-y) = -N_y^T \cdot \dfrac{|x|^{n-2}(x-y)}{c|x-y|^n} \to 0$ gleichmäßig für $y \in \partial\Omega$ wenn $|x| \to \infty$ folgt dann

$$\int\limits_{\partial\Omega} h(y)\,\mathrm{d}s(y) \overset{\circledast}{=} 0 \implies K(h) = K_1(h) = \frac{1}{2}\,h \overset{\text{b)}}{\implies} h \in \mathbb{C} \overset{\circledast}{\implies} h \equiv 0 \;\lightning$$

$\square$

Bemerkung Im Allgemeinen müssen die Integralgleichungen $\big(K^{(*)}_{(1)} \pm \frac{1}{2}\,I\big)\overset{(\sim)}{h} = g$ numerisch gelöst werden und ist $u = P_{1,2,3}(\overset{(\sim)}{h})$. Im Fall einer Kugel lässt sich die Berechnung von h umgehen:

Satz 16.5
Es seien $\varrho > 0,\ n \geq 3,\ \Omega = \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < \varrho\big\},\ c = |\mathbb{S}^{n-1}|,\ g : \partial\Omega = \varrho\,\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$u(x) = \begin{cases} g(x) & : \ |x| = \varrho \\ \dfrac{\varrho^2 - |x|^2}{c\varrho} \displaystyle\int\limits_{\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}s(y) & : \ |x| < \varrho \end{cases} \qquad \text{(Poissonsches Integral)}$$

die (eindeutig bestimmte) Lösung von IDP.

Beweis
Auf $\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}$ ist $N_y = \dfrac{y}{\varrho} \implies K = P_2 : L^2(\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow L^2(\varrho\,\mathbb{S}^{n-1})$ hat den Kern

$K(x,y) = N_y^T \cdot \underbrace{\nabla_y E(x-y)}_{-\frac{x-y}{c|x-y|^n}} = -\dfrac{1}{\varrho} \cdot \dfrac{y^T \cdot (x-y)}{c|x-y|^n}$. Andererseits hat

$\tilde{K} = P_1 : L^2(\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow L^2(\varrho\,\mathbb{S}^{n-1})$ den Kern $\tilde{K}(x,y) = E(x-y) =$

$$= -\frac{|x-y|^2}{(n-2)c|x-y|^n} = \frac{-2\varrho^2 + 2y^T \cdot x}{(n-2)c|x-y|^n} = \frac{2y^T \cdot (x-y)}{(n-2)c|x-y|^n} = -\frac{2\varrho}{n-2}\,K(x,y), \text{ d.h.}$$

$\tilde{K} = -\dfrac{2\varrho}{n-2}\,K$. Daher erfüllt $u := 2P_2(g) + \dfrac{n-2}{\varrho}\,P_1(g)$ für $x_0 \in \varrho\,\mathbb{S}^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) \underset{\text{L. 16.2/3}}{=} {} & g(x_0) + 2P_2(g)(x_0) + \frac{n-2}{\varrho}\,P_1(g)(x_0) \\
= {} & g(x_0) + \underbrace{\left(2K + \frac{n-2}{\varrho}\,\tilde{K}\right)}_{0}(g)(x_0) = g(x_0),
\end{aligned}$$

d.h. u ist die Lösung von IDP.

Schließlich ist für $|x| < \varrho$:

$$\begin{aligned}
u(x) &= 2P_2(g)(x) + \frac{n-2}{\varrho}\,P_1(g)(x) \\
&= \int\limits_{\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}} \left[-\frac{2}{\varrho}\,\frac{y^T\cdot(x-y)}{c|x-y|^n} + \frac{n-2}{\varrho}\cdot\left(-\frac{|x-y|^2}{(n-2)c|x-y|^n}\right)\right] g(y)\,\mathrm{d}s(y) \\
&= \frac{1}{c\varrho}\int\limits_{\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}} \big[\underbrace{-2\cancel{y}^T\cdot x + 2|y|^2 - |x|^2 + 2\cancel{y}^T\cdot x - |y|^2}_{\varrho^2-|x|^2}\big]\,\frac{g(y)}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}s(y)
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen

1) Die Poissonsche Formel gilt auch für $n = 2$; der Beweis wird analog geführt, indem $u = 2P_2(g) - \dfrac{1}{2\pi\varrho}\displaystyle\int\limits_{|y|=\varrho} g(y)\,\mathrm{d}s(y)$ gesetzt wird.

2) Aus Satz 16.5 folgt insbesondere die **Mittelwerteigenschaft** von harmonischen Funktionen:

   $\varrho > 0,\ \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_0| \le \varrho\big\} \subset U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

   $$v \in C^2(U),\ \Delta_n v = 0 \implies v(x_0) = \frac{1}{|\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{|x-x_0|=\varrho} v(x)\,\mathrm{d}s(x)$$

   [Beweis: Setze $u(x) = v(x_0 + x)$ und verwende Satz 16.5 mit $x = 0,\ |\varrho\,\mathbb{S}^{n-1}| = c\,\varrho^{n-1}$]

Durch Integration nach ϱ folgt

$$v(x_0) = \int\limits_{|x-x_0|<\varrho} v(x)\,\mathrm{d}x \Bigg/ \int\limits_{|x-x_0|<\varrho} \mathrm{d}x.$$

Das wiederum liefert das Maximumprinzip (Satz 16.1 a).

3) Als letztes führen wir das inhomogene Randwertproblem auf das homogene zurück. Die Idee ist ganz einfach: Wenn z.B.

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega,\ u\big|_{\partial\Omega} = g \qquad\qquad \text{(inhom. IDP)}$$

so nehme eine Funktion w mit $\Delta w = f$ in Ω (z.B. $w = (f\chi_\Omega) * E$), löse $\Delta v = 0$ in $\Omega,\ v\big|_{\partial\Omega} = g - w\big|_{\partial\Omega}$, und setze $u = w + v$.

Lemma 16.5
$n \geq 3,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ C^2 zusammenhängend, $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ (vgl. Definition in FA, Seite 10), E wie in Satz 14.2,

$$F(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & : & x \in \Omega \\ 0 & : & x \notin \Omega \end{array} \right\},\ w := E * F \underset{\text{S. 13.5}}{=} \int\limits_\Omega E(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_x).$$

Dann gilt

$$w \in C^2(\Omega) \cap \overline{C}^1(\Omega),\ \Delta w = f \text{ in } \Omega.$$

Beweis

a) $K(x,y) = E(x-y) = -\dfrac{1}{(n-2)c|x-y|^{n-2}}$ ist schwach singulär in $\Omega,\ f \in L^\infty(\Omega)$

$$\underset{\text{(Seite 11, Beweis b))}}{\Longrightarrow} w \in \overline{C}(\Omega).$$

b) In $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\dfrac{\partial w}{\partial x_1} = \dfrac{\partial E}{\partial x_1} * F$;

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(vgl. Üb. 6c)}}}{=} \frac{1}{c}|x|^{1-n} \cdot \frac{x_1}{|x|} = \frac{1}{c}\frac{x_1}{|x|^n} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ und } \frac{\partial E}{\partial x_1}(x-y) \text{ schwach singulär}$$

$$\Longrightarrow \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ ist } \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial E}{\partial x_1} * F \underset{\text{Satz 13.5}}{=} \int\limits_\Omega \frac{\partial E}{\partial x_1}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \underset{\text{a)}}{\in} \overline{C}(\Omega)$$

$\Longrightarrow w \in \overline{C}^1(\Omega)$ [denn betrachte $f = w \cdot \chi \in \mathcal{K}(\Omega),\ g := \partial_i f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\Longrightarrow g \in \mathcal{K}(\Omega) \underset{\text{(FA, S. 20)}}{\Longrightarrow} f_h \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,\ \partial_i(f_h) = g_h \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} g \underset{\text{(FA, S. 10)}}{\Longrightarrow} f \in C^1(\Omega),\ \partial_i f = g$ gilt klassisch.]

c) $x \in \Omega,\ K_\varepsilon := \{y \in \Omega;\ |x-y| \le \varepsilon\} \implies$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \underset{\text{Lebesgue}}{=} -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial E(x-y)}{\partial y_1} f(y)}_{\operatorname{div}_y \begin{pmatrix} E(x-y)f(y) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - E(x-y)\frac{\partial f}{\partial y_1}(y)} \mathrm{d}y \underset{\text{Gauß}}{=}$$

$$= -\int\limits_{\partial\Omega} E(x-y)f(y)N_y^1 \,\mathrm{d}s(y) - \underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} E(x-y)f(y)\frac{x_1-y_1}{\varepsilon} \,\mathrm{d}s(y)}_{\circledast \quad I \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} 0} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\Omega \setminus K_\varepsilon} E(x-y)\frac{\partial f}{\partial y_1}(y) \,\mathrm{d}y =$$

$$= \underbrace{-\int\limits_{\partial\Omega} E(x-y)f(y)N_y^1 \,\mathrm{d}s(y)}_{\in C^\infty(\Omega) \ \text{(Lebesgue)}} + \underbrace{\int\limits_{\Omega} E(x-y)\frac{\partial f}{\partial y_1}(y) \,\mathrm{d}y}_{\in \overline{C}^1(\Omega) \ \text{nach b)}}$$

wobei $\circledast$ gilt, weil mit $x - y = \varepsilon\omega$

$$I = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} -\frac{1}{(n-2)c\varepsilon^{n-2}} \cdot f(x - \varepsilon\omega) \cdot \omega_1 \cdot \varepsilon^{n-1} \,\mathrm{d}s(\omega) \to 0.$$

d) $\Delta w = F$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \implies \Delta w = f$ in Ω, vgl. Lemma 14.1. $\square$

Satz 16.6
$\mathbb{R}^n \supset \Omega \in C^2$ zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ reellwertig. Dann gilt:

a) IDP für $\Delta_n u = f$ besitzt genau eine Lösung u;

b) INP für $\Delta_n u = f$ ist lösbar $\iff \int\limits_{\Omega} f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,\mathrm{d}s(y)$ und die Lösung ist dann eindeutig bis auf Konstante.

Beweis w sei wie in Lemma 16.5 durch f bestimmt.

a) Nach Satz 16.3 $\exists v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\Delta_n v = 0$ in Ω, $v\big|_{\partial\Omega} = g - w\big|_{\partial\Omega}$. Für $u = w + v$ gilt dann $\Delta_n u = f$ in Ω, $u\big|_{\partial\Omega} = g$; u ist eindeutig nach Satz 16.2.

b) α) Wie in Seite 47 approximieren wir Ω durch Ω_ε und gilt daher für eine Lösung u :

$$\int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,\mathrm{d}s(y) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} N_x^T \nabla u(x)\,\mathrm{d}s(x) \underset{\text{Gauß}}{=} \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\Delta u(x)}_{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nach Satz 16.2 ist u eindeutig bis auf Konstante.

β) **Existenz von u**

$$w(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \implies \text{(siehe Lemma 16.5, Beweis b))}$$

$$\forall x \in \partial\Omega : \partial_n^i w(x) = \int\limits_{\Omega} N_x^T \cdot (\nabla E)(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \implies$$

$$\implies \int\limits_{\partial\Omega} \partial_n^i w(x)\,\mathrm{d}s(x) = \int\limits_{\partial\Omega} N_x^T \cdot \left(\int\limits_{\Omega} (\nabla E)(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s(x)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\Omega} f(y) \Bigg(\underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} N_x^T \cdot \underbrace{\underbrace{(\nabla E)(x-y)}_{-(\nabla E)(y-x)}}_{\nabla_x E(y-x)}\,\mathrm{d}s(x)}_{P_2(1)(y)=1} \Bigg)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\Omega} f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{(vgl. Seite 50).}$$

Wenn also $\int\limits_{\Omega} f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,\mathrm{d}s(y)$, so ist $\int\limits_{\partial\Omega} \big(g(x) - \partial_n^i w(x)\big)\,\mathrm{d}s(x) = 0 \underset{\text{Satz 16.4}}{\implies} \exists v$ mit $\Delta v = 0$ in Ω und $\partial_n^i v = g - \partial_n^i w$ auf $\partial\Omega \implies u = w + v$ ist Lösung des inhomogenen INP. $\square$