Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

Vorlesung WS 1983/84 und WS 1989/90

Peter Wagner

1. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Die Welt der Distributionen **1**
1.1 Distributionen 1
1.1.1 Übungen 3
1.2 Differentiation 5
1.2.1 Übungen 5
1.3 Produkte 7
1.3.1 Übungen 9
1.4 Fouriertransformation 10
1.4.1 Übungen 11

2 Hilberträume **13**
2.1 Definition 13
2.1.1 Übungen 14
2.2 Fourierreihen 15
2.2.1 Übungen 17
2.3 Beschränkte Operatoren 18
2.3.1 Übungen 22
2.4 Sobolev-Räume 24
2.4.1 Übungen 26

3 Unbeschränkte Operatoren **28**
3.1 Übungen 35

4 Der Spektralsatz für beschränkte symmetrische Operatoren **37**
4.1 Übungen 51

5 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren **54**
5.1 Übungen 65

6 Das freie Teilchen in der nichtrelativistischen QM **68**
6.1 Übungen 74

7 Die Axiomatik der Quantenmechanik 76
7.1 Übungen 86

8 Der harmonische Oszillator 88
8.1 Übungen 98

9 Das Wasserstoffatom (ohne Spin) 102
9.1 Übungen 116

10 Gelfandsche Raumtripel
= Rigged Hilbert space 118
10.1 Übungen 138

11 Axiome der relativistischen Quantentheorie 139
11.1 Übungen 152

12 Endlich-dimensionale Darstellungen der Lorentzgruppe 153

13 Unitäre Darstellungen der Poincaré-Gruppe 165

14 Die Gårding-Wightman-Axiome 179

15 Das Dirac-Feld 196

16 Die Wightman-Funktionen 205

17 Ausblick 225

Einleitung

Bücher:

H. Triebel *Höhere Analysis*

J. v. Neumann *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*

M. Schechter *Operator Methods in Quantum Mechanics*

A) Die Grundlage der Quantenmechanik bilden gewisse Axiome.

Axiom 1: Die Menge der möglichen *Zustände* entspricht den 1-dimensionalen Unterräumen eines separablen, komplexen, ∞ - dimensionalen Hilbertraumes H.

Axiom 2: Die Menge der *beobachtbaren Größen* entspricht den selbstadjungierten Operatoren A von H. Der der Energie entsprechende Operator (= Hamiltonoperator) wird mit $\mathcal{H}$ bezeichnet.

Axiom 3: Wenn ein System im Zustand $f \in H, \left\|f\right\| = 1$ ist und $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Spektralschar des Operators A ist, so ist die *Wahrscheinlichkeit für einen Messwert* der A entsprechenden Größe im Intervall $[\lambda, \mu)$ gleich $\left\|(E_\lambda - E_\mu)f\right\|^2$.

Axiom 4: Wenn sich ein abgeschlossenes System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $f_0 \in H$, $\left\|f_0\right\| = 1$ befindet, so befindet es sich zur Zeit $t \geq 0$ im Zustand $f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} f_0$.

B) Das Ziel dieser Vorlesung ist das Verständnis der Axiome und die Untersuchung der folgenden grundlegenden Beispiele:

1. Harmonischer Oszillator im $\mathbb{R}^1$
2. Freies Teilchen im Intervall
3. Coulombfeld im $\mathbb{R}^3$ (= H-Atom ohne Spin)
4. H-Atom mit Spin
5. Atom ohne Feinstruktur
6. Diracoperator

Die Vorlesung bringt eine mathematische Darstellung der Grundprinzipien der Quantenmechanik, *nicht* aber eine Durchrechnung möglichst vieler physikalisch interessanter Systeme. (Dafür siehe besser: S. Flügge : Rechenmethoden der Quantenmechanik.)

Kapitel 1

Die Welt der Distributionen

V.S. Vladimirov *Les Distributions en Physique Mathématique*

W. Donoghue *Distributions and Fourier Transforms*

L. Schwartz *Théorie des Distributions*

1.1 Distributionen

Definition 1.1

1. $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}\varphi \text{ kompakt}\}$ $(\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}})$.

2. $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D} :\Longleftrightarrow$

   (i) $\exists B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt: $\forall n : \operatorname{supp}\varphi_n \subset B$

   (ii) $\forall \alpha$: $\partial^\alpha \varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig.

3. $\mathcal{S} := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta : x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty\}$;
   $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$: $\Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta : x^\alpha \partial^\beta(\varphi_n - \varphi) \to 0$ in L^∞.

4. $\mathcal{D}' := \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) := \{T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear, sodass $\forall$ Folgen φ_n in $\mathcal{D}$ mit $\varphi_n \to 0$ gilt $T(\varphi_n) \to 0$ (in $\mathbb{C})\}$; für $T(\varphi)$ schreiben wir $< \varphi, T >$.

5. $\mathcal{S}' := \{T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ linear, $\forall \varphi_n \to 0$ in $\mathcal{S}$ gilt $T(\varphi_n) \to 0\}$,
   $\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$: $T \longmapsto (\varphi \in \mathcal{D} \longmapsto < \varphi, T >)$.

6. $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'$ (bzw. $\mathcal{S}'$): $\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}$ (bzw. $\mathcal{S}$): $< \varphi, T_n > \to < \varphi, T >$. Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

7. $T \in \mathcal{D}'$; $\operatorname{supp} T := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\{U \subset \mathbb{R}^n$ offen: $< \varphi, T > = 0 \ \ \forall \varphi$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset U\}$. $\mathcal{E}' := \{T \in \mathcal{D}' : \operatorname{supp} T$ beschränkt$\}$.

8. $T \in \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{C}^\infty \implies f \cdot T \in \mathcal{D}'$ mit $< \varphi, f \cdot T > := < f \cdot \varphi, T >$.

9. Wenn $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, definiert man analog $\mathcal{D}(U)$, $\mathcal{D}'(U)$ etc. (aber nicht $\mathcal{S}(U)$, $\mathcal{S}'(U)$!).

Beispiel 1

1. δ: $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$: $\varphi \longmapsto \varphi(0) \implies \delta \in \mathcal{D}'$; δ heißt "*Dirac'sche Deltafunktion*".

2. $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widetilde{f}$: $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$: $\varphi \longmapsto \int f\varphi \, \mathrm{d}x$; damit erhält man eine Einbettung $L^1_{\text{loc}} \hookrightarrow \mathcal{D}'$: $f \longmapsto \widetilde{f}$; statt $\widetilde{f}$ schreibe ich wieder f.

3. $$f_n(x) := \begin{cases} n: & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0: & \text{sonst} \end{cases}$$

   Dann gilt $f_n \to \delta$ in $\mathcal{D}'$.

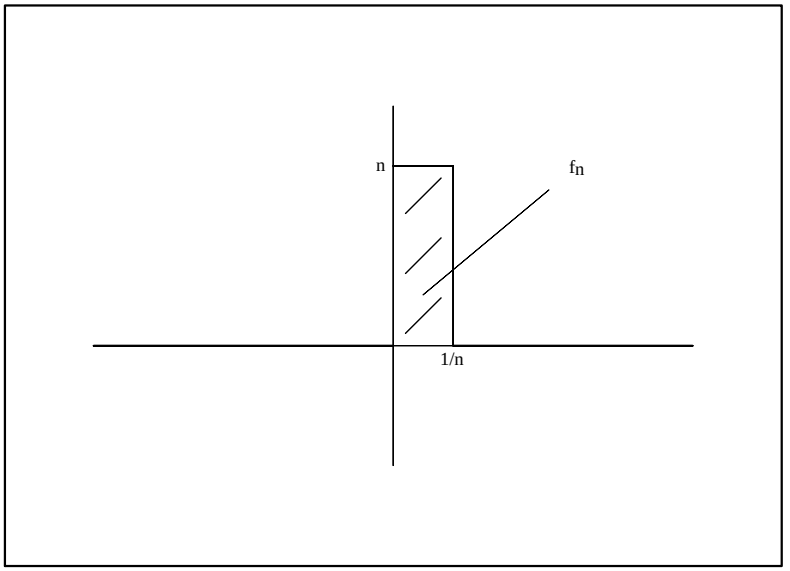


Abbildung 1.1: $f_n(x)$.

Denn:

$$< \varphi, f_n >= n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \longrightarrow \varphi(0)$$

nach dem Hauptsatz der Integralrechnung.

1.1.1 Übungen

1. Es sei $R > 0$ und $\delta_R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$< \varphi, \delta_R > \;:= \oint\limits_{|x|=R} \varphi(x)\ \mathrm{d}o$$

(im $\mathbb{R}^3$ zum Beispiel ist $\mathrm{d}o = R^2\ \sin(\vartheta)\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\vartheta$).

   (a) Was ist $\operatorname{supp}\delta_R$?

   (b) Berechne $\lim\limits_{R\to 0}\delta_R$, $\lim\limits_{R\to\infty}\delta_R$, $\lim\limits_{R\to 0} R^{1-n}\delta_R$ in $\mathcal{D}'$.

2. Berechne:

   (a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ in $\mathcal{D}'$ oder $\mathcal{S}'$,

   (b) $\lim\limits_{t\to\infty} t^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$ in $\mathcal{D}'$ oder $\mathcal{S}'$.

3. Definiere $\operatorname{vp}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ durch

$$< \varphi, \operatorname{vp}\frac{1}{x} >= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$

und zeige:

   (a) $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\dfrac{1}{x+\mathrm{i}\varepsilon} \;=\; \operatorname{vp}\dfrac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\delta$ (Formel von Sochozkij),

   (b) $x\ \operatorname{vp}\dfrac{1}{x} \;=\; 1.$

4. Es sei $\delta(x-k) : \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \varphi(k)$. Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\ \delta(x-k)$$

in $\mathcal{D}'$, aber nicht in $\mathcal{S}'$ konvergiert.

5. Es sei $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear mit $\det A \neq 0$.

   (a) Wie muss man $T \circ A$ für $T \in \mathcal{D}'$ definieren, so dass sich für $T \in L^1_{\mathrm{loc}}$ ergibt $T \circ A \in L^1_{\mathrm{loc}}$ und $(T \circ A)\ (x) = T(Ax)$?

   (b) Berechne $\delta \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$.

6. Wie muss man $T(x+x_0)$ für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest, definieren, damit für $T \in L^1_{\text{loc}}$ das übliche herauskommt?

7. Zeige:
$$T := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$$
Hinweise:
   (a) $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi(x)\ \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\frac{x}{2})}\ \mathrm{d}x \longrightarrow \varphi(0)\ 2\pi$ für $\alpha \to \infty, \varphi \in \mathcal{D}$,
   (b) $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1)T = 0$,
   (c) $T(x+2\pi) = T$, $\operatorname{supp} T = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

8. Es sei $f_\alpha := Y(x) \cdot \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ für $\alpha > 0$; $Y(x) = \begin{cases} 0: & x < 0 \\ 1: & x \geq 0. \end{cases}$
Berechne $\lim\limits_{\alpha \to 0} f_\alpha$ in $\mathcal{S}'$.

9. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn
$$< \varphi(x \cdot \varepsilon), T >= \varepsilon^{-n-\lambda} < \varphi, T >$$
für $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$.
   (a) Was heißt das für $T \in L^1_{\text{loc}}$?
   (b) Von welchem Grad ist δ homogen?

10. Zeige:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\ \mathrm{d}x = 2\pi\delta$$
in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_\xi)$, wenn man $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ als $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N}$ interpretiert.

11. Es sei $T \in \mathcal{E}'$. Zeige, dass T als lineares Funktional auf $\mathcal{C}^\infty$ aufgefasst werden kann!

1.2 Differentiation

Definition 1.2 Es sei $T \in \mathcal{D}'$ bzw. $\mathcal{S}'$, α ein Multi-index. $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'$ bzw. $\mathcal{S}'$ sei durch $< \varphi, \partial^\alpha T > = (-1)^{|\alpha|} < \partial^\alpha \varphi, T >$ definiert. Im $\mathbb{R}^1$ schreibt man $T' := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T$ wie üblich.

Beispiel 2 Es sei

$$Y(x) = \begin{cases} 0: & x < 0 \\ 1: & x \geq 0. \end{cases}$$

Ich berechne Y':

$$< \varphi, Y' > \overset{\text{def}}{=} < -\varphi', Y > \overset{Y \in L^1_{\text{loc}}}{=} -\int_0^\infty \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = < \varphi, \delta >,$$

d.h. $Y' = \delta$.

1.2.1 Übungen

1. Zeige, dass $\partial^\alpha \varphi$, berechnet im Sinn der Distributionen, das übliche ergibt, wenn $\varphi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ und $|\alpha| \leq m$.
2. Zeige: $\varphi \cdot \delta' = -\varphi'(0) \cdot \delta + \varphi(0) \cdot \delta'$ für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$.
3. Berechne T', T'', T''' für
   (a) $T = |x| \sin x$,
   (b) $T = x^2 \log |x|$.
4. Berechne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Y(x)\mathrm{e}^x]$ und zeige
$$|\sin x|'' + |\sin x| = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi).$$
5. Zeige: $< \varphi, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{vp} \frac{1}{x} > = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi - \varphi(0)}{x^2}\, \mathrm{d}x.$
6. Zeige, dass $T_n \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'$ auch $\partial^\alpha T_n \longrightarrow \partial^\alpha T$ in $\mathcal{D}'$ impliziert. Ist es für gewöhnliche Funktionen ebenso?
7. Berechne $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ folgendermaßen:

(a) Differenziere 2-mal und verwende Übung 7 in 1.1.1 und die Übung 6.

(b) Suche eine Funktion mit Periode 2π, die dieselbe 2. Ableitung hat.

8. Man bestimme alle Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ mit:

   (a) $xT = 0$,

   (b) $xT' = 1$,

   (c) $xT' = 0$,

   (d) $(x+1)^2 T'' = 0$.

9. Zeige

   (a) $\partial_{x_1 x_2}[Y(x_1)Y(x_2)] = \delta$ im $\mathbb{R}^2$.

   (b) $(\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2)[Y(x_1 - |x_2|)] = 2\delta$, verwende Übung 5 in 1.1.1.

10. (a) Berechne $\Delta_3(\frac{1}{r})$ im $\mathbb{R}^3$ mit der Green'schen Formel.

    (b) T sei homogen vom Grad λ (Übung 9 in 1.1.1).
    Zeige: $\partial^\alpha T$ ist homogen vom Grad $\lambda - |\alpha|$.

    (c) Berechne $\Delta_3(\frac{1}{r})$ mit folgender Methode:

    (i) $\frac{1}{r} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ ist homogen,

    (ii) $\operatorname{supp}(\Delta_3(\frac{1}{r})) \subset \{0\}$,

    (iii) jede Distribution T mit $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$, hat die Form $\sum\limits_{\text{endlich}} a_\alpha \partial^\alpha \delta$ mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$,

    (iv) wende $\Delta_3(\frac{1}{r})$ auf $\mathrm{e}^{-r^2} \in \mathcal{S}$ an.

11. Berechne $(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)\dfrac{1}{x + \mathrm{i}y}$.

1.3 Produkte

Definition 1.3

1. $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1}_x)$, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_2}_y)$; $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2}_{x,y})$ mit

$$< \varphi(x,y), T_1 \otimes T_2 > := << \varphi(x,y), T_1(x) >, T_2(y) > .$$

2. Es seien $T_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; $T_1 * T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit

$$< \varphi, T_1 * T_2 > := << \varphi(x+y), T_1(x) >, T_2(y) > .$$

   $T_1 * T_2$ heißt *Faltungsprodukt* von T_1, T_2.
   ($<< \varphi(x+y), T_1 >, T_2 >$ ist sinnvoll, da $< \varphi(x+y), T_1(x) >$ kompakten Träger in y hat!)

3. Allgemeiner existiert die Faltung von $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, wenn:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi(x+y) T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2n}). \tag{1.1}$$

   Man setzt dann einfach: $< \varphi, T_1 * T_2 > = < \underbrace{1}_{\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})}, \underbrace{\varphi(x+y) T_1 \otimes T_2}_{\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2n})} > .$

Beispiel 3 Das Potential $\varphi(t,x)$ einer elektrischen Ladungsverteilung $\varrho(t,x)$ genügt der Gleichung: (System: cgs) $(\partial_t^2 - c^2 \Delta_3)\varphi = 4\pi c^2 \varrho$.

$$E = \frac{1}{4\pi c^2 |x|} \, \delta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$$

sei durch

$$< \psi(t,x), E > = \frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3_x} \psi\left(\frac{|x|}{c}, x\right) \frac{\mathrm{d}x}{|x|}$$

für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4_{t,x})$ definiert. Dann ist E die einzige Distribution mit:

(i) $(\partial_t^2 - c^2 \Delta) E = \delta$ (das heißt E ist eine "Fundamentallösung"),

(ii) $\operatorname{supp} E \subset \{t \geq 0\}$ (das heißt E ist "retardiert").

φ ist dann durch ϱ so gegeben:

$$\varphi = E * 4\pi c^2 \varrho$$

(falls $*$ sinnvoll ist). Es sei nun speziell ϱ durch eine sich auf der Kurve $x = u(t)$ bewegende Ladung e gegeben, das heißt $\varrho = e\ \delta(x - u(t)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$ bzw.

$$< \psi, \varrho >= e \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, u(t))\ \mathrm{d}t$$

für $\psi \in \mathcal{D}$. Das zu ϱ gehörige sogenannte *Lienard-Wiechert-Potential* φ wollen wir nun berechnen. Nach 3. genügt für die Existenz der Faltung, dass (1.1) erfüllt ist. Im Falle, dass $\forall t : |\dot{u}| > c$ ist (1.1) immer erfüllt (vgl. Vladimirov, I, § 4). Leider ist dieser Fall physikalisch nicht relevant. Aber auch wenn $\alpha < c$ existiert, sodass $\forall t : |\dot{u}| < \alpha < c$, ist (1.1) erfüllt (Übung). Die letzte Bedingung setze ich im folgenden voraus. Es sei also $|\dot{u}| < c$ und $\psi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
< \psi, 4\pi c^2 \varrho * E > &= 4\pi c^2 << \psi(t_1 + t_2, x_1 + x_2), \varrho(t_1, x_1) >, E(t_2, x_2) > \\
&= 4\pi c^2 e < \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1 + t_2, u(t_1) + x_2)\ \mathrm{d}t_1, E(t_2, x_2) > \\
&= e \int \psi\left(t_1 + \frac{|x_2|}{c}, u(t_1) + x_2\right) \frac{\mathrm{d}t_1 \mathrm{d}x_2}{|x_2|} \ =: A.
\end{aligned}$$

Wir machen die Koordinatentransformation $t = t_1 + \frac{|x_2|}{c}$, $x = x_2 + u(t_1) \implies |x_2| = c(t - t_1) = |x - u(t_1)|$.
(Dadurch sind t und x als Funktionen von t_1 und x_2 gegeben; aber auch umgekehrt sind t_1 und x_2 eindeutige Funktionen von t und x, denn, wenn t, x und $t_1 \neq t_1'$ gegeben sind, so gilt:

$$\begin{aligned}
|x - u(t_1)| - c(t - t_1) &= |x - u(t_1')| - c(t - t_1') \implies \\
\implies c|t_1 - t_1'| &= \big|\ |x - u(t_1)| - |x - u(t_1')|\ \big| \ \leq \\
&\leq |u(t_1) - u(t_1')| \leq \\
&\leq \Big|\ \int_{t_1'}^{t_1} |\dot{u}(\tau)|\ \mathrm{d}\tau \Big| \ < c|t_1 - t_1'| \ \lightning,
\end{aligned}$$

d.h. t_1 ist durch die Gleichung $c(t - t_1) = |x - u(t_1)|$ eindeutig bestimmt, die Koordinatentransformation ist injektiv. Ähnlich sieht man die Surjektivität.)

$$\left|\ \det \frac{\partial(t, x)}{\partial(t_1, x_2)}\right| \ = \left|\ \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_2}{c|x_2|} \\ \dot{u}(t_1) & I \end{pmatrix}\right| \ = \left|\ 1 - \frac{\dot{u}(t_1)^T x_2}{c|x_2|}\right| \ = 1 - \frac{\dot{u}(t_1)^T x_2}{c|x_2|}\,.$$

Daher:

$$A = ec \int \frac{\psi(t, x)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x}{c|x_2| - \dot{u}(t_1)^T x_2} = ec \int \frac{\psi(t, x)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x}{c|x - u(t_1)| - \dot{u}(t_1)^T (x - u(t_1))}$$

und folglich

$$\varphi(t,x) = 4\pi c^2 \varrho * E = \frac{ec}{c^2(t-t_1) - \dot{u}(t_1)^T(x-u(t_1))},$$

wobei t_1 durch $|x-u(t_1)| = c(t-t_1)$ als Funktion von t und x bestimmt ist.

1.3.1 Übungen

1. Was bedeutet
   (a) $T_1 \otimes T_2$ für $T_i \in L^1_{\text{loc}}$?
   (b) $T_1 * T_2$ für $T_i \in L^1$?
2. Bestimme
   (a) $\delta \otimes \cdots \otimes \delta$,
   (b) $\partial_x^\alpha(T_1(x) \otimes T_2(y))$,
   (c) $\delta * T$,
   (d) $\delta^{(m)} * T$ für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$,
   (e) $f * \delta_R$, $f \in L^1_{\text{loc}}$,
   (f) $\partial^\alpha(T_1 * T_2)$,
   (g) $\delta(x-a) * \delta(x-b)$.
3. Zeige
   (a) $\operatorname{supp} T_1 \otimes T_2 = \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2$,
   (b) $\operatorname{supp} T_1 * T_2 \subset \operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2$.
4. Berechne in $\mathcal{D}'_+ := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) : \operatorname{supp} T \subset [0,\infty)\}$
   (a) $Y(x) * Y(x)$,
   (b) $Y(x)\cos x * Y(x)x^3$,
   (c) $f_\alpha * f_\beta$ (siehe Übung 8 in 1.1.1),
   (d) zeige $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(f_m * T) = T$ für $T \in \mathcal{D}'_+$.
   (Deshalb heißt $f_\alpha * T$ Integral der Ordnung α von T. Wie müsste die Ableitung der Ordnung α definiert werden?)

5. (a) Zeige, dass $\varphi * T \in \mathcal{C}^\infty$ für $\varphi \in \mathcal{D}$, $T \in \mathcal{D}'$ und $\varphi * T(x) = <\varphi(x-y), T(y)>$.

   (b) Wie kann man $\varphi * T$ für $\varphi \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{S}'$ definieren, sodass es für $\varphi \in \mathcal{D}$ mit a) übereinstimmt.

6. Berechne das Potential einer geladenen Hohlkugel, d.h. $\frac{1}{r} * \delta_R$ im $\mathbb{R}^3$.

7. Zeige, dass die *Abelsche Integralgleichung*

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(y)\ \mathrm{d}y}{(x-y)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1 \ \text{ fest}),$$

   wobei $g \in \mathcal{C}^1$ gegeben, f gesucht ist, die einzige Lösung

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{g'(y)\ \mathrm{d}y}{(x-y)^{1-\alpha}}$$

   hat.

1.4 Fouriertransformation

Definition 1.4

1. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ sei

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

2. Für $T \in \mathcal{S}'$ sei $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$ durch $<\varphi, \widehat{T}> := <\widehat{\varphi}, T>$ definiert. Dann gilt:

   (i) $T = (2\pi)^{-n}\ \widehat{\widehat{T}}(-x)$ (*"Fourier-Umkehrformel"*).

   (ii) $\widehat{T}$ ist analytisch für $T \in \mathcal{E}'$ und $\widehat{T}(z) = <\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}, T>$.

   (iii) $\widehat{S * T} = \widehat{S} \cdot\ \widehat{T}$ für $S \in \mathcal{S}'$, $T \in \mathcal{E}'$.

   (iv) $T_n \longrightarrow T$ in $\mathcal{S}' \implies \widehat{T}_n \longrightarrow \widehat{T}$ in $\mathcal{S}'$ ($\widehat{\ }$ ist stetig).

   (v) Für $f \in L^1 \subset \mathcal{S}'$ gilt: $\widehat{f}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\ \mathrm{d}x\ \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^1_\xi)$.

   (vi) Für $f \in L^2 \subset \mathcal{S}'$ gilt: $\widehat{f} \in L^2$ und $\left\|\widehat{f}\right\|_2 = (2\pi)^{n/2}\ \left\|f\right\|_2$ (*"Parseval'sche Formel"*).

Beispiel 4 Wir berechnen $\widehat{\delta}_R$ im $\mathbb{R}^3$. $\delta_R \in \mathcal{E}'$ mit $< \varphi, \delta_R >= \int\limits_{|x|=R} \varphi(x)\ \mathrm{d}o$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, $\mathrm{d}o = R^2 \sin\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\vartheta$ in Kugelkoordinaten. Aus (ii) folgt:

$$\widehat{\delta}_R(\xi) =< \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}, \delta_R >= \int\limits_{|x|=R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\ \mathrm{d}o;$$

offenbar hängt $\widehat{\delta}_R(\xi)$ nur vom Betrag $|\xi|$ ab. Es sei daher oEdA $\xi = (0, 0, |\xi|)$; $x = R(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ in Kugelkoordinaten $0 \le \vartheta \le \pi$,
$0 \le \varphi \le 2\pi \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}_R(\xi) &= R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\cos\vartheta\ |\xi|} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}R|\xi|\cos\vartheta} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta \qquad \big[u = R|\xi|\cos\vartheta\big] \\
&= \frac{2\pi R}{|\xi|} \int_{-R|\xi|}^{R|\xi|} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}R}{|\xi|}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R|\xi|} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}R|\xi|}) \\
&= \frac{4\pi R}{|\xi|}\sin(R|\xi|).
\end{aligned}$$

1.4.1 Übungen

1. Zeige, dass für $T \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ die Definitionen in 1. und 2. von Def. 1.4 übereinstimmen.

2. Für $T \in \mathcal{S}'$ und $D := -\mathrm{i}\partial$ beweise:
   (a) $\widehat{D^\alpha T} = \xi^\alpha \widehat{T}$,
   (b) $\widehat{\xi^\alpha T} = (-D)^\alpha \widehat{T}$,
   (c) $\widehat{T_1 \otimes T_2} = \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2$.

3. Berechne im $\mathbb{R}^1$
   (a) $\delta(x-x_0)\widehat{\ }$ für $x_0 \in \mathbb{R}^1$,
   (b) $\widehat{\mathrm{e}^{-c|x|}}$, $c \geq 0$,
   (c) $\widehat{\mathrm{e}^{-cx^2}}$, $c \geq 0$,
   (d) $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2})\widehat{\ }$,
   (e) $\widehat{\frac{1}{1+x^2}}$ (mit und ohne Verwendung von b)).
4. Berechne im $\mathbb{R}^1$
   (a) $\widehat{\operatorname{sign} x}$ (benütze die Gleichung $(\operatorname{sign} x)' = 2\delta$),
   (b) $\widehat{Y(x)}$ (betrachte $Y(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}, \varepsilon \searrow 0$),
   (c) $\widehat{|x|}$,
   (d) $\widehat{\sin x}$,
   (e) $\widehat{\cos x}$,
   (f) $\widehat{\operatorname{vp}\frac{1}{x}}$.
5. T sei homogen vom Grad λ (dann ist T automatisch in $\mathcal{S}'$). Zeige, dass $\widehat{T}$ homogen vom Grad $-\lambda - n$ ist.
6. Berechne im $\mathbb{R}^2$
   (a) $\widehat{\frac{1}{z}}$ mit $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ (verwende Übung 11 in 1.2.1),
   (b) $\big(\frac{1}{z\sqrt{1+r^2}}\big)\widehat{\ }$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ (Formel (iii) in der Definition 1.4 gilt auch in diesem Fall),
   (c) $\widehat{\delta_R}$.
7. Berechne $\widehat{r^{-2}}$ im $\mathbb{R}^3$ mit den folgenden Überlegungen:
   (a) r^{-2} ist homogen und radialsymmetrisch,
   (b) $r^{-2} \in \mathcal{E}' + L^2 \Rightarrow \widehat{r^{-2}} \in L^1_{\mathrm{loc}}$,
   (c) anwenden auf $\mathrm{e}^{-r^2} \in \mathcal{S}$.
8. (a) Berechne $\big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)\big)\widehat{\ }$. Verwende Übung 7 in 1.1.1.
   (b) Formuliere das Ergebnis mit Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{S}$ ("*Poissonsche Summationsformel*").
   (c) Wende b) auf $\varphi = \mathrm{e}^{-x^2}$ an!

Kapitel 2

Hilberträume

L.A. Ljusternik, W.I. Sobolev *Elemente der Funktionalanalysis*

G. Helmberg *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*

E. Prugovečki *Quantum Mechanics in Hilbert Space*

2.1 Definition

Definition 2.1

1. Ein komplexer Vektorraum H mit einer Abbildung
   $H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : (x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2)$ heißt *Prä-Hilbertraum*, wenn:

   (i) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_3) = \lambda_1 (x_1, x_3) + \lambda_2 (x_2, x_3)$

   (ii) $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$

   (iii) $x \neq 0 \Longrightarrow (x, x) > 0$.

2. Mit $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ist H ein normierter Raum. $\{x_n\} \subset H$ heißt *C-Folge* (oder *Fundamentalfolge*) $\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N : \forall\, n, m \geq N : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

3. H heißt *Hilbertraum* $\Longleftrightarrow$ H Prä-Hilbertraum und H ist vollständig, d.h. jede C-Folge konvergiert.

4. H heißt *separabel* $:\Longleftrightarrow$ $\exists$ Folge $\{x_n\} \subset H$, die dicht ist.

5. $\{x_n\} \subset H$ heißt *Orthonormalsystem* $:\Longleftrightarrow (x_n, x_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1: & n = m \\ 0: & n \neq m; \end{cases}$
   $\{x_n\}$ heißt *ONB* $:\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ ist ON-System und in H total, d.h. die Linearkombinationen von x_n sind in H dicht.

6. H_1, H_2 Hilberträume $\Longrightarrow H_1 \oplus H_2 := \big\{(x;y) : x \in H_1, y \in H_2\big\}$ mit $\big((x;y),(x';y')\big) = (x,x') + (y,y')$ ist wieder ein Hilbertraum.

Beispiel 5

1. $H = \mathbb{C}^n,\ (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x^i\ \overline{y^i}$, wobei $x = (x^1, \dots, x^n)\ ,\ y = (y^1, \dots, y^n)$.

2. $H = l^2 := \big\{(x^1, x^2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 < \infty\big\}$ mit $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i\ \overline{y^i}$.

3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $H = L^2(\Omega)$ mit $(f,g) = \int_{\Omega} f(x)\ \overline{g(x)}\ \mathrm{d}x$.

Bemerkung In Physikbüchern wird von (,) statt (i) oft

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_3) = \overline{\lambda_1}(x_1, x_3) + \overline{\lambda_2}(x_2, x_3)$$

verlangt. Das (,) in den Beispielen wird dann etwas anders definiert.

Eigenschaften von Hilberträumen

1. $\big|(x_1,x_2)\big| \ \leq\ \big\|x_1\big\| \cdot \big\|x_2\big\|$ ("*Schwarzsche Ungleichung*").

2. $\{x_n\} \subset H$ ONB und $x \in H \Longrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (x, x_n)$ und
   $\big\|x\big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|(x,x_n)\big|^2$ ("*Fourierumkehrsatz*" und "*Parsevalsche Gleichung*")
   (oder *Satz von Riesz-Fischer*).

3. In jedem separablen Hilbertraum existiert eine ONB (Beweis mit dem "*Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren*").

4. $H_1 \leq H$ abgeschlossener Unterraum, $H_1^{\perp} := \big\{x : \forall y \in H_1 : (x,y) = 0\big\} \Longrightarrow$
   $H_1 \oplus H_1^{\perp} \simeq H : (x,y) \longmapsto x + y$ ("*Projektionssatz*").

2.1.1 Übungen

1. (a) Zeige: l^2 ist ein Vektorraum.
   (Verwende die Minkowskische Ungleichung.)
   (b) Zeige: l^2 ist ein Hilbertraum.

2. Zeige, dass die Menge der stetigen Funktionen am Intervall [0,1] mit dem Skalarprodukt $(f,g) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ keinen Hilbertraum bildet.

3. Beweise, dass alle separablen ∞-dimensionalen Hilberträume isomorph sind. (Verwende Eigenschaft 2).)

4. Bestimme eine ONB im Unterraum H_1, der von $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ in $H = L^2\big((-1,1)\big)$ aufgespannt wird.

5. Zeige: Wenn $f_n \to f$ und $g_n \to g$ in der $\|\cdot\|$-Topologie, so ist $\lim_{n\to\infty}(f_n, g_n) = (f,g)$.

2.2 Fourierreihen

Es sei $H = L^2\big((0,a)\big),\ a > 0$; $\left\{f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nt/a} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ und
$\left\{s_n(t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi nt}{a} :\ n = 1,2,...\right\} \cup \left\{c_n(t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{2\pi nt}{a} :\ n = 1,2,...\right\} \cup$
$\left\{c_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\right\}$ sind 2 ONB-s (Beweis später).
Für $f \in H$ heißen (f, f_n) *komplexe* und (f, s_n), (f, c_n) reelle *Fourierkoeffizienten.*
Nach Eigenschaft 2) konvergiert die Reihe

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(f, f_n)$$

(bzw. das Analogon mit s_n, c_n) in L^2. Diese Reihen heißen *Fourierreihen* von f.
Bezüglich punktweiser Konvergenz gilt:

Satz 2.1
$f(t) \in L^2\big((0,a)\big)$ werde periodisch außerhalb von $(0,a)$ fortgesetzt. Es gelte:
(D) f und f' sind stückweise stetig.
Dann konvergiert für jedes t $\in \mathbb{R}$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(f,f_n)f_n(t)$ gegen

$$\begin{cases} \text{a)} & f(t) & \text{wenn } f \text{ in } t \text{ stetig,} \\ \text{b)} & \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & \text{wenn } t \text{ ein Unstetigkeitspunkt ist.} \end{cases}$$

Bemerkung

1. (D) heißt "*Dirichlet-Bedingung*".

2. Es gibt auch noch andere interessante ONBs in $L^2\big((0,a)\big)$, z.B. *Walshfunktionen*, *Legendre-Polynome* (vgl. Übung 4 in 2.1.1) etc.

Beispiel 6
$a = 2\pi,\ f = t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Für $n \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}(f, f_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\, \mathrm{d}t = (\text{vorübergehend}\ \ n\ \ \text{reell}) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}n} - 1}{-\mathrm{i}n}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{n^2}\left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}n} - 1\right) + \frac{2\pi \mathrm{i}}{n}\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}n}\right] \\ &= (\text{nun } n \text{ wieder ganz }) \ = \frac{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{i}}{n}\,; \\ (f, f_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} t \cdot 1\ \mathrm{d}t = \pi \cdot \sqrt{2\pi}\,.\end{aligned}$$

Als Fourierreihe erhalten wir also:

$$t = \mathrm{i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{n} + \pi = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \quad \text{in} \quad L^2\big((0,2\pi)\big)$$

Man untersuche die Spezialfälle $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$!

$$\begin{aligned}Parseval: \big\|f\big\|^2 &= \int_0^{2\pi} t^2\ \mathrm{d}t = \frac{8\pi^3}{3} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|(f, f_n)\big|^2 = 2\pi\left(\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Das ergibt : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$

2.2.1 Übungen

1. Es sei $a = 10$, $f(t) = \begin{cases} 3 & : \ 0 < t < 5 \\ 0 & : \ 5 < t < 10. \end{cases}$

   (a) Entwickle f in eine Fourierreihe!

   (b) Untersuche die Punkte $t = 0,\ 5,\ 10$.

2. (a) Entwickle $f(t) = \sin \dfrac{t}{2}$, $0 \le t \le 2\pi$, in eine Fourierreihe.

   (b) Berechne damit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

3. (a) Entwickle $f(t) = t^2$ in $(0,2\pi)$ in eine Fourierreihe!

   (b) Untersuche $t = 0,\ \pi,\ 2\pi$.

   (c) Berechne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ aus der Parsevalschen Gleichung.

4. Genügen folgende Funktionen am Intervall $-\pi \le t \le \pi$ der Dirichletbedingung?

   (a) $f(t) = \sqrt{\pi^2 - t^2}$

   (b) $g(t) = |t|$

   (c) $h(t) = t \sin \dfrac{1}{t}$

5. Vergleiche den Winkel α zwischen

   (i) den Vektoren $f = (1,1,1,1,1)$ und $g = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ im $\mathbb{R}^5$ und

   (ii) den Funktionen $f(t) = 1$ und $g(t) = t$ in $L^2\big((0,5)\big)$.

   Hinweis: In jedem Fall ist $\cos\alpha = \frac{(f,g)}{\|f\| \cdot \|g\|}$.

6. (a) Entwickle $f(t) = \cos \alpha t$, $-\pi \le t \le \pi$, in eine Fourierreihe $\big(\text{ONB} = \big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{int} : n \in \mathbb{Z}\big\}\big)$ für $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

   (b) Leite daraus die Partialbruchzerlegung von cot ab:
   $\pi \cot \alpha\pi - \dfrac{1}{\alpha} = 2\alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$.

7. Es sei $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1), a > 0$, $\widetilde{T} := \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} T(x + an)$ (siehe Übung 6 im Abschnitt 1.1.1). Zeige:

(a) $\widetilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

(b) $\mathcal{F}\widetilde{T} = \mathcal{F}T \cdot \frac{2\pi}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{2k\pi}{a}\right) =$
$= \frac{2\pi}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}T\left(\frac{2k\pi}{a}\right)\delta\left(x - \frac{2k\pi}{a}\right)$ in $\mathcal{S}'$ (verwende Übung 7 und 5 im Abschnitt 1.1.1).

(c) Für $f \in L^2\big((0,a)\big)$ ist $\tilde{f}$ die periodische Fortsetzung von f und $\mathcal{F}\tilde{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f, f_k)\delta\left(x - \frac{2k\pi}{a}\right)$ in $\mathcal{S}'$.

(d) $\widetilde{T} = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}T\left(\frac{2k\pi}{a}\right) \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i} x/a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} < f_{-k}, T > f_k$ in $\mathcal{S}'$. (Diese Reihe heißt "*trigonometrische Reihe*" von $\widetilde{T}$.)

(e) Entwickle $\delta'(x-\pi) = T$ in eine trigonometrische Reihe in $(0, 2\pi = a)$!

2.3 Beschränkte Operatoren

Definition 2.2 H, H_1, H_2 Hilberträume

1. $L(H_1, H_2) := \{A : \ H_1 \longrightarrow H_2$ linear und stetig$\}$,
$H' := L(H, \mathbb{C}),\ L(H) := L(H, H)$.

2. $L(H_1, H_2)$ ist ein normierter Raum mit $\|A\|$:=sup $\big\{\|Ax\| : x \in H_1, \|x\| = 1\big\}$ und damit vollständig, d.h. ein Banachraum, $L(H)$ ist eine Banachalgebra.

3. A $\in L(H_1, H_2)$ heißt *unitär* $:\Longleftrightarrow$

   (i) A bijektiv

   (ii) $\forall\ x \in H_1 : \big\|Ax\big\| = \big\|x\big\|$.

4. Bil$(H) := \big\{h : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

   (i) h stetig,

   (ii) $h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 h(x_1, y) + \lambda_2 h(x_2, y),\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ x_i, y \in H$,

   (iii) $h(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1} h(x, y_1) + \overline{\lambda_2} h(x, y_2),\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ x_i, y \in H\big\}$.

5. $P \in L(H)$ heißt *Projektor* $:\Longleftrightarrow \exists\ H_1 \leq H$ abgeschlossener Unterraum mit

   (i) $\forall\ x \in H_1 :\ P(x) = x$,

   (ii) $\forall\ x \in H_1^{\perp} :\ P(x) = 0$.

Satz 2.2

1. $H \longrightarrow H' : x \longmapsto \big(f : y \longmapsto \overline{(x,y)} = (y,x)\big)$ ist bijektiv und normerhaltend ("*Satz von Riesz*").
2. $j : L(H) \longrightarrow \mathrm{Bil}(H) : A \longmapsto \big(h \text{ mit } h(x,y) = (Ax,y)\big)$ und $k : L(H) \longrightarrow \mathrm{Bil}(H) : A \longmapsto \big(h \text{ mit } h(x,y) = (x,Ay)\big)$ sind ebenfalls bijektiv.

Definition 2.3 $A \in L(H)$; $A^* \in L(H)$ sei durch $(Ax,y) = (x,A^*y)$, $\forall\, x,y \in H$ definiert.

Bemerkung Punkt 2. in Satz 2.2 zeigt Existenz und Eindeutigkeit von A^* und die Bijekivität von $k^{-1} \circ j : L(H) \longrightarrow L(H) : A \longmapsto A^*$.

Beispiel 7 $a < b \in \mathbb{R}$, $K(x,y)$ sei eine beschränkte, messbare Funktion auf $[a,b] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$.
Die *Volterrasche Integralgleichung 2.Art* hat die Form

$$\int_a^x K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x),$$

wobei g gegeben, f gesucht ist, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.
Formulierung im Hilbertraum:
$H := L^2\big((a,b)\big)$, A sei durch $A : H \longrightarrow H : f \longmapsto g$ mit

$$g(x) = \int_a^x K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

definiert. Dann ist $A \in L(H)$ (Übung 3).
Zu lösen ist also : $(A - \lambda I)f = g$, wobei I = Einheitsoperator, $If = f$.
Heuristisch: $f = (A-\lambda I)^{-1}g = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1}$; in Analogie zur geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$ setzen wir an $f = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}A^n g$, wobei $A^n g = \underbrace{A\big(A\cdots(A}_{n-mal} g)\cdots\big)$. (Diese Reihe heißt *Neumannsche Reihe.*)

Satz 2.3
$K(x,y),\ H$ wie oben, $\lambda \neq 0$. Dann gilt:

(i) Die Reihe $B := -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A^n$ konvergiert in $L(H)$,

(ii) $(A-\lambda I)B = B(A-\lambda I) = I$,

(iii) für $g \in L^2(a,b)$ ist $f = Bg$ die eindeutige Lösung der Volterraschen Integralgleichung in H.

Beweis. (i)

$$\begin{aligned}(A^2 f)(x) &= \int_{y=a}^{x} K(x,y)\ Af(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{y=a}^{x} K(x,y) \int_{z=a}^{y} K(y,z)\ f(z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y = \ (\text{ Fubini }) \\ &= \int_{z=a}^{x} f(z) \Bigg(\underbrace{\int_{y=z}^{x} K(x,y)\ K(y,z)\ \mathrm{d}y}_{K_2(x,z)} \Bigg)\ \mathrm{d}z;\end{aligned}$$

analog erhalten wir:

$$A^n f(x) = \int_{z=a}^{x} f(z)\ K_n(x,z)\ \mathrm{d}z,$$

wobei $K_1 = K,\ K_n(x,z) = \int_{y=z}^{x} K_{n-1}(x,y)\ K(y,z)\ \mathrm{d}y.$

Es sei $\big|K(x,y)\big| \le c,\ \forall\ x,y \Longrightarrow$ (mit Induktion)

$$\big|K_n(x,z)\big| \le \frac{c^{\,n}}{(n-1)!}\,|x-z|^{\,n-1} \Longrightarrow$$

$$\big|A^n f(x)\big|^2 \le \frac{c^{\,2n}}{(n-1)!^2}\Big(\int\limits_{z=a}^{x} \big|f(z)\big|\,(x-z)^{n-1}\,\mathrm{d}z\Big)^2 \le \text{ (Schwarz)}$$

$$\le \frac{c^{\,2n}}{(n-1)!^2}\int\limits_a^x |f(z)|^2\,\mathrm{d}z \cdot \int\limits_a^x (x-z)^{2n-2}\,\mathrm{d}z \le$$

$$\le \frac{c^{\,2n}}{(n-1)!^2}\,\big\|f\big\|^2\,\frac{(x-a)^{2n-1}}{2n-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \big\|A^n\,f\big\|^2 = \int\limits_a^b \big|A^n\,f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{c^{\,2n}}{(n-1)!^2}\,\big\|f\big\|^2\,\frac{(b-a)^{2n}}{2n(2n-1)}\,,$$

$$|\lambda^{-n}|\cdot\big\|A^n\big\|_{L(H)} \le \frac{\big[c\,(b-a)\big]^n}{|\lambda|^n n!}.$$

Da $L(H)$ vollständig ist, folgt daraus die Konvergenz der Neumannschen Reihe in $L(H)$. (ii) und (iii) ergeben sich leicht aus (i). □

Korollar

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

(i) $M(x,z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} K_n(x,z)$ konvergiert für alle $(x,z) \in [a,b]^2$ und $M(x,z) \in L^\infty\big([a,b]^2\big)$,

(ii) für $g \in H$ ist $Bg(x) = -\dfrac{1}{\lambda}g(x) + \displaystyle\int\limits_a^x M(x,z)\ g(z)\ \mathrm{d}z.$

Beweis.

(i) $\quad \big|K_n(x,z)\big| \le \dfrac{c^n}{(n-1)!}\,|x-z|^{n-1} \Longrightarrow \big|M(x,z)\big| \le \dfrac{c}{|\lambda|^2}\cdot \mathrm{e}^{c|x-z|/|\lambda|}.$

(ii)
$$Bg = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}A^n g$$

$$= -\frac{1}{\lambda}g + \lim_{\substack{N\to\infty \\ \text{in } L^2([a,b])}} \underbrace{\int\limits_a^x \Big(-\sum_{n=1}^{N}\lambda^{-n-1}K_n(x,z)\Big)g(z)\ \mathrm{d}z}_{h_N(x)}\,.$$

Nach dem Satz von Lebesgue ist für jedes feste x :

$$\lim_{N\to\infty} h_N(x) = \int_a^x M(x,z)\ g(z)\ \mathrm{d}z.$$

Da eine in L^2 konvergente Folge eine punktweise fast überall konvergente Teilfolge hat, gilt (ii). □

2.3.1 Übungen

1. Es sei $P \in L(H)$.
   (a) Zeige: P Projektor $\iff P^2 = P = P^*$.
   (b) Ist $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ ein Projektor in $H = \mathbb{C}^2$?
2. Man löse die folgenden Volterraschen Integralgleichungen
   $g(x) = \int_0^x K(x,y)\ f(y)\ \mathrm{d}y - \lambda f(x)$ mit Hilfe der Neumannschen Reihe:
   (a) $K = 1$
   (b) $K = x - y$
3. Es sei $K(x,y) \in L^2\big([a,b]\times[a,b]\big), H = L^2(a,b)$. Zeige:
   (a) $A : H \longrightarrow H : f \longmapsto \int_a^b K(x,y) f(y)\ \mathrm{d}y$ ist ein beschränkter Operator, d.h. $A \in L(H)$,
   (b) $A^* f(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)}\ f(y)\ \mathrm{d}y$,
   (c) $\|A\|^2 \le \int_a^b \int_a^b \big|K(x,y)\big|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$,
   (d) für $|\lambda| > \|A\|$ existiert eine eindeutige Lösung in H der *Fredholmschen Integralgleichung 2.Art* $\int_a^b K(x,y) f(y)\ \mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x)$ und diese ist durch die Neumannsche Reihe gegeben.

4. (Fortsetzung) Löse die Fredholmschen Integralgleichungen mit gegebenem Kern für großes $|\lambda|$:
   (a) $a = 0,\ b = 1,\ K = x - y$
   (b) $a = -\pi,\ b = \pi,\ K = x + \sin y$
   (c) $a = 0,\ b = 1,\ K = xe^y$

5. Es sei $H = L^2(\mathbb{R}^n),\ A : H \longrightarrow H : f \longmapsto \widehat{f}$.
   (a) Zeige, dass $A \in L(H)$ und bestimme $\|A\|, A^*, A^n,\ n = 1, 2, \cdots$!
   (b) Für welche λ könnten Eigenvektoren von A, d.h $0 \neq f \in H$ mit $Af = \lambda f$ existieren? Gib einen Eigenvektor an!
   (c) Berechne $(A - \lambda I)^{-1}$ für $|\lambda| > (2\pi)^{n/2}$ (vgl. Üb. 3d)).
   (d) Löse die Gleichung $\widehat{f} - 3f = \dfrac{1}{1 + x^2}$ in $L^2(\mathbb{R}^1_x)$!

6. Es sei $H = l^2$, $A : H \longrightarrow H : (x^1, x^2, \cdots) \longmapsto (x^2, x^3, \cdots)$ (shift nach links).
   (a) Berechne $\|A\|$ und A^*!
   (b) Löse die Gleichung $Ax - 2x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$ in l^2.

7. Es sei H ein Hilbertraum, $A \in L(H)$. Definiere für $z \in \mathbb{C}$

$$e^{zA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zA)^n}{n!}\,.$$

   (a) Zeige: Diese Reihe konvergiert in $L(H)$ und $e^{z_1 A} \circ e^{z_2 A} = e^{(z_1 + z_2)A}$.
   (b) Berechne $e^{zA}x$ für A wie in Aufgabe 6, $z \in \mathbb{C},\ x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right) \in l^2$.
   (c) $A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 : x \longmapsto \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} x^T$.
   Berechne e^{zA}.
   Hinweis: Zuerst auf Diagonalform bringen!
   (d) Berechne $e^{z\mathcal{F}}, \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : f \longmapsto \widehat{f}$.

2.4 Sobolev-Räume

Definition 2.4

1. $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\mathcal{H}^{(k)}(U) := \{f \in L^2(U) : \partial^{\,\alpha} f \in L^2(U), \forall |\alpha| \leq k\}$ heißt *Sobolevraum* (die Ableitung $\partial^{\,\alpha} f$ ist dabei zunächst in $\mathcal{D}'(U)$ definiert). $\mathcal{H}^{(k)}(U)$ ist ein Hilbertraum mit

$$(f, g) := (2\pi)^n \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \binom{k}{\alpha} \int_U \partial^{\,\alpha} f \cdot \overline{\partial^{\,\alpha} g}\, \mathrm{d}x$$

   $\left(\text{hierbei ist } \binom{k}{\alpha} := \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n! (k-|\alpha|)!}\right)$.

2. $\mathcal{H}^{(k)} := \mathcal{H}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$

3. $s \in \mathbb{R}$; $L^2_s := \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : (1 + |x|^2)^{s/2} f(x) \in L^2\}$.
   L^2_s ist ein Hilbertraum mit

$$(f, g) := \int \left(1 + |x|^2\right)^s f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Satz 2.4
Für $k = 0, 1, 2, \cdots$ ist die Abbildung $\mathcal{H}^{(k)} \longrightarrow L^2_k : f \longmapsto \widehat{f}$ unitär.

Beweis.

$$\begin{aligned} \left\| f \right\|^2_{\mathcal{H}^{(k)}} =& (2\pi)^n \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \binom{k}{\alpha} \left\| \partial^{\,\alpha} f \right\|^2_{L^2} \overset{(Parseval)}{=} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \binom{k}{\alpha} \left\| \widehat{\partial^{\,\alpha} f} \right\|^2_{L^2} = \\ &= \int \underbrace{\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \binom{k}{\alpha} x^{2\alpha}}_{(1+|x|^2)^k} \left| \widehat{f}(x) \right|^2 \mathrm{d}x = \left\| \widehat{f} \right\|^2_{L^2_k}. \end{aligned}$$

□

Daher ist die folgende Definition 4. sinnvoll:

Definition 2.5

4. $s \in \mathbb{R}$; $\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) := \{T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{T} \in L^2_s\}$; $\mathcal{H}^{(s)}$ ist mit $(T_1, T_2) := (\widehat{T_1}, \widehat{T_2})_{L^2_s}$ ein Hilbertraum und heißt *Sobolevraum.*

5. $\mathcal{C}^l(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, sodass $\forall \alpha$ mit $|\alpha| \leq l : \partial^\alpha f$ stetig$\}$;
   $\mathcal{C}_0^l(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}^l : \forall\ \alpha$ mit $|\alpha| \leq l : \lim\limits_{|x|\to\infty} \partial^\alpha f(x) = 0\}$;
   $\mathcal{C}_0^l$ ist mit $\|f\| := \sum\limits_{|\alpha|\leq l} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|$ ein Banachraum.

Satz 2.5

1. $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}^{(s)}$ und $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_0^l$ dicht.
2. (*Sobolevscher Einbettungssatz*) Es sei $s > \dfrac{n}{2}$.
   Dann ist $\mathcal{H}^{(s+k)} \longrightarrow \mathcal{C}_0^k : f \longmapsto f$ wohldefiniert und stetig.

Beweis.

1. Übung
2. $(1+|x|^2)^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, denn $\displaystyle\int (1+|x|^2)^{-s}\, \mathrm{d}x =$ Oberfläche der Sphäre im $\mathbb{R}^n \times \displaystyle\int_0^\infty (1+r^2)^{-s} r^{n-1}\, \mathrm{d}r < \infty$, da $s > \dfrac{n}{2}$;
   für $|\alpha| \leq k$ und $f \in \mathcal{H}^{(s+k)}$ ist

$$\widehat{f}\big(1+|x|^2\big)^{(s+k)/2} \in L^2 \text{ und daher } \big|x^\alpha \widehat{f}(x)\big| \leq |\widehat{f}| \cdot \big(1+|x|^2\big)^{k/2} =$$
$$= |\widehat{f}| \cdot \big(1+|x|^2\big)^{(s+k)/2} \cdot (1+|x|^2)^{-s/2} \in L^2 \cdot L^2 \subset L^1$$

   (Höldersche Ungleichung)
   $\Longrightarrow \widehat{\partial^\alpha f} = (\mathrm{i}x)^\alpha \widehat{f} \in L^1 \Longrightarrow \partial^\alpha f = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{\partial^\alpha f}}(-x) \in \widehat{L^1} \subset \mathcal{C}_0$ und

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f| \leq \int |\widehat{\partial^\alpha f}|\, \mathrm{d}x \leq \text{Const} \cdot \|f\|_{\mathcal{H}^{(s+k)}}.$$

□

Beispiel 8 Im $\mathbb{R}^n$ setze ich $\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$; für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei
$\Delta + \lambda : \mathcal{H}^{(2)} \longrightarrow L^2 = \mathcal{H}^{(0)} : f \longmapsto (\Delta + \lambda) f$
(Δ entspricht in der Quantenmechanik der kinetischen Energie, bis auf den Faktor $-\hbar^2/2m$; dieses Beispiel wird später weiter untersucht).

1. $\Delta + \lambda$ ist wohldefiniert und stetig: leicht.

2. $\Delta + \lambda$ ist injektiv: es sei $f \in \mathcal{H}^{(2)}$ und $(\Delta + \lambda)f = 0 \Longrightarrow \widehat{(\Delta+\lambda)f} = 0 \Longrightarrow (\lambda - x^2)\widehat{f} = 0 \Longrightarrow \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \{x : x^2 = \lambda\}$;
   $f \in \mathcal{H}^{(2)} \subset L^2 \Longrightarrow \widehat{f} \in L^2 \Longrightarrow \widehat{f} = 0 \Longrightarrow f = 0$.

3. $\Delta + \lambda$ ist surjektiv $\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$: Übung.

Somit gilt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$: Die (elliptische) Differentialgleichung
$\Delta f + \lambda f = g,\ g \in L^2$, hat genau eine Lösung f in $\mathcal{H}^{(2)}$. In $\mathbb{R}^1$ gilt sogar: $f \in \mathcal{C}_0^1$, in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 : f \in \mathcal{C}_0$.

2.4.1 Übungen

1. $\mathcal{H}^{(\infty)} := \mathcal{D}_{L^2} := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)},\ \mathcal{H}^{(-\infty)} := \mathcal{D}'_{L^2} := \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)}$.
   Zeige: $\mathcal{D}' \supsetneq \mathcal{S}' \supsetneq \mathcal{H}^{(-\infty)} \supsetneq \mathcal{H}^{(s_1)} \supsetneq \mathcal{H}^{(s_2)} \supsetneq \mathcal{H}^{(\infty)} \supsetneq \mathcal{S} \supsetneq \mathcal{D}$,
   wenn $-\infty < s_1 < s_2 < \infty$.

2. Man bestimme die Menge der $s \in \mathbb{R}$, für die die angegebenen Distributionen in $\mathcal{H}^{(s)}$ liegen.

   (a) δ

   (b) e^{-r^2}

   (c) $\mathrm{e}^{-|x|}$

   (d) 1

   (e) $|x|^\lambda,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda > -n$.

3. (a) Zeige: $\Delta + \lambda : \mathcal{H}^{(2)} \longrightarrow L^2$ ist surjektiv $\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

   (b) Untersuche $\Delta + \lambda : \mathcal{H}^{(2+s)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(s)}$.

   (c) Zeige: Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ hat $\Delta + \lambda$ genau eine Fundamentallösung in $\mathcal{S}'$ und diese liegt in $\bigcap_{s<2-n/2} \mathcal{H}^{(s)} \setminus \mathcal{H}^{(2-n/2)}$.

4. Es sei $a < b \in \mathbb{R}$. Zeige:

   (a) $\mathcal{C}^\infty\big([a,b]\big) \subset \mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big)$ dicht,

   (b) $\mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big) \longrightarrow \mathcal{C}\big([a,b]\big) : f \longmapsto f$ ist wohldefiniert und stetig,

   (c) der Abschluss von $\mathcal{D}\big((a,b)\big)$ in $\mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big)$ ist ein Unterraum von der Codimension 2.

5. (a) Es sei $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{H}^{(s)} \subset \mathcal{D}'$. Dann lässt sich die Abbildung $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto < \varphi, f >$ stetig auf $\mathcal{H}^{(-s)} \supset \mathcal{D}$ fortsetzen, d.h. $\exists\ \tilde{f} \in \mathcal{H}^{(-s)'}$ mit $\tilde{f}|_{\mathcal{D}} = f$.

   (b) $\mathcal{H}^{(s)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(-s)'} : f \longmapsto \tilde{f}$ ist unitär.

6. Man bestimme die $s \in \mathbb{R}$, für die $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\sin Nx}{x} = \pi\delta$ in $\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^1)$ gilt.

Kapitel 3

Unbeschränkte Operatoren

H. Triebel *Höhere Analysis*

M. Reed, B. Simon *Functional Analysis*

N. I. Achieser, I. M. Glasmann *Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum*

Definition 3.1

1. $A : D \longrightarrow H$ heiße *linearer Operator* im Hilbertraum H, wenn

   (i) $D \leq H$ ein dichter Untervektorraum

   (ii) A linear ist.

2. $D(A) := D$, $N(A) := \{x \in D(A) : Ax = 0\}$, $R(A) :=$ Bild von A

3. $\mathrm{Lu}(H) := \{$A linearer Operator in H$\}$

4. A heißt *symmetrisch* $:\Longleftrightarrow \forall\, x, y \in D(A) : (Ax, y) = (x, Ay)$,
   $\mathrm{Ls}(H) := \{A$ linearer symmetrischer Operator in $H\}$

5. A heißt *abgeschlossen* $:\Longleftrightarrow$ der Graph von A ist abgeschlossen in $H \times H \Longleftrightarrow \forall$ konvergenten Folgen $x_n \in D(A)$, für die auch Ax_n konvergent ist, gilt:

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in D(A)$

   (ii) $A(\lim x_n) = \lim Ax_n$

   $\mathrm{La}(H) := \{A$ linearer abgeschlossener Operator in $H\} \supset L(H)$.

Beispiel 9

1. (*Ortsoperator*) $H = L^2(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \ldots, n,$
   $D(\widehat{x}_j) = \{f \in L^2 : x_j f \in L^2\}$, $\widehat{x}_j : D(\widehat{x}_j) \longrightarrow H$: $f \longmapsto x_j \cdot f$
2. (*Impulsoperator*) $H = L^2(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \ldots, n,$
   $D(-\mathrm{i}\partial_j) = \{f \in L^2 : \partial_j f \in L^2\}$, $-\mathrm{i}\partial_j : D(-\mathrm{i}\partial_j) \longrightarrow H$: $f \longmapsto -\mathrm{i}\partial_j f$.

Die Orts- und Impulsoperatoren sind symmetrisch (daher das i bei ∂_j !) und abgeschlossen.

Satz 3.1

1. $A \in \mathrm{La}(H)$ und $D(A) = H \Longrightarrow A \in L(H)$
2. (von *Hellinger-Töplitz*) $A \in \mathrm{Ls}(H)$ und $D(A) = H \Longrightarrow A \in L(H)$.

Beweis.

1. Der *Satz vom abgeschlossenen Graphen* besagt (in der klass. Version): "X, Y Banachräume, $T : X \longrightarrow Y$ linear. Dann gilt: T ist stetig $\Longleftrightarrow$ der Graph von T ist abgeschlossen." Daraus folgt 1).
2. Es genügt zu zeigen, dass $A \in \mathrm{La}(H)$; es seien $x_n \in H = D(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y \Longrightarrow \forall\ z \in H : (z, y) = \lim(z, Ax_n) \overset{A \text{ sym.}}{=} \lim(Az, x_n) = (Az, x) \overset{A \text{ sym.}}{=} (z, Ax) \Longrightarrow y = Ax$. Daher ist $A \in \mathrm{La}(H)$.

□

Bemerkung Für einen symmetrischen aber unstetigen Operator A (wozu die meisten Operatoren der Quantenmechanik gehören) ist somit $D(A) = H$ von vornherein unmöglich.

Definition 3.2 $A, B \in \mathrm{Lu}(H)$.

1. B heißt *Erweiterung* von A (in Zeichen $A \subset B$): $\Longleftrightarrow$
   (i) $D(A) \subset D(B)$
   (ii) $B|_{D(A)} = A$
2. A heißt *abschließbar*: $\Longleftrightarrow \exists\ B$ abgeschlossen mit $A \subset B$,
   $\mathrm{Lab}(H) := \{A : A \text{ abschließbar}\}$.

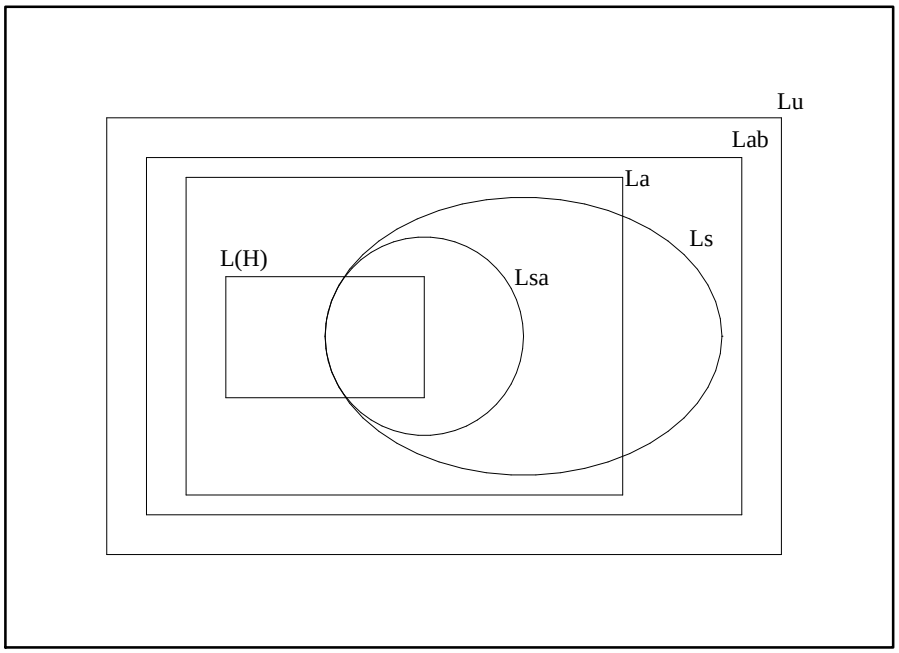


Abbildung 3.1: Verschiedene Mengen linearer Operatoren

Satz 3.2 *(über abgeschlossene Operatoren)* $A \in \mathrm{Lu}(H)$.

1. Äquivalent sind:
   (i) A abgeschlossen
   (ii) $D(A)$ ist mit dem Skalarprodukt $[x, y] := (x, y) + (Ax, Ay)$ *ein Hilbertraum.*
2. Es sei $A \in \mathrm{Lab}(H)$. Dann *existiert genau ein* $\overline{A} \in \mathrm{La}(H)$ mit
   (i) $A \subset \overline{A}$
   (ii) $\forall\ B \in \mathrm{La}(H)$ mit $A \subset B : \overline{A} \subset B$.

Beweis.

1. $[\ ,\ ]$ macht aus $D(A)$ jedenfalls einen Prä-Hilbertraum. Für $x \in D(A)$ sei $\|x\|_A := \sqrt{[x, x]}$.
   (i) $\Longrightarrow$ (ii): x_n sei eine C-Folge in $D(A)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_n \text{ C-Folge in } H \Longrightarrow & x_n \overset{\text{in } H}{\to} x \\ Ax_n \text{ C-Folge in } H \Longrightarrow & Ax_n \overset{\text{in } H}{\to} y; \end{cases}$$

A abgeschlossen $\Longrightarrow x \in D(A)$, $y = Ax \Longrightarrow \|x_n - x\|_A^2 = \|x_n - x\|^2 + \|Ax_n - Ax\|^2 \to 0 \Longrightarrow x_n$ konvergiert in $D(A)$ gegen x, $D(A)$ ist also ein Hilbertraum.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): genauso.

2. Es sei $A \in \mathrm{Lab}(H)$, $B \in \mathrm{La}(H)$ mit $A \subset B$. $D(\overline{A})$ sei der Abschluss von $D(A)$ im Hilbertraum $D(B)$ mit Norm $\|\cdot\|_B$, $\overline{A} := B|_{D(\overline{A})}$. Ein abgeschlossener Unterraum in einem Hilbertraum ist wieder ein Hilbertraum $\Longrightarrow D(\overline{A})$ ist ein Hilbertraum (mit $\|\cdot\|_{\overline{A}}$) $\overset{1)}{\Longrightarrow} \overline{A}$ ist abgeschlossen. Es sei nun $A \subset C$, $C \in \mathrm{La}(H)$, $x \in D(\overline{A}) \Longrightarrow \exists\, x_n \in D(A)$ mit $x_n \to x$, $\underbrace{Ax_n}_{=Cx_n} \to \overline{A}x \Longrightarrow (C$ abg.$) \Longrightarrow x \in D(C)$ und $\overline{A}x = Cx \Longrightarrow \overline{A} \subset C$.

□

Beispiel 10 Es sei $A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2 : f \longmapsto x \cdot f$. Dann ist für $f \in \mathcal{D}$:

$$\|f\|_A^2 = \|f\|^2 + \|xf\|^2 = \int (1 + x^2)|f|^2 \mathrm{d}x = \|f\|_{L_1^2}^2$$

(bezüglich L_1^2 siehe Definition 2.4, Seite 24). Da $\mathcal{D} \subset L_1^2$ dicht ist und L_1^2 ein Hilbertraum, folgt also $\overline{A} = \widehat{x} : L_1^2 \longrightarrow L^2 : f \longmapsto xf$.
Ebenso mit dem Impulsoperator!

Definition 3.3 $A \in \mathrm{Lu}(H)$.

1. $D(A^*) := \{y \in H : \exists\, y^* \in H : \forall x \in D(A) : (Ax, y) = (x, y^*)\}$
   (Bemerkung: Da $D(A) \subset H$ dicht ist, ist y^* durch y eindeutig bestimmt!)
2. $A^* : D(A^*) \longrightarrow H : y \longmapsto y^*$.

Bemerkung A^* ist zwar linear, aber im Allgemeinen ist $D(A^*) \subset H$ nicht dicht, d.h. $A^* \notin \mathrm{Lu}(H)$.

Satz 3.3 *(über symmetrische Operatoren)* $A \in \mathrm{Lu}(H)$.

1. Äquivalent:
   (i) A symmetrisch
   (ii) $A \subset A^*$

(iii) $\forall x \in D(A) : (Ax, x) \in \mathbb{R}$

2. Es seien $A \subset B$ symmetrisch.

   (a) Dann ist $A \in \mathrm{Lab}(H)$ und $A \subset \overline{A} \subset A^*$

   (b) $B^* \subset A^*$.

Beweis. Leichte Übung.

Definition 3.4

1. $A \in \mathrm{Ls}(H)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$.
   $\mathrm{Lsa}(H) := \{A \text{ selbstadjungiert } (=: \text{sa.})\}$

2. $A \in \mathrm{Ls}(H)$ heißt *wesentlich selbstadjungiert* $:\Longleftrightarrow \overline{A} \in \mathrm{Lsa}(H)$.

Beispiel 11 Der Ortsoperator $A = \widehat{x}_j$ ist sa.:
$\widehat{x}_j$ ist symmetrisch $\Longrightarrow \widehat{x}_j^* \supset \widehat{x}_j$. Sei umgekehrt $f \in D(\widehat{x}_j^*) \Longrightarrow \exists f^* \in L^2$: $\forall g \in L^2$ mit $x_j g \in L^2$:

$$(x_j g, f) = (g, f^*), \text{ d.h. } \int x_j g \overline{f}\, \mathrm{d}x = \int g \overline{f^*}\, \mathrm{d}x \Longrightarrow \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) :$$
$$\int g\big(x_j \overline{f} - \overline{f^*}\,\big)\, \mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow x_j \overline{f} = \overline{f^*}$$

(denn $L^1_{\mathrm{loc}} \hookrightarrow \mathcal{D}'$ ist injektiv!) $\Longrightarrow x_j f \in L^2 \Longrightarrow f \in D(\widehat{x}_j)$.
Ebenso mit dem Impulsoperator.

Lemma
$A \in \mathrm{Ls}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $I =$ Identität: $H \longrightarrow H$.

1. $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$

2. $H = \overline{R(A - \lambda I)} \oplus N(A^* - \overline{\lambda} I)$

3. $\forall x \in D(A) : \big\|(A - \lambda I)x\big\| \geqslant |\mathrm{Im}\,\lambda| \cdot \big\|x\big\|$.

Beweis.

1. folgt aus: $\big((A - \lambda I)x, y\big) = \big(x, (A^* - \overline{\lambda} I)y\big)$ für $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$

2. $y \in N(A^* - \overline{\lambda} I) \iff y \in D(A^*)$ und $A^* y = \overline{\lambda} y \iff \forall x \in D(A) : \big((A - \lambda I)x, y\big) = 0 \iff y \in R(A - \lambda I)^\perp = \overline{R(A - \lambda I)}^\perp$.

3. Es sei $x \in D(A)$.

$$\begin{aligned} \big\|Ax - \lambda x\big\|^2 &= (Ax - \lambda x, Ax - \lambda x) = \\ &= \big\|Ax\big\|^2 + |\lambda|^2 \big\|x\big\|^2 \underbrace{-(Ax, \lambda x) - (\lambda x, Ax)}_{-2\mathrm{Re}\,(Ax,\lambda x) = -2\mathrm{Re}\,\lambda \cdot (Ax,x)} \\ &= \big\|Ax\big\|^2 + |\lambda|^2 \big\|x\big\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\lambda \cdot (Ax, x) \\ 2|\mathrm{Re}\,\lambda| \cdot \big|(Ax, x)\big| &\le 2|\mathrm{Re}\,\lambda| \cdot \big\|x\big\| \cdot \big\|Ax\big\| \le \big\|Ax\big\|^2 + (\mathrm{Re}\,\lambda)^2 \big\|x\big\|^2 \end{aligned}$$

(denn $2ab \le a^2 + b^2$);
$|\lambda|^2 = (\mathrm{Re}\,\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 \Longrightarrow \big\|Ax - \lambda x\big\|^2 \ge (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 \big\|x\big\|^2$.

□

Satz 3.4 *(über selbstadjungierte Operatoren)*

1. Es sei $A \in \mathrm{Ls}(H)$. A ist sa., wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   (a) $A \in L(H)$
   (b) $\exists \lambda \in \mathbb{C} : R(A - \lambda I) = R(A - \overline{\lambda} I) = H$

2. Wenn A sa., so gilt
   (a) A ist abgeschlossen
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} : R(A - \lambda I) = H$

3. (Kato) Es sei A sa., B symmetrisch, $D(A) \subset D(B)$ und
$$\exists 0 \le \delta < 1 : \exists c \ge 0 : \ \forall x \in D(A) : \big\|Bx\big\| \le \delta \big\|Ax\big\| + c\big\|x\big\|.$$
   Dann ist $A + B$ selbstadjungiert.

Beweis.

1. (a) $A \in \mathrm{Ls}(H) \cap L(H) \Longrightarrow A \subset A^* \Longrightarrow A = A^* \Longrightarrow A$ sa.
   (b) Wir betrachten die Abbildung $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow H$; nach Voraussetzung ist sie surjektiv, wegen $N(A - \lambda I) \subset N(A^* - \lambda I) = 0$ nach 2) des Lemma ist sie auch injektiv. Wenn nun $x \in D(A^*)$, $y := (A^* - \lambda I)x$, $z := (A - \lambda I)^{-1} y \Longrightarrow y = (A - \lambda I)z = (A^* - \lambda I)z \Longrightarrow x - z \in N(A^* - \lambda I) = 0 \Longrightarrow x = z \in D(A)$.
   Somit $D(A^*) \subset D(A) \Longrightarrow A^* \subset A \Longrightarrow A = A^*$.

2. (a) Übung

   (b) Es sei A sa., $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Nach 3) des Lemma ist $N(A-\lambda I)=0$, wegen $A=A^*$ folgt daraus nach 2) des Lemma, dass $H=\overline{R(A-\lambda I)}$. Der Operator $(A-\lambda I)^{-1}: R(A-\lambda I)\longrightarrow D(A)\subset H$ ist nach 3) des Lemma stetig (bzgl. der von H induzierten Topologie), da $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Es sei $x\in H$, $x_n\in R(A-\lambda I)$ mit $x_n\to x \Longrightarrow y_n=(A-\lambda I)^{-1}x_n$ ist eine C-Folge in $H \Longrightarrow y_n\to y$; $(A-\lambda I)y_n=x_n$, $A-\lambda I$ abgeschlossen $\Longrightarrow y\in D(A)$ und $(A-\lambda I)y=x \Longrightarrow x\in R(A-\lambda I)$. Somit: $H=R(A-\lambda I)$.

3. Aus 2) wissen wir, dass $(A-\mathrm{i}\varrho I)^{-1}\in L(H)$ für $\varrho\in\mathbb{R}^* \Longrightarrow A+B-\mathrm{i}\varrho I=\big(I+B(A-\mathrm{i}\varrho I\big)^{-1})\circ(A-\mathrm{i}\varrho I) \Longrightarrow R(A+B-\mathrm{i}\varrho I)=R\big(I+B(A-\mathrm{i}\varrho I)^{-1}\big)$.
   Zu zeigen ist daher nach 1) b) nur noch: $\exists\varrho\in\mathbb{R}^*: R\big(I+B(A\pm\mathrm{i}\varrho I)^{-1}\big)=H$.
   (Idee dahinter: Für großes ϱ ist $B(A\pm\mathrm{i}\varrho I)^{-1}\approx 0$). Wir zeigen nun: $\exists\varrho\in\mathbb{R}^*: B(A\pm\mathrm{i}\varrho I)^{-1}\in L(H)$ und $\big\|B(A\pm\mathrm{i}\varrho I)^{-1}\big\|<1$.
   Dann ist $I+B(A\pm\mathrm{i}\varrho I)^{-1}$ invertierbar (Neumannsche Reihe!) und folglich surjektiv, d.h. wir sind fertig.
   Nach dem Lemma ist für $x\in H$:
   $\big\|(A-\mathrm{i}\varrho I)^{-1}x\big\|\leq\frac{1}{|\varrho|}\big\|x\big\| \Longrightarrow \big\|B(A-\mathrm{i}\varrho I)^{-1}x\big\|\leq$
   $\leq\delta\big\|A(A-\mathrm{i}\varrho I)^{-1}x\big\|+\frac{c}{|\varrho|}\big\|x\big\|$;
   nach dem Beweis von 3) des Lemma ist $\forall y\in D(A)$:

$$\big\|Ay-\mathrm{i}\varrho y\big\|\geq\big\|Ay\big\| \Longrightarrow \big\|A\underbrace{(A-\mathrm{i}\varrho I)^{-1}x}_{y}\big\|\leq\big\|x\big\|$$

$$\Longrightarrow \big\|B(A-\mathrm{i}\varrho I)^{-1}\big\|\leq\delta+\frac{c}{|\varrho|}<1$$

   für genügend großes $|\varrho|$.

□

Beispiel 12

1. Neuer Beweis, dass $A=\widehat{x}_j$ sa. ist. Sei $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \Longrightarrow R(A-\lambda I)=H=L^2$, denn für $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist $g:=\dfrac{1}{x_j-\lambda}\,f\in D(A)$ und $(A-\lambda I)g=f$. Somit lässt sich 1) b) anwenden.

2. $A=\widehat{x}_j$, $B=\sqrt{|\widehat{x}_j|} \Longrightarrow \forall f\in D(A): \big\|Bf\big\|\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\big\|f\big\|+\big\|Af\big\|\big) \Longrightarrow$ $D(\widehat{x}_j)\longrightarrow H: f\longmapsto\big(x_j+\sqrt{|x_j|}\,\big)f$ ist sa.

3.1 Übungen

1. Zeige den Satz über symmetrische Operatoren und beweise, dass jeder selbstadjungierte Operator abgeschlossen ist.

2. Untersuche für die folgenden linearen Operatoren, ob sie beschränkt (d.h. $\in L(H)$), symmetrisch, sa. oder wesentlich sa. sind:

   (a) $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2 : f \longmapsto \widehat{f}$

   (b) Shift: $l^2 \longrightarrow l^2 : (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (x_2, x_3, \ldots)$

   (c) $\Delta : \mathcal{H}^{(2)} \longrightarrow L^2 : f \longmapsto \Delta f$

   (d) $\mathring{\Delta} : \mathcal{D} \longrightarrow L^2 : f \longmapsto \Delta f$.

3. Es sei $A \in \mathrm{Lu}(H)$. Zeige: $\big[$verwende $\overline{\mathrm{Graph}\ A} = (\mathrm{Graph}\, A)^{\perp\perp}\big]$

   (a) $A \in \mathrm{Lab} \Longleftrightarrow D(A^*) \subset H$ dicht

   (b) $A \in \mathrm{Lab} \Longrightarrow \overline{A}^* = A^*$, $\overline{A} = A^{**}$

4. Es sei $T \in \mathcal{D}'$ und $0 \neq f \in L^2$;

$$A : \mathcal{D} \longrightarrow L^2 : \varphi \longmapsto < \varphi, T > \cdot f(x).$$

   Dann gilt: $A \in \mathrm{Lab}(L^2) \Longleftrightarrow A \in L(L^2) \Longleftrightarrow T \in L^2$.
   Hinweis: Berechne A^* und verwende Übung 3).

5. $A \in \mathrm{Ls}(H)$. Zeige: $\overline{A} \in \mathrm{Ls}(H)$.

6. Es sei $A \in \mathrm{Ls}(H)$.
   Zeige: A sa. $\Longleftrightarrow \exists(\forall)\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} : N(A^* - \lambda I) = N(A^* - \overline{\lambda} I) = 0$

7. (Von Neumanns Beispiel, Buch p. 79).
   Es sei $H = L^2\big((0,1)\big), A : \mathcal{D}\big((0,1)\big) \longrightarrow L^2 : f \longmapsto \mathrm{i}f'$. Zeige:

   (a) $A \in \mathrm{Ls}(H)$

   (b) $A^* : \mathcal{H}^{(1)}\big((0,1)\big) \longrightarrow L^2 : f \longmapsto \mathrm{i}f'$

   (c) $V :=$ Abschluss von $\mathcal{D}\big((0,1)\big)$ in $\mathcal{H}^{(1)}\big((0,1)\big)$ (vgl. Übung 4 im Abschnitt 2.4. Dann ist $\overline{A} = A^*|_V$.

   (d) $\overline{A}$ ist nicht sa., A^* ist nicht symmetrisch.

   (e) Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$, $V_\alpha := \Big\{ f \in \mathcal{H}^{(1)}\big((0,1)\big) : f(0) = \alpha f(1) \Big\}$ $A_\alpha := A^*|_{V_\alpha}$. A_α ist sa. und dies sind die einzigen symmetrischen abgeschlossenen Erweiterungen von A (abgesehen von $\overline{A}$ selbst).

8. Es sei $H = L^2\big((0,\infty)\big)$, $A : \mathcal{D}\big((0,\infty)\big) \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$.
   Berechne $\overline{A}, A^*$ und untersuche, ob es selbstadjungierte Erweiterungen von A gibt.

9. Es seien g, h beschränkte, messbare, reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$,
   $H = L^2(\mathbb{R})$, $A : \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}) \longrightarrow H : f \longmapsto f'' + \mathrm{i}g \cdot f' + h \cdot f$.
   Zeige: A ist selbstadjungiert.

Kapitel 4

Der Spektralsatz für beschränkte symmetrische Operatoren

In diesem Kapitel sind alle Operatoren beschränkt.

Motivation Falls $H = \mathbb{C}^n$, so lässt sich jedes symmetrische $A : H \longrightarrow H$ auf eine reelle Diagonalform bringen, d.h. $\exists$ ONB $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ in H,
$\exists\ \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $A\,x^{(i)} = \lambda_i\,x^{(i)}$. Es seien $\mu_1 < \ldots < \mu_r$ die verschiedenen Eigenwerte λ_i ($r \leq n$). Für $x \in H$ ist dann

$$A\,x = \Big(A \sum_{i=1}^{n} (x, x^{(i)})\,x^{(i)}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,x^{(i)}\,(x, x^{(i)}) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j\,P_j(x),$$

wobei P_j die Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert μ_j ist.
Mit Hilfe der Diagonalisierung können wir nicht nur Potenzen von A sofort hinschreiben ($A^m = \underbrace{A \circ \ldots \circ A}_{m} = \sum \mu_j^m\,P_j$) sondern auch Funktionen von A definieren:

$$f(A) \;:=\; \sum f(\mu_j)\,P_j \quad \text{für } f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^1),$$

vgl. auch Übung 7) in Abschnitt 2.3.1.
Wenn $\dim H = \infty$, so hat A im Allgemeinen zu wenig Eigenwerte. Die Darstellung

$$A = \sum \mu_j\,P_j$$

lässt sich jedoch retten, wenn man die $\sum$ durch ein Riemann-Stieltjes-Integral ersetzt.

Definition 4.1 Es sei $h(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, eine monoton wachsende, reelle Funktion. Die Distribution h' heißt *Riemann-Stieltjes-Integral* (mit Verteilungsfunktion h). Statt $< \varphi, h' >$ schreibt man $\int \varphi(\lambda)\ \mathrm{d}h(\lambda)$.

Bemerkung Nach Definition ist für $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$< \varphi, h' >=< -\varphi', h >= -\int \varphi'(\lambda)\, h(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda.$$

Das zeigt, dass man h' auch auf 1-mal stetig differenzierbare Funktionen φ mit kompaktem Träger anwenden kann. Aber es gilt noch mehr: h' ist ein Borel-Maß, d.h. lässt sich auch auf stetige Funktionen mit kompaktem Träger (d.h. $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}^1)$) erweitern. Das geht so: Es sei $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$, $a_0^{(n)} = a$, $a_1^{(n)} = a + \frac{b-a}{n}, \ldots,\ a_n^{(n)} = b$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\int \varphi\ \mathrm{d}h &= -\int \varphi'(\lambda)\, h(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \text{ (Lebesgue !) } = \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi'(\lambda)\, h(a_j^{(n)})\ \mathrm{d}\lambda = \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} h(a_j^{(n)}) \cdot \big[\varphi(a_j^{(n)}) - \varphi(a_{j-1}^{(n)})\big] = \\
&= \lim_{n\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(a_j^{(n)}) \big[h(a_{j+1}^{(n)}) - h(a_j^{(n)})\big].
\end{aligned}$$

Der letzte Limes existiert aber auch für $\varphi \in \mathcal{C}_{00}$ (siehe zum Beispiel den Beweis von 2. des übernächsten Satzes) und wird dann als Definition von $\int \varphi\ \mathrm{d}h$ genommen.

Beispiel 13 $\delta = Y'$ ist ein Riemann-Stieltjes-Integral. Für $\varphi \in \mathcal{C}_{00}$ ist

$$\begin{aligned}
< \varphi, \delta > &\overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(a_j^{(n)}) \big[Y(a_{j+1}^{(n)}) - Y(a_j^{(n)})\big] = \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi(a_{j(n)}^{(n)}) = \varphi(0)
\end{aligned}$$

wobei $a_{j(n)+1}^{(n)} > 0,\ a_{j(n)}^{(n)} \leq 0$, wie wir auch erwarten.

Definition 4.2 Eine messbare Funktion $h(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$, heißt *lokal von beschränkter Variation* $:\Longleftrightarrow h(\lambda)$ ist Linearkombination von monotonen Funktionen.

Bemerkung

1. Wenn $h(\lambda)$ von beschränkter Variation ist (lokal), so ist folglich $\mathrm{d}h(\lambda)$ ein Maß und für $\varphi \in \mathcal{C}_{00}$:

$$\int \varphi(\lambda)\ \mathrm{d}h(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(a_j^{(n)})\big[h(a_{j+1}^{(n)}) - h(a_j^{(n)})\big].$$

2. Statt äquidistanter Zerlegungen $a_0 < \ldots < a_n$ können natürlich auch beliebige, immer feiner werdende Zerlegungen genommen werden.

Definition 4.3 $A,\ B \in L(H)$ symmetrisch.

$$A \leq B :\Longleftrightarrow \forall x \in H :\ \big((B-A)x, x\big) \geq 0$$

Bezüglich der Definition des Projektors siehe Definition 2.2, Seite 18.

Satz 4.1 *(über Projektoren).* $P,\ P_1$ seien Projektoren.

1. P symmetrisch, $P^2 = P,\ 0 \leq P \leq I =$ Identität
2. $P \leq P_1 \Longleftrightarrow P_1 - P$ Projektor $\Longleftrightarrow R(P_1) \supset R(P) \Longleftrightarrow P \cdot P_1 = P_1 \cdot P = P$

Beweis: leichte Übung.

Definition 4.4 Eine Schar $\{E_\lambda :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Projektoren heißt *beschränkte Spektralschar* $:\Longleftrightarrow$

(i) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Longrightarrow E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$

(ii) $\exists\ N > 0 :\ E_{-N} = 0,\ E_N = I$

(iii) (Normierungsbedingung) $\forall\ \lambda_0 \in \mathbb{R} :\ \forall x \in H :\ \lim\limits_{\lambda \nearrow \lambda_0} E_\lambda x = E_{\lambda_0} x.$

Satz 4.2 (über Spektralscharen)
$\{E_\lambda\}$ sei eine beschränkte Spektralschar, N wie oben.

1. $\forall\ x, y \in H :\ (E_\lambda x, y)$ ist lokal von beschränkter Variation

2. für $f(\lambda) \in \mathcal{C}\big([-N,N]\big)$ ist

$$\begin{aligned} A &= \int f(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda \in L(H) \text{ durch} \\ A &= \lim_{n\to\infty} \text{in } L(H)\ \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j^{(n)})\ (E_{a_{j+1}^{(n)}} - E_{a_j^{(n)}}) \end{aligned}$$

   wohldefiniert. Hiebei ist $a_0 = -N,\ a_n = N$.

3. Es gilt:

$$\big((\int f\ \mathrm{d}E_\lambda)x, y\big) = \int f(\lambda)\ \mathrm{d}(E_\lambda x, y), \quad \forall\ x, y \in H$$

4. f reell $\Longrightarrow A$ symmetrisch.

Beweis.

1. Für $\lambda \le \mu,\ x \in H,$ ist $(E_\lambda x, x) \le (E_\mu x, x)$ und daher $\|E_\lambda x\|^2 = (E_\lambda x, x)$ eine monotone Funktion. Für $x,\ y \in H$ ist:

$$(E_\lambda x, y) = \left\|E_\lambda \frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|E_\lambda \frac{x-y}{2}\right\|^2 + \\ + \ \mathrm{i}\left\|E_\lambda \frac{x+\mathrm{i}y}{2}\right\|^2 - \mathrm{i}\left\|E_\lambda \frac{x-\mathrm{i}y}{2}\right\|^2$$

   (nachrechnen!)

2. Um die Existenz des Limes nachzuweisen, zeige ich, dass $\sum_{j=0}^{n-1} \ldots,$
   $n = 1, 2, \ldots,$ eine Cauchyfolge in $L(H)$ bilden.
   Es sei zunächst $n = k \cdot m,\ k \in \mathbb{N}$,
   $x \in H,\ \|x\| = 1.\ a_0^{(n)} = -N, \ldots, a_n^{(n)} = N$ enthält dann die Menge der

$a_0^{(m)} = -N, \ldots, a_m^{(m)} = N.$

$$\left\| \Big(\sum_{j=0}^{m-1} f(a_j^{(m)}) \; (E_{a_{j+1}^{(m)}} - E_{a_j^{(m)}}) - \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j^{(n)}) \; (E_{a_{j+1}^{(n)}} - E_{a_j^{(n)}}) \Big) \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \Big(f(a_{[j/k]}^{(m)}) - f(a_j^{(n)}) \Big) \; (E_{a_{j+1}^{(n)}} - E_{a_j^{(n)}}) \, x \right\|^2 =$$

(nach 2. des obigen Satzes)

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \Big| \big(f(a_{[j/k]}^{(m)}) - f(a_j^{(n)}) \big) \Big|^2 \; \left\| (E_{a_{j+1}^{(n)}} - E_{a_j^{(n)}}) \, x \right\|^2$$

Für m groß genug ist $a_{[j/k]}^{(m)}$ nahe bei $a_j^{(n)}$ und $\left| f(a_{[j/k]}^{(m)}) - f(a_j^{(n)}) \right|^2$ wird be-

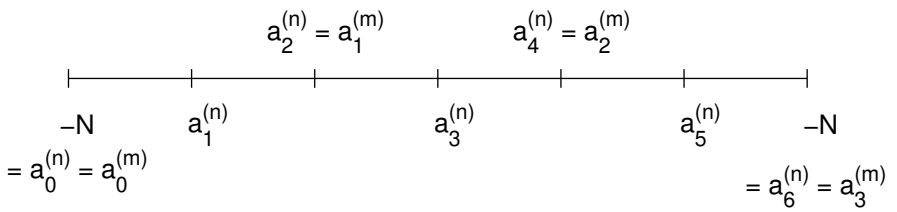


Abbildung 4.1: $n = 6, m = 3$

liebig klein.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \big\| (E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) \, x \big\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \big((E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) \, x, x \big) =$$

$$= \big\| (\underbrace{E_{a_n}}_{=I} - \underbrace{E_{a_0}}_{=0}) \, x \big\|^2 = \|x\|^2 = 1.$$

Für beliebige, große $m_1,\ m_2$ verwendet man nun ein $\dfrac{\epsilon}{2}$-Argument, d.h. vergleicht mit der $n = m_1 \cdot m_2$ entsprechenden Summe.

3. Wenn $A_n \to A$ in $L(H)$, so gilt auch $(A_n x, y) \to (Ax, y)$ in $\mathbb{C}$ für $x,\ y \in H$.

4. Übung.

□

Beispiel 14 Wenn E_λ stückweise konstant ist, d.h. zwischen $\mu_0 = -\infty < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_r < \infty = \mu_{r+1}$ jeweils konstant ist, und

$$P_k := E_{\frac{1}{2}(\mu_{k+1}+\mu_k)} - E_{\frac{1}{2}(\mu_k+\mu_{k-1})},$$

so reduziert sich das Riemann-Stieltjes-Integral auf eine endliche Summe:

$$A = \int f(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda = \sum_{k=1}^{r} f(\mu_k)\, P_k\ .$$

Für $f = \lambda$ und $E_\lambda := \sum_{\mu_j<\lambda} P_j$ erhalten wir die Darstellung aus der Motivation zurück.
Daher machen wir die

Definition 4.5 $\{E_\lambda\}$ sei eine beschränkte Spektralschar.

$$A := \int \lambda\ \mathrm{d}E_\lambda \in L(H)$$

heißt Spektraloperator zu $\{E_\lambda\}$.

Satz 4.3
A sei der Spektraloperator zu E_λ.

1. A ist symmetrisch
2. $A^n = A \circ \ldots \circ A = \int \lambda^n\ \mathrm{d}E_\lambda$
3. $\Phi : \mathcal{C}\big([-N,N]\big) \longrightarrow L(H) : g \longmapsto \int g(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda$
   ist ein stetiger Algebrenhomomorphismus.

Beweis.

1. nach 4. des letzten Satzes.
2. folgt aus 3., da Φ multiplikativ
3. (a) Φ VR-Homomorphismus: leicht

(b) Φ multiplikativ: Seien $g_1,\ g_2 \in \mathcal{C}\big([-N,N]\big)$

$$\int g_1(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda \circ \int g_2(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} g_1(a_j)\,(E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) \circ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} g_2(a_k)\,(E_{a_{k+1}} - E_{a_k}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} g_1(a_j)\,g_2(a_k)\ \underbrace{(E_{a_{j+1}} - E_{a_j})\,(E_{a_{k+1}} - E_{a_k})}_{=\begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ (E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) & \text{für } j = k \end{cases}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (g_1\,g_2)(a_j)\,(E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) = \int g_1\,g_2\,(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda.$$

(c) Φ stetig:

$$\Big\| \int g(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda \Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{j=0}^{n-1} g(a_j)\,(E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) \Big\| \leq \max_{-N\leq\lambda\leq N} |g(\lambda)| \cdot 1.$$

□

Definition 4.6 A sei Spektraloperator zu $E_\lambda,\ g \in \mathcal{C}\big([-N,N]\big)$.

$$g(A) := \int g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

Bemerkung Die Schreibweise $g(A)$ ist berechtigt, denn nach dem letzten Satz hängt $g(A)$ stetig von g ab und ist für Polynome g direkt durch A ausdrückbar. Da nach Weierstraß die Polynome dicht in $\mathcal{C}\big([-N,N]\big)$ liegen, ist $g(A)$ nur von A abhängig.

Beispiel 15 $H = L^2\big((0,1)\big),\ A : H \longrightarrow H : f \longmapsto t \cdot f(t)$.
A ist der Spektraloperator zur Spektralschar

$$E_\lambda(f) = f \cdot \chi_\lambda, \qquad \chi_\lambda = \begin{cases} 1: & t < \lambda \\ 0: & t \geq \lambda, \end{cases}$$

denn

$$\left(\int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda\right) f \;=\; \lim_{n\to\infty} \text{ in } L^2 \sum_{j=0}^{n-1} a_j \, f(t) \left[\, \chi_{a_{j+1}}(t) - \chi_{a_j}(t) \,\right] =$$
$$= \text{ (Lebesgue)} = t \cdot f(t) = Af.$$

Für $g \in \mathcal{C}\big([0,1]\big)$ ist dann $g(A) : H \longrightarrow H : f \longmapsto g(t)\, f(t)$.

Beispiel 16 Es sei A der Spektraloperator zu E_λ. Dann gilt:

(i) $|A| = \int |\lambda| \, \mathrm{d}E_\lambda$ erfüllt: $|A|^2 = A^2$, $|A| \geq 0$ symmetrisch

(ii) $I - E_\lambda =$ Projektor auf $N\big(|A - \lambda\, I| - A + \lambda\, I\big)$. (Übung)

[Beweisskizze von (ii):
$x \in N\big(|A - \lambda\, I| - A + \lambda\, I\big) \Longleftrightarrow \int \underbrace{\big(|\mu - \lambda| - \mu + \lambda\big)}_{\geq 0} \, \mathrm{d}(E_\mu x, y) = 0, \; \forall y \in H.$

$|\mu - \lambda| - \mu + \lambda > 0$ für $\mu - \lambda < 0$ d.h. $\mu < \lambda$. Dort muss daher $\mathrm{d}(E_\mu x, x) = 0$ sein, d.h. $E_\lambda\, x = \lim\limits_{\mu \nearrow \lambda} E_\mu\, x = 0$, d.h. $(I - E_\lambda)\, x = x$. (Beachte, dass hier die linksseitige Stetigkeit der E_λ eine Rolle spielt!)]

Insbesondere folgt, dass die E_λ durch den Spektraloperator A eindeutig bestimmt sind. Im Folgenden werden wir für ein beliebiges symmetrisches A ein $|A|$ konstruieren und damit E_λ wie in (ii).

Theorem 4.4 (Spektralsatz) Zu jedem symmetrischen, beschränkten Operator A existiert genau eine beschränkte Spektralschar E_λ, sodass

$$A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda.$$

Beweis: In einigen Schritten nach Ljusternik-Sobolev.

Lemma 1 $A \in L(H)$ sei symmetrisch und ≥ 0. Dann gilt:

$$\forall x,\; y \in H : \; \big|(A\, x, y)\big|^2 \leq (A\, x, x) \cdot (A\, y, y).$$

Beweis.

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : \; (x; y) \longmapsto (A\, x, y) =: [x, y]$$

ist ein Skalarprodukt (bis auf die Bedingung $[x,x]=0 \Rightarrow x=0$).
Die Schwarz'sche Ungleichung bezüglich $[\ ,\ ]$ ergibt Lemma 1. □

Lemma 2 $A \in L(H)$ sei symmetrisch und ≥ 0, $x_n \in H$, $(A\,x_n, x_n) \to 0$. Dann gilt:

$$A\,x_n \to 0$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|A\,x_n\|^2 &= (A\,x_n, A\,x_n) \leq \sqrt{(A\,x_n, x_n)} \cdot \sqrt{(A^2\,x_n, A\,x_n)} \leq \\ &\leq \sqrt{(A\,x_n, x_n)} \cdot \sqrt{\|A\| \cdot \|A\,x_n\|^2} \quad \Longrightarrow \\ \|A\,x_n\| &\leq \sqrt{\|A\|} \cdot \sqrt{(A\,x_n, x_n)} \to 0 \end{aligned}$$

□

Lemma 3 $A, B \in L(H)$ seien symmetrisch und ≥ 0, $AB = BA$. Dann ist

$$AB \geq 0.$$

Beweis. Annahme:

$$\alpha = \inf_{\|x\|=1} (ABx, x) < 0.$$

Es seien $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$ mit $(ABx_n, x_n) \to \alpha$.

(i)

$$\begin{aligned} &AB - \alpha I \geq 0, \text{ symmetrisch, } \big((AB-\alpha I)\,x_n, x_n\big) \to 0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow (\text{Lemma 2}) \Longrightarrow ABx_n - \alpha x_n \to 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\cos\big[\measuredangle\{x_n\,,\, ABx_n\}\big] = \frac{(ABx_n, x_n)}{\|x_n\| \cdot \|ABx_n\|} \to \frac{\alpha}{|\alpha|} = -1 \\ &\Longrightarrow \measuredangle\{x_n\,,\, ABx_n\} \to \pi; \end{aligned}$$

$$\measuredangle\{x_n\,,\,ABx_n\} \le \underbrace{\measuredangle\{x_n\,,\,Bx_n\}}_{\le\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\measuredangle\{Bx_n\,,\,ABx_n\}}_{\le\frac{\pi}{2}} \quad \text{da}$$

$$(Bx_n, x_n) \ge 0,\ (ABx_n, Bx_n) \ge 0$$

$$\Longrightarrow \measuredangle\{x_n, Bx_n\} \to \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow (Bx_n, x_n) = \cos\measuredangle\{x_n, Bx_n\} \cdot \|x_n\| \cdot \|Bx_n\| \to 0$$

$$\Longrightarrow \text{ (Lemma 2) } \Longrightarrow Bx_n \to 0 \Longrightarrow ABx_n \to 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = \lim_{n\to\infty}(ABx_n, x_n) = 0 \Longrightarrow \ \lightning \text{ zur Annahme}$$

□

Lemma 4 $A_1 \le A_2 \le \ldots$ seien symmetrische, vertauschbare Operatoren mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$. Dann gilt: $\exists A \in L(H)$ symmetrisch mit

$$A\,x = \lim_{n\to\infty} A_n\,x,\ \forall x \in H.$$

(Vorsicht: Im Allgemeinen ist nicht $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ in $L(H)$!)

Beweis.

(i) oEdA sei $A_n \le 0$, $\forall n$; ansonsten nehmen wir $A'_n := A_n - \sup\|A_n\| \cdot I$.

(ii)

$$-A_n \ge 0,\ A_n - A_m \ge 0,\ \forall\, m \le n \Longrightarrow \text{ (Lemma 3)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_m^2 \ge A_n A_m \ge A_n^2 \ge 0,\ \forall\, m \le n \Longrightarrow$$

$$\forall x \in H: \lim_{n\to\infty}(A_n^2\,x, x) \text{ existiert und ist gleich}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}(A_n A_m\,x, x) \Longrightarrow$$

$$\big\|(A_n - A_m)\,x\big\|^2 = \big((A_n^2 + A_m^2 - 2A_nA_m)\,x, x\big) \text{ wird beliebig klein für}$$

genügend große $n, m \Longrightarrow A_n x$ ist eine C-Folge $\Longrightarrow$

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x \text{ existiert.}$$

(iii) A ist linear: klar

(iv) A ist symmetrisch: $(A\,x, x) = \lim_{n\to\infty}(A_n\,x, x) = \lim_{n\to\infty}(x, A_n\,x) = (x, A\,x)$. Nach dem Satz von Hellinger-Töplitz (Satz 3.1, Seite 29) ist A stetig, d.h. $A \in L(H)$.

□

Lemma 5 *A sei symmetrisch. Dann* $\exists!\, B \in L(H)$ *mit*

(i) B symmetrisch, $B \geq 0$

(ii) $B^2 = A^2$

(iii) $\forall\, C \in L(H)$ mit $AC = CA:\ CB = BC$

Beweis. oEdA sei $-I \leq A \leq I$. Dann gilt:

$$I - A \geq 0,\ I + A \geq 0 \Longrightarrow \text{ (Lemma 3) } \Longrightarrow I - A^2 \geq 0.$$

Es sei $B_0 := 0,\ B_{n+1} := B_n + \frac{1}{2}(A^2 - B_n^2) \Longrightarrow$

1. $I - B_{n+1} = I - B_n + \frac{1}{2}B_n^2 - \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}(I - B_n)^2 + \frac{1}{2}(I - A^2)$
2. $B_{n+1} - B_n = I - B_n - (I - B_{n+1}) = \frac{1}{2}\big[(I - B_{n-1})^2 - (I - B_n)^2\big]$

Daher folgt aus $A^2 \leq I$ und 1., dass $B_n \leq I$. Aus 2. und $B_1 = A^2/2 \geq B_0$ und $(I - B_{n-1})^2 - (I - B_n)^2 = [2\,I - B_{n-1} - B_n] \cdot [B_n - B_{n-1}]$ folgt induktiv, dass $B_n \leq B_{n+1}$. Nach Lemma 4 gibt es ein B mit

$$\lim_{n\to\infty} B_n\, x = B\, x,\ \forall\, x \in H.$$

B ist symmetrisch und aus $0 \leq B_n$ folgt $0 \leq B$, d.h. (i) ist erfüllt. Da (iii) für B_n gilt, gilt es auch für B.
Ad (ii):

$$\forall\, x \in H:\ \underbrace{B_{n+1}\, x}_{\to B\, x} = \underbrace{B_n\, x}_{\to B\, x} + \frac{1}{2}(A^2 - B_n^2)\, x$$
$$\Longrightarrow \forall\, x \in H:\ A^2 x = \lim_{n\to\infty} B_n^2 x;$$

$$\forall\, x,\, y \in H:\ \underbrace{(B_n^2\, x, y)}_{\to (A^2 x, y)} = (B_n\, x, B_n\, y) \to (B\, x, B\, y) = (B^2\, x, y)$$
$$\Longrightarrow \forall\, x \in H:\ A^2\, x = B^2\, x \Longrightarrow A^2 = B^2.$$

Zur Eindeutigkeit: Wenn auch B' (i), (ii) und (iii) erfüllt, so ist

$$BB' = B'B \Longrightarrow 0 = B^2 - B'^2 = (B + B') \cdot (B - B').$$

Es sei $x \in H,\ y = (B - B')\,x$

$$
\begin{aligned}
&0 \le (B\,y, y) \le \big((B + B')\,y, y\big) = \big((B^2 - B'^2)\,x, y\big) = 0\\
&\Longrightarrow (B\,y, y) = 0 \Longrightarrow \text{ (Lemma 2) } \Longrightarrow B\,y = 0 \Longrightarrow B'\,y = 0\\
&\Longrightarrow (B - B')\,y = 0 \Longrightarrow \|(B - B')\,x\|^2 = \big((B - B')\,y, x\big) = 0\\
&\Longrightarrow B = B'.
\end{aligned}
$$

□

Definition 4.7 Für symmetrisches A sei $|A| := B$ aus dem Lemma 5.

Bemerkung Falls A ein Spektraloperator ist, stimmt dieses $|A|$ mit dem früher definierten überein. (Übung)

Lemma 6 A sei symmetrisch, P :=Projektor auf $N\big(|A| - A\big)$. Dann gilt:

(i) $\forall\, B \in L(H):\ AB = BA \Longrightarrow PB = BP$

(ii) $AP = |A|P \ge 0,\ A(I - P) = |A|(P - I) \le 0$

Beweis.

(i) $L := N\big(|A| - A\big),\ M := L^{\perp}$;

$$
\begin{aligned}
&x \in L \Longleftrightarrow \big(|A| - A\big)\,x = 0 \Longrightarrow \big(|A| - A\big)B\,x = B\big(|A| - A\big)\,x = 0\\
&\Longrightarrow B\,x \in L;\\
&x \in M \Longleftrightarrow \forall\, y \in L : (x, y) = 0 \Longrightarrow \forall\, y \in L : (B\,x, y) = (x, B^*\,y) = 0,
\end{aligned}
$$

da $B^*y \in L$ wegen $AB^* = (BA)^* = (AB)^* = B^*A \Longrightarrow Bx \in M$. Wenn nun $x \in H$, so ist $x = y + z$, $y \in L$, $z \in M$ und

$$
\begin{aligned}
PBx \quad &= \quad PBy + PBz \overset{(Bz \in M)}{=} PBy \overset{(By \in L)}{=} By\\
&\overset{(y \in L)}{=} PBy \overset{(z \in M)}{=} BPy + BPz = BPx.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\forall\, x \in H : Px \in N\big(A - |A|\big) \Longrightarrow \big(A - |A|\big)P = 0 \Longrightarrow AP = |A|P \ge 0
$$

nach Lemma 3.

$$\big(A-|A|\big)\cdot\big(A+|A|\big)=0 \Longrightarrow P\big(A+|A|\big)=A+|A|$$
$$\Longrightarrow A(I-P)=|A|(P-I)\leq 0$$

nach Lemma 3.

□

Beispiel 17 $H=L^2\big((0,1)\big)$, $A:H\longrightarrow H:\ f\longmapsto g(t)\,f(t)$ für ein $g\in L^\infty_{\text{reell}}$, $|A|:H\longrightarrow H:\ f\longmapsto \big|g(t)\big|f(t)$,
$P:H\longrightarrow H:\ f\longmapsto \chi_g\cdot f$, $\chi_g(t):=\begin{cases}1: & g(t)\geq 0\\ 0: & g(t)<0\end{cases}$

Beweis. (Beweis des Spektralsatzes)

1. Die Eindeutigkeit folgt aus Beispiel 16 auf Seite 44.
2. Existenzbeweis. $E_\lambda:=I-P_\lambda$, $P_\lambda:=$ Projektor auf $N\big(|A-\lambda I|-A+\lambda I\big)$. Nach Lemma 6 sind die E_λ mit A und untereinander vertauschbar.

   (a) $\lambda<\mu$.

   $$(A-\lambda I)\,E_\lambda\leq 0,\ (A-\mu I)\,P_\mu\geq 0 \text{ nach Lemma 6 } \Longrightarrow$$
   $$\text{(Lemma 3) } \Longrightarrow\ (A-\lambda I)\,E_\lambda P_\mu\leq 0,\ (A-\mu I)\,E_\lambda P_\mu\geq 0\Longrightarrow$$
   $$\text{(Subtraktion)}\Longrightarrow(\lambda-\mu)\,E_\lambda P_\mu\geq 0.$$

   Wegen $\lambda-\mu<0$ ist aber auch $(\lambda-\mu)\,E_\lambda P_\mu\leq 0\ \Longrightarrow$
   $E_\lambda P_\mu=0\ \Longrightarrow\ E_\lambda(I-E_\mu)=0\ \Longrightarrow\ E_\lambda E_\mu=E_\lambda$.

   (b) Es sei

   $$N>\|A\|\ \Longrightarrow\ -N\cdot I\leq A\leq N\cdot I\ \Longrightarrow\ A+N\cdot I\geq\ 0\Longrightarrow$$
   $$|A+N\cdot I|=A+N\cdot I\ \Longrightarrow\ P_{-N}=I,\ E_{-N}=0$$

   Andererseits ist

   $$A-N\cdot I\leq 0\ \Longrightarrow\ |A-N\cdot I|=N\cdot I-A\ \Longrightarrow\ P_N=$$
   $$\text{Projektor auf } N(A-N\cdot I)=0,\ \text{da } N>\|A\|\ \Longrightarrow\ E_N=I.$$

(c) Wegen (a) und Lemma 4 existieren für $\mu \in \mathbb{R}$ $E_{\mu-0} := \lim\limits_{\lambda \nearrow \mu} E_\lambda$ und $E_{\mu+0} := \lim\limits_{\lambda \searrow \mu} E_\lambda$. Offenbar ist $E_{\mu-0} \le E_\mu \le E_{\mu+0}$, noch zu zeigen ist

$E_\mu \le E_{\mu-0}$, d.h. $E_\mu = E_\mu E_{\mu-0} \iff E_\mu(E_\mu - E_{\mu-0}) = 0 \iff$
$P_\mu(E_\mu - E_{\mu-0}) = E_\mu - E_{\mu-0} \iff$
$\forall x \in H: \ (E_\mu - E_{\mu-0})x \in N\big(|A-\lambda I| - (A-\mu I)\big) \iff$
$\big(|A-\mu E| - (A-\mu E)\big)(E_\mu - E_{\mu-0}) = 0;$
für $\lambda \le \mu$ ist $(A-\mu I)(E_\mu - E_\lambda) = \underbrace{(A-\mu I)E_\mu}_{\le 0}\underbrace{(E_\mu - E_\lambda)}_{\ge 0} \le 0$

nach Lemma 3 und ebenso $(A-\lambda I)(E_\mu - E_\lambda) \ge 0$. Im Limes erhalten wir: $(A-\mu I)(E_\mu - E_{\mu-0}) = 0$
$|A-\mu I|E_\mu = -(A-\mu I)E_\mu$ nach Lemma 6 und $|A-\mu I|E_{\mu-0} = |A-\mu I|E_\mu E_{\mu-0} = -(A-\mu I)E_{\mu-0} \implies |A-\mu I|(E_\mu - E_{\mu-0}) = 0$. Damit ist $E_\mu = E_{\mu-0}$ bewiesen.
Nach a), b), c) ist $\{E_\lambda\}$ eine Spektralschar, $B := \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$.

(d) Für $\lambda \le \mu$ gilt (siehe c)):

$$\lambda(E_\mu - E_\lambda) \le A(E_\mu - E_\lambda) \le \mu(E_\mu - E_\lambda) \implies$$
$$\forall \text{ Zerlegungen } a_j^{(n)} \text{von} [-N, N]:$$
$$\sum a_j(E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) \le A \le \sum a_{j+1}(E_{a_{j+1}} - E_{a_j}) \implies$$
$$B \le A \le B + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum \underbrace{(a_{j+1} - a_j)}_{2N/n}(E_{a_{j+1}} - E_{a_j})}_{2N \cdot I/n} \implies$$
$$A = B = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda.$$

□

Bemerkung

1. Nach Lemma 6 sind die E_λ mit A und mit jedem mit A vertauschbaren B auch vertauschbar.
2. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sind $E_{\lambda-0} = E_\lambda$ und $E_{\lambda+0}$ wohldefiniert.
3. Der Spektralsatz zeigt, dass alle symmetrischen (beschränkten) Operatoren durch Diagonaloperatoren approximierbar sind:

$$A = \lim \sum a_j(E_{a_{j+1}} - E_{a_j})$$

4.1 Übungen

Übungen

1. Beweise en détail die Behauptungen in Beispiel 16 auf Seite 44.

2. Zeige, dass $|A|$ aus Lemma 5 durch $|A| = \int |\lambda| \, \mathrm{d}E_\lambda$ gegeben ist, wenn $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$.

3. Es seien $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda, \; B = \int \lambda \, \mathrm{d}E'_\lambda$ zwei symmetrische Operatoren. Zeige:

$$AB = BA \iff \forall \lambda, \mu : \; E_\lambda E'_\mu = E'_\mu E_\lambda.$$

4. Es sei $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ symmetrisch, $m := \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M := \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Zeige:

   (a) $m = \max\{\lambda : \; E_\lambda = 0\}, M = \inf\{\lambda : \; E_\lambda = I\}$

   (b) für $z \in \mathbb{C} \setminus [m, M]$ ist $A - zI$ invertierbar und $R_z := (A - zI)^{-1} = \int \dfrac{\mathrm{d}E_\lambda}{\lambda - z}$.

5. Ermittle die Spektralscharen der folgenden symmetrischen Operatoren:

   (a) $\lambda \cdot I, \; \lambda \in \mathbb{R}$

   (b) $L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : f(x) \longmapsto f(-x)$

   (c) $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sei eine reellwertige Funktion, $A_h : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : f(x) \longmapsto h(x) \cdot f(x)$

   (d) $L^2(\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^1) : f(x) \longmapsto f(x+1) + f(x-1)$

6. A sei symmetrisch, R_z wie in 4., Γ ein Weg in $\mathbb{C}$ (rektifizierbar natürlich) der $[m, M]$ umrundet (einfach geschlossen), $g(z)$ sei analytisch im Innern von Γ und stetig auf ($\Gamma \cup$ Inneres). Zeige:

   (a) $\mathbb{C} \setminus [m, M] \longrightarrow L(H) : \; z \longmapsto R_z$ ist analytisch (d.h. $\lim\limits_{|\mu| \to 0}$ in $L(H)$ $(R_{z+\mu} - R_z)/\mu$ existiert)

(b)

$$\oint_{\Gamma} g(z)\, R_z \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, g(A)$$

7. Es sei $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ symmetrisch, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Zeige:

   (a) λ_0 ist ein Eigenwert von $A \iff E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0+0}$

   (b) $R(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}) =$ Eigenraum von A zu λ_0

8. Es sei $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ symmetrisch, $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{supp} \mathrm{d}E_\lambda := \overline{\bigcup_{x \in H} \operatorname{supp} \underbrace{\mathrm{d}(E_\lambda x, x) \,/\, \mathrm{d}\lambda}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_\lambda)!}}$$

   Zeige:

   (a) $\operatorname{supp} \mathrm{d}E_\lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \; E_{\lambda+\epsilon} \neq E_{\lambda-\epsilon}\}$

   (b) $A - zI$ ist invertierbar $\iff z \notin \operatorname{supp} \mathrm{d}E_\lambda$.

   Bemerkung: $\operatorname{supp} \mathrm{d}E_\lambda$ heißt *Spektrum von* A.

9. $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ symmetrisch, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sei ein isolierter Eigenwert von A, d.h. $\exists\, \epsilon > 0 : \; E_{\lambda_0-\epsilon} = E_{\lambda_0}$, $E_{\lambda_0+\epsilon} = E_{\lambda_0+0}$. Zeige:

   (a) $A - zI$ ist invertierbar für $0 < |z - \lambda_0| < \epsilon$

   (b) für $0 < \delta < \epsilon$ ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z-\lambda_0|=\delta} R_z \, \mathrm{d}z = E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}$$

   (= Projektor auf den Eigenraum von λ_0).

10. Zeige, dass Volterra'sche Integraloperatoren ($\not\equiv 0$) nicht symmetrisch sind

    (a) direkt,

    (b) durch Verwendung von Übung 8.

11. A symmetrisch, $U := \{z \in \mathbb{C} : \ R_z \text{ existiert}\}$ ($\subset \mathbb{C}$ offen nach 8.).
Zeige:

$$\forall z_1,\ z_2 \in U : \ R_{z_1} - R_{z_2} = (z_2 - z_1) R_{z_1} R_{z_2} \quad (\textit{1. Resolventenformel})$$

12. $A = \int \lambda \ \mathrm{d}E_\lambda$ symmetrisch, $a < b$. Zeige:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b (R_{\lambda + \mathrm{i}\epsilon} - R_{\lambda - \mathrm{i}\epsilon}) \ \mathrm{d}\lambda = \pi \mathrm{i} \, [E_{b+0} + E_b - E_{a+0} - E_a].$$

(Stonesche Formel)
Der $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0}$ bezieht sich dabei auf die starke Topologie von $L(H)$
(d.h. $A_n \to A \iff \forall x \in H : \ A_n x \to A x$).

Kapitel 5

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Definition 5.1 Die Menge $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ von Projektoren in H heißt *Spektralschar*, wenn

(i) $E_\lambda \leq E_\mu$ für $\lambda \leq \mu$

(ii) $\forall x \in H : \lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = 0,\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda x = x$

(iii) (linksseit. Stetigkeit): $E_{\lambda-0} = E_\lambda$, d.h. $\forall x \in H : \lim\limits_{\mu\nearrow\lambda} E_\mu x = E_\lambda x$.

Bemerkung

1. $E_{\lambda-0}$ ist nach Kapitel 4, Lemma 4, definiert.
2. Die Bedingung (ii) aus Kapitel 4, Definition 4.4, wurde offenbar abgeschwächt.
3. Die Funktionen $(E_\lambda x, y)$ sind wieder lokal von beschränkter Variation, d.h. $\mathrm{d}(E_\lambda x, y) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(E_\lambda x, y)$ sind Borel-Maße auf $\mathbb{R}^1_\lambda$.
4. Es sei $N > 0$. $H_N := R(E_N - E_{-N})$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H. Auf H_N ist $\left\{E_\lambda|_{H_N} : -N \leq \lambda \leq N\right\}$ eine beschränkte Spektralschar, denn $x \in H_N \Longrightarrow E_N x = x,\ E_{-N}x = 0$.

Definition 5.2 Es sei $\{E_\lambda\}$ eine Spektralschar, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^1_\lambda),\ N > 0$.

1. $\widetilde{A}_{f,N} := \int_{-N}^{N} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \in L(H_N)$,
   $A_{f,N} := \widetilde{A}_{f,N} \circ (E_N - E_{-N}) \in L(H)$.
2. $D(A_f) := \{x \in H : \sup_N \|A_{f,N}x\| < \infty\}$,
   $A_f : D(A_f) \longrightarrow H : x \longmapsto \lim_{N\to\infty} A_{f,N}x$.

Bemerkung Sei $y := (E_N - E_{-N})x$; wegen

$$\|A_{f,N}x\|^2 = (\widetilde{A}_{f,N}y, \widetilde{A}_{f,N}y) = (\widetilde{A}^*_{f,N}\widetilde{A}_{f,N}y, y)$$
$$= \int_{-N}^{N} |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}(E_\lambda y, y) = \int_{-N}^{N} |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}(E_\lambda x, x)$$

ist $\|A_{f,N}x\|$ monoton wachsend und $\sup_N \|A_{f,N}x\| = \lim_{N\to\infty} \|A_{f,N}x\|$ für $x \in H$.

Satz 5.1 *(über Spektralscharen)*

1. $D(A_f)$ ist ein dichter Untervektorraum von H.
2. A_f ist wohldefiniert, linear und abgeschlossen.
3. $A_f^* = A_{\overline{f}}$
4. Wenn f beschränkt ist, ist $A_f \in L(H)$.

Beweis.

1. $\|A_{f,N}(x+y)\| \le \|A_{f,N}x\| + \|A_{f,N}y\| \Longrightarrow D(A_f)$ ist ein Untervektorraum von H.
   Für $x \in H_M$ und $N \ge M$ ist

$$A_{f,N}x = \int_{-N}^{N} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j^{(n)})(E_{a_{j+1}^{(n)}} - E_{a_j^{(n)}})x$$
$$= \int_{-M}^{M} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x = A_{f,M}x \Longrightarrow \bigcup_{M>0} H_M \subset D(A_f);$$

Nach Definition 5.1, (ii) ist $\bigcup\limits_{M>0} H_M \subset H$ dicht, denn
$\forall x \in H : x = \lim\limits_{M\to\infty}(E_M - E_{-M})x.$

2. Es sei $0 < M \leq N$. Nach (1) ist $A_{f,N} \circ (E_M - E_{-M}) = A_{f,M} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\forall x \in H :&(A_{f,N}x, A_{f,M}x) = (A_{f,N}x, (E_M - E_{-M})A_{f,M}x)\\ &= (A_{f,N} \circ (E_M - E_{-M})x, A_{f,M}x) = \left\|A_{f,M}x\right\|^2 \Longrightarrow\\ \forall x \in H :&\left\|(A_{f,N} - A_{f,M})x\right\|^2 = \left\|A_{f,N}x\right\|^2 + \left\|A_{f,M}x\right\|^2 -\\ &- 2\mathrm{Re}\,(A_{f,N}x, A_{f,M}x) = \left\|A_{f,N}x\right\|^2 - \left\|A_{f,M}x\right\|^2,\end{aligned}$$

d.h. $A_{f,N}x$ ist für $x \in D(A_f)$ eine C-Folge (vgl. die Bemerkung oben), A_f ist wohldefiniert.
Die Linearität ist klar.
A_f ist abgeschlossen, da nach (3) $A_f = A^*_{\overline{f}}$.

3. (a) Es seien $x_1, x_2 \in D(A_f) = D(A_{\overline{f}}),\ N > 0,\ y_i := (E_N - E_{-N})x_i \in H_N$; in H_N ist $\widetilde{A}^*_{f,N} = \widetilde{A}_{\overline{f},N} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}(A_{f,N}x_1, x_2) &= (\widetilde{A}_{f,N}y_1, x_2) = (\widetilde{A}_{f,N}y_1, y_2) = (y_1, \widetilde{A}_{\overline{f},N}y_2)\\ &= (y_1, A_{\overline{f},N}x_2) = (x_1, A_{\overline{f},N}x_2)\\ \Longrightarrow (A_f x_1, x_2) &= (x_1, A_{\overline{f}}x_2).\end{aligned}$$

Somit ist $A^*_f \supset A_{\overline{f}}$.

(b) Es sei $y \in D(A^*_f),\ z := (E_N - E_{-N})y \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\forall x \in H_N : (x, A^*_f y) &= (A_f x, y) = \big((E_N - E_{-N})A_{f,N}x, y\big)\\ &= (A_f x, z) = (x, A_{\overline{f}}z) \quad \text{(nach (a))}.\end{aligned}$$

Speziell für $x := A_{\overline{f},N}y = A_{\overline{f}}z \in H_N$:

$$\begin{aligned}&(x, A^*_f y) = \left\|x\right\|^2 \Longrightarrow \left\|x\right\| \cdot \left\|A^*_f y\right\| \geq \left\|x\right\|^2\\ &\Longrightarrow \quad \left\|A_{\overline{f},N}y\right\| = \left\|x\right\| \leq \left\|A^*_f y\right\| \Longrightarrow \sup_N \left\|A_{\overline{f},N}y\right\| < \infty\\ &\Longrightarrow \quad y \in D(A_{\overline{f}}).\end{aligned}$$

Somit ist $D(A_{\overline{f}}) \supset D(A^*_f)$, d.h. nach (a) $A_{\overline{f}} = A^*_f$.

4. Übung.

□

Beispiel 18 (Ortsoperator) $H = L^2(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \dots n,$

$$\chi_\lambda(x) := \begin{cases} 1: & x_j < \lambda \\ 0: & x_j \geq \lambda, \end{cases}$$

$E_\lambda : H \longrightarrow H : g \longmapsto \chi_\lambda \cdot g$ ist eine Spektralschar,
$H_N = \{g \in H : g(x) = 0 \text{ für } |x_j| > N\}$,
$A_{f,N} : H \longrightarrow H : g \longmapsto f(x_j) \cdot (\chi_N - \chi_{-N}) \cdot g(x)$ (nach Beispiel 15, Seite 43).
Es sei speziell $f = \lambda \Longrightarrow D(A_f) = \left\{g : \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{|x_j|\leq N} x_j^2 \big|g(x)\big|^2 \mathrm{d}x < \infty\right\} = D(\widehat{x}_j) \Longrightarrow A_f = A_\lambda = \widehat{x}_j.$

Theorem 5.2 H Hilbertraum, $A \in \mathrm{Lsa}(H)$. Dann existiert genau eine Spektralschar E_λ, sodass $A = \int \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda$.

Beweisidee. Mittels $B := (A + \mathrm{i}I)^{-1} \circ (A - \mathrm{i}I)^{-1} \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ (vgl. Seite 33) führt man den Satz auf den Spektralsatz in Kapitel 4 zurück. □

Definition 5.3

1. $\{E_\lambda\}$ sei eine Spektralschar. $A = \int \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda$ heißt *Spektraloperator* zu $\{E_\lambda\}$.
2. $A = \int \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda,\ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^1). \quad f(A) := \int f(\lambda) \,\mathrm{d}E_\lambda.$

Beispiel 19 $A = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^1) = H.$
Dann gilt für $t \in \mathbb{R}:\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} : H \longrightarrow H : f(x) \longmapsto f(x + t)$

Beweis. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{(1)} & \xrightarrow{A} & L^2 \\ \mathcal{F}\big\downarrow\wr & & \mathcal{F}\big\downarrow\wr \\ L^2_1 & \xrightarrow{\widehat{x}} & L^2 \end{array}$$

ist kommutativ. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\widehat{x}} \in L(H)$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\widehat{x}} f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f \Longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} \in L(H)$ und

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}} & H \\ \mathcal{F}\Big\downarrow\wr & & \mathcal{F}\Big\downarrow\wr \\ H & \xrightarrow{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\widehat{x}}} & H \end{array}$$

ist kommutativ, d.h. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} f = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\widehat{f}\,) = f(t+x)$. □

Definition 5.4 $A \in \mathrm{La}(H)$.

1. $\varrho(A) := \{z \in \mathbb{C} : A - zI : D(A) \longrightarrow H$ ist bijektiv und $(A - zI)^{-1} : H \longrightarrow D(A) \subset H$ ist beschränkt$\}$ heißt *Resolventenmenge*.
2. $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ heißt *Spektrum* von A.
3. $z \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A $:\Longleftrightarrow \exists 0 \neq x \in D(A)$ mit $Ax = z \cdot x$;
   $\sigma_{\mathrm{p}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : z$ Eigenwert von $A\}$ heißt *Punktspektrum* von A.

Bemerkung

1. Aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen ist $\varrho(A) = \{z \in \mathbb{C} : A - zI : D(A) \to H$ bijektiv$\}$.
2. Man könnte auch $A \in \mathrm{Lu}(H)$ in der Definition zulassen, jedoch wäre dann für $A \notin$ La immer $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Beispiel 20

1. $A =$Volterra'scher Integraloperator $\Longrightarrow \sigma(A) = \{0\}$.
   $\sigma(A) \subset \{0\}$ folgt aus Satz 2.3, Seite 20.
   $0 \in \sigma(A)$: Annahme: $\exists B \in L(H)$ mit $AB = I$
   $\Longrightarrow \forall f \in H : f(x) = \int_a^x K(x,y) B f(y)\,\mathrm{d}y$
   $\Longrightarrow \forall f \in H : f$ ist stetig $\Longrightarrow \lightning$.
2. (vgl Übung 7, Seite 35) $H = L^2\big((0,1)\big)$, $A_1 : \mathcal{H}^{(1)}\big((0,1)\big) \longrightarrow H$:
   $f \longmapsto \mathrm{i}f'$, $\sigma(A_1) = \sigma_{\mathrm{p}}(A_1) = \mathbb{C}$, da $A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} = \lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$.

Jedoch für $A_2 := A_1|_{\{f\in\mathcal{H}^{(1)}((0,1)):f(0)=0\}}$ ist $\sigma(A_2) = \emptyset$, da für $\lambda \in \mathbb{C}$ $B_\lambda : H \longrightarrow D(A_2) : g \longmapsto -\mathrm{i}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)} g(s)\,\mathrm{d}s$ erfüllt:

$$\begin{aligned} B_\lambda(A_2 - \lambda I)f &= \int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)}[f'(s) - \mathrm{i}\lambda f(s)]\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)} f(s)\Big|_0^x \\ &= f(x) \qquad \text{und} \\ (A_2 - \lambda I)B_\lambda g &= \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)\left[-\mathrm{i}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s)} g(s)\,\mathrm{d}s\right] = g(x). \end{aligned}$$

Offenbar hängt das Spektrum stark vom Definitionsgebiet des Operators ab!

Satz 5.3 *(über das Spektrum von selbstadjungierten Operatoren)*

Es sei $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $\{E_\lambda\}$ die Spektralschar zu A.

1. (Weyl'sches Kriterium)
   $\sigma(A) = \big\{z \in \mathbb{R} : \exists x_n \in D(A) \text{ mit } \big\|x_n\big\| = 1 \text{ und } (A - zI)x_n \to 0\big\}$
2. $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : E_{z+\epsilon} \neq E_{z-\epsilon}\}$
3. $\sigma_\mathrm{p}(A) = \{z \in \mathbb{R} : E_{z+0} \neq E_z\}$ und für $z \in \sigma_\mathrm{p}$ ist $R(E_{z+0} - E_z)$ der Eigenraum zum Eigenwert z.
4. Insbesondere: $\emptyset \neq \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen.

Beweis.

(a) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ folgt aus Lemma 3 auf Seite 32.

(b) (vgl. Kapitel 4, Übung 8, Seite 52) Es sei $z \in \mathbb{R}$ und $E_{z+\epsilon} = E_{z-\epsilon}$ für ein $\epsilon > 0 \Longrightarrow \mathrm{d}\,E_\lambda = 0$ für $|\lambda - z| < \epsilon \Longrightarrow B := \int \frac{1}{\lambda - z}\,\mathrm{d}E_\lambda$ ist wohldefiniert.
(Genauer: $B = \int \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z}\,\mathrm{d}E_\lambda$ mit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^1_\lambda)$, $\varphi = 0$ für $|\lambda - z| < \frac{\epsilon}{2}$, $\varphi = 1$ für $|\lambda - z| \geq \epsilon$)

Da $\dfrac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z}$ beschränkt ist, ist $B \in L(H)$; $A_z := A - zI$. Auf H_N gilt $A_z|_{H_N} \circ B|_{H_N} = B|_{H_N} \circ A_z|_{H_N} = E_{H_N}$ nach Kapitel 4

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \forall x \in D(A),\ \forall y \in H : \\
&\quad (A_z x, By) = \lim_{N\to\infty} \big(A_z(E_N - E_{-N})x,\ B(E_N - E_{-N})y\big) \\
&\quad = \lim_{N\to\infty} \big((E_N - E_{-N})x, y\big) = (x, y) \\
&\Longrightarrow By \in D(A_z^*) = D(A) \text{ und } A_z By = A_z^* By = y.
\end{aligned}$$

Ebenso zeigt man $B \circ A_z = I|_{D(A)}$, d.h. $z \in \varrho(A)$.
Somit gilt: $\sigma(A) \subset M_1 := \{z \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : E_{z+\epsilon} \neq E_{z-\epsilon}\}$.

(c) Es sei $z \in M_1,\ x_n \in R(E_{z+\frac{1}{n}} - E_{z-\frac{1}{n}}),\ \big\|x_n\big\| = 1$

$$\Longrightarrow \big\|(A - zI)x_n\big\|^2 = \int_{z-\frac{1}{n}}^{z+\frac{1}{n}} |\lambda - z|^2 \,\mathrm{d}(E_\lambda x_n, x_n) \leq \frac{2}{n^2} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit gilt:

$$M_1 \subset M_2 := \big\{z \in \mathbb{R} : \exists x_n \in D(A) \text{ mit } \big\|x_n\big\| = 1 \text{ und } (A - zI)x_n \to 0\big\}.$$

(d) Es sei $z \in M_2$. Annahme: $(A - zI)^{-1} =: B \in L(H) \Longrightarrow$
$x_n = B(A - zI)x_n \to 0 \Longrightarrow \lightning$ zu $\big\|x_n\big\| = 1$.
Somit ist $M_2 \subset \sigma(A)$. Damit sind (1) und (2) gezeigt. (4) folgt aus (2).

(e) Der Beweis von (3) verläuft analog zu Kapitel 4, Übung 7, Seite 52.

□

Definition 5.5 $A = \displaystyle\int \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda \in \mathrm{Lsa}(H)$.

1. $\sigma_\mathrm{d} = \sigma_{\text{diskret}}(A) := \{z \in \sigma(A) : \exists \epsilon > 0 : \dim\big(R(E_{z+\epsilon} - E_{z-\epsilon})\big) < \infty\}$ heißt *diskretes Spektrum* von A.

2. $\sigma_\mathrm{e} := \sigma \setminus \sigma_\mathrm{d}$ heißt *essentielles Spektrum* von A.

3. A ist ein *Operator mit reinem Punktspektrum* $:\Longleftrightarrow \sigma_\mathrm{e} = \emptyset$.

Bemerkung Offenbar ist $z \in \sigma_\mathrm{d} \Longleftrightarrow$

(i) $E_z \neq E_{z+0}$

(ii) $\dim(R(E_{z+0} - E_z)) < \infty$

(iii) $\exists \epsilon > 0 : E_{z-\epsilon} = E_z,\ E_{z+\epsilon} = E_{z+0}$ (vgl. auch Kapitel 4, Übung 9, Seite 52). Insbesondere ist $\sigma_{\mathrm{d}} \subset \sigma_{\mathrm{p}}$.

Beispiel 21 $H = L^2(\mathbb{R}^n),\ A : \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H : f \longmapsto -\Delta f$.
Dann gilt: $A \in \mathrm{Lsa},\ \sigma(A) = \sigma_{\mathrm{e}}(A) = [0, \infty),\ \sigma_{\mathrm{d}} = \sigma_{\mathrm{p}} = \emptyset$.

Beweis.

1. $A \in \mathrm{Ls}$: $f, g \in \mathcal{H}^{(2)},\ g_n \in \mathcal{D}, g_n \to g$ in $\mathcal{H}^{(2)} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}(Af, g) = -(\Delta f, g) &= -\lim_{n\to\infty}(\Delta f, g_n) = -\lim_{n\to\infty} < \overline{g_n}, \Delta f > \\ &= -\lim_{n\to\infty} < \Delta\overline{g_n}, f >= -\lim_{n\to\infty}(f, \Delta g_n) = (f, Ag).\end{aligned}$$

2. $A \in \mathrm{Lsa}$: Nach Seite 26 ist $A - \lambda I : \mathcal{H}^{(2)} \to H$ bijektiv $\Longleftrightarrow \lambda \notin [0, \infty)$. Nach dem Satz 3.4, Seite 33, (1)(b) ist $A \in \mathrm{Lsa}$. Außerdem ist $\sigma(A) = [0, \infty)$ (vgl. Bem. 1., Seite 58).

3. Da $A - \lambda I$ immer injektiv ist, ist $\emptyset = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \sigma_{\mathrm{d}}(A)$.

□

Beispiel 22 Der Hamiltonoperator des freien Teilchens im $\mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta$ (siehe unten). Für $f \in H = L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} f$ den Zustand des Teilchens zur Zeit t an, wenn es für $t = 0$ im Zustand f ist (vgl Axiom 4, Seite iii).
Dann gilt für $t > 0$:

$$B := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} : H \longrightarrow H :$$

$$f \longmapsto \lim_{N\to\infty}(\text{ in } H)\left(\frac{m}{2t\hbar\pi}\right)^{n/2} \cdot \int\limits_{|y|\leq N} f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m(x-y)^2/(2t\hbar) - n\pi/4\right)}\,\mathrm{d}y$$

(B muss beschränkt sein, da $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda/\hbar}$ beschränkt ist!)

Beweis.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{(2)} & \xrightarrow{\mathrm{i}t\hbar\Delta/(2m)} & H \\ \mathcal{F}\downarrow\wr & & \mathcal{F}\downarrow\wr \\ L^2_2 & \xrightarrow{-\mathrm{i}t\hbar|x|^2/(2m)} & H \end{array}$$

kommutiert $\Longrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hbar\Delta/(2m)}} & H \\ \mathcal{F}\downarrow & & \mathcal{F}\downarrow \\ H & \xrightarrow{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}} & H \end{array}$$

kommutiert $\Longrightarrow$

$$\mathrm{e}^{it\hbar\Delta/(2m)} f = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\widehat{f}(x)\right) \underset{\otimes}{=} \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\right) * f;$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\right) = \left(\frac{m}{2t\hbar\pi}\right)^{n/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(mx^2/(2t\hbar)-n\pi/4\right)}.$$

Bei der Gleichung $\otimes$ habe ich allerdings ein bisschen gemogelt, schließlich ist die Formel $\mathcal{F}(S * T) = \widehat{S} \cdot \widehat{T}$ nicht für beliebige $S, T \in \mathcal{S}'$ sinnvoll! Eine exakte Begründung wäre:

$$\chi_N(x) := \begin{cases} 1: & |x| \le N \\ 0: & \text{sonst,} \end{cases}$$

$f \cdot \chi_N \to f$ in $H \Longrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\widehat{f\chi_N} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\widehat{f}$ in H

$\Longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hbar\Delta/(2m)} f = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\widehat{f}) = \lim\limits_{N\to\infty}(\text{ in } H)\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\widehat{f\chi_N}) =$

$= \lim\limits_{N\to\infty}(\text{ in } H)\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}) * f\chi_N,$ da $f\chi_N \in \mathcal{E}'$.

□

Bemerkung $\mathcal{F}_x^{-1}\big(Y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar r^2/(2m)}\big)$ ist eine Fundamentallösung des Schrödingeroperators $\partial_t + \mathrm{i}\mathcal{H}/\hbar = \partial_t - \mathrm{i}\hbar\Delta/2m$ des freien Teilchens (übrigens die einzige in $\mathcal{S}'$ mit Träger in $\{t \ge 0\}$) und B gibt gerade die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems (mit Anfangswerten in L^2).

Beispiel 23 $-\infty < a < b < \infty,\ H = L^2\big((a,b)\big)$. Dann gilt:

1. $\mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big) \hookrightarrow \mathcal{C}^1\big([a,b]\big)$ ist wohldefiniert und stetig, $\mathcal{C}^\infty\big([a,b]\big) \subset \mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big)$ ist dicht.

2. $A : \{f \in \mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big) : f(a) = f(b) = 0\} \longrightarrow H : f \longmapsto -f''$ ist selbstadjungiert.
3. A besitzt reines Punktspektrum, $\sigma_{\mathrm{d}} = \left\{ \dfrac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2} : n = 1, 2, \ldots \right\}$.
4. Der Eigenraum zu $\dfrac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}$ ist $\mathbb{C} \cdot \sin\left(\dfrac{x-a}{b-a}\, n\pi \right)$.

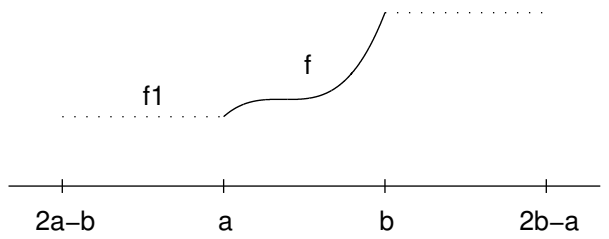
Beweis.

1. (vgl. 2.4.1, Übung 4 auf Seite 26)

$$f \in \mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big) \Longrightarrow f' \in H \subset L^1\big((a,b)\big) \Longrightarrow$$
$$g(x) := \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{C}\big([a,b]\big) \text{ und } g' = f' \Longrightarrow$$
$$f = g + c \in \mathcal{C}\big([a,b]\big).$$

Nach dem Graphensatz ist $\mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big) \hookrightarrow \mathcal{C}\big([a,b]\big)$ auch stetig.
Für $f \in \mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big)$ sei

$$f_1(x) := \begin{cases} f(b): & b < x < 2b - a \\ f(x): & a < x < b \\ f(a): & 2a - b < x < a \end{cases}$$



$\Longrightarrow f_1 \in \mathcal{H}^{(1)}\big((2a-b, 2b-a)\big)$; $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\varphi = 1$ auf $[a-\epsilon, b+\epsilon]$, $\varphi = 0$ auf $(-\infty, a-2\epsilon], [b+2\epsilon, \infty)$, $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2} \Longrightarrow \varphi f_1 \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$. Da $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}^{(1)}$ dicht ist, folgt nun $\mathcal{C}^\infty\big([a,b]\big) \subset \mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big)$ dicht.
Ebenso folgt, dass $\mathcal{C}^\infty\big([a,b]\big) \subset \mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big)$ dicht ist.

2. A ist symmetrisch:

$$f,g \in D(A) \cap \mathcal{C}^\infty\big([a,b]\big) \Longrightarrow (Af,g) = -\int_a^b f''\overline{g}\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{(-f'\overline{g} + f\overline{g'})\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b f\overline{g''}\,\mathrm{d}x = (f,Ag).$$

Die Behauptung folgt aus der Dichtheit von $\mathcal{C}^\infty\big([a,b]\big)$ in $\mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big)$.
A ist selbstadjungiert:
Ich zeige $R(A-\lambda I) = H$ für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

$$\text{Sei } g \in H,\ \widetilde{g}(x) := \begin{cases} g(x): & a<x<b \\ 0: & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \widetilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^1) \Longrightarrow \exists \widetilde{f} \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^1)$ mit $-\widetilde{f}'' - \lambda\widetilde{f} = \widetilde{g}$ (vgl. Bsp. 21), $h := \widetilde{f}|_{[a,b]} \in \mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big)$; es sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\mu^2 = \lambda \Longrightarrow \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu x} \in \mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big)$ und $-(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu x})'' - \lambda\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu x} = 0$ in (a,b); $f := h - \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} - \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu x}$ derart, dass $f(a) = f(b) = 0$. Das geht immer, denn

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\mu} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\mu} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\mu} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\mu} \end{pmatrix} = 2\mathrm{i}\sin(a-b)\mu \neq 0,\ \text{da } \mu \notin \mathbb{R}.$$

Dann ist $f \in D(A)$ und $(A-\lambda I)f = g$.

3. u. 4. (a) Es sei $f_n := \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cdot \sin\left(\frac{x-a}{b-a}\,n\pi\right),\ n = 1,2,\ldots.$

Offenbar ist $f_n \in D(A)$ und $Af_n = \lambda_n f_n,\ \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}\,.$

(b) Die f_n bilden eine ON-Basis in H:
$(f_n, f_m) = \delta_{n,m}$: nachrechnen
$\{f_n\}$ vollständig: Sei $f \in H$,

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x): & a<x<b \\ -f(x-b): & b<x<2b-a \end{cases}$$

Die Fourierreihe von $\widetilde{f}$ am Intervall $[a, 2b-a]$ ist

$$\widetilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{x-a}{b-a}\cdot n\pi\right),\ c_n, d_n \in \mathbb{C};$$

$\widetilde{f}$ ungerade bzgl. $b \Longrightarrow d_n = 0 \Longrightarrow f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ in $L^2\big((a,b)\big)$. (Diese Reihe heißt Fouriersinusreihe von f).

(c) Ich zeige nun: $\sigma(A) \subset \{\lambda_n : n = 1, 2, \ldots\}$.
Es sei $g \in H,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_n : n = 1, 2, \ldots\},\ c_n := \dfrac{(g, f_n)}{\lambda_n - \lambda}$,
$h := \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in H$.
In $\mathcal{D}'\big((a,b)\big)$ gilt: $-h'' = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n'' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n f_n$.
Wegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n \lambda_n|^2 \leq \text{const} \cdot \sum \big|(g, f_n)\big|^2 = \text{const} \cdot \big\|g\big\|^2$ ist $\sum c_n \lambda_n f_n \in L^2\big((a,b)\big)$, d.h. $h \in \mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big)$ und $-h'' - \lambda h = g$. Wie oben sei $\mu^2 = \lambda,\ \mu \in \mathbb{C} \Longrightarrow \sin(a-b)\mu \neq 0 \Longrightarrow$ wir können wieder $f \in D(A)$ mit $(A - \lambda I)f = g$ finden. Somit ist $R(A - \lambda I) = H \Longrightarrow N(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow A - \lambda I : D(A) \to H$ bijektiv $\Longrightarrow \lambda \notin \sigma(A)$.

(d) Aus (a), (c) folgt offenbar $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \{\lambda_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Der Beweis in (c) zeigt auch, dass $R(A - \lambda_n I) \supset \{f \in H : (f, f_n) = 0\} = (\mathbb{C} \cdot f_n)^{\perp}$. Daher ist $N(A - \lambda_n I) \subset (\mathbb{C} f_n)^{\perp\perp} = \mathbb{C} \cdot f_n \Longrightarrow$ Behauptung 4.

□

Bemerkung Nach dem Satz über das Spektrum (Satz 5.3, Seite 59) ist die Spektralschar von A : $E_\lambda f = \sum\limits_{\lambda_n < \lambda} (f, f_n) \cdot f_n$.

Insbesondere: $D(A) = \{f \in H : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \big|(f, f_n)\big|^2 < \infty\}$ und $Af = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (f, f_n) \cdot \lambda_n f_n$ für $f \in D(A)$.

5.1 Übungen

1. Es sei $A \in$ Lsa. Zeige:
   (a) $A \in L(H) \Longleftrightarrow \sigma(A)$ beschränkt
   (b) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ beschränkt $\Longrightarrow f(A) \in L(H)$
2. $A \in$ Lsa habe reines Punktspektrum, $\dim H = \infty$. Zeige:

(a) $A \notin L(H)$

(b) A hat abzählbar viele Eigenwerte. Sie seien (unter Berücksichtigung der Vielfachheit) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$, x_i seien zugehörige orthonormierte Eigenvektoren. Dann gilt:

(c) $\lim\limits_{j\to\infty} |\lambda_j| = \infty$

(d) $\{x_j\}$ ist eine ONB

(e) $D(A) = \{x \in H : \sum \lambda_j^2 \big|(x, x_j)\big|^2 < \infty\}$

(f) $Ax = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, x_j) \cdot x_j$ für $x \in D(A)$.

3. (vgl. Bsp. 23, Seite 62) Es sei $A \in \mathrm{Lsa}$, $\{f_n\}$ eine ONB von Eigenvektoren von A, $Af_n = \lambda_n f_n$, $|\lambda_n| \to \infty$. Zeige: A hat reines Punktspektrum.

4. $A \in \mathrm{Ls}(H)$. Zeige:

   (a) A ist wesentlich selbstadjungiert $\iff N(A^* - \mathrm{i}I) = N(A^* + \mathrm{i}I) = 0$

   (b) A besitzt eine ONB von Eigenvektoren $\implies A$ wesentlich selbstadjungiert

5. Es sei $a < b$, $H = L^2\big((a,b)\big)$,
   $B : \{f \in \mathcal{H}^{(2)}\big((a,b)\big) : f'(a) = f'(b) = 0\} \longrightarrow H : f \longmapsto -f''$.
   Zeige:

   (a) B ist selbstadjungiert

   (b) B besitzt reines Punktspektrum, $\sigma_{\mathrm{d}} = \left\{ \dfrac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2} : n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$

   (c) Der Eigenraum zu $\dfrac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}$ ist $\mathbb{C} \cdot \cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\, n\pi \right)$.

6. (vgl. Übung 7, Seite 35 und Bsp. 22, Seite 61)
   $A : \mathcal{D}\big((0,1)\big) \longrightarrow L^2 : f \longmapsto \mathrm{i}f'$

   (a) Berechne das Spektrum von $\overline{A}$.

   (b) A_α, $|\alpha| = 1$, sei eine der selbstadjungierten Erweiterungen von $\overline{A}$. Zeige, dass A_α reines Punktspektrum hat und berechne es.

   (c) Was ist $A_\alpha^2 = \lambda^2(A_\alpha)$?

7. Es sei $a < b$, $A : \mathcal{D}\big((a,b)\big) \longrightarrow H = L^2\big((a,b)\big) : f \longmapsto -f''$. Bestimme alle symmetrischen Erweiterungen von $\overline{A}$. Welche davon sind selbstadjungiert?

8. Es sei $A \in \mathrm{Lsa},\ t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$ unitär ist, d.h. $B \in L(H)$ und $B \circ B^* = B^* \circ B = I$.

9. Es sei A wie in Bsp. 23, Seite 62. Wie sieht das Spektrum von $f(A)$ aus für

   (a) $f = \mathrm{e}^{\lambda}$

   (b) $f = \sin(c\lambda),\ c \in \mathbb{R}$?

10. A sei wie in Bsp. 21, Seite 61. Berechne $\sqrt{A}$.

11. $A \in \mathrm{Lsa}$ sei ein Operator mit reinem Punktspektrum, f_n eine ONB aus Eigenvektoren, $Af_n = \lambda_n f_n,\ |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \to \infty$. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

   (a) $\inf\Big\{ \big\|Af\big\|^2 / \big\|f\big\|^2 : 0 \neq f \in D(A) \text{ und } (f, f_1) = \ldots = (f, f_{n-1}) = 0 \Big\} = \lambda_n^2$

   (b) Das inf ist ein min und wird angenommen für alle Eigenvektoren zum Eigenwert λ_n, die senkrecht zu $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ sind.

12. (Wirtingersche Ungleichung) Es sei $a < b$.

   (a) Berechne $\min\Big\{ \int\limits_a^b \big|f'(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \Big/ \int\limits_a^b \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x : 0 \neq f \in \mathcal{H}^{(1)}\big((a,b)\big),$
   $\int\limits_a^b f \,\mathrm{d}x = 0,\ f(a) = f(b) \Big\}$.

   (b) Für welche f wird das Minimum angenommen?

Kapitel 6

Das freie Teilchen in der nichtrelativistischen QM

D.J. Blochinzew *Grundlagen der Quantenmechanik*

L.D. Landau, E.M. Lifschitz *Quantentheorie*

M. Wagner *Elemente der Theoretischen Physik* I

In der klassischen Mechanik arbeitet man unter folgender

Hypothese 1

Ort und Geschwindigkeit eines Massenpunktes können gleichzeitig beliebig genau gemessen bzw. vorgegeben werden. Untersucht wird dann die Trajektorie $x(t)$ des Massenpunkts. Eine Möglichkeit der Bestimmung von x *und* $\dot{x}$ wäre die ständige, genaue Messung von $x(t)$ und Differentiation:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}\big(x(t+\tau) - x(t)\big).$$

Bei mikroskopischen Objekten (z.B. Elektron) ist jedoch eine Messung ohne Beeinflussung des Messobjektes nicht möglich. D.h. $x(t+\tau)$ hängt auch von der Messung von $x(t)$ ab und je genauer diese ist, umso mehr – der obige Limes wird sinnlos. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

1. Die Trajektorie $x(t)$ ist eine "existente" aber leider nicht feststellbare Größe.
2. Der Begriff der Trajektorie ist der physikalischen Wirklichkeit nicht adäquat.

Im Sinne von E. Mach ("Was nicht gemessen werden kann, darf in eine physikalische Theorie nicht eingehen.") halten wir uns an 2. und machen die neue Hypothese

Hypothese 2

1. Der Zustand eines Teilchens zu einem festen Zeitpunkt wird durch jeweils eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für Ort bzw. Impuls beschrieben (d.h. Borelmaße $\mu_{\text{Ort}} \geq 0, \mu_{\text{Imp}} \geq 0$ mit $\int \mathrm{d}\mu_{\text{Ort}} = \int \mathrm{d}\mu_{\text{Imp}} = 1$).
   Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Gebiet U aufhält, ist also $\int\limits_U \mathrm{d}\mu_{\text{Ort}}$ und analog für den Impuls.

2. Wenn die beiden Daten $\mu_{\text{Ort}}(t), \mu_{\text{Imp}}(t)$ für $t = t_0$ gegeben sind, so sind sie dadurch für $t > t_0$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung

1. Offenbar ist nicht jede beliebige Vorgabe von $\mu_{\text{Ort}}, \mu_{\text{Imp}}$ physikalisch sinnvoll, sonst könnten wir beide als Punktmaße nehmen und kämen auf die klassische Mechanik zurück.

2. Die Idee, dass wir genau Ort und Geschwindigkeit (nicht aber Beschleunigung, etc.) vorgeben, stammt von Newton.

3. Die Maße μ_{Ort} und μ_{Imp} können experimentell gemessen werden, indem man eine große Anzahl von Teilchen im selben Zustand betrachtet.

Wir untersuchen nun zunächst das freie Teilchen im $\mathbb{R}^3$.
Um der Bemerkung 1 gerecht zu werden, schränken wir die gleichzeitige Vorgabe von $\mu_{\text{Ort}}, \mu_{\text{Imp}}$ folgendermaßen ein:

(i) $\mu_{\text{Ort}}, \mu_{\text{Imp}} \in L^1_+(\mathbb{R}^3)$

(ii) $\overline{x} := \int\limits_{\mathbb{R}^3_x} x \,\mathrm{d}\mu_{\text{Ort}}(x)$ und $\overline{p} := \int\limits_{\mathbb{R}^3_p} p \,\mathrm{d}\mu_{\text{Imp}}(p)$ sollen existieren.

(iii) $\dfrac{\hbar^2}{4} \leq \int l(x-\overline{x})^2 \,\mathrm{d}\mu_{\text{Ort}}(x) \cdot \int l(p-\overline{p})^2 \,\mathrm{d}\mu_{\text{Imp}}(p) < \infty$, wobei
$l \in \mathbb{R}^{3*} \simeq \mathbb{R}^3, \quad \|l\| = 1, \quad \hbar \approx 10^{-27} \text{erg sec}.$

Formel (iii) ist die sogenannte *Heisenberg'sche Unschärferelation*. Sie besagt, dass das Produkt der Varianzen von Ort bzw. Impuls (in Richtung l) nicht beliebig klein gemacht werden kann. Ansonsten kämen wir in irgendeiner Form doch wieder zur Lokalisierbarkeitshypothese der klassischen Mechanik zurück. $\hbar$ könnte man z.B. als größte Konstante definieren, sodass (iii) noch erfüllt ist.

Die naheliegendste Möglichkeit der Zusammenfassung der Maße μ_{Ort} und μ_{Imp} wäre die Vorgabe eines Maßes ν auf $\mathbb{R}^6_{x,p}$, sodass $\mu_{\text{Ort}}(B) = \int\limits_{B\times\mathbb{R}^3_p} \mathrm{d}\nu$ und $\mu_{\text{Imp}}(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^3_x\times B} \mathrm{d}\nu$ für eine Borelmenge B (z.B. $\nu = \mu_{\text{Ort}} \otimes \mu_{\text{Imp}}$).
Die Vorgabe so eines ν würde jedoch der Möglichkeit 1 auf Seite 68 entsprechen. Das Messobjekt würde sich dann wieder auf einer Trajektorie bewegen, wobei der Raum aller Trajektorien mit einem gewissen Wahrscheinlichkeitsmaß versehen ist. Prinzipiell unbestimmbare Beobachtungsgrößen (i. e. Trajektorien) gehen in dieses Modell ein, das wir daher verwerfen.
Wir betrachten nun folgendes Modell:

$$\begin{aligned}\Phi: \quad L^2(\mathbb{R}^3)\setminus 0 &\longrightarrow L^1_+(\mathbb{R}^3)\times L^1_+(\mathbb{R}^3)\\ f &\longmapsto \frac{1}{\|f\|^2}\left(|f(x)|^2,\ (2\pi\hbar)^{-3}\big|\hat{f}(p/\hbar)\big|^2\right) =: (\mu_{\text{Ort}},\mu_{\text{Imp}})\end{aligned}$$

Wenn wir $f \in \mathcal{H}^{(1)} \cap L^2_1 \setminus 0$ wählen, so erfüllt $\Phi(f)$ (i), (ii) und (iii). (Den Beweis von (iii) führe ich später etwas allgemeiner.) Wir erhalten so aber nicht alle $(\mu_{\text{Ort}}, \mu_{\text{Imp}})$ mit (i)–(iii) und wenn $f \in L^2 \setminus (\mathcal{H}^{(1)} \cap L^2_1)$, so gilt nur $\int l(x)^2 \,\mathrm{d}\mu_{\text{Ort}}(x) \cdot \int l(p)^2 \,\mathrm{d}\mu_{\text{Imp}}(p) = \infty$ statt (iii). Dennoch verwenden wir nun dieses Modell, ein Zustand (des freien Teilchens im $\mathbb{R}^3$) wird im Folgenden durch ein $f \in L^2\,(\mathbb{R}^3)\setminus 0$ repräsentiert. f und cf, $c \in \mathbb{C}^*$, stellen dabei denselben Zustand dar.
Nun zur Zeitentwicklung. $\mu_{\text{Ort}}, \mu_{\text{Imp}}, f$ hängen jetzt von der Zeit t ab. Nach Hypothese 2, 2. ist $\mu\ldots(t)$ für $t > t_0$ durch die beiden $\mu(t_0)$ festgelegt. Das entsprechende nehmen wir von f an. Dies wird in der Quantenmechanik durch folgende Hypothese weiter präzisiert:

Hypothese 3

1. Es existiert eine Operatorgruppe von unitären Operatoren $\{A_\tau : \tau \in \mathbb{R}\} \subset L\big(L^2(\mathbb{R}^3)\big)$, (d.h.

   $$A_{\tau_1} \cdot A_{\tau_2} = A_{\tau_1+\tau_2},\ A_0 = I,\ A^*_\tau = A_{-\tau}),$$

   sodass für $t, t_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $f(t) = A_{t-t_0} f(t_0)$.

2. Es existiert $\mathcal{H} \in \text{Lsa}\ : A_\tau = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\mathcal{H}/\hbar}$, mit $\hbar$ wie oben.

3. $\mathcal{H}$ ist ein Differentialoperator.

Bemerkung

1. Nach einem Theorem von Stone kann die Existenz von $\mathcal{H} \in \text{Lsa}$ bereits aus der starken Stetigkeit von A_τ (d. h. $\forall x \in H = L^2(\mathbb{R}^3) : \forall \tau_0 : \lim\limits_{\tau \to \tau_0} A_\tau x = A_{\tau_0} x$) gefolgert werden.

2. Nach einem Theorem von v. Neumann genügt für die starke Stetigkeit der A_τ die Messbarkeit von $\tau \longmapsto (A_\tau x, y)$ für alle $x, y \in H$, falls H separabel ist.

3. Zu c): Würde in unserer Theorie das Prinzip endlicher Wirkungsausbreitung gelten, so wäre

$$\text{supp} f(\epsilon) \subset \text{supp} f(0) + \{x : |x| \leq c \cdot \epsilon\}$$

$\Longrightarrow \text{supp} \mathcal{H} f = \text{supp} \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{-1} \big[f(\epsilon) - f(0)\big] \subset \text{supp} f(0)$
$\Longrightarrow \mathcal{H}$ ist "lokal"
$\Longrightarrow \mathcal{H}$ ist ein Differentialoperator.

4. Die eigentlich einschneidende Forderung in Hypothese 7 ist die *Linearität* der A_τ. [Die entsprechende Abbildung $\big(\mu_{\text{Ort}}(t_0), \mu_{\text{Imp}}(t_0)\big) \longmapsto \mu_{\text{Ort}}(t)$ ist sicher nichtlinear. (Ihre genaue Gestalt ist mir übrigens unbekannt.)] Dies nennen die Physiker *Superpositionsprinzip*. In Kap. 7 werde ich näher darauf eingehen.

Weitere Untersuchung: Aufgrund der Homogenität des Raumes $\mathbb{R}^3$ ist $\mathcal{H}$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. D.h. $\exists P$ Polynom im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{H}\big|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) : \quad f \longmapsto P(\partial) f.$$

Da $\mathcal{H} \in \text{Lsa}$, muss P reelle Koeffizienten haben. Aufgrund der Isotropie des $\mathbb{R}^3$ ist P rotationssymmetrisch, d.h. $P = Q(r^2)$, Q Polynom im $\mathbb{R}^1$. Als einfachste Möglichkeit erhalten wir so $\mathcal{H} = \alpha\Delta + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir wählen $\alpha = -\dfrac{\hbar^2}{2m}$ und setzen $\beta = 0$. (β geht in die Physik nicht ein, betrachte $\mu_{\text{Ort}}, \mu_{\text{Imp}}$!)
[$\hbar$ ist durch die Forderung (iii) auf Seite 69 bestimmt. Die Einführung von $\hbar$ in $\mathcal{H}$ und Hyp. 3, 2. erfolgt zu dem Zweck, dem Operator $\mathcal{H}$ die Bedeutung der Energie zu geben (siehe Kap. 7), sowie im Grenzfall $m \to \infty$ die klassische Mechanik zu liefern.] In Beispiel 22, Seite 61, wurde dafür A_τ bestimmt.

Beispiel 24 Gauß'sche Orts- und Impulsunschärfe.

a) Zunächst einige Formeln im $\mathbb{R}^3$ für $\operatorname{Re} a > 0,\ l \in \mathbb{R}^3,\ \|l\| = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2},$$

$$\widehat{\mathrm{e}^{-ax^2}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-p^2/(4a)},$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-ax^2} l(x)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\,\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2}\right] = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2}.$$

b) Es sei $f_0 := (2\pi\sigma^2)^{-3/4}\mathrm{e}^{-x^2/(4\sigma^2)+\mathrm{i}kx} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ mit $\sigma > 0, k \in \mathbb{R}^3$.
Daraus folgt:

$$\|f_0\| = 1,$$

$$\mu_{\mathrm{Ort}}(0) = (2\pi\sigma^2)^{-3/2}\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)},$$

$$\mu_{\mathrm{Imp}}(0) = (2\pi\hbar)^{-3}\left|\hat{f}_0\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right|^2,$$

$$\hat{f}_0 = (8\pi\sigma^2)^{3/4}\mathrm{e}^{-\sigma^2(p-k)^2}$$

$$\Longrightarrow \mu_{\mathrm{Imp}}(t=0) = \left(\frac{\pi\hbar^2}{2\sigma^2}\right)^{-3/2} \mathrm{e}^{-2\sigma^2\left(\frac{p}{\hbar}-k\right)^2}.$$

$$\overline{x}(t=0) = 0, \quad \overline{p} = \hbar k, \quad \operatorname{Var} l(x) = \sigma^2 \text{ für } l \in \mathbb{R}^3, \quad \|l\| = 1$$

(entsprechend (iii), Seite 69 ist $\operatorname{Var} l(x) := \int l(x-\overline{x})^2\,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Ort}}(x)$),

$$\operatorname{Var} l(p) = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

$$\operatorname{Var} l(x) \cdot \operatorname{Var} l(p) = \frac{\hbar^2}{4}, \quad \text{minimale Unschärfe!}$$

c) Nun zur Dynamik: Nach Bsp. 22 gilt

$$f(t) = (2\pi\sigma^2)^{-3/4}\left(\frac{m}{2t\hbar\pi}\right)^{3/2} \int \mathrm{e}^{-y^2\overbrace{\left(1/(4\sigma^2)-\mathrm{i}m/(2t\hbar)\right)}^{=:a} - \mathrm{i}y\left(\frac{mx}{t\hbar}-k\right)}\,\mathrm{d}y \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\frac{x^2}{2t\hbar}-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-3/4}\left(\frac{m}{2t\hbar\pi}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(mx^2/(2t\hbar)-3\pi/4\right)} \cdot \widehat{\mathrm{e}^{-ax^2}}\left(\frac{mx}{t\hbar}-k\right)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-3/4}\left(\frac{m}{2t\hbar a}\right)^{3/2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\frac{x^2}{2t\hbar}-\frac{3\pi}{4}\right)} \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{mx}{t\hbar}-k\right)^2/(4a)}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-3/4}\,\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4}\left(\frac{t\hbar}{2m\sigma^2}-\mathrm{i}\right)^{-3/2}\exp\left[-\left(x-\frac{t\hbar k}{m}\right)^2\cdot\frac{m^2\sigma^2}{t^2\hbar^2+4m^2\sigma^4}\right]\cdot$$

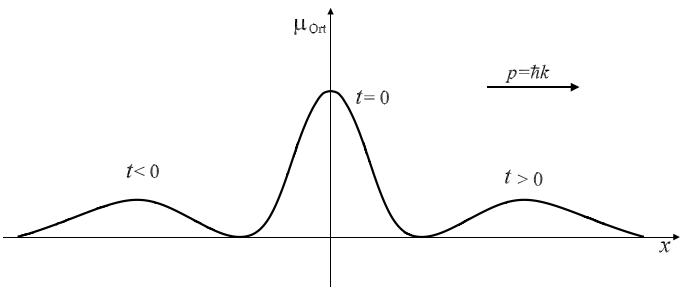
$$\cdot\exp\mathrm{i}\left[\frac{mx^2}{2t\hbar}-\left(x-\frac{t\hbar k}{m}\right)^2\cdot\frac{2m^3\sigma^4}{t^3\hbar^3+4m^2\sigma^4t\hbar}\right].$$

(Kleine Kontrolle: $t\to 0$ ergibt f_0.)

$$\mu_{\mathrm{Ort}}(t)=\left(\frac{2m^2\sigma^2}{\pi(t^2\hbar^2+4m^2\sigma^4)}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left[-\left(x-\frac{t\hbar k}{m}\right)^2\cdot\frac{2m^2\sigma^2}{t^2\hbar^2+4m^2\sigma^4}\right],$$

d.h. die Ortsunschärfe bleibt Gauß-verteilt mit
$\overline{x}(t)=\dfrac{t}{m}\,k\hbar=\dfrac{t}{m}\cdot\overline{p}(0)$ und $\mathrm{Var}\,l(x)=\sigma^2+\dfrac{t^2\hbar^2}{4m^2\sigma^2}$.
Nach Übung 1 ist $\mu_{\mathrm{Imp}}(t)=\mu_{\mathrm{Imp}}(0)$.

d) Ergebnis: Das Zentrum des "Wellenpaketes" bewegt sich nach den Gesetzen der klassischen Mechanik $s=t\cdot v$, die Ortsunschärfe vergrößert sich für $t\to\pm\infty$. Die Unschärferelation (iii) auf Seite 69 gibt also nur eine untere Grenze, die im Allgemeinen nicht angenommen wird.



Bemerkung Das Auseinanderlaufen des Paketes für $t\to\pm\infty$ ist ein typisch parabolischer Effekt und tritt bei Verwendung hyperbolischer Gleichungen (relativistische Theorie) nicht auf. Wesentlich und auch exakt gültig ist die Gleichung

$$\overline{x}(t)=\frac{t}{m}\,\overline{p}.$$

Nun noch kurz zur Operatortheorie in der Quantenmechanik.
Es sei $H = L^2(\mathbb{R}^3)$, $\hat{x}_j \in \mathrm{Lsa}(H)$ wie in Kap. 3. Dann gilt für ein Teilchen im Zustand $f \in D(\hat{x}_j)$ mit $\|f\| = 1$:

$$\overline{x_j} = (\hat{x}_j f, f),$$

d.h. der Mittelwert der Ortsmessungen (in x_j-Richtung) ist durch die zu $\hat{x}_j$ gehörige Sesquilinearform gegeben.
Ebenso ergibt sich, wenn $f \in D(-\mathrm{i}\partial_j)$:

$$\overline{p_j} = (2\pi\hbar)^{-3} \int p_j \left| \hat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \mathrm{d}p = \hbar(2\pi)^{-3} \int u_j \left|\hat{f}(u)\right|^2 \mathrm{d}u$$

$$= -\mathrm{i}\hbar(2\pi)^{-3}(\widehat{\partial_j f}, \hat{f}) = (-\mathrm{i}\hbar\partial_j f, f),$$

d.h. Impulsmessungen entsprechen der Auswertung der $-\mathrm{i}\hbar\nabla$ entsprechenden Sesquilinearform. Der Zusammenhang zwischen diesen Beobachtungsgrößen und ihren Operatoren ist jedoch noch viel enger:
Die Wahrscheinlichkeit für einen Messwert von x_j im Intervall $[a, b]$ ist nach Hypothese 2

$$\int\limits_{a \le x_j \le b} \mathrm{d}\mu_{\mathrm{Ort}} = \int\limits_{a \le x_j \le b} \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \left\|(E_b - E_a)f\right\|^2,$$

wobei E_λ die Spektralschar von $\hat{x_j}$ ist. Analog für den Impuls.

6.1 Übungen

1. Zeige, dass für das freie Teilchen μ_{Imp} von der Zeit unabhängig ist.

2. Es seien $\mu^t_{\mathrm{Ort}}, \mu^t_{\mathrm{Imp}} =: \mu_{\mathrm{Imp}}$ die Wahrscheinlichkeitsmaße eines freien Teilchens (der Masse m) im $\mathbb{R}^3$ zur Zeit t, $k \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Zeige: $\mu^t_{\mathrm{Ort}}\left(x - \frac{t\hbar k}{m}\right), \mu_{\mathrm{Imp}}(p - \hbar k)$ sind die Wahrscheinlichkeitsmaße eines anderen Teilchens.

   (b) Vergleiche dies mit der Galilei-Invarianz der klassischen Mechanik!

3. Untersuche, ob für Φ auf Seite 70 gilt:

   $$\Phi(f) = \Phi(g) \Longleftrightarrow f = cg, \quad c \in \mathbb{C}^*.$$

   (Ich weiß die Antwort nicht.)

4. Es sei für $f \in D(-\Delta) = \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ mit $\|f\| = 1$:

$$\overline{\sum p_j^2} := \int \sum p_j^2 \cdot \mathrm{d}\mu_{\mathrm{Imp}}(p).$$

   (a) Zeige: $\dfrac{1}{2m}\overline{\sum p_j^2} = (\mathcal{H}f, f) =: \overline{\mathcal{H}}$.

   (b) Begründe die Wahl des Faktors in $\mathcal{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta$ durch Vergleich mit der klassischen Formel für die Energie eines freien Teilchens.

   (c) Berechne $\overline{\mathcal{H}}$ für das Beispiel zur Gauß'schen Orts- und Impulsunschärfe, Seite 72, und interpretiere die beiden Terme.

   (d) Warum gilt nicht $\overline{\mathcal{H}} = \dfrac{1}{2m}\sum \overline{p}_j^2$?

5. Zeige, dass $\overline{x}_j(t) = \overline{x}_j(0) + \dfrac{t}{m}\overline{p}_j$ für $f \in D(\hat{x}_j) \cap D(-\mathrm{i}\hbar\partial_j) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ gilt.

Kapitel 7

Die Axiomatik der Quantenmechanik

W. Heisenberg *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie*

J. v. Neumann *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*

G. Ludwig *Deutung des Begriffs "physikalische Theorie" etc., Lect. Notes in Phys. 4*

Es sei ein quantenmechanisches System gegeben, Z sei die Menge seiner Zustände zu einem festen Zeitpunkt. Eine (beschränkte) *Observable* ist eine beschränkte Abbildung $f : Z \to \mathbb{R}$, die durch ein Experiment realisiert werden kann. Das soll heißen, es existiert eine Messapparatur V_f, sodass für $z \in Z$:

$$f(z) = \text{Mittelwert der Messwerte von } V_f \text{ im Zustand } z.$$

(In der gewöhnlichen Mechanik hingegen ist die Mittelwertbildung überflüssig, überdies erhält man jede beschränkte Abbildung $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ als Observable.)

$$M := \text{Menge der Observablen.}$$

Klarerweise fordern wir: $\forall z_1 \neq z_2 \in Z : \exists f \in M : f(z_1) \neq f(z_2)$. Weiters setzen wir voraus, dass für eine Abbildung $h : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1,\ h \in \mathcal{L}^\infty$, und $f \in M$ durch

$$h \circ f(z) := \text{ Mittelwert der Werte von } h \circ V_f \text{ im Zustand } z$$

wieder eine Observable definiert wird, d.h. $h \circ f \in M$.
Vorsicht: $h \circ f(z) \neq h\big(f(z)\big)$ (vgl auch Übung 4, S. 75). $h \circ f$ soll überdies unabhängig vom gewählten V_f sein.
$M_1 \subset M$ sei die Menge der Observablen, die durch eine Messapparatur mit nur 2

Ausgängen 0 und 1 entstehen. Es genügt, M_1 zu betrachten, denn für $f \in M$ ist für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_\lambda(z) &:= \text{ Wahrscheinlichkeit, dass } V_f \in (-\infty, \lambda) \\ &= \chi_{(-\infty,\lambda)} \circ f \in M_1 \end{aligned}$$

und $f(z) = \int \lambda \, \mathrm{d}g_\lambda(z)$.

Ebenso erhalten wir für $h \in \mathcal{C},\ h : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 : h \circ f(z) = \int h(\lambda) \, \mathrm{d}g_\lambda(z)$.

Diese Formeln kommen uns aus Kapitel 4 und 5 sehr bekannt vor!
Wir fordern nun:

Axiom

1. $M_1 \longrightarrow 2^Z : f \longmapsto f^{-1}(0)$ ist injektiv.
2. $\forall z \in Z : \exists f \in M_1 : f^{-1}(0) = \{z\}$
   (nach 1) ist f durch z auch eindeutig bestimmt).

Interpretation 1. Die Kenntnis der Zustände, in denen V_f mit Sicherheit 0 ergibt, genügt um f zu bestimmen. 2. Für jeden Zustand existiert eine Observable in M_1, die nur in diesem Zustand 0 ist.
Auch in der klassischen Mechanik gelten 1. und 2., die Abbildung in 1. ist dort sogar bijektiv.

Wenn man noch genügend weitere Axiome aufstellt, so gelangt man zum folgenden

Modell

Es gibt einen separablen Hilbertraum H, sodass

1. $Z = \quad \{V \leq H : \dim_{\mathbb{C}} V = 1\}$,
2. $\psi : \ L(H) \cap \mathrm{Ls}(H) \longrightarrow M : \ A \longmapsto \Big(z = \mathbb{C} \cdot x \longmapsto (Ax, x)/\big\|x\big\|^2\Big)$ ist ein Vektorraumisomorphismus,
3. $\forall h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1) : \psi\big(h(A)\big) = h \circ \psi(A)$,
4. $\psi(E_\lambda) = g_\lambda$ wenn $\{E_\lambda\}$ Spektralschar zu A, g_λ wie oben zu $f = \psi(A)$.

Bemerkung

1. Die physikalisch relevanten Strukturen in H können übrigens invariant definiert werden:

   (i) $z_1, z_2 \in Z \Longrightarrow z_1 + z_2 = \bigcap \{ f^{-1}(0) : f \in M_1, f(z_i) = 0 \}$

   (ii) $z_1 = \mathbb{C}x_1, z_2 = \mathbb{C}x_2 \in Z \Longrightarrow [z_1, z_2] := \cos^2 \sphericalangle\{z_1, z_2\}$
   $:= \left|(x_1, x_2)\right|^2 / \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 = (P_{z_1} x_2, x_2)/\|x_2\|^2 = f(z_2)$,
   wobei P_{z_1}:=Projektion auf $z_1 = \mathbb{C}x_1$ und $1 - f \in M_1$ zu z_1 wie in Axiom 2) ist.

2. Die Tatsache, dass M ein Vektorraum ist, ist keineswegs selbstverständlich, denn gleichzeitige Messungen verschiedener Größen sind im Allgemeinen nicht möglich.

3. Aus 4. erhalten wir:
   Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messapparatur im Zustand $z = \mathbb{C}x$ einen Wert im Intervall [a,b) liefert $= g_b(z) - g_a(z) = \psi(E_b - E_a)(\mathbb{C}x) = \left\|(E_b - E_a)x\right\|^2 / \left\|x\right\|^2$. (Man überprüfe, dass dies ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert!)
   Speziell: Falls x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, so liefert die Messapparatur im Zustand $\mathbb{C}x$ mit Sicherheit den Wert λ.

Wir erweitern nun den Raum der Observablen etwas, indem wir auch unbeschränkte sa. Operatoren zulassen. So wie für beschränkte Operatoren interpretieren wir $\left\|(E_\lambda - E_\mu)x\right\|^2 / \left\|x\right\|^2$ als Wahrscheinlichkeit, dass eine $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ entsprechende Messapparatur einen Messwert im Intervall $[\lambda, \mu)$ ergibt, $\lambda < \mu$. (Streng genommen gibt es natürlich keine Messapparatur, die beliebig große Werte anzeigen könnte.) Der Mittelwert $(Ax, x)/\left\|x\right\|^2$ existiert nun allerdings nur mehr für $x \in D(A)$.
Damit sind wir zu den Axiomen 1–3 der Einleitung gelangt.

Nun zur Zeitentwicklung. Wir betrachten ein abgeschlossenes System und nehmen an (siehe auch Kapitel 6), dass der Zustand $z(t)$ zur Zeit t durch $z(0)$ eindeutig bestimmt ist.
Dann erhalten wir eine Abbildung

$$a_t : Z \longrightarrow Z : \; z(0) \longmapsto z(t).$$

Bekanntlich entspricht die Invarianz der physikalischen Gesetze unter Zeittranslationen dem Energieerhaltungssatz. Wir fordern daher die Invarianz des "inneren

Produkts" $[z_1, z_2]$ unter a_t, d.h. $[a_t z_1, a_t z_2] = [z_1, z_2]$.
Nach einem Satz von E. Wigner (1939) existiert dann $A_t : H \to H$ unitär oder antiunitär, sodass $a_t(\mathbb{C}x) = \mathbb{C} \cdot A_t x$.
Als nächstes beweist man, dass (unter geeigneten Voraussetzungen) A_t als stetig abhängig von t angenommen werden kann. Wegen $A_0 = I$ folgt dann, dass A_t immer unitär ist. Dann zeigt man auch noch, dass sich die Identität $a_{t_1} \circ a_{t_2} = a_{t_1+t_2}$ "liften" lässt, d.h. $A_{t_1} \circ A_{t_2} = A_{t_1+t_2}$ bei geeigneter Wahl von A_t (Theorem von Bargmann, 1954). Unter Verwendung des Stone'schen Satzes (vgl. Bem. 1, S. 71) gelangt man nun zur Darstellung $A_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar},\ \mathcal{H} \in \mathrm{Lsa}(H)$.
Damit erhalten wir Axiom 4, S. (iii). Die Interpretation von $\mathcal{H}$ als Energieoperator werden wir allerdings erst später begründen.

Definition 7.1 $z \in Z$ heißt *stationärer Zustand*: $\iff \forall t \in \mathbb{R} :\ a_t z = z$.

Satz 7.1
Es sei $z = \mathbb{C}x,\ x \in H \setminus \{0\}$. Äquivalent:

(i) z stationär

(ii) $x \in D(\mathcal{H})$ und x ist ein Eigenvektor von $\mathcal{H}$.

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Es sei E_λ die Spektralschar von $\mathcal{H}$, $x \in R(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0})$ (d.h $\mathcal{H}x = \lambda_0 x$), $y \in H$. $(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x, y) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda/\hbar}\,\mathrm{d}(E_\lambda x, y)$;

$$
\begin{aligned}
E_\lambda x \quad &= \quad E_\lambda(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0})x = \begin{cases} x: & \lambda > \lambda_0 \\ 0: & \lambda \le \lambda_0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad (E_\lambda x, y) = \begin{cases} (x,y): & \lambda > \lambda_0 \\ 0: & \lambda < \lambda_0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x, y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_0/\hbar}(x,y) \\
&\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_0/\hbar}x \\
&\Longrightarrow \quad a_t z = z.
\end{aligned}
$$

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Es sei $a_t z = z,\ \forall t \in \mathbb{R},\ z = \mathbb{C}x,\ \|x\| = 1$
$\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : \exists \sigma(t) \in \mathbb{C}$ mit $|\sigma(t)| = 1 : A_t x = \sigma(t)x$; da $A_{t_1} \circ A_{t_2} = A_{t_1+t_2}$, ist auch $\sigma(t_1)\sigma(t_2) = \sigma(t_1 + t_2)$,
d.h. $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

σ ist stetig:

$$\begin{aligned}\big|\sigma(t)-\sigma(0)\big|^2 &= \big\|(A_t-I)x\big\|^2 = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda/\hbar}-1\big|^2\,\mathrm{d}(E_\lambda x_N, x_N)\\ &\quad (\text{mit}\quad x_N := (E_N - E_{-N})x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda/\hbar}-1\big|^2\,\mathrm{d}(E_\lambda x, x)\to 0 \quad \text{für}\quad t\to 0\end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue.
Daher ist σ ein Charakter von $\mathbb{R} \Longrightarrow \exists\lambda_0\in\mathbb{R}:\ \sigma(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_0/\hbar}$.
Wir zeigen nun: x ist ein Eigenvektor von $\mathcal{H}$ zum Eigenwert λ_0. Für $t\in\mathbb{R}$ gilt:

$$0=\Big\|\big(A_t-\sigma(t)\big)x\Big\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda/\hbar}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_0/\hbar}\big|^2\,\mathrm{d}(E_\lambda x,x).$$

Es sei $\lambda_1\neq\lambda_0 \Longrightarrow \quad \exists t$ so, dass $\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_1/\hbar}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_0/\hbar}\big|>0$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \quad \exists\epsilon>0:\forall\lambda \quad \text{mit}\quad |\lambda-\lambda_1|<\epsilon : \big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_1/\hbar}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_0/\hbar}\big|>0\\ &\Longrightarrow \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}\big((\lambda_1-\epsilon,\lambda_1+\epsilon,)\big):\int\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=0\\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1\notin \operatorname{supp}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(E_\lambda x,x).\end{aligned}$$

Somit: $\operatorname{supp}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(E_\lambda x,x)\subset\{\lambda_0\}$, d.h. $x=E_{\lambda_0+0}x, E_{\lambda_0}x=0 \Longrightarrow x\in H_N\subset D(\mathcal{H})$ für $N>|\lambda_0|$ und $\mathcal{H}x=\lambda_0 x$. □

Bemerkung

1. Wenn $z=\mathbb{C}\cdot x$ stationär ist, so folgt aus dem Beweis, dass $A_t x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_0/\hbar}x$ mit $\mathcal{H}x=\lambda_0 x$. Dies bedeutet, dass die "Phase" von x mit der Kreisfrequenz $\lambda_0/\hbar$ schwingt. Für Lichtquanten (=Photonen) gilt nach Einstein:

   $$\text{Energie}=\hbar\cdot\text{Kreisfrequenz}.$$

   Unter Zugrundelegung derselben Beziehung für beliebige quantenmechanische Systeme (de Broglie, 1924) erhalten wir:

   $$\lambda_0=(\mathcal{H}x,x)/\big\|x\big\|^2=\text{Messwert von }\mathcal{H}\text{ im Zustand }z=\text{Energie}$$

Daher interpretiert man $\mathcal{H}$ als den der Energie entsprechenden Operator. Übrigens ist $\mathcal{H}$, ebenso wie die Energie, nur bis auf einen reellen Summanden eindeutig:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad A'_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tc/\hbar} A_t \quad \Longrightarrow \quad a'_t = a_t.$$

2. Die "Schwingung" ist im stationären Zustand z natürlich nicht physikalisch messbar, da $a_t z = z$. Wenn jedoch $z_i = \mathbb{C}x_i$ Eigenvektoren von $\mathcal{H}$ zum Eigenwert λ_i sind, so ist für $\mathbb{C}x = z \subset z_1 + z_2$, d.h. $x = c_1 x_1 + c_2 x_2$:

$$a_t z = \mathbb{C} \cdot A_t x = \mathbb{C} \cdot (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_1/\hbar} c_1 x_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_2/\hbar} c_2 x_2)$$

und das ist periodisch mit Periode $2\pi\hbar/(\lambda_1 - \lambda_2)$ für $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. Dies ist physikalisch beobachtbar. Man beachte, dass wieder nur die Differenz zweier Frequenzen in Erscheinung tritt.

3. Wir erhalten so auch die Möglichkeit einer eleganten experimentellen Verifikation:
Wenn ein quantenmechanisches System vom stationären Zustand z_1 in den stationären Zustand z_2 übergeht, so muss es die Energie $\big|\psi(\mathcal{H})(z_1) - \psi(\mathcal{H})(z_2)\big|$ aufnehmen bzw. abgeben. (Diese Energie besteht im Allgemeinen aus elektromagnetischer Strahlung.) Somit können die Differenzen der Eigenwerte von $\mathcal{H}$ relativ einfach gemessen werden.

Als nächstes behandle ich die Unschärferelation.
$A \in \mathrm{Ls}(H) \cap L(H)$ sei eine beschränkte Observable, $f = \psi(A)$, V_f eine Messapparatur zu f. V_f gibt in jedem Zustand z ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^1$: $[a, b) \longmapsto g_b(z) - g_a(z)$.
(Wir nehmen dabei immer an, dass dieses Wahrscheinlichkeitsmaß nur von f abhängt. Dies liegt unserem ganzen Modell und bereits der Definition von $h \circ f$ zugrunde!)
Der Erwartungswert dieses Wahrscheinlichkeitsmaßes ist:

$$\int \lambda \, \mathrm{d}g_\lambda(z) = f(z) = (Ax, x)/\big\|x\big\|^2 =: \bar{A}z, \quad z = \mathbb{C} \cdot x.$$

Die Varianz dieses (Riemann-Stieltjes-)Maßes ist:

$$\begin{aligned}\int (\lambda - \bar{A}z)^2 \,\mathrm{d}g_\lambda(z) &= \big[(\lambda - \bar{A}z)^2 \circ f\big](z) = \Big(\big[(\lambda - \bar{A}z)^2(A)\big]x, x\Big)/\big\|x\big\|^2 \\ &= \big((A - \bar{A}z \cdot I)^2 x, x\big)/\big\|x\big\|^2 = \big\|(A - \bar{A}z \cdot I)x\big\|^2/\|x^2\| \\ &= : \mathrm{var}\,(A)z.\end{aligned}$$

$\mathrm{var}\,(A)z$ gibt die Genauigkeit der Messung von f im Zustand z an.
Für $A \in \mathrm{Lsa}$ machen wir dieselben Definitionen, falls $x \in D(A)$.

Satz 7.2 *(über die Unschärferelation)*
$A, B \in \mathrm{Lsa},\ z = \mathbb{C}x,\ x \in D(A) \cap D(B),\ \big\|x\big\| = 1$. Dann gilt:

1. $\mathrm{var}\,(A)z \cdot \mathrm{var}\,(B)z \geq \big|\mathrm{Im}\,(Ax, Bx)\big|^2$,
2. falls zusätzlich $Ax \in D(B)$ und $Bx \in D(A)$:
   $\mathrm{var}\,(A)z \cdot \mathrm{var}\,(B)z \geq \dfrac{1}{4}\Big|\big((BA - AB)x, x\big)\Big|^2$.

Beweis. 1. $a := \bar{A}z = (Ax, x), \quad b := \bar{B}z = (Bx, x)$;

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\,(A)z \cdot \mathrm{var}\,(B)z &= \big\|(A - aI)x\big\|^2 \cdot \big\|(B - bI)x\big\|^2 \\ &\geq \Big|\big((A - aI)x, (B - bI)x\big)\Big|^2 \\ &= \big|(Ax, Bx) - a(x, Bx) - b(Ax, x) + ab\big|^2 \\ &= \big|(Ax, Bx) - ab\big|^2 \geq \big|\mathrm{Im}\,(Ax, Bx)\big|^2\end{aligned}$$

2. $\mathrm{Im}(Ax, Bx) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\big[(Ax, Bx) - (Bx, Ax)\big] = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\big((BA - AB)x, x\big)$

□

Bemerkung Der Satz gibt offenbar keine Information, wenn $AB = BA$. Es seien f_1, f_2 beschränkte Observable. Sie heißen gleichzeitig messbar, wenn es eine beschränkte Observable f und beschränkte Borel-messbare Funktionen h_1, h_2 gibt, sodass $f_i = h_i \circ f$. Wenn $\psi(A_i) = f_i,\ \psi(A) = f$, so ist $h_i(A) = A_i$ und daher $A_1A_2 = (h_1h_2)(A) = A_2A_1$, d.h. die A_i sind vertauschbar.
(In Kapitel 4 und 5 wurde $h_i(A)$ nur für stetiges h_i definiert, mit etwas Maßtheorie kann man auch beschränkte, Borel-messbare h_i zulassen.)

Auch das umgekehrte kann man zeigen. Somit entsprechen vertauschbare Operatoren gleichzeitig messbaren Observablen.
Dass für diese im Allgemeinen keine Unschärferelation gelten kann, ist klar:
$\operatorname{var}\big(h_i(A)\big)z_n \to 0$ falls $\operatorname{var}(A)z_n \to 0$ und die h_i stetig sind.

Anwendung des Satzes $H = L^2(\mathbb{R}^3), \quad A = \hat{x}_j, \quad B = -\mathrm{i}\hbar\partial_j$.
Zunächst sei $f \in \mathcal{D},\ \big\|f\big\| = 1,\ z = \mathbb{C}f,\ (\mu_{\mathrm{Ort}}, \mu_{\mathrm{Imp}}) = \Phi(f)$ (vgl. S. 70).
Nach S. 73 und dem Satz ist:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(A)z \cdot \operatorname{var}(B)z &= \int (x_j - \bar{x}_j)^2 \,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Ort}} \cdot \int (p_j - \bar{p}_j)^2 \,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Imp}} \\
&\geq \frac{1}{4}\Big|\big((BA - AB)f, f\big)\Big|^2; \\
(BA - AB)f &= -\mathrm{i}\hbar\big[\partial_j(x_j f) - x_j(\partial_j f)\big] = -\mathrm{i}\hbar f \\
&\Longrightarrow \operatorname{var}(A)z \cdot \operatorname{var}(B)z \geq \frac{\hbar^2}{4}.
\end{aligned}$$

Wenn $f \in \mathcal{H}^{(1)} \cap L_1^2 \setminus 0$, so erhalten wir dieselbe Ungleichung mit einem Dichteargument.
Nun will ich die Axiomatik noch an 2 einfachen Beispielen exemplifizieren.

Beispiel 25 (Freies Teilchen im $\mathbb{R}^1$)
$\hat{x} \in \mathrm{Lsa}(H)$ sei der Operator der Ortsmessung. Aus Homogenitätsgründen nehmen wir an, dass $\sigma_p(\hat{x}) = \emptyset$ und $\sigma(\hat{x}) = \mathbb{R}$. Mit einer gewissen Notwendigkeit kommt man damit zum Modell $H = L^2(\mathbb{R}^1),\ \hat{x} : L_1^2 \longrightarrow H : f \longmapsto xf$.
Den Operator $\tau_h : H \longrightarrow H :\ f \longmapsto f(x - h),\ h \in \mathbb{R}$ interpretieren wir als Verschiebung des Beobachtungspunktes um h. Der neue Beobachter muss denselben Impulsmesswert erhalten, d.h. $(p\tau_h f, \tau_h f) = (pf, f) \Longrightarrow p\tau_h = \tau_h p$, $p :=$ Impulsoperator $\in \mathrm{Lsa}(H)$.
Wenn wir annehmen, dass $p|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \longrightarrow L^2$ stetig ist, so folgt:
$\exists T \in \mathcal{D}' : p(\varphi) = T * \varphi$ für $\varphi \in \mathcal{D}$.
Den Operator $\varrho_\epsilon : H \longrightarrow H : f \longmapsto \sqrt{\epsilon} f(\epsilon x), \epsilon > 0$, interpretieren wir als Änderung des Längenmaßstabes. Die Impulsmessung multipliziert sich dabei mit ϵ, d.h. $(p\varrho_\epsilon f, \varrho_\epsilon f) = \epsilon(pf, f) \Longrightarrow p\varrho_\epsilon = \epsilon\varrho_\epsilon p \Longrightarrow T(\epsilon x) = \epsilon^{-2}T \Longrightarrow T$ ist homogen vom Grad -2.
Wenn wir noch die Spiegelung $x \longmapsto -x$ betrachten, so erhalten wir, dass T ungerade ist.
Rein mathematisch zeigt man, dass dann $T = a\delta', a \in \mathbb{C}$, sein muss.
Da $p \in \mathrm{Lsa}$, ist $a = \mathrm{i}\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.
Um die richtige Konstante in der Heisenberg'schen Unschärferelation und um die

richtige Impulsrichtung zu erhalten, müssen wir $p = -\mathrm{i}\hbar \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{H}^{(1)} \longrightarrow L^2$ setzen. [Das $-$ entspricht dem $-$ in $A_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}$].
Wie aus S. 83 und Kapitel 6 folgt, ist dann $\min\limits_{z\in Z}\big(\mathrm{var}\,(\hat{x})z \cdot \mathrm{var}\,(p)z\big) = \hbar^2/4$.
Den Energieoperator $\mathcal{H}$ gewinnen wir aus p :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\lambda^2(p) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} : \mathcal{H}^{(2)} \longrightarrow H.$$

Hierbei verwenden wir die Beziehung zwischen Impuls und Energie aus der klassischen Mechanik. Nach S. 61, Bsp. 21, gibt es keine stationären Zustände.

Bemerkung

1. Die Darstellung von Orts- und Impulsoperator, die wir in Kapitel 6 für das freie Teilchen im $\mathbb{R}^3$ erhielten, könnte auch noch weiter begründet werden. Sie erscheint mir aber, ausgehend vom $\mathbb{R}^1$-Modell, sehr plausibel.

2. Eine andere Möglichkeit, die Konstante $a = -\mathrm{i}\hbar$ herauszubringen, besteht darin, die Zeitentwicklung eines Gauß'schen Wellenpaketes (z.B.) zu untersuchen. Wenn man die Gleichung $\bar{x}(t) = \bar{x}(0) + \dfrac{t}{m}\,\bar{p}$ (die im Limes $m \longrightarrow \infty$ nach den Gesetzen der klassischen Mechanik gelten muss) voraussetzt, so erhält man wieder a in Bsp. 25.
   Hier geht allerdings die Interpretation von $\mathcal{H}$ in $A_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}$ als Energieoperator ein. Man sieht, warum die gleichen Konstanten in der Heisenberg'schen Unschärferelation und der de Broglie'schen Quantenhypothese auftreten.

Beispiel 26 (Der ∞ hohe Potentialtopf im $\mathbb{R}^1$)
Wir betrachten ein Teilchen, das im Intervall $(0, a)$, $a > 0$, durch 2 undurchlässige Wände eingesperrt ist. Wir wählen
$H = L^2\big((0,a)\big), \quad \hat{x} : H \longrightarrow H : f \longmapsto xf.$
Nun bestimme ich den Energieoperator.
Lokal gelten wieder dieselben Überlegungen wie in Bsp. 1, d.h.

$$\mathcal{H} \supset \mathring{\mathcal{H}} : \mathcal{D}\big((0,a)\big) \longrightarrow H : f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m}f''.$$

Da $\mathcal{H}$ sa. ist, muss

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \supset \overline{\mathring{\mathcal{H}}} : \Big\{ f \in \mathcal{H}^{(2)}\big((0,a)\big) : f(0) = f(a) = f'(0) = f'(a) = 0 \Big\} &\longrightarrow H \\ f &\longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m}f'' \end{aligned}$$

sein. $\overline{\mathring{\mathcal{H}}}$ ist jedoch nicht sa. Um die richtige sa. Erweiterung von $\overline{\mathring{\mathcal{H}}}$ zu finden, betrachten wir ein Teilchen im $\mathbb{R}^1$, das durch δ-artige Potentialwälle in 0 und a behindert wird, d.h. es sei $N > 0$,

$$\mathcal{H}_N : \Big\{ f \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^1) :$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} f'' + N\big[f \cdot \delta(x) + f \cdot \delta(x-a)\big] \in L^2(\mathbb{R}^1) \Big\} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^1)$$
$$f \longmapsto \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} f''}_{\text{kinet.En.}} + \underbrace{N\big[f(0)\delta(x) + f(a) \cdot \delta(x-a)\big]}_{\text{pot.Energie}},$$
$$D(\mathcal{H}_\infty) := \bigcap_{N>0} D(\mathcal{H}_N) = \big\{ f \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^1) : f(0) = f(a) = 0 \big\} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^1) :$$
$$f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m} f''.$$

Wenn wir $\text{proj} : L^2(\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2\big((0,a)\big)$ verwenden, so ergibt sich

$$D(\mathcal{H}) = \text{proj}\, D(\mathcal{H}_\infty) = \Big\{ f \in \mathcal{H}^{(2)}\big((0,a)\big) : f(0) = f(a) = 0 \Big\}$$
$$\text{und} \quad \mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \longrightarrow L^2\big((0,a)\big) : f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m} f''.$$

Nach Bsp. 23, S. 62 ist $\mathcal{H}$ sa. und besitzt die Energieeigenwerte $E_n = \dfrac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$, $n = 1, 2, \cdots$.
Die zugehörigen stationären Zustände sind $z_n = \mathbb{C} \cdot \sin \dfrac{n\pi x}{a}$.

Bemerkung

1. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik ist im Zustand mit der niedrigsten Energie ($= z_1$) der Betrag des Impulses $= |p| = \sqrt{2m\mathcal{H}} = \dfrac{\hbar\pi}{a} > 0$. (Klassisch würde das Teilchen ruhen).

2. Unser Modell ist aufgrund der undurchlässigen Wände nur semikorrekt. Es ist z.B. unmöglich, einen vernünftigen Impulsoperator
$$p \in \text{Lsa}\Big(L^2\big((0,a)\big)\Big)$$
anzugeben, sodass $\mathcal{H} = \dfrac{p^2}{2m}$. Exakter wäre es, einen Potentialtopf großer, aber endlicher Tiefe zu betrachten (vgl. Üb. 8).

7.1 Übungen

1. Zeige, dass $\psi : \{P \in L(H) : P \text{ Projektor}\} \tilde{\longrightarrow} M_1$.

2. Es sei $A \in \text{Lsa},\ z = \mathbb{C}x,\ x \in D(A)$. Zeige:
   $\text{var}\,(A)z = 0 \Longleftrightarrow x$ ist ein Eigenvektor von A.

3. Untersuche das freie Teilchen auf dem Kreis
   $\{R(\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi < 2\pi\},\ R > 0$.

   (a) Gib eine Darstellung für $H, \hat{x} := R \cdot \hat{\varphi}, p, \mathcal{H}$ an!

   (b) Bestimme $\sigma(p), \sigma(\mathcal{H})$ und die stationären Zustände.

   (c) Hat die Heisenberg'sche Unschärferelation in diesem Fall einen Sinn?

4. Die Operatoren $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ in $H = L^2\big((0,1) \times (0,1)\big)$ sind vertauschbar.

   (a) Bestimme $A \in L(H) \cap \text{Ls}(H)$ und $h_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1)$ mit
   $h_i(A) = \hat{x}_i,\ i = 1, 2$.

   (b) Kann man $h_i \in \mathcal{C}^1$ wählen?

5. Berechne alle $f \in L^2_1 \cap \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^1) \setminus 0$ für die

$$\text{var}\,(\hat{x})f \cdot \text{var}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f = \frac{\hbar^2}{4},$$

   d.h. minimal ist.

6. Überprüfe die Heisenberg'sche Unschärferelation für die stationären Zustände eines Teilchens im Potentialtopf (S. 84, Beispiel 26).
   Hinweis: Setze $\bar{p} = 0,\ \text{var}\,(p) = 2mE_n$.

7. Berechne die stationären Zustände und ihre Energien in einem ∞ hohen, rechteckigen Potentialkasten $0 \leq x_j \leq a_j,\ j = 1, 2, 3$ im $\mathbb{R}^3$.

8. (a) Gib eine goniometrische Gleichung für die Energieeigenwerte des endlichen Potentialtopfes im $\mathbb{R}^1$ an: $H = L^2(\mathbb{R}^1), \hat{x}, p$ wie üblich,

$$\mathcal{H}_V : \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow H : f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m}f'' + V(1 - \chi_{(0,a)}) \cdot f,$$

$$V > 0, \quad \chi_{(0,a)}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 < x < a \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

   (b) Was ist $\sigma(\mathcal{H}_V), \sigma_{\text{p}}(\mathcal{H}_V)$?

(c) Gib eine Näherungsfunktion für $\min \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_V)$ für kleines V an.

(d) Betrachte den Limes $V \to \infty$.

9. $\mathcal{H}_N, \mathcal{H}_\infty$ seien wie in S. 85. Zeige:

   (a) $\mathcal{H}_N$ ist sa.,

   (b) $D(\mathcal{H}_N) = D(\mathcal{H}_\infty) + \mathbb{C} \cdot \left(|x| + \dfrac{\hbar^2}{mN} \right)(x-a)\mathrm{e}^{-x^2} +$
   $+\mathbb{C} \cdot \left(|x-a| + \dfrac{\hbar^2}{mN} \right) \cdot x\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$,

   (c) $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_N) = \emptyset$. Das bedeutet, dass man in der QM ein Teilchen durch δ-artige Potentialwälle nicht einsperren kann (sog. Tunneleffekt). Ist es klassisch auch so?

10. Welche Observable wird durch $A \cdot B$ repräsentiert, wenn $A, B \in \mathrm{Ls}(H) \cap L(H)$ vertauschbar sind?

11. Bestimme den Hamiltonoperator $\mathcal{H}$ und sein Spektrum für ein freies Teilchen am halbunendlichen Intervall $(0, \infty)$.

Kapitel 8

Der harmonische Oszillator

H. Haken *Quantenfeldtheorie des Festkörpers*

E. Henley, W. Thirring *Elementare Quantenfeldtheorie*

J. Glimm, A. Jaffe *Quantum Physics*

Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich auf der reellen Achse unter der „elastischen Kraft“ $-k \cdot x$ bewegt. Die potentielle Energie ist also $V(x) = \frac{k}{2}x^2$:

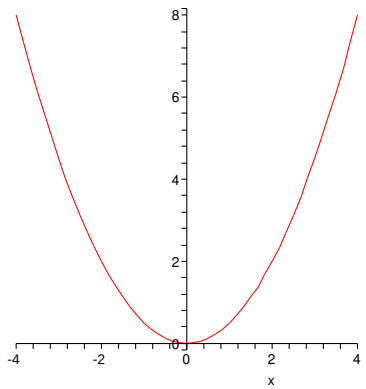


Abbildung 8.1: $V(x) = \frac{k}{2}x^2$

Seine Energie ist $\mathcal{H}(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$. Die klassischen Hamiltonschen Gleichungen sind:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx,\ \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

mit der Lösung: $x = a\sin(\omega t + \delta)$, $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Dieses System heißt *harmonischer Oszillator*.
Wir betrachten es nun quantenmechanisch. Nach Kapitel 7 setzen wir:
$H = L^2(\mathbb{R}^1)$, $\hat{x}$ = Ortsmessung, $p = -\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ = Impulsoperator,

$$\mathring{\mathcal{H}} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow H : \; f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m} f'' + \frac{k}{2} x^2 f,$$

und suchen eine selbstadjungierte Erweiterung von $\mathring{\mathcal{H}}$. Der Einfachheit halber sei zunächst $\dfrac{\hbar^2}{2m} = \dfrac{k}{2} = 1$. Dann heißt der Operator $\mathcal{H} := \overline{\mathring{\mathcal{H}}}$ *Hermitescher Differentialoperator*.

Satz 8.1
$\mathcal{H}$ sei der Hermitesche Differentialoperator.

1. $\mathcal{H}$ ist selbstadjungiert,
2. $\mathcal{H}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum,
3. $\sigma_{\mathrm{d}}(\mathcal{H}) = \{2n + 1 : n = 0, 1, 2, \cdots\}$,
4. der Eigenraum zum Eigenwert $2n + 1$ ist $\mathbb{C} \cdot \left(x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Beweis.

a) $\mathring{\mathcal{H}}$ ist symmetrisch und daher abschließbar. Auch $\mathcal{H} = \overline{\mathring{\mathcal{H}}}$ ist folglich symmetrisch. $D(\mathcal{H})$ = Abschluss von $\mathcal{D}$ in der Norm $\|f\|^2_{\mathring{\mathcal{H}}} = \|f\|^2 + \|\mathring{\mathcal{H}} f\|^2$ enthält jedenfalls $\mathcal{S}$, da $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ dicht ist und $\|\cdot\|_{\mathring{\mathcal{H}}}$ eine Norm auf $\mathcal{S}$ ist. Klarerweise gilt dann:

$$\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}\big|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} : f \longmapsto -f'' + x^2 f.$$

b) Um die Eigenvektoren von $\mathcal{H}$ zu finden, zerlegen wir $\mathcal{H}_1$:

$$\mathcal{H}_1 f = \left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) f + f \text{ für } f \in \mathcal{S}$$

$$A := x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$B := x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}_1 = AB + I \text{ und } AB = BA - 2I.$$

Es sei $0 \neq f \in \mathcal{S}$, $\mathcal{H}_1 f = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \mathcal{H}_1 Af &= (ABA + A)f = \big(A(AB + 2I) + A\big)f \\ &= A(\mathcal{H}_1 + 2I)f = (\lambda + 2)Af, \end{aligned}$$

d.h. Af ist 0 oder ein Eigenvektor von $\mathcal{H}_1$ zum Eigenwert $\lambda + 2$. Ebenso ist Bf 0 oder ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda - 2$.

$\mathcal{H}_1 \in \mathrm{Ls}(H)$ und

$$(\mathcal{H}_1 f, f) = (ABf, f) + \big\|f\big\|^2 = \big\|Bf\big\|^2 + \big\|f\big\|^2 \geq \big\|f\big\|^2$$

$\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von $\mathcal{H}_1$ liegen in $[1, \infty) \Longrightarrow B^k f = 0$ für $\lambda - 2k < 1$.

Es sei k so, dass $B^k f = 0$, $B^{k-1} f \neq 0 \Longrightarrow$

$$\mathcal{H}_1(B^{k-1} f) = AB^k f + B^{k-1} f = B^{k-1} f$$

$\Longrightarrow B^{k-1} f$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert

$$\lambda - 2(k-1) = 1 \Longrightarrow \lambda = 2k - 1.$$

Somit liegen alle Eigenwerte von $\mathcal{H}_1$ in $\{1, 3, 5, \cdots\}$. Wenn $\lambda = 1$, so ist $Bf = 0$, d.h. $f' + xf = 0$, $f = c\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Der Eigenraum von $\mathcal{H}_1$ zum Eigenwert 1 ist also $\mathbb{C} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$. $A^n \mathrm{e}^{-x^2/2} \not\equiv 0$, denn die Gleichung

$$Af = xf - f' = 0$$

hat nur die Lösungen $f = c\mathrm{e}^{x^2/2} \notin \mathcal{S}$. Daher ist $A^n \mathrm{e}^{-x^2/2}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $2n + 1$.
Es sei $f_n = c_n A^n \mathrm{e}^{-x^2/2}$, $c_n > 0$, so, dass $\big\|f_n\big\| = 1$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Induktiv zeigt man, dass

$$f_n = (\text{Polynom vom Grad} \leq n) \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Da $\mathcal{H}_1 \in \mathrm{Ls}(H)$, sind die f_n orthogonal und folglich ist

$$f_n = (\text{Polynom vom Grad } = n) \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Die f_n sind auch vollständig in $\mathcal{H}$: Es sei $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \perp f_n$ für $n = 0, 1, 2, \cdots$;

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\mathrm{i}x\xi)^k}{k!} \mathrm{e}^{-x^2/2} \longrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi - x^2/2} \qquad \text{für} \qquad n \to \infty$$

in $L^2(\mathbb{R}^1_x)$ nach dem Satz von Lebesgue (Majorante: $\mathrm{e}^{|x\xi|-x^2/2}$)
$\Longrightarrow \forall \xi \in \mathbb{R} : f \perp \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi - x^2/2} \Longrightarrow \forall \xi \in \mathbb{R} : \int f(x)\mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = 0$
$\Longrightarrow \big(f(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\big)\widehat{\ } = 0 \Longrightarrow f = 0$. Somit bildet $\{f_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ eine ONB in H.

c) Noch zu zeigen bleibt:
Durch den Isomorphismus

$$\Phi : H \xrightarrow{\sim} l^2(\mathbb{N}_0) : f \longmapsto (f, f_n)$$

geht $D(\mathcal{H})$ über in $l^2_1 := \big\{(a_n) \in l^2 : (na_n) \in l^2\big\}$ und $\mathcal{H}$ in

$$2\hat{n} + 1 : l^2_1 \longrightarrow l^2 : (a_n) \longmapsto \big((2n+1)a_n\big).$$

Denn für $2\hat{n}+1$ gilt der Satz (vgl. etwa den Beweis von Beispiel 23 auf Seite 62), sodass er auch für $\mathcal{H}$ folgt.

d) Durch Φ geht $\mathcal{H}_1$ über in einen Operator $C \in \mathrm{Ls}(l^2)$ mit
$D \subset C \subset 2\hat{n} + 1$, wobei $D = (2\hat{n}+1)\big|_{\{(a_n)\text{: nur endlich viele } a_n \neq 0\}}$.
Wegen $\bar{D} = 2\hat{n} + 1$ und $\overline{\mathcal{H}_1} = \mathcal{H}$ folgt die Behauptung in c).

□

Bemerkung

1. A wird auch Erzeugungsoperator, B Vernichtungsoperator genannt.

2. Die Funktionen $f_n = c_n\left(x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (siehe Seite 90) heißen *Hermitesche Funktionen*. Induktiv zeigt man leicht, dass

$$f_n = (-1)^n c_n \mathrm{e}^{x^2/2}(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)}$$

und $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$. Die Polynome $H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)}$ heißen *Hermitesche Polynome*.

3. Aufgrund des Satzes hat $\mathring{\mathcal{H}}$ nur die einzige selbstadjungierte Erweiterung $\overline{\mathring{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ muss daher der Hamiltonoperator sein.

Folgerung Der quantenmechanische harmonische Oszillator wird beschrieben durch $\mathcal{H} = \overline{\mathring{\mathcal{H}}}$,

$$\mathring{\mathcal{H}} : \mathcal{D} \longrightarrow H : f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m} f'' + \frac{k}{2} x^2 f.$$

Er hat das diskrete Energiespektrum

$$\left\{ \lambda_n = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \left(n + \frac{1}{2} \right) : n = 0, 1, 2, \cdots \right\}.$$

Die stationären Zustände sind $z_n = \mathbb{C} \cdot f_n \left(x \sqrt[4]{\frac{km}{\hbar^2}} \right)$, wobei f_n die n-te Hermitesche Funktion ist.

Beweis. Wir betrachten den Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} H : f \longmapsto \sqrt{c}\, f(cx)$ mit $c = \sqrt[4]{\frac{km}{\hbar^2}}$. Der Hermitesche Differentialoperator geht dabei in $2\sqrt{\frac{m}{k\hbar^2}}\mathcal{H}$ über, $\mathcal{H}$ wie in der Folgerung.
$2\sqrt{\frac{m}{k\hbar^2}}\mathcal{H}$ hat also reines Punktspektrum $\sigma_{\mathrm{d}} = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit den Eigenräumen $\mathbb{C} \cdot f_n(cx)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung Der einzige stationäre Zustand im klassischen Modell ist $x \equiv 0$. Er entspricht dem stationären Zustand $\mathbb{C} \cdot f_0(cx)$. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist dabei:

$$\mu_{\mathrm{Ort}}(x) = c \left| f_0(cx) \right|^2 = \sqrt[4]{\frac{km}{\hbar^2 \pi^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{km}\, x^2/\hbar},$$

d.h. ist Gauß- verteilt mit Varianz $\dfrac{\hbar}{2\sqrt{km}}$. Die übrigen stationären Zustände z_n haben kein klassisches Analogon.
Für beliebige Zustände gilt wie im klassischen Modell:

Satz 8.2
Jeder Zustand $z = \mathbb{C} \cdot f$, $0 \neq f \in H$, ist periodisch mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und Periode $T := \dfrac{2\pi}{\omega}$. (Das soll nicht heißen, dass T im Allgemeinen die kleinste Periode von z ist.)
Explizit:

$$A_T f = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}T\mathcal{H}/\hbar} f = -f.$$

Beweis. $g_n = \sqrt{c}\, f_n(cx)$, $c = \sqrt[4]{\dfrac{km}{\hbar^2}}$, ist eine ONB von Eigenvektoren von $\mathcal{H}$ mit den Eigenwerten $\lambda_n = \hbar\omega\big(n + \frac{1}{2}\big)$. Daher ist die Spektralschar von $\mathcal{H}$:

$$E_\lambda g = \sum_{\lambda_n < \lambda} (g, g_n) \cdot g_n$$

und

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} g = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda/\hbar}\, \mathrm{d}E_\lambda g = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_n/\hbar} (g, g_n) \cdot g_n;$$

aus $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T\lambda_n/\hbar} = -1$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung Im Gegensatz zum klassischen Oszillator sind auch größere Frequenzen als ω möglich. (Warum?)
Zur Illustration des Schwingungsverhaltens betrachte ich nun noch einige instationäre Zustände. Zuvor:

Lemma 7 *H beschreibe ein quantenmechanisches System mit Hamiltonoperator $\mathcal{H} \in \mathrm{Lsa}(H)$, $0 \neq f_0 \in D(\mathcal{H})$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow H : t \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} f_0$. Dann gilt:*

(i) *f ist stetig differenzierbar*

(ii) $f'(t) = -\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} \mathcal{H} f_0$

(iii) *$\forall t : f(t) \in D(\mathcal{H})$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} \mathcal{H} f_0 = \mathcal{H} f(t)$.*

Beweis.
(i),(ii) Der Beweis von Satz 7.1 auf Seite 80 zeigt bereits, dass f stetig ist. Die Differenzierbarkeit folgt aus

$$\lim_{t \to t_1} \left\| \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1\mathcal{H}/\hbar} \mathcal{H} f_0 \right\|^2 =$$

$$\lim_{t \to t_1} \left\| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1\mathcal{H}/\hbar} \left(\frac{f(t - t_1) - f_0}{t - t_1} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\, \mathcal{H} f_0 \right) \right\|^2 =$$

($\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1\mathcal{H}/\hbar}$ ist unitär nach Übung 8 auf Seite 67)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{f(\tau)-f_0}{\tau}+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{H}f_0\right\|^2 \\ &= \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\lambda/\hbar}-1}{\tau}+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\lambda\right|^2 \mathrm{d}(E_\lambda f_0, f_0)\to 0 \end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue, da

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\lambda/\hbar}-1}{\tau}=\frac{\cos(\frac{\tau\lambda}{\hbar})-1-\mathrm{i}\sin(\frac{\tau\lambda}{\hbar})}{\tau}=-\frac{\lambda}{\hbar}\sin\left(\frac{\tau_1\lambda}{\hbar}\right)-\mathrm{i}\,\frac{\lambda}{\hbar}\cos\left(\frac{\tau_2\lambda}{\hbar}\right),$$

$0<|\tau_1|,|\tau_2|<|\tau|$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,\mathrm{d}(E_\lambda f_0,f_0)<\infty$.

Somit ist $f'(t)=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}\mathcal{H}f_0$ und das ist stetig nach dem Beweis von Satz 7.1.

(iii) $f_N := (E_N - E_{-N})f_0$. Dann gilt $f_N \longrightarrow f_0$, $\mathcal{H}f_N \longrightarrow \mathcal{H}f_0$,

$$\mathcal{H}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}f_N}_{g_N}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}\mathcal{H}f_N;$$

$g_N \longrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}f_0$, da $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}\in L(H)$, $\mathcal{H}g_N \longrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}\mathcal{H}f_0$, $\mathcal{H}$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}f_0\in D(\mathcal{H})$ und $\mathcal{H}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}f_0=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}\mathcal{H}f_0$. □

Bemerkung Aus (ii) und (iii) ergibt sich die *Schrödingergleichung* $\mathrm{i}\hbar f'(t) = \mathcal{H}f(t)$ für $f_0\in D(\mathcal{H})$.

Ich untersuche nun, ob es Zustände gibt, deren Ortsunschärfe sich verzerrungsfrei bewegt, d.h.

$$\mu_{\mathrm{Ort}}(t)=\mu_{\mathrm{Ort}}(t_0)\big(x-a(t)\big).$$

Diese Untersuchung ist heuristisch; alles, was differenziert wird, sei differenzierbar. Es sei also $f_0\in D(\mathcal{H})$, $f(t)$ wie im Lemma, $\big|f(t)\big| = \Big|h\big(x-a(t)\big)\Big|$, h, a reelle Funktionen (wir können h nicht positiv voraussetzen, da es dann im Allgemeinen nicht differenzierbar wäre) $\Longrightarrow$ es gibt eine reellwertige Funktion

$b(t,x)$ mit $f(t,x) = f(t)(x) = h\big(x-a(t)\big)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}b(t,x)} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t} &= \left[-a'(t)h'\big(x-a(t)\big) + \mathrm{i}\,\frac{\partial b}{\partial t}\cdot h\big(x-a(t)\big)\right]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}b(t,x)} = (\text{Lemma}) = \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{H}f(t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{km}{\hbar^2}x^2\right)f = \\ &= \frac{\mathrm{i}\hbar \mathrm{e}^{\mathrm{i}b(t,x)}}{2m}\Bigg[h''\big(x-a(t)\big) + 2\mathrm{i}\,\frac{\partial b}{\partial x}h'\big(x-a(t)\big) + \\ &\qquad + \left(\mathrm{i}\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \Big(\frac{\partial b}{\partial x}\Big)^2 - \frac{km}{\hbar^2}x^2\right)h\big(x-a(t)\big)\Bigg] \end{aligned}$$

Wenn b linear in x ist, ergibt Trennung in Real- und Imaginärteil:

(I) $-a'(t) = -\dfrac{\hbar}{m}\dfrac{\partial b}{\partial x} \Longrightarrow b = \dfrac{m}{\hbar}xa'(t) + d(t)$, $d(t)$ eine reelle Funktion

$$\begin{aligned} \text{(II)}\quad \left(\frac{m}{\hbar}xa''(t) + d'(t)\right)h\big(x-a(t)\big) &= \frac{\partial b}{\partial t}h\big(x-a(t)\big) = \\ &= \frac{\hbar}{2m}h''\big(x-a(t)\big) - \Big(\frac{m}{2\hbar}a'(t)^2 + \frac{k}{2\hbar}x^2\Big)h\big(x-a(t)\big) \end{aligned}$$

Daher ist $\dfrac{kx^2}{2\hbar} + \dfrac{m}{\hbar}xa''(t) + d'(t) + \dfrac{m}{2\hbar}a'(t)^2$ eine Funktion von $x-a(t)$.
Sie heiße $g\big(x-a(t)\big)$.
Offenbar ist g ein quadratisches Polynom, d.h. $g(s) = \alpha s^2 + \beta s + \gamma \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \alpha = \dfrac{k}{2\hbar}$, $\beta - 2\alpha a(t) = \dfrac{m}{\hbar}a'' \Longrightarrow a'' + \dfrac{k}{m}a = \dfrac{\hbar\beta}{m}$, $a = \dfrac{\hbar\beta}{k} + \epsilon\cos(\omega t + \delta)$,
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, δ, $\epsilon \in \mathbb{R}$.
Für h erhalten wir nun aus (II) folgende Differentialgleichung:

$$g\big(x-a(t)\big)h\big(x-a(t)\big) = \frac{\hbar}{2m}h''\big(x-a(t)\big)$$

$$\Longrightarrow (\alpha s^2 + \beta s + \gamma)h(s) = \frac{\hbar}{2m}h''(s);\ \sigma := s + \frac{\beta}{2\alpha},\ \tilde{h}(\sigma) := h(s)$$
$$\Longrightarrow (\alpha\sigma^2 + \tilde{\gamma})\tilde{h} = \frac{\hbar}{2m}\tilde{h}'',\ \tilde{\gamma} := \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha};$$

$\tilde{h} \in D(\mathcal{H}) \Longrightarrow \mathcal{H}\tilde{h} = -\hbar\tilde{\gamma}\tilde{h} \Longrightarrow \tilde{\gamma} = -\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, $\tilde{h} \in \mathbb{C}\cdot f_n(cx)$, wobei c, f_n wie auf Seite 92 sind, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$h\big(x-a(t)\big)=\tilde{h}\left(\frac{\beta}{2\alpha}+x-\frac{\hbar\beta}{k}-\epsilon\cos(\omega t+\delta)\right)=\tilde{h}\big(x-\epsilon\cos(\omega t+\delta)\big),$$
$$b=-\frac{m\epsilon\omega}{\hbar}\,x\sin(\omega t+\delta)+d(t)$$
$$\Longrightarrow \underline{f(t)=\text{const.}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}d(t)}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\epsilon\omega\hbar^{-1}x\sin(\omega t+\delta)}\cdot f_n\big(cx-c\epsilon\cos(\omega t+\delta)\big)}.$$

Wegen $f(t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1_x)$ ist es nun im nachhinein nicht schwierig, exakt zu beweisen, dass $f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}t\mathcal{H}}{\hbar}}f(t=0)$. Man zeigt zunächst, dass $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=-\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{H}f(t)$ (z.B.: in $\mathcal{D}'\big(\mathbb{R}^1_x\big)\big)$. Dieselbe Gleichung gilt für $g(t):=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}t\mathcal{H}}{\hbar}}f(t=0)$, (vgl. das Lemma 7, Seite 93). Daher ist für $\varphi\in\mathcal{D}$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}<\varphi,f(t)-g(t)>=0\Longrightarrow$
$\forall\varphi\in\mathcal{D}:<\varphi,f(t)-g(t)>=\text{const.}(\varphi)=0$ für $t=0$ und folglich $f(t)=g(t)$.
Ergebnis: f ist ein Zustand, dessen Ortsunschärfe verzerrungsfrei mit Frequenz ω und Amplitude ϵ um den 0-Punkt oszilliert. Seine Ortsunschärfe hat dieselbe Verteilung wie die eines stationären Zustandes.

Bemerkung

1. Die Zustände, die sich für $n=0$ ergeben, deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit also Gauß-verteilt mit Mittelpunkt $\epsilon\cos(\omega t+\delta)$ ist, heißen auch *kohärente Zustände*. Bild aus Henley-Thirring, p. 29 ($\delta=0$, $\epsilon\widehat{=}d$, $x\widehat{=}q'$):

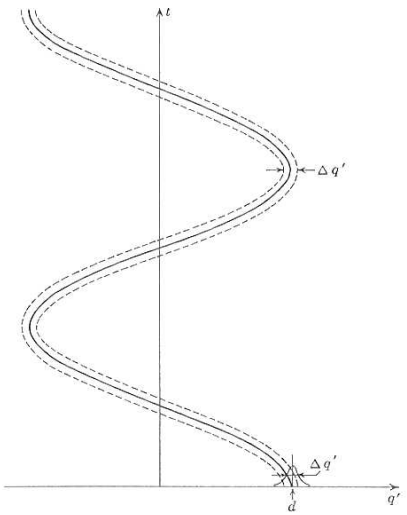


Abbildung 8.2: Darstellung der Bewegung des Wellenpaketes $|d>$. Die Bewegung des Zentrums des Paketes und seine Breite $\Delta q'$ sind dargestellt. Gezeigt ist auch die Verteilung des Paketes für $t=0$.

2. Das Ergebnis, dass sich das Wellenpaket als Ganzes und somit auch der Erwartungswert $\bar{x}(t)$ der Ortsmessung entsprechend den Gesetzen der klassischen Mechanik bewegt (hier: $\bar{x} = \epsilon\cos(\omega t + \delta)$) haben wir bereits beim freien Teilchen erhalten. Das Entsprechende gilt allgemein, wir hätten also in der obigen Rechnung von vornherein $a(t)$ hinschreiben können. Dies will ich im Folgenden begründen.

Satz 8.3 *(Heisenbergsche Gleichung)*
Bezeichnungen wie im Lemma 7, $B \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$. Dann gilt:

(i) $\big(Bf(t), f(t)\big)$ ist stetig differenzierbar,

(ii) falls $Bf(t) \in D(\mathcal{H})$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(Bf(t), f(t)\big) = +\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big([\mathcal{H}, B]f(t), f(t)\big), \qquad [\mathcal{H}, B] := \mathcal{H}\circ B - B\circ\mathcal{H}.$$

Beweis.

(i) folgt aus Lemma 7,

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(Bf(t), f(t)\big) &= \big(Bf'(t), f(t)\big) + \big(Bf(t), f'(t)\big)\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big(B\mathcal{H}f(t) - \mathcal{H}Bf(t), f(t)\big).\end{aligned}$$

□

Um auch unbeschränkte Operatoren $B \in \mathrm{Lsa}$ betrachten zu können, benötigt man folgende Fassung:

Satz 8.4
In der obigen Situation sei $B \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow D(B)$ stetig differenzierbar, wobei $D(B)$ mit der Norm $\big\|g\big\|_B^2 = \big\|g\big\|^2 + \big\|Bg\big\|^2$, $g \in D(B)$, versehen wird. Dann gelten wieder (i) und (ii).

Der *Beweis* ist der gleiche.

Anwendung

Es sei der letzte Satz verwendbar und $H = L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_n + U(x_1, \ldots, x_n),$$
$$B = \widehat{x}_j \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\bar{x}_j(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big([\mathcal{H}, \widehat{x}_j]f(t), f(t)\big);$$

$$[\mathcal{H}, \widehat{x}_j] = -\frac{\hbar^2}{2m}[\Delta, \widehat{x}_j] = -\frac{\hbar^2}{2m}[\partial_j^2, \widehat{x}_j] = -\frac{\hbar^2}{m}\partial_j$$
$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\bar{x}_j(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\big(\partial_j f(t), f(t)\big) = \frac{1}{m}\bar{p}_j(t).$$

Ebenso ergibt sich $\dfrac{\mathrm{d}\bar{p}_j(t)}{\mathrm{d}t} = -\overline{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}}(t)$. (Das wird auch als *Theorem von Ehrenfest* bezeichnet.) Insbesondere $m\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\overline{\nabla U}$.
Speziell beim harmonischen Oszillator: $m\ddot{\bar{x}} = -k\bar{x}$, d.h. $\bar{x}$ bewegt sich wie ein Massenpunkt im klassischen Modell.

8.1 Übungen

f_n bezeichnen immer die Hermiteschen Funktionen, siehe Seiten 91, 92.

1. (a) Beweise das in Bemerkung, 2., Seite 91, Behauptete.
   (b) Berechne die ersten 4 Hermiteschen Polynome.

2. Berechne $\widehat{f_n}$ und bestimme die Eigenräume von
   $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

3. $\mathcal{H}$ sei der Hermitesche Differentialoperator. Beweise:
   (a) $D(\mathcal{H}) = L_2^2 \cap \mathcal{H}^{(2)}$,
   (b) $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \longrightarrow L^2 : f \longmapsto -f'' + x^2 f$.
   Hinweis: Zeige zunächst $D(\mathcal{H}) = \left\{ f \in L^2 : \sum n^2 \big|(f, f_n)\big|^2 < \infty \right\}$ und dann: $f \in D(\mathcal{H}) \Longrightarrow xf \pm f',\ x^2 f \pm f'' \in L^2$.

4. Es sei $s := \Big\{(c_\alpha) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} : \forall m \in \mathbb{N} : \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} |c_\alpha|\,|\alpha|^m < \infty\Big\}$.

   Zeige:

   (a) s ist ein Fréchetraum mit den Normen
   $\big\|(c_\alpha)\big\|_m := \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \big(|\alpha|+1\big)^m |c_\alpha|$,

   (b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} s : g \longmapsto \Big(\big(g, f_{\alpha_1}(x_1)\cdots f_{\alpha_n}(x_n)\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big)_\alpha$
   $= \left(\int f_{\alpha_1}(x_1)\ldots f_{\alpha_n}(x_n) g(x)\,\mathrm{d}x\right)_\alpha$

   ist ein Isomorphismus von Fréchteräumen.

5. (Fortsetzung) Beweise:

   (a) $s' \simeq \Big\{(d_\alpha) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} : \exists m \in \mathbb{N} : \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} |c_\alpha|\big(|\alpha|+1\big)^{-m} < \infty\Big\}$,
   $h \longmapsto \Big(h\big((\delta_{\alpha,\beta})_\beta\big)\Big)_\alpha$,
   $(\delta_{\alpha,\beta})_\beta \in s$, $\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1: & \alpha = \beta \\ 0: & \text{sonst,} \end{cases}$

   (b) $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} s' : T \longmapsto \big(< f_{\alpha_1}(x_1)\ldots f_{\alpha_n}(x_n), T >\big)_\alpha$.

6. (Fortsetzung) $P\left(x, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1) : T \longmapsto x^2 T - T''$.

   (a) Zeige: P ist bijektiv und hat dieselben Eigenvektoren wie der Hermitesche Differentialoperator.

   (b) Bestimme die Greensche Funktion von P in $\mathcal{S}'$, d.h. $T_\xi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1_x)$ mit $x^2 T_\xi - T_\xi'' = \delta(x-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.
   (Lösung: $T_\xi = \dfrac{f(-\xi)f(x)Y(x-\xi) + f(\xi)f(-x)Y(\xi-x)}{2\sqrt{2}\,\pi}$, wobei $f(x) :=$ analytische Fortsetzung von $\sqrt{x}K_{1/4}\big(\frac{x^2}{2}\big)$, $x > 0$.)

7. (Fortsetzung von 5.) Beweise den Kernsatz (von L. Schwartz) in $\mathcal{S}'$:
   $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m_y) \longrightarrow \mathbb{C}$ sei bilinear und stetig. Zeige: $\exists T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$: $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) :< \varphi(x)\cdot\psi(y), T >= B(\varphi,\psi)$.

8. $z = \mathbb{C}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\epsilon\omega\hbar^{-1}x\sin(\omega t+\delta)} \cdot f_0\big(c(x - \epsilon\cos(\omega t+\delta)\big)$ ist der kohärente Zustand mit Amplitude ϵ und Phase δ. Berechne die Wahrscheinlichkeit w_j, in diesem Zustand die Energie $\lambda_j = \hbar\omega\left(j+\dfrac{1}{2}\right)$, $j = 0,1,2,\cdots$, zu messen.

Hinweise:

(a) $w_j = \dfrac{\left|(\sqrt{c}f_j(cx), f)\right|^2}{\left\|f\right\|^2}$, wobei $z = \mathbb{C} \cdot f$, $c = \sqrt[4]{\dfrac{km}{\hbar^2}}$ (warum?),

(b) w_j ist von der Zeit unabhängig. Betrachte daher einen Zeitpunkt, in dem $\cos(\omega t + \delta) = 0$

(c) Partiell integrieren!

9. (Fortsetzung) z sei wie in 8).

   (a) Berechne $\overline{\mathcal{H}}z = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \cdot \lambda_j$ und $\mathrm{var}(\mathcal{H})z$.

   (b) Vergleiche die Energie und ihre Unschärfe im Zustand z mit den Verhältnissen im klassischen Modell im Fall einer makroskopischen Schwingung: $m = 1[\mathrm{g}]$, $k = 1[\mathrm{g/sec^2}]$, $\epsilon = 1[\mathrm{cm}]$.

10. Es sei $\mathcal{H}$ der Hermitesche Differentialoperator, $\tau > 0$, $A := \mathrm{e}^{-\tau\mathcal{H}}$. Zeige:

    (a) $A \in L(H)$

    (b) $Af = \displaystyle\int f(\xi)K(\tau,\xi,x)\,\mathrm{d}\xi$ mit $K(\tau,\xi,x) =$
    $= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sinh(2\tau)}}\,\mathrm{e}^{-\coth(2\tau)(x^2+\xi^2)/2+x\xi/\sinh(2\tau)}$ (*Mehlersche Formel*).
    Hinweis: $K(\tau,\xi,x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2n+1)\tau} f_n(x)f_n(\xi)$, verwende die Darstellung $f_n = (-1)^n c_n \mathrm{e}^{x^2/2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$ und Fouriertransformation.

Bemerkung $Y(\tau)K(\tau,\xi,x)$ ist die Greensche Funktion von $\partial_\tau + \mathcal{H}$, d.h. $(\partial_\tau - \partial_x^2 + x^2)K(\tau,\xi,x) = \delta(\tau) \otimes \delta(x-\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^1$.

11. (Fortsetzung) Es sei nun wieder $\mathcal{H}f = -\dfrac{\hbar}{2m}f'' + \dfrac{k}{2}x^2 f$, $A_1 = \mathrm{e}^{-\tau\mathcal{H}}$, K_1 der Kern von A_1.

    (a) Zeige: $K_1(\tau,\xi,x) = cK\left(\sqrt{\dfrac{k\hbar^2}{4m}}\tau, c\xi, cx\right)$, $c = \sqrt[4]{\dfrac{km}{\hbar^2}}$.

    (b) Bestimme die Fundamentallösung von $\partial_t - \partial_x^2$ durch Einsetzen von $\dfrac{\hbar^2}{2m} = 1$ und $k \searrow 0$.

12. (Fortsetzung)

(a) Durch analytische Fortsetzung in $\operatorname{Re}\tau > 0$ und stetige Fortsetzung in $\operatorname{Re}\tau \geq 0$ zeige man, dass für $f \in H$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} f = \begin{cases} \displaystyle\int f(\xi) K_2(t,\xi,x)\,\mathrm{d}\xi : & t \notin \mathbb{Z}\frac{\pi}{\omega} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} f\big((-1)^{\omega t/\pi} x\big) : & t \in \mathbb{Z}\frac{\pi}{\omega}, \end{cases}$$

wobei $K_2(t,\xi,x) = \dfrac{c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{i}^{-[\omega t/\pi]}}{\sqrt{2\pi\big|\sin(\omega t)\big|}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}c^2\left[\cot(\omega t)(x^2+\xi^2)/2 - x\xi/\sin(\omega t)\right]}$.

(b) Berechne $f(t)$ für $f = \mathrm{e}^{-(x-a)^2/(2b)}$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Kapitel 9

Das Wasserstoffatom (ohne Spin)

Zur Geschichte: Ursprünglich hielt man Atome für nicht weiter zerlegbare Teilchen. Aus der Dichte ϱ eines festen bzw. flüssigen Stoffes sowie der Teilchenzahl pro mol: $L \approx 6 \cdot 10^{23}$ (Loschmidt, 1865) kann man den ungefähren Durchmesser d der Atome bestimmen:
$\varrho \approx m_0/d^3$, $m_0 =$ Atommasse $=$ Molmasse$/L$. Größenordnungsmäßig ergibt sich für das H-Atom: Molmasse $\approx 1\,\mathrm{g}$, $m_0 \approx 10^{-24}\,\mathrm{g}$, $\varrho \approx 1\,\mathrm{g/cm^3}$, $d \approx \sqrt[3]{m_0/\varrho} \approx 10^{-8}\,\mathrm{cm}$.
Aus seinen Streuversuchen folgerte Lord Rutherford 1911, dass in den Atomen fast die gesamte Masse in einem sehr kleinen, positiv geladenen Kern (Durchmesser $\approx 10^{-12}\,\mathrm{cm}$) konzentriert ist. Daraus entstand das Planetenmodell der Atome: Der positiv geladene Kern wird von negativ geladenen Elektronen umkreist. Ich will nun am H-Atom, das aus einem Proton und einem Elektron besteht, beschreiben, zu welchen Schwierigkeiten dieses Modell führt.
Wir können das Proton in 1. Näherung als identisch mit dem Schwerpunkt des H-Atoms betrachten. Das Elektron läuft im Potential des Coulombfeldes $V(x) = -\dfrac{e^2}{|x|}$ auf einer Ellipse um das Proton. (Kepler! Wir verwenden das Gaußsche Einheitensystem.) Für unsere Überschlagsrechnung genügt es, eine Kreisbahn mit Radius r zu betrachten. Die Beschleunigung des Elektrons ist dann $a = |\nabla V|/m = \dfrac{e^2}{r^2 m}$, $m =$ Elektronenmasse, $e =$ Elektronenladung.

Nach Beispiel auf Seite 8 erzeugt das kreisende Elektron das Lienard–Wiechert–Potential:

$$\varphi_e(t,x) = \frac{ec}{c^2(t-t_1) - \dot{u}(t_1)\big(x-u(t_1)\big)}\,,$$

mit $u(t) =$ Ortsvektor des Elektrons, $c(t-t_1) = \big|x-u(t_1)\big|$.

Für große x (verglichen mit u, d.h. dem H-Atom) gilt:

$$t_1 \approx t - \frac{|x|}{c}, \quad \varphi_e \approx \frac{e}{|x| - \dot{u}x/c}\,.$$

Wenn wir das Potential des Protons addieren:

$$\varphi \approx e\left(\frac{1}{|x| - \dot{u}x/c} - \frac{1}{|x|}\right) \approx \frac{e\dot{u}(t_1)x}{c|x|^2}, \quad \text{da} \quad |\dot{u}| \ll c \quad (|\dot{u}| \approx 10^8 \text{ cm/sec}).$$

Ebenso ist

$$\vec{A} = \varphi_e \frac{\dot{u}}{c} \approx \frac{e\dot{u}(t_1)}{c|x| - \dot{u}(t_1)x}\,.$$

Für die elektromagnetischen Felder erhält man damit:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} = \frac{e}{c^2|x|}\left[-\ddot{u} + \frac{x(x,\ddot{u})}{|x|^2}\right] + O\big(|x|^{-2}\big) \\ &= \frac{e}{c^2|x|^3}\big[(\ddot{u}\times x)\times x\big] + O\big(|x|^{-2}\big)\end{aligned}$$

und

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \approx \frac{e}{c^2|x|^2}\,(\ddot{u}\times x)\,.$$

Hiebei muss man $|\dot{u}| \ll c$ berücksichtigen. Für den Poyntingvektor $\vec{S}$ ergibt sich:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H}) = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{x}{|x|}\cdot|\vec{E}|\,|\vec{H}| = \frac{e^2 x}{4\pi c^3|x|^5}\,|\ddot{u}\times x|^2.$$

Durch eine große Kugel mit Radius R wird also pro Zeiteinheit die Energie

$$\begin{aligned}I &= \oiint\limits_{|x|=R} \vec{S}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}o = \frac{e^2}{4\pi c^3}\oiint\limits_{|\omega|=1} |\ddot{u}\times\omega|^2\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3}|\ddot{u}|^2\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\sin^3\vartheta\;\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2e^2|\ddot{u}|^2}{3c^3}\end{aligned}$$

abgestrahlt. In unserem Fall ist $|\ddot{u}| = a = \dfrac{e^2}{r^2 m}$, d.h. $I = \dfrac{2e^6}{3c^3m^2r^4}$.
Die Energie des Elektrons im Coulombfeld ist

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = -\frac{e^2}{r} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{e^2}{2r}\,.$$

Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + I = 0, \quad \frac{e^2\dot{r}}{2r^2} + \frac{2e^6}{3c^3m^2r^4} = 0, \quad r = \sqrt[3]{r_0^3 - \frac{4e^4t}{c^3m^2}}\,.$$

Das Elektron nähert sich also, um die Energieabstrahlung aufrecht erhalten zu können, auf einer Spiralbahn dem Proton.
Es erreicht das Proton zur Zeit $T \approx \dfrac{r_0^3c^3m^2}{4e^4}$.
Mit $r_0 \approx 10^{-8}\,\mathrm{cm}$, $c \approx 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm/sec}$, $e \approx -5 \cdot 10^{-10} g^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}/\mathrm{sec}$, $m \approx 10^{-27}\mathrm{g}$ erhalten wir $T \approx 10^{-10}\,\mathrm{sec}$.
(Da die Umlaufzeit $\approx 10^{-16}\,\mathrm{sec}$ beträgt, erkennen wir a posteriori, dass es gerechtfertigt war, die Spiralbahn durch Kreisbahnen zu ersetzen.)
Nach dem Rutherford'schen Modell hätte das H-Atom somit nur eine Lebensdauer in der Größenordnung von $10^{-10}\,\mathrm{sec}$.
Um diese mit der Erfahrung nicht vereinbare Instabilität der Atome zu vermeiden, postulierte N. Bohr 1913, dass das Elektron auf gewissen ausgezeichneten Bahnen keine Energie abstrahle. Erst um 1925 wurde diese sogenannte Bohr-Sommerfeld'sche Quantenmechanik von E. Schrödinger und W. Heisenberg theoretisch untermauert und in mancher Hinsicht korrigiert. Ich will nun im Rahmen der Axiomatik von Kapitel 7 das H-Atom behandeln.
Wir nehmen wieder an, dass das Proton im Nullpunkt fixiert ist. Es sei daher

$$\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\mathrm{H}} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H = L^2(\mathbb{R}^3) : f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta f - \frac{e^2}{r}f.$$

Satz 9.1 $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{\mathrm{H}}$ ist wesentlich sa. und für $\mathcal{H} := \overline{\overset{\circ}{\mathcal{H}}}$ gilt:
$D(\mathcal{H}_{\mathrm{H}}) = \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{H}_{\mathrm{H}} : \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H : f \longmapsto -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta f - \dfrac{e^2}{r}f$.

Beweis.

1. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz 2.5 ist
   $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3)$ und folglich ist für $f \in \mathcal{H}^{(2)}$ auch $\dfrac{e^2}{r}f \in L^2$, d.h. $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}$ wie im Satz ist wohldefiniert.

2. Es sei $\chi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 2, \end{cases} \quad \big|\chi(x)\big| \leq 1,\ \forall x,\ f \in \mathcal{H}^{(2)},\ N > 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f}{r}\right\|_2 &\le \left\|\frac{f\chi(Nx)}{r}\right\|_2 + \left\|\frac{f\left|1-\chi(Nx)\right|}{r}\right\|_2 \\ &\le \max_{x\in\mathbb{R}^3}\left|f(x)\right| \cdot \left(\int\limits_{N|x|\le 2} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + C_N\left\|f\right\|_2 \\ &\le \frac{C_{(1)}}{\sqrt{N}} \cdot \left\|f\right\|_{\mathcal{H}^{(2)}} + C_N\left\|f\right\|_2.\end{aligned}$$

$$\left\|f\right\|^2_{\mathcal{H}^{(2)}} = \left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2_2} = \int (1+r^2)^2|\hat{f}|^2\,\mathrm{d}x \le C_{(2)}\left\|f\right\|^2_2 + C_{(3)}\left\|\Delta f\right\|^2_2$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{e^2 f}{r}\right\|_2 \le \frac{C_{(4)}}{\sqrt{N}}\left\|\Delta f\right\|_2 + \tilde{C}_N\left\|f\right\|_2.$$

Da $-\Delta : \mathcal{H}^{(2)} \longrightarrow H$ sa. ist (vgl. Beispiel 21 auf Seite 61), folgt die Selbstadjungiertheit von $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}$ aus dem Satz von Kato (wähle N so groß, dass $C_{(4)}/\sqrt{N} < 1$!).

3. Noch zu zeigen ist $D(\overline{\overset{\circ}{\mathcal{H}}}) = \mathcal{H}^{(2)}$. $\mathcal{H}^{(2)}$ ist vollständig mit der Norm $\left\|f\right\|^2_{\mathcal{H}_{\mathrm{H}}} = \left\|f\right\|^2 + \left\|\mathcal{H}_{\mathrm{H}} f\right\|^2$ (vgl. Satz 3.2).
   Nach der Abschätzung in 2. ist $\left\|f\right\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{H}}} \le C \cdot \left\|f\right\|_{\mathcal{H}^{(2)}}$, d.h. die Abbildung $\left(\mathcal{H}^{(2)}, \left\|\cdot\right\|_{\mathcal{H}^{(2)}}\right) \underset{\mathrm{id.}}{\longrightarrow} \left(\mathcal{H}^{(2)}, \left\|\cdot\right\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{H}}}\right)$ ist stetig. Nach dem Graphensatz ist auch die Umkehrabbildung stetig, d.h. $\left\|\cdot\right\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{H}}}$ und $\left\|\cdot\right\|_{\mathcal{H}^{(2)}}$ sind äquivalent. Da $D(\overline{\overset{\circ}{\mathcal{H}_{\mathrm{H}}}})$ = Abschluss von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ in der Norm $\left\|\cdot\right\|_{\mathcal{H}_{\mathrm{H}}}$ ist und $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}^{(2)}$ dicht ist, folgt $D(\overline{\overset{\circ}{\mathcal{H}}}) = \mathcal{H}^{(2)}$.

□

Bemerkung
Aufgrund dieses Satzes betrachten wir $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}$ als Hamiltonoperator des H-Atoms.

Satz 9.2 $[0,\infty) \subset \sigma_{\mathrm{e}}(\mathcal{H}_{\mathrm{H}})$.

Beweis. Es genügt $[0,\infty) \subset \sigma(\mathcal{H}_{\mathrm{H}})$ zu zeigen, da das diskrete Spektrum nur aus isolierten Punkten von σ besteht.
Es sei $0 \neq \psi \in \mathcal{D}$, $\psi = 0$ in einer Umgebung von 0, ψ reellwertig, $\psi_\epsilon := \epsilon^{3/2}\psi(\epsilon x)$ für $\epsilon > 0$, $f_\epsilon := \psi_\epsilon \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$ mit $\dfrac{\hbar^2 p^2}{2m} = \lambda \ge 0$. Dann ist

1. $\|f_\epsilon\|^2 = \int |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \text{konstant},$

2. $(\mathcal{H}_\mathrm{H} - \lambda I) f_\epsilon \to 0$ für $\epsilon \to 0,$

denn

$$\Delta f_\epsilon = -p^2 f_\epsilon + 2\mathrm{i}(p \cdot \nabla\psi_\epsilon) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + \Delta\psi_\epsilon \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$$
$$\Longrightarrow \|(\mathcal{H}_\mathrm{H} - \lambda I) f_\epsilon\| \le \frac{\hbar^2}{2m}\Big(2|p| \cdot \||\nabla\psi_\epsilon|\| + \|\Delta\psi_\epsilon\|\Big) + e^2 \|\psi_\epsilon / r\| \to 0,$$

da $\nabla\psi_\epsilon = \epsilon^{5/2}(\nabla\psi)(\epsilon x)$, $\Delta\psi_\epsilon = \epsilon^{7/2}(\Delta\psi)(\epsilon x)$, $\psi_\epsilon / r = \epsilon^{5/2}(\psi/r)(\epsilon x)$.
Somit folgt $\lambda \in \sigma(\mathcal{H}_\mathrm{H})$ aus dem Weylschen Kriterium (siehe Satz 5.3). □

Bemerkung
Es gilt sogar $\sigma_\mathrm{e}(\mathcal{H}_\mathrm{H}) = [0, \infty)$.
Um das Punktspektrum zu berechnen, macht man einen Produktansatz in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) : $f(r) \cdot g(\vartheta, \varphi)$ sei eine Eigenfunktion von $\mathcal{H}_\mathrm{H}$, d.h. $\mathcal{H}_\mathrm{H}(f \cdot g) = Ef \cdot g$.
Wenn wir Δ in Kugelkoordinaten umrechnen, so gilt für $r \neq 0$:

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2} B, \quad B = -\frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\partial_\varphi^2 \quad \text{für} \quad \vartheta \neq 0, \pi$$

und daher ist

$$\left(f'' + \frac{2}{r}f' + \left(\alpha + \frac{2\beta}{r}\right)f\right) \cdot g = \frac{f}{r^2} \cdot Bg,$$
$$\forall r \neq 0,\ \vartheta,\ \varphi \text{ mit } \alpha = \frac{2mE}{\hbar^2},\ \beta = \frac{me^2}{\hbar^2}$$
$$\Longrightarrow Bg = \lambda g \quad \text{und} \quad f'' + \frac{2}{r}f' + \left(\alpha + \frac{2\beta}{r} - \frac{\lambda}{r^2}\right)f = 0.$$

Ich behandle zuerst das Eigenwertproblem für g.

Definition 9.1 Es sei $H = L^2(\mathbb{S}^n)$, $\mathbb{S}^n = \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\big\}$.
$\overset{\circ}{B} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H : g(\omega) \longmapsto -\Delta\left(g\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)\Big|_{|x|=1}$
heißt *Beltramischer Differentialoperator*.

Bemerkung

1. $\overset{\circ}{B}$ ist unabhängig von der Wahl des orthonormalen Koordinatensystems im $\mathbb{R}^{n+1}$, $\overset{\circ}{B}$ hängt nur von der Riemannschen Metrik auf $\mathbb{S}^n$ ab. $\overset{\circ}{B}$ kann in jedem Riemannschen Raum definiert werden.
2. Für $n = 2$ und $\vartheta \neq 0, \pi$ erhält man die Darstellung der obigen Bemerkung.

Satz 9.3

1. $\overset{\circ}{B}$ ist wesentlich sa.,
2. $B := \overline{\overset{\circ}{B}}$ hat reines Punktspektrum,
3. $\sigma_{\mathrm{d}}(B) = \big\{l(l+n-1) : l = 0, 1, 2, \cdots\big\}$,
4. der Eigenraum zum Eigenwert $l(l+n-1)$ ist $V_l := \{P(\omega) : P(x)$ ist ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grad $l\}$,
5. $\dim_{\mathbb{C}} V_l = \binom{l+n}{n} - \binom{l+n-2}{n}$ für $l \geq 2$.

Beweis.

a) Es sei $P(x)$ ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grad $l \Longrightarrow \forall r \neq 0$: $0 = \Delta P = \Delta\big(r^l P(x/r)\big) = \Delta r^l \cdot P(x/r) + 2\nabla r^l \cdot \nabla P(x/r) + r^l \Delta P(x/r) = \big(l(l+n-1)\big) \cdot r^{l-2} \cdot P(x/r) + r^l \Delta P(x/r)$, da $\nabla r^l = l x r^{l-2} \perp \nabla P(x/r)$.
Somit ist $\overset{\circ}{B} P(\omega) = -\Delta P(x/r)\big|_{r=1} = l(l+n-1)P(\omega)$.

b) Da $\overset{\circ}{B} \in \mathrm{Ls}(H)$, können wir aus den in a) gefundenen Eigenvektoren von $\overset{\circ}{B}$ ein ON-System in H bilden (denn die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal). Wenn es noch gelingt, die Vollständigkeit dieses Systems zu zeigen, so sind 1) - 4) des Satzes bewiesen. (Vgl. den Beweis des Satzes 8.1, c),d).)

c) Da $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n) \subset H$ dicht ist, genügt es ein $f(\omega) \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ durch Summen von $P(\omega)$ wie in a) zu approximieren. Nach dem Satz von Weierstraß lässt sich die stetige Funktion $r \cdot f(\omega)$ durch Polynome in $\{x : |x| \leq 2\}$ gleichmäßig (also auch in der H-Norm) approximieren. Wir können daher oEdA voraussetzen,

dass $f = Q(\omega)$, wobei $Q(x)$ ein homogenes Polynom vom Grad m ist. Es reicht nun zu zeigen, dass $Q(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} r^{2k} P_{m-2k}(x)$ wobei P_{m-2k} harmonisch und homogen vom Grad $m-2k$ ist. (Denn dann ist $f(\omega) = \sum_{k=0}^{[m/2]} P_{m-2k}(\omega)$). Dies erfolgt durch Induktion über m. $m = 0, 1$ ist klar. Schluss von $m-2$ auf m:
ΔQ ist vom Grad $m-2 \Longrightarrow \Delta Q = \sum_{k=0}^{[m/2]-1} r^{2k} \tilde{P}_{m-2k-2}(x)$; nach a) ist $\Delta(r^{2k}\tilde{P}_{m-2k}) = \Delta\big(r^m \tilde{P}_{m-2k}(x/r)\big) = m(m+n-1)r^{m-2}\tilde{P}_{m-2k}(x/r) - r^m(m-2k)(m-2k+n-1)\cdot r^{-2}\tilde{P}_{m-2k}(x/r) = 2k(2m-2k+n-1)r^{m-2}\tilde{P}_{m-2k}(x/r)$. Daher setzen wir:

$$P_{m-2k} := \frac{\tilde{P}_{m-2k}}{2k(2m-2k+n-1)} \qquad \text{für} \quad k = 1, \cdots, \left[\tfrac{m}{2}\right] \text{ und}$$

$$Q_1 := \sum_{k=1}^{[m/2]} r^{2k} P_{m-2k}(x)$$

$\Longrightarrow \Delta Q_1 = \Delta Q \Longrightarrow Q = Q_1 + P_m$, P_m ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grad $m \Longrightarrow Q = \sum_{k=0}^{[m/2]} r^{2k} P_{m-2k}$.

d) W_l sei der Raum der homogenen Polynome vom Grad l im $\mathbb{R}^{n+1}$. $\dim_{\mathbb{C}} W_l = \binom{l+n}{n}$. Nach c) ist $\Phi_l : W_l \longrightarrow W_{l-2} : P \longmapsto \Delta P$ surjektiv $\Longrightarrow \dim(\ker \Phi_l) = \binom{l+n}{n} - \binom{l+n-2}{n}$ falls $l \geq 2$. Aus der Bijektivität von $\Psi_l : \ker \Phi_l \longrightarrow V_l : P(x) \longmapsto P(\omega)$ folgt die Aussage 5) des Satzes.

□

Bemerkung

1. Die Elemente von V_l heißen auch *Kugelflächenfunktionen* vom Grad l.
2. Für $n = 1$ ergibt sich $\dim V_l = 2$ für $l \geq 1$. Eine Basis von V_l ist $\mathrm{Re}\,(\omega_1 + \mathrm{i}\omega_2)^l$, $\mathrm{Im}\,(\omega_1 + \mathrm{i}\omega_2)^l$. Unter dem Isomorphismus

$$L^2(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\sim} L^2\big((0, 2\pi)\big) : f(\omega) \longmapsto \Big(t \longmapsto f\big((\cos t, \sin t)\big)\Big)$$

geht B über in

$$\tilde{B} : \Big\{ g \in \mathcal{H}^{(2)}\big((0,2\pi)\big) : \, g(0) = g(2\pi),\, g'(0) = g'(2\pi) \Big\} \longrightarrow L^2\big((0,2\pi)\big)$$
$$g \longmapsto -g''.$$

3. Für $n = 2$ ist $\dim V_l = 2l + 1$ für $l \geq 0$. Eine explizite ONB von V_l findet man bei Wahl eines Systems (r, ϑ, φ) von Kugelkoordinaten folgendermaßen:

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{4\pi(l+m)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\vartheta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

$m = -l, -l+1, \cdots, l-1, l$ und

$$P_l^k(t) = \text{ zugeordnete Legendresche Funktion}$$
$$= \frac{1}{2^l l!}\,(1-t^2)^{k/2} \frac{\mathrm{d}^{l+k}}{\mathrm{d}t^{l+k}}\,(1-t^2)^l, \qquad k = 0, 1, \cdots, l.$$

Um dies zu beweisen , zeigt man (Übung):

(a) $r^l \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ ist ein homogenes Polynom vom Grad l,

(b) $\Delta\big(r^l Y_l^m(\vartheta, \varphi)\big) = 0$,

(c) $\displaystyle\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} Y_l^m \overline{Y_l^{m'}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 0 & : m \neq m' \\ 1 & : m = m'. \end{cases}$

Nun zum Eigenwertproblem für f (vgl. Bem. auf Seite 106). Wir setzen $f_1(t) := \sqrt{t} f(\gamma t)$, $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{\alpha}}$. E und damit α seien negativ.
Aus der Differentialgleichung für f erhält man eine für f_1:

$$-4tf_1'' - 4f_1' + tf_1 + \frac{1+4\lambda}{t} f_1 = 8\beta\gamma f_1.$$

Aufgrund von Satz 9.3 setzen wir $\lambda = l(l+1) \Longrightarrow$

$$-4(tf_1')' + \left[t + \frac{(2l+1)^2}{t} \right] f_1 = 8\beta\gamma f_1.$$

Definition 9.2 Es sei $H = L^2\big((0,\infty)\big)$, $a \geq 0$. Die Differentialoperatoren

$$\mathring{\mathcal{L}}_a : \Big\{ f_1(t) \in H : \, t^{-a/2} f_1 \in \mathcal{S}\big([0,\infty)\big) \Big\} \longrightarrow H : \, f_1 \longmapsto -4(tf_1')' + \left(t + \frac{a^2}{t} \right) f_1$$

heißen *Laguerresche Differentialoperatoren.*

Dabei ist $\mathcal{S}\big([0,\infty)\big) = \Big\{ f_1 \in \mathcal{C}^\infty\big([0,\infty)\big) : \, \forall n, k \geq 0 : \, t^n \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f_1 \in L^\infty\big([0,\infty)\big) \Big\}$.

Satz 9.4 Es sei $a \geq 0$.

1. $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a$ ist wesentlich sa.,
2. $\mathcal{L}_a := \overline{\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a}$ hat reines Punktspektrum,
3. $\sigma_{\mathrm{d}}(\mathcal{L}_a) = \big\{2(2k+1+a) : k = 0,1,2,\cdots\big\}$,
4. der Eigenraum zu $2(2k+1+a)$ ist $\mathbb{C} \cdot \mathrm{e}^{t/2} t^{-a/2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\mathrm{e}^{-t} t^{k+a})$.

Beweis. (vgl. den Beweis von Satz 8.1)

a) $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a \in \mathrm{Ls}(H)$ rechnet man leicht nach. (Wesentlich dafür ist, dass der Differentialoperator $(tf_1')'$ in "Divergenzform" ist).

b) Es sei $x(t)$ ein Eigenvektor von $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a$ zum Eigenvektor μ, $x_+ := tx' - \dfrac{1}{2}tx + \dfrac{\mu+2}{4}x$, $x_- := tx' + \dfrac{1}{2}tx - \dfrac{\mu-2}{4}x$. Dann sind x_+, $x_- \in D(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a)$ und $x_\pm$ ist 0 oder ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu \pm 4$ (nachrechnen).

Für beliebiges $x \in D(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a)$ gilt:

$$(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a x, x) = \int_0^\infty \left[4t|x'|^2 + \left(t + \frac{a^2}{t}\right)|x|^2\right] \mathrm{d}t \geq 0$$

$\Longrightarrow$ alle Eigenwerte liegen in $[0,\infty)$.
Es sei nun $x(t)$ ein Eigenvektor zu μ und $x_-(t) = 0 \Longrightarrow$
$tx' = -\dfrac{1}{2}tx + \dfrac{\mu-2}{4}x \quad | -4\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow -4(tx')' = 2(x+tx') - (\mu-2)x'.$
Andererseits ist $\mu x = \overset{\circ}{\mathcal{L}} x = -4(tx')' + \left(t + \dfrac{a^2}{t}\right)x \Longrightarrow$
$\mu x = (2 - \mu + 2t)x' + \left(2 + t + \dfrac{a^2}{t}\right)x;\ x' = \dfrac{\mu-2}{4t}x - \dfrac{x}{2} \Longrightarrow$
$\left(a^2 - \dfrac{(\mu-2)^2}{4}\right)\dfrac{x}{t} = 0 \Longrightarrow \mu = 2 \pm 2a \Longrightarrow$
$tx' = -\dfrac{1}{2}tx \pm \dfrac{ax}{2},\ \dfrac{x'}{x} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{a}{2t},\ x \in \mathbb{C} \cdot \mathrm{e}^{-t/2} t^{\pm a/2}.$
Wegen $t^{-a/2}x \in \mathcal{C}\big([0,\infty)\big)$ muss $\mu = 2+a$ sein. Die Eigenwerte von $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a$ liegen also in $\big\{2(2n+1+a) : n = 0,1,2,\cdots\big\}$ (vgl. S. 90). Für $0 \neq x \in D(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a)$

ist $x_+ \neq 0$, denn die Differentialgleichung $tx' = \frac{1}{2}tx - \frac{\mu-2}{4}x$ hat nur die Lösungen $c \cdot \mathrm{e}^{t/2} t^{\frac{2-\mu}{4}} \notin L^2\big((0,\infty)\big)$.
Es seien nun $L_0^a := c_0 \mathrm{e}^{-t/2} t^{a/2}, \cdots, L_{n+1}^a := c_{n+1}(L_n^a)_+$, $c_n > 0$ so, dass $\big\|L_n^a\big\| = 1$.
Die L_n^a bilden dann ein ON-System in H.
Induktiv zeigt man, dass $L_n^a = \tilde{c}_n \mathrm{e}^{t/2} t^{-a/2} (\mathrm{e}^{-t} t^{n+a})^{(n)}$.

c) Noch zu zeigen bleibt lediglich, dass $\{L_n^a : n \in \mathbb{N}_0\}$ vollständig ist. Offenbar ist $L_n^a = \tilde{c}_n \mathrm{e}^{-t/2} t^{a/2} \cdot P_n^a$, wobei P_n^a ein Polynom vom Grad n ist.
Es sei $f \in L^2\big((0,\infty)\big)$, $f \perp L_n^a$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Für $t < 0$ sei $f(t) := 0$. Dann folgt wie auf Seite 90: $f \cdot t^{a/2} \perp \mathrm{e}^{t(-1/2+\mathrm{i}b)}$ für $|b| < \frac{1}{2}$; $(f, \mathrm{e}^{zt} t^{a/2})$ ist eine analytische Funktion von z in $\operatorname{Re} z < 0 \Longrightarrow \forall z$ mit $\operatorname{Re} z < 0 : (f, t^{a/2} \mathrm{e}^{zt}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}(f \cdot t^{a/2} \cdot \mathrm{e}^{-t}) = 0 \Longrightarrow f = 0$.

□

Bemerkung
Die Funktionen L_n^a des Beweises heißen auch *Laguerresche Funktionen*, die Polynome P_n^a heißen *Laguerresche Polynome*.

Nun zurück zu $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}$:

Satz 9.5

1. $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_{\mathrm{H}}) \cap (-\infty, 0) = \left\{ -\frac{me^4}{2\hbar^2 N^2} : N = 1, 2, \cdots \right\}$,
2. der Eigenraum zum Eigenwert $-\frac{me^4}{2\hbar^2 N^2}$ hat die Dimension N^2,
3. eine Orthogonalbasis dieses Eigenraumes ist
$\left\{ r^{-1/2} L_{N-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2me^2}{\hbar^2 N} r\right) Y_l^m(\vartheta, \varphi) : l = 0, 1, \ldots, N-1,\ m = -l, \cdots, +l \right\}$.

Beweis.

a) Es sei $E \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_{\mathrm{H}})$, $E < 0$, $0 \neq F \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}F = E \cdot F \Longrightarrow -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta F = \left(\dfrac{e^2}{r} + E\right) F$;

es sei $\varphi \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\big) \Longrightarrow -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi F) =$

$= \left(\dfrac{e^2}{r} + E\right)\varphi F - \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(2\nabla\varphi \cdot \nabla F + F \cdot \Delta\varphi\right) \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$

$\Longrightarrow \Delta(\varphi F) \in \mathcal{H}^{(1)} \Longrightarrow r^2\widehat{\varphi F} \in L^2_1(\mathbb{R}^3)$

$\Longrightarrow \widehat{\varphi F} \in L^2_3(\mathbb{R}^3) \Longrightarrow \varphi F \in \mathcal{H}^{(3)}$.

Wenn wir so fortfahren, erhalten wir mit dem Sobolevschen Einbettungssatz, dass $F \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\big)$.

b) Für $r \neq 0$ ist also $F(r\omega) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2_\omega) \subset L^2(\mathbb{S}^2_\omega) \Longrightarrow$

$$F(r\omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m}(r)Y_l^m(\omega), \quad \text{wobei } c_{l,m}(r) = \oiint_{|\omega|=1} F(r\omega)\cdot\overline{Y_l^m(\omega)}\,\mathrm{d}\omega.$$

(Die Konvergenz der $\sum\sum$ ist immer in $L^2(\mathbb{S}^2_\omega)$ zu verstehen.)
Wegen $F(r\omega) \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\big)$ ist $c_{l,m}(r) \in \mathcal{C}^\infty\big((0,\infty)\big)$ und

$$\partial_r^k c_{l,m}(r) = \oiint_{|\omega|=1} \partial_r^k F(r\omega)\cdot\overline{Y_l^m(\omega)}\,\mathrm{d}\omega.$$

Daher ist

$$\partial_r^k F(r\omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\big(\partial_r^k c_{l,m}(r)\big)\cdot Y_l^m(\omega).$$

Weiters ist

$$BF(r\omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} d_{l,m}(r)\cdot Y_l^m(\omega)$$

mit

$$\begin{aligned} d_{l,m}(r) &= \big(BF(r\omega), Y_l^m(\omega)\big)_{L^2(\mathbb{S}^2)} = (\text{da } B \in \mathrm{Ls}) \\ &= \big(F(r\omega), BY_l^m(\omega)\big)_{L^2(\mathbb{S}^2)} = l(l+1)c_{l,m}(r). \end{aligned}$$

Insgesamt: In $r \neq 0$ gilt:

$$-\Delta F(r\omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(-\partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)c_{l,m}(r)\cdot Y_l^m(\omega)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}0 &= (\mathcal{H}_{\mathrm{H}} - E)F \\ &= -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) + \frac{e^2}{r} + E\right) c_{l,m}(r)\cdot Y_l^m(\omega) \\ &\Longrightarrow \forall l,m,\ \forall r\neq 0: \quad c_{l,m}'' + \frac{2}{r}c_{l,m}' + \left(\alpha + \frac{2\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)c_{l,m} = 0\end{aligned}$$

(bzgl α, β siehe Seite 106).

Es seien l und m fixiert,

$$\begin{aligned}f(r) = c_{l,m}(r), \quad f_1(t) = \sqrt{t}\, f(\gamma t) \quad &\text{(vgl. Seite 109)} \\ \Longrightarrow -4(tf_1')' + \left[t + \frac{(2l+1)^2}{t}\right] f_1 = 8\beta\gamma f_1 \quad &\text{für } t > 0.\end{aligned}$$

c) Wie in d) gezeigt wird, folgt aus der letzten Gleichung, dass $f_1 \in D(\mathcal{L}_a)$ und $\mathcal{L}_a f_1 = 8\beta\gamma f_1$. Satz 9.4 ergibt dann: $(a := 2l+1)$

(i) $8\beta\gamma = 2(2k+1+a): \quad k \in \{0,1,2,\cdots\}$,

(ii) $f_1 = \text{const.}\cdot L_k^a(t)$,

d.h.

$$8\cdot\frac{me^2}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{\hbar^2}{2mE}} = 4(k+l+1)$$

und

$$f_1 = \text{const.}\cdot r^{-1/2}\cdot L_k^{2l+1}\left(2r\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}\right).$$

Daher ist $E = -\dfrac{me^4}{2\hbar^2N^2}$ und $f = \text{const.}\cdot r^{-1/2}L_k^{2l+1}\left(\dfrac{2me^2}{\hbar^2N}\,r\right)$, wobei $N := k+l+1$.

Bei vorgegebenem E folgt aus $E = -\dfrac{me^4}{2\hbar^2N^2}$ und $N = k+l+1$, dass $c_{l,m} = 0$ für $l \geq N$. Damit ergibt sich der Satz.

d) Noch zu zeigen bleibt $f_1 \in D(\mathcal{L}_a)$, $\mathcal{L}_a f_1 = 8\beta\gamma f_1$, wobei $a = 2l+1$.

Wegen $F \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ ist $\dfrac{F}{r} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (vgl. Satz 9.1) $\Longrightarrow$

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^3}\left|F(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}x}{r^2} = \int_0^{\infty}\oiint_{\omega=1}\left|F(r\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}r = \int_0^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left|c_{l,m}(r)\right|^2\mathrm{d}r$$

$$\Longrightarrow c_{l,m} \in L^2\big((0,\infty)\big) \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}\, f_1(t) \in L^2\big((0,\infty)\big) \Longrightarrow f_1 \in L^2\big((0,\infty)\big).$$

f_1 erfüllt die Differentialgleichung

$$-4t(tf_1')' + (t^2 + a^2)f_1 - 8\beta\gamma f_1 = 0.$$

Durch den Potenzreihenansatz $f_1 = t^\nu \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ findet man 2 linear unabhängige Lösungen. Für ν erhält man die Gleichung

$$-4\nu^2 + a^2 = 0, \quad \nu = \pm a/2.$$

Wegen $t^{-a/2} \notin L^2_{\text{loc}}\big((0,\infty)\big)$, da $a = 2l+1$, $l \geq 0$ ist $\nu = a/2$, d.h. $t^{-a/2} f_1 \in \mathcal{C}^\infty\big([0,\infty)\big)$.

Für $g_1 \in D(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a)$ folgt damit:

$$\begin{aligned}
(f_1, \overset{\circ}{\mathcal{L}}_a g_1) &= \int_0^\infty f_1 \cdot \left[-4(tg_1')' + \left(t + \frac{a^2}{t}\right) g_1\right] \mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^{1/\epsilon} f_1 \cdot \left[-4(tg_1')' + \left(t + \frac{a^2}{t}\right) g_1\right] \mathrm{d}t \quad \text{(part. integr.)} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \left[4t(f_1'g_1 - f_1 g_1')\big|_\epsilon^{1/\epsilon} + \int_\epsilon^{1/\epsilon} 8\beta\gamma f_1 \cdot g_1 \,\mathrm{d}t\right] \\
&= (\text{man beachte, dass } t^{-a/2} g_1 \in \mathcal{S}\big([0,\infty)\big) \text{ und dass der Limes existiert}) \\
&= (8\beta\gamma f_1, g_1)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f_1 \in \mathcal{D}\big((\overset{\circ}{\mathcal{L}}_a)^*\big) = D(\mathcal{L}_a) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_a f_1 = 8\beta\gamma f_1. \qquad \square$$

Bemerkung

1. Es gilt übrigens auch $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_{\mathrm{H}}) \cap [0, \infty) = \emptyset$, der Beweis davon ist jedoch etwas mühsam (siehe Triebel, Lemma 36.1).

2. Wenn das Elektron aus einem stabilen Zustand in einen anderen übergeht, so wird eine elektromagnetische Welle der Energie $\frac{me^4}{2\hbar^2}\left|\frac{1}{N^2} - \frac{1}{M^2}\right|$ abgestrahlt bzw. absorbiert. Ihre Kreisfrequenz ist nach Einstein $\omega = 2\pi R\left|\frac{1}{N^2} - \frac{1}{M^2}\right|$, $R := \frac{me^4}{4\pi\hbar^3}$ = *Rydberg-Konstante*. Diese Frequenzen werden in der Spektroskopie durch Wellenzahlen (WZ) ausgedrückt. (Wellenzahl = Anzahl der Perioden einer Welle pro Längeneinheit = Wellenlänge^{-1}). Pro Zeiteinheit schreitet die elektromagnetische Welle c Längeneinheiten fort und produziert dabei $\frac{\omega}{2\pi}$ Wellenberge $\Longrightarrow \mathrm{WZ} = \frac{\omega}{2\pi c} = \frac{R}{c}\left|\frac{1}{N^2} - \frac{1}{M^2}\right|$.

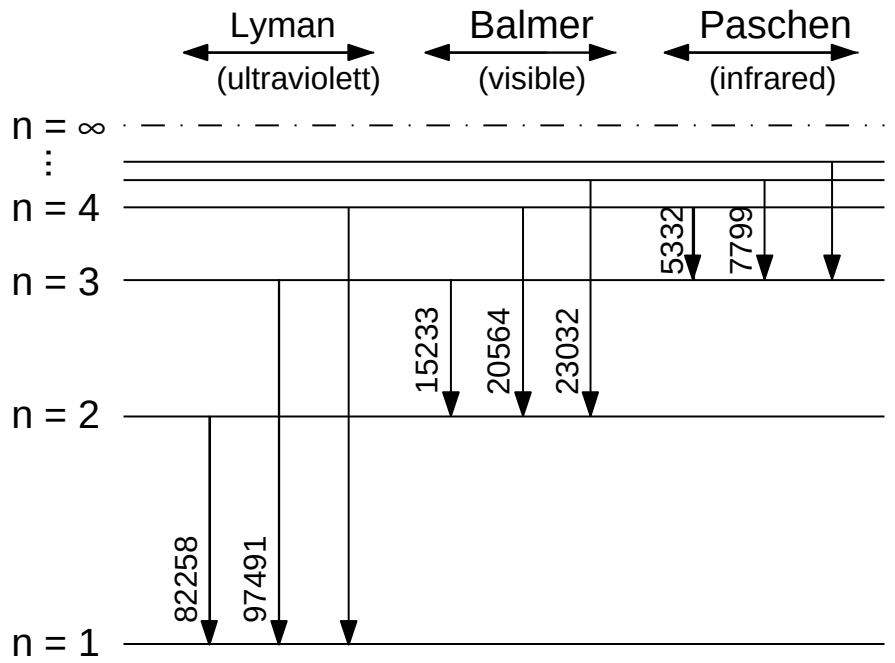


Abbildung 9.1: Beobachtete Übergänge im Wasserstoffatom mit einigen Wellenzahlen in cm^{-1}. Die Frequenzen erhält man durch Multiplikation mit $c = 2.99792458 \times 10^{10}$ cm/sec. Bild aus Glimm-Jaffe, p. 26, $N \hat{=} n$.

3. Unsere Betrachtung des H-Atoms ist in folgender Hinsicht unvollständig:

   (a) Die Bewegung des Kerns wurde vernachlässigt. Das kann durch Ersetzung von m durch die reduzierte Masse $m_r = \dfrac{mM}{m+M} = 0,99945 \cdot m$ (M = Protonenmasse) berücksichtigt werden.

   (b) Unsere Theorie ist nicht relativistisch invariant. Mit Hilfe der Dirac-Theorie erhält man die Eigenwerte

   $$E_{n,k} = mc^2\Big(1 + \alpha^2\big(n + \sqrt{k^2 - \alpha^2}\,\big)^{-2}\Big)^{-1/2},$$
   $$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

   Die Differenzen der $E_{n,k}$ stimmen in 1. Ordnung (bzgl. α) mit den Energiedifferenzen aus Satz 9.5 überein. N entspricht dabei $n+k$. Dies nennen die Physiker die Feinstruktur des H-Spektrums.

   (c) Schließlich müsste man noch die Koppelung des Kernspins mit dem Spin des Elektrons berücksichtigen. Das nennt man Hyperfeinstruktur.

4. Wie sich aus der Formel in 3. (b) ergibt, wird der Eigenraum zum Eigenwert $-\dfrac{me^4}{2\hbar^2 N^2}$ bei relativistischer Betrachtung aufgespaltet. Das ist algebraisch leicht zu erklären. Da das H-Atom rotationssymmetrisch ist, definiert jeder Eigenraum V des Hamiltonoperators eine Darstellung von SO_3:

   $$SO_3 \longrightarrow L(V) : A \longmapsto \big(F(x) \longmapsto F(A^{-1}x)\big).$$

   Aus Satz 9.5 erhalten wir Darstellungen der Dimension N^2, die sich in N irreduzible Darstellungen der Dimension $2l+1$, $l = 0, 1, \cdots, N-1$ aufspalten lassen. Diese irreduziblen Darstellungen müssen unter stetigen, radialsymmetrischen Korrekturtermen entsprechend (a), (b), (c) oben, erhalten bleiben.

9.1 Übungen

1. Berechne $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ für das kreisende Elektron (siehe Seite 103) unter der Verwendung des exakten Wertes von $\vec{A}$. Bestimme dabei $\nabla_x t_1$ durch implizites Differenzieren.

2. Zeige, daß $\mathcal{H} : \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3) : f \longmapsto -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta f + V \cdot f$ sa. ist für $V(x) \in L^2 + L^\infty$.

3. Betrachte den Operator $A : \mathcal{C}^\infty\big([-1,1]\big) \longrightarrow L^2\big((-1,1)\big) = H : f \longmapsto -\big((1-t^2)f'\big)'$. Zeige: A ist wesentlich sa., $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{d}}(A) = \big\{l(l+1) : l = 0,1,\ldots\big\}$, der Eigenraum zu $l(l+1)$ ist $\mathbb{C} \cdot P_l^0 = \mathbb{C} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}(1-t^2)^l$.

4. Beweise die Behauptungen a), b), c) in Seite 109.

5. Berechne den mittleren Atomradius $\bar{r} = \displaystyle\int r \,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Ort}}(x)$ im Grundzustand des H-Atoms, d.h. $N = 1$, $l = 0$, $F = \text{const.} \cdot r^{-1/2} L_0^1\left(\dfrac{2me^2}{\hbar^2} r\right)$.

Kapitel 10

Gelfandsche Raumtripel = Rigged Hilbert space

Gel'fand-Vilenkin *Verallgemeinerte Funktionen, Bd. IV, Kap. I*

Reed-Simon *Functional Analysis I, Kap. VI*

A. Pietsch *Nukleare, lokalkonvexe Räume*

A) Motivation

Bekanntlich lässt sich für einen Hilbertraum H jedes $A \in \mathrm{Lsa}\,(H)$ durch eine Spektralschar darstellen: $A = \int \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda$ (vgl. Theorem 5.2, S. 57). Dies verallgemeinert die Zerlegung der Eigenräume für $\dim H < \infty : A = \sum \lambda_i E_i,\ E_i =$ Projektor auf $\ker\,(A - \lambda_i I)$. Im Allgemeinen besteht allerdings das Spektrum $\sigma(A)$ nicht nur aus $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, den Eigenwerten. Die Bedingung $z \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \Longleftrightarrow \exists 0 \neq x \in D(A) : Ax = zx$, die im endlichdimensionalen wegen $\sigma = \sigma_{\mathrm{p}}$ genügt, wird nun durch das Weylsche Kriterium ersetzt:

$$z \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \exists x_n \in D(A) \text{ mit } \|x_n\| = 1 :\ (A - zI)x_n \to 0$$

(vgl. S. 58, 59). Dies ist zum Rechnen ungünstig und in der Physik verwendet man stattdessen sogenannte "verallgemeinerte Eigenvektoren", z.B. für

$$\hat{x} : \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^1) : xf(x) \in L^2 \right\} \longrightarrow L^2 : f \longmapsto xf$$

gilt $\sigma(\hat{x}) = \mathbb{R},\ \sigma_{\mathrm{p}}(\hat{x}) = \emptyset$,
die verallgemeinerten Eigenvektoren sind $\left\{ \delta(x - x_0) : x_0 \in \mathbb{R} \right\}$.

Diese Methode soll im Folgenden exaktifiziert werden.
Nebenbei fällt auch ein Beweis des Kernsatzes ab, der etwa für $\mathcal{D}$ besagt, dass jede partiell stetige Bilinearform $B : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ in der Form $B(\varphi, \psi) = \big\langle \varphi(x)\psi(y), K(x,y) \big\rangle$ für ein $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ dargestellt werden kann. Um die Bedeutung dieses Satzes für die Quantenmechanik zu erklären (genaues siehe Kap. 11), werde folgende Aufgabe damit gelöst: Beschreibe alle Hilberträume H, welche stetig in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eingebettet sind.
Lösung: $j : H \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ stetig $\iff j^T : \mathcal{D} \longrightarrow H'$ und $j^T\mathcal{D}$ dicht in H'. H' ist auch ein Hilbertraum, $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} : (\varphi, \psi) \longmapsto (j^T\varphi, j^T\overline{\psi})_{H'}$ ist ein stetiges bilineares Funktional und folglich: $(j^T\varphi, j^T\overline{\psi})_{H'} = \big\langle \varphi(x)\psi(y), K(x,y) \big\rangle$. Außerdem gilt $\big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y) \big\rangle \geq 0$, d.h. K ist von "positivem Typ". Wie später gezeigt wird, ergibt dies einen eindeutigen Zusammenhang zwischen $\big\{(H, j : H \hookrightarrow \mathcal{D}') : H$ Hilbertraum, j stetig, linear und $\big\{K(x,y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ von positivem Typ$\big\}\big\}$.

B) Kompakte Operatoren

Definition 10.1 H_1, H_2 Hilbertraum.

1. $A \in L(H_1, H_2)$ hat **endlichen Rang** $\iff \dim A(H_1) < \infty$.
   $\mathrm{Lf}\,(H_1, H_2) := \big\{A \in L(H_1, H_2)$ mit endlichem Rang$\big\}$.

2. $A \in L(H_1, H_2)$ **kompakt** $\iff \overline{A\Big(\big\{x \in H_1 : \|x\| \leq 1\big\}\Big)} \subset H_2$ kompakt.
   $\mathrm{Lc}(H_1, H_2) := \big\{A \in L(H_1, H_2)$ kompakt$\big\}$.

Satz 10.1 *(Geometrische Charakterisierung von* Lc)
H, H_1, H_2 Hilberträume

1. $A \in \mathrm{Ls}\,(H) \cap \mathrm{Lc}\,(H)$. Dann gilt:
   $\sigma(A) \subset \sigma_{\mathrm{d}}(A) \cup \{0\}$ und die Spektraldarstellung von A hat die Form
   $A = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i E_i$, wobei I abzählbar ist; $\{\lambda_i : i \in I\} \subset \mathbb{R} \setminus 0$ hat höchstens 0 als Häufungspunkt, $E_i \in \mathrm{Lf}$. Dabei sind λ_i die von 0 verschiedenen Eigenwerte von A, $E_i(H)$ die zugehörigen (endlich-dimensionalen) Eigenräume.

2. $A \in \mathrm{Lc}\,(H_1, H_2)$. Dann gilt: $\exists I$ abzählbar, $\exists \lambda_i \in (0, \infty), i \in I$, nicht notwendig paarweise verschieden, $\exists \{\varphi_i : i \in I\} \subset H_1$ orthonormal $\exists \{\psi_i : i \in I\} \subset H_2$ orthonormal, sodass $\{\lambda_i : i \in I\}$ höchstens 0 als Häufungspunkt hat und $A = \lim\limits_{\substack{J \subset I \\ \#J < \infty}} A_J$ in $L(H_1, H_2)$ (mit der Normtopologie: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Ax\|_{H_2}$),

wobei $A_J\varphi = \sum_{j\in J} \lambda_j(\varphi,\varphi_j)_{H_1}\psi_j$ für $\#J < \infty$. $\{\lambda_i : i \in I\}$ mit diesen Eigenschaften ist eindeutig bestimmt, es gilt $\{\lambda_i : i \in I\} = \sigma\big(\sqrt{A^*A}\big) \setminus 0$.

Beweis.

1. Es sei $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$; $\|x_n\| = 1$ mit $Ax_n - \lambda x_n \to 0$; da $A \in \mathrm{Lc}$, hat Ax_n eine konvergente Teilfolge $Ax_{n_k} \to w \implies \lambda x_{n_k} \to w \implies Aw = A\lim_{k\to\infty}(\lambda x_{n_k}) = \lambda \lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = \lambda w$ und $\|w\| = \lim_{h\to\infty}\|\lambda x_{n_k}\| = \lambda \neq 0$, d.h. $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$. Es sei G der von den Eigenvektoren von A in H erzeugte Unterhilbertraum, $A\big|_{G^\perp} : G^\perp \longrightarrow G^\perp$ ist ebenfalls kompakt und $\sigma_{\mathrm{p}}\big(A|_{G^\perp}\big) = \emptyset \implies$ (nach dem obigen) $\implies \sigma\big(A|_{G^\perp}\big) = \{0\} \implies A|_{G^\perp} = 0 \implies G^\perp = \{0\} \implies H = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} H(\lambda)$, wobei
$H(\lambda) = \{x \in H : Ax = \lambda x\}$ = Eigenraum zum Eigenwert λ.
$\dim H(\lambda) < \infty$ für $\lambda \neq 0$, denn die Einheitskugel von $H(\lambda) = A\big(H(\lambda)\big)$ muss kompakt sein wegen $A \in \mathrm{Lc}$. Weiters folgt aus $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots$ und $H(\lambda_i) \neq 0$, dass $\lambda_i \to 0$, denn wenn $x_i \in H(\lambda_i)$, $\|x_i\| = 1$, so ist $x_i \perp x_j$ für $i \neq j$ und daher

$$\|Ax_i - Ax_j\|^2 = \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\|^2 = \lambda_i^2 + \lambda_j^2$$

und folglich $\lambda_i^2 \to 0$, da Ax_i eine konvergente Teilfolge besitzt wegen $A \in \mathrm{Lc}$.

2. Es sei $B = A^*A \in \mathrm{Lc}(H_1) \cap \mathrm{Ls}(H_1)$. B ist positiv semidefinit, denn $(Bx,x) = (Ax,Ax) \geq 0$, $\forall x \in H_1$. Nach 1. gilt $B = \sum_{i\in I'} \lambda_i' E_i$ mit $\{\lambda_i' : i \in I'\} \subset (0,\infty)$.
Es sei E_i = Projektion auf $\bigoplus_{k=1}^{r_i} \mathbb{C}\cdot\varphi_{i,k}$, $\|\varphi_{i,k}\| = 1$,
$\lambda_1 := \sqrt{\lambda_1'}, \cdots, \lambda_{r_1} = \sqrt{\lambda_1'}$, $\lambda_{r_1+1} = \sqrt{\lambda_2'}$ etc.,
$\varphi_1 := \varphi_{1,1}, \cdots, \varphi_{r_1} = \varphi_{1,r_1}$, $\varphi_{r_1+1} = \varphi_{2,1}$ etc. $\psi_j := A\varphi_j/\lambda_j \implies (\psi_j,\psi_k) = \dfrac{1}{\lambda_j\lambda_k}(A^*A\varphi_j,\varphi_k) = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_k}(\varphi_j,\varphi_k) = \delta_{j,k}$.
Wenn A_j, $J \subset I$, $\#J < \infty$, wie im Satz definiert ist, so gilt
$A_J\varphi_j = A\varphi_j$ für $j \in J$ und daher folgt für $x \in H_1$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \perp x_2$, $x_2 \perp \varphi_j$, $j \in J$: $\big\|(A - A_J)x\big\|^2 = \big\|\underbrace{(A - A_J)x_1}_{0} + (Ax_2 - \underbrace{A_Jx_2}_{0})\big\|^2 =$
$(Ax_2,Ax_2) = (Bx_2,x_2) = \sum_{i\in I} \lambda_i'\|E_ix_2\|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \underbrace{\max\{\lambda_i' : E_ix_2 \neq 0\}}_{\to 0 \text{ für } J\nearrow I}$.

Die Eindeutigkeit der $\{\lambda_j\}$ ergibt sich aus der Darstellung
$A^*A\varphi = \sum_{j\in I} \lambda_j^2(\varphi, \varphi_j)\varphi_j$.

□

Satz 10.2 *(Algebraische und topologische Eigenschaften von* Lc)

1. $\mathrm{Lf} \subset \mathrm{Lc}$ sind Vektorräume;
2. $\mathrm{Lc} = \overline{\mathrm{Lf}}, - =$ Abschluss in der Normtopologie;
3. $A \in L(H_0, H_1),\ B \in \mathrm{Lc}(H_1, H_2),\ C \in L(H_2, H_3) \implies$
   $CBA \in \mathrm{Lc}(H_0, H_3)$;
4. $A \in \mathrm{Lc}(H_1, H_2) \implies A^* \in \mathrm{Lc}(H_2, H_1)$.

Beweis.

1. (i) $\mathrm{Lf} \subset \mathrm{Lc}:\ U_1 := \{x \in H_1 : \|x\| \le 1\}$;
   $A \in \mathrm{Lf} \implies AH_1 = V, \dim V < \infty;\ \|Ax\| \le C \cdot \|x\| \implies$
   $\overline{AU_1} \subset \{y \in V : \|y\| \le C\} = \big\{y \in V : \|y\| \le C\big\}$ kompakt.
   (ii) Lc Vektorraum: $A_1, A_2 \in \mathrm{Lc} \implies \overline{A_1U_1}, \overline{A_2U_1}$ kompakt
   $\implies \forall\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A_1 + \lambda A_2)U_1} \subset \overline{A_1U_1} + \lambda\overline{A_2U_1}$ kompakt
   $\implies A_1 + \lambda A_2 \in \mathrm{Lc}$.

2. (i) $\mathrm{Lc} \subset \overline{\mathrm{Lf}}$, da $A = \lim A_J$ nach vorigem Satz.
   (ii) Lc bezüglich Normtopologie abgeschlossen:
   Es seien $A_n \in \mathrm{Lc},\ A_n \to A,\ y_j \in \overline{AU_1},\ x_j \in AU_1$ mit
   $\|x_j - y_j\| < \dfrac{1}{j},\ x_j = Au_j$. Zeige: x_j hat Häufungspunkt.
   A_1u_j hat eine konvergente Teilfolge, da $A_1 \in \mathrm{Lc}$; für eine Teilfolge davon konvergiert wiederum A_2u_j. Das übliche Diagonalisierungsverfahren ergibt:
   $\exists j(k) : \forall n : A_nu_{j(k)} \to w_n$;
   $\|w_n - w_m\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|A_nu_{j(k)} - A_mu_{j(k)}\| \le$
   $\le \sup\limits_k \big[\|A_nu_{j(k)} - Au_{j(k)}\| + \|A_mu_{j(k)} - Au_{j(k)}\|\big] \le$
   $\le \|A_n - A\| + \|A_m - A\| \to 0$ für $n, m \to \infty \implies w_n$ ist eine C-Folge
   $\implies w_n \to w$;
   $\|Au_{j(k)} - w\| \le \|A - A_n\| + \|A_nu_{j(k)} - w_n\| + \|w_n - w\| \to 0$ für $k \to \infty$ und passend gewähltes n.
   Somit: $x_j = Au_j$ hat eine konvergente Teilfolge, $A \in \mathrm{Lc}$.

3. $\overline{CBA(U_1)} \subset \|A\| \cdot \overline{CB(U_1)} = \|A\| \cdot C(\,\overline{B(U_1)}\,)$ kompakt.

4. Wenn $A = \lim\limits_{\#J<\infty} \sum\limits_{j\in J} \lambda_j(-,\varphi_j)\psi_j$ wie im vorigen Satz, so ist
   $A^* = \lim\limits_{\#J<\infty} \sum\limits_{j\in J} \overline{\lambda}_j(-,\psi_j)\varphi_j \in \overline{\mathrm{Lf}} = \mathrm{Lc}$.

□

Bemerkung Aus den Sätzen ergibt sich, dass $A \in \mathrm{Lc} \iff$
$A = \sum \lambda_i(-,\varphi_i)\psi_i,\ \lambda_i \searrow 0$ oder endlich, $\{\varphi_i\},\ \{\psi_i\}$ orthonormal.

C) Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen

Satz 10.3
H Hilbertraum, $A \in \mathrm{Lc}(H)$. Wie in S. 58 sei $\varrho(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists B \in L(H)$ mit $B(A-\lambda I) = (A-\lambda I)B = I\big\}$ und $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$.

1. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ gilt:

   a) $H = \mathrm{Im}\,(A-\lambda I) \,\dot{+}\, \ker\,(A^* - \overline{\lambda} I)$

   b) $\lambda \in \sigma(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(A^*) \iff \ker\,(A-\lambda I) \neq 0 \iff$
   $\iff 0 < \dim \ker\,(A-\lambda I) < \infty$.

2. $\sigma(A)$ hat höchstens 0 als Häufungspunkt.

Beweis.

1. a) α) $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I) \perp \ker\,(A^* - \overline{\lambda} I)$:
   $\psi_1 = (A-\lambda I)\varphi,\ (A^* - \overline{\lambda} I)\psi_2 = 0 \implies (\psi_1,\psi_2) = \big((A-\lambda I)\varphi, \psi_2\big) = \big(\varphi, (A^* - \overline{\lambda} I)\psi_2\big) = 0$.
   β) $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)$ abgeschlossen: Es sei $\psi_j = (A-\lambda I)\varphi_j,\ \psi_j \longrightarrow \psi \neq 0$. Zeige: $\psi \in \mathrm{Im}\,(A-\lambda I)$.
   OEdA $\varphi_j \in \big[\ker(A-\lambda I)\big]^\perp$; wegen $\psi \neq 0$ können wir weiters annehmen (durch Übergang zu einer Teilfolge), dass $\|\varphi_j\| \longrightarrow c \in (0,\infty]$; da A kompakt ist, lässt sich eine Teilfolge wählen, sodass $A\left(\dfrac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}\right) \longrightarrow x$.

Wenn wir $\frac{1}{\infty} := 0$ setzen, so folgt:
$\frac{1}{c}\psi = \lim_j (A-\lambda I)\frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} = x - \lambda \lim_{j\to\infty} \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} \implies \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} \longrightarrow \varphi := \frac{x - \frac{\psi}{c}}{\lambda}$
(Hier wird $\lambda \neq 0$ verwendet!) $\implies \frac{\psi}{c} = \lim_j (A-\lambda I)\frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} = (A-\lambda I)\varphi.$
1. Fall: $c < \infty \implies \psi = (A-\lambda I)c\,\varphi \in \operatorname{Im}(A-\lambda I)$
2. Fall: $c = \infty \implies \varphi \in \ker(A-\lambda I) \cap \big[\ker(A-\lambda I)\big]^\perp = 0$
$\implies \lightning$ zu $\|\varphi\| = \lim \left\| \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} \right\| = 1.$
γ) Es sei $\varphi \in \operatorname{Im}(A-\lambda I)^\perp \implies \forall \psi \in H : 0 = \big(\varphi, (A-\lambda I)\psi\big) = \big((A^* - \overline{\lambda} I)\varphi, \psi\big) \implies \varphi \in \ker(A^* - \overline{\lambda} I)$.

b) α) $B(A-\lambda I) = I \implies (A^* - \overline{\lambda} I)B^* = I$
β) $\ker(A-\lambda I)$ endlichdimensional, da für
$U = \big\{\varphi \in \ker(A-\lambda I) : \|\lambda\| \leq 1\big\}$ gilt: $\overline{AU} = \lambda\overline{U} = \lambda U$ kompakt.
γ) Es sei $\ker(A-\lambda I) = 0$. Nach a) ist $H = \operatorname{Im}(A-\lambda I)$, d.h.
$B = (A-\lambda I)^{-1}$ ist wohldefiniert und nach dem open-mapping-theorem auch stetig $\implies \lambda \in \varrho(A)$.

2. Annahme: Es existieren $\lambda_j \in \sigma(A)$ paarweise verschieden mit $\lambda_j \longrightarrow \lambda \neq 0$. Es sei $0 \neq \varphi_j \in \ker(A - \lambda_j I)$. Wie üblich sieht man, dass die φ_j linear unabhängig sind.
Es sei $\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$, $\psi_2 = \frac{\varphi_2 - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1}{\|\varphi_1\|}$ etc., d.h.
$(\psi_j, \psi_k) = \delta_{jk} \implies A\psi_j = \lambda_j \psi_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k}\psi_k \implies$ für $j > k$ gilt: $\|A\psi_j - A\psi_k\|^2 \geq |\lambda_j|^2 \implies A\psi_j$ hat keinen Häufungspunkt $\implies \lightning$ zu $A \in \mathrm{Lc}$.

□

Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $K(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$.
Für $A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) : f(x) \longmapsto \int K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$ gilt $A \in \mathrm{Lc}\big(L^2(\Omega)\big)$ (siehe Punkt D).

Satz 10.4 *(Fredholmsche Alternative)*
Ω, K wie oben, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$. Dann gilt: Die Integralgleichung

$$\int K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x) \in L^2(\Omega)$$

hat eine Lösung $f \in L^2(\Omega) \iff$

a) $\lambda \notin \sigma(A)$ oder

b) $\lambda \in \sigma(A)$ und $(g,h) = 0$ für alle $h \in \ker(A^* - \overline{\lambda}E)$
$= \left\{ h \in L^2(\Omega) : \int h(x)\overline{K(x,y)}\,\mathrm{d}x = \overline{\lambda}h(y) \right\}.$

Beweis. $g \in \mathrm{Im}\,(A-\lambda E) \iff g \perp \ker(A^* - \overline{\lambda}E)$ nach dem vorigen Satz. □

Beispiel 27 $\Omega = [0,1]$; $K(x,y) = \min\{x,y\}$. Dann ist A positiv definit und symmetrisch $\implies \sigma(A) \subset [0,\infty)$.
Bestimmung der Eigenwerte: Es sei $0 < \lambda$, $f \in L^2$ und

$$\lambda f(x) = \int_0^1 f(y)K(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y + x\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\implies f' \in L^1 \text{ und } \lambda f'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y - xf(x)$$

$$\implies f'' \in L^1 \text{ und } \lambda f'' + f = 0 \implies f = a\cos\gamma x + b\sin\gamma x \text{ mit } \gamma = 1/\sqrt{\lambda};$$

$$\int_0^1 K(x,y)[a\cos\gamma y + b\sin\gamma y]\,\mathrm{d}y = \lambda(a\cos\gamma x + b\sin\gamma x) -$$

$$- \lambda a + x\left(\frac{a}{\gamma}\sin\gamma - \frac{b}{\gamma}\cos\gamma\right) \implies a = 0,\ b\cos\gamma = 0 \implies$$

$$\implies \gamma = \frac{1}{2}(2i+1)\pi,\ i \in \mathbb{N}_0 \text{ und somit } \lambda_i = \frac{1}{\pi^2\left(i+\frac{1}{2}\right)^2},$$

$\ker(A - \lambda_i E) = \mathbb{C}\cdot\sin\left(\pi\left(i+\frac{1}{2}\right)x\right)$, $i = 0,1,2,\cdots$ und

$$\int_0^1 f(y)K(x,y)\,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x) \in L^2(0,1) \text{ hat eine Lösung } f \in L^2(0,1) \iff$$

1) $\lambda \notin \{\lambda_i :\ i = 0,1,2,\cdots\}$

oder 2) $\exists i : \lambda = \lambda_i$ und $\int_0^1 g(x)\sin\left(\pi\left(i+\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x = 0$

Bemerkung Eine weitere Betrachtung zeigt, dass $A = B^{-1}$, wobei
$B : \left\{ f \in \mathcal{H}^{(2)}(0,1) : f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\} \longrightarrow L^2 : f \longmapsto -f''$;
siehe auch S. 63, Bsp. 23, und Übungen 5 u. 7 in S. **??**.

Beispiel 28 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit $\mathcal{C}^2$-Rand, $n \geq 3$.
Das Dirichletproblem lautet: Für $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ bestimme $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ mit $u\big|_{\partial\Omega} = g$ und $\Delta u = 0$ in Ω. Es sei $E(x) = -\dfrac{1}{(n-2)|\mathbb{S}_{n-1}|\,|x|^{n-2}}$ die Fundamentallösung von Δ_n, die in ∞ verschwindet und

$$A : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) : f \longmapsto \int\limits_{\partial\Omega} f(y)\big\langle(\nabla E)(x-y), \vec{n}(y)\big\rangle \,\mathrm{d}\sigma(y),$$

wobei $\vec{n}(y)$ = Einheitsnormale nach außen, $\mathrm{d}\sigma$ = Oberflächenmaß. (A repräsentiert die Potentiale der doppelten Schicht mit Dipolbelegung f). Es lässt sich zeigen, dass A wohldefiniert und $\in \mathrm{Lc}\big(L^2(\partial\Omega)\big)$ ist, obwohl der Kern $\notin L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$.
$u(x) := \displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} f(y)\big\langle(\nabla E)(x-y), \vec{n}(y)\big\rangle \,\mathrm{d}\sigma(y)$ erfüllt $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \Delta u = 0$ in Ω und $u\big|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{2}f + Af$ falls $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Somit zu lösen: $Af - \frac{1}{2}f = g$.
$\frac{1}{2} \notin \sigma(A)$, denn sonst existierte $0 \neq f \in L^2(\Omega)$ mit $Af - \frac{1}{2}f = 0$. Man kann zeigen, dass f dann stetig ist. Das zugehörige u verschwindet dann auf dem Rand und nach dem Maximumsprinzip überall $\implies f = 0 \implies \lightning$.
Weitere Details vgl. Triebel, Höhere Analysis. Die numerische Diskretisierung der Gleichung $\big(A - \frac{1}{2}I\big)f = g$ liefert die "Boundary Element Method".

D) Hilbert-Schmidt-Operatoren

Satz und Definition

Es sei $A \in L(H_1, H_2)$. Dann gilt:

$$\exists \text{ ONB } \{\varphi_i : i \in I\} \subset H_1 : \sum_I \|A\varphi_i\|_{H_2}^2 < \infty \iff$$
$$\forall \text{ ONB } \{\varphi_i : i \in I\} \subset H_1 : \sum_I \|A\varphi_i\|_{H_2}^2 < \infty.$$

In diesem Fall heißt A Hilbert-Schmidt-Operator.
$L2(H_1, H_2) := \{A \in L(H_1, H_2)$ Hilbert-Schmidt$\}$.

Beweis. $\{\varphi_i\},\ \{\psi_j\}$ ONB in H_1 bzw. H_2;
$\|A\varphi_i\|^2 = \sum\limits_j \big|(A\varphi_i, \psi_j)\big|^2 = \sum\limits_j \big|(\varphi_i, A^*\psi_j)\big|^2 \implies$
$\sum\limits_i \|A\varphi_i\|^2 = \sum\limits_j \sum\limits_i \big|(\varphi_i, A^*\psi_j)\big|^2 = \sum\limits_j \|A^*\psi_j\|^2$ ist also von der speziellen Wahl der ONB $\{\varphi_i\}$ unabhängig. $\square$

Definition 10.2
Für $A \in L2(H_1, H_2)$ sei $\|A\|_2 := \left[\sum_{i\in I} \|A\varphi_i\|^2\right]^{1/2}$, $\{\varphi_i\} \subset H_1$ ONB. Nach dem obigen Satz ist dies wohldefiniert und eine Norm (denn $\|A\|_2 = \left\|\left(\|A\varphi_i\|\right)_{i\in I}\right\|_{l^2}$.

Satz 10.5 (*Eigenschaften von L2*)

1. $A \in L2 \implies \|A\| \le \|A\|_2$;
2. $A \in L2(H_1, H_2) \implies A^* \in L2(H_2, H_1),\ \|A\|_2 = \|A^*\|_2$;
3. $A \in L(H_0, H_1),\ B \in L2(H_1, H_2),\ C \in L(H_2, H_3) \implies$
   $CBA \in L2(H_0, H_3)$;
4. $\mathrm{Lf}(H_1, H_2) \subset L2(H_1, H_2) \subset \mathrm{Lc}(H_1, H_2)$;
5. Mit $(A, B)_2 = \sum_I (A\varphi_i, B\varphi_i)_{H_2}$, $\{\varphi_i : i \in I\}$ ONB von H_1, ist $L2$ ein Hilbertraum und Lf ist darin dicht;
6. $A \in \mathrm{Lc}$, λ_i, $i \in I$, wie in Satz 10.1, 2. Dann gilt:
   $A \in L2 \iff \sum \lambda_n^2 < \infty$ und in diesem Fall ist $\|A\|_2^2 = \sum \lambda_n^2$.

Beweis.

1. $\varphi \in H_1$, $\{\varphi_i : i \in I\}$ ONB in $H_1 \implies A\varphi = \sum_{i\in I} A\varphi_i(\varphi, \varphi_i)$, $\|A\varphi\|^2 \le$
   $\le \left(\sum_{i\in I} \|A\varphi_i\| \left|(\varphi, \varphi_i)\right|\right)^2 \le \sum_i \|A\varphi_i\|^2 \cdot \sum_j \left|(\varphi, \varphi_i)\right|^2 = \|A\|_2^2 \cdot \|\varphi\|^2 \implies$
   $\|A\| \le \|A\|_2$.
2. Siehe Satz oben.
3. (i) $\|CB\|_2^2 = \sum_I \|CB\varphi_i\|^2 \le \|C\|^2 \cdot \|B\|_2^2 \implies CB \in L2$;
   (ii) $CBA = \left(A^*(CB)^*\right)^*$; $(CB)^* \in L2$ nach (i) und 2. $\implies A^*(CB)^* \in L2$ nach (i) $\implies CBA \in L2$ nach 2.
6. $A \in \mathrm{Lc} \iff A\varphi = \sum_I (\varphi, \varphi_i) \cdot \lambda_i \psi_i$, $\lambda_i \to 0$ oder endlich,
   $\{\varphi_i\} \subset H_1$, $\{\psi_i\} \subset H_2$ orthonormal; wenn wir $\{\varphi_i\}$ zu einer ONB von H_1 ergänzen, so gilt also für $A \in \mathrm{Lc}$:

$$A \in L2 \iff \sum \|A\varphi_i\|^2 < \infty \iff \sum \lambda_i^2 < \infty.$$

4. Wegen 6. ist $\mathrm{Lf} \subset L2$. Es sei $A \in L2,\ \{\varphi_i\}$ ONB in $H_1,\ J \subset I$ endlich $A_J\varphi := \sum_{j\in J}(\varphi,\varphi_j)A\varphi_j \implies A_J \in \mathrm{Lf},\ \|A-A_J\| \overset{1.}{\leq} \|A-A_J\|_2 = \sum_{i\in I\setminus J}\|A\varphi_i\|^2 \to 0$ für $J \nearrow I_0 := \{i \in I : A\varphi_i \neq 0\}$ (I_0 ist abzählbar). Daher ist $A \in \overline{\mathrm{Lf}}^{\,\|\cdot\|} = \mathrm{Lc}$ und sogar $A \in \overline{\mathrm{Lf}}^{\,\|\cdot\|_2}$.

5. Wenn $\{\varphi_i : i \in I\} \subset H_1$ ONB und $\{\psi_j : j \in J\} \subset H_2$ ONB, so gilt $T : L2(H_1,H_2) \xrightarrow{\sim} l^2(I\times J) : A \longmapsto (A\varphi_i,\psi_j)$, wobei $(A,B)_2 = \sum_i (A\varphi_i, B\varphi_i) = \sum_i \big(\sum_j \psi_j(A\varphi_i,\psi_j),\ \sum_k \psi_k(B\varphi_i,\psi_k)\big) =$ $= \sum_{i,j}(A\varphi_i,\psi_j)\cdot\overline{(B\varphi_i,\psi_j)} = \big(T(A),T(B)\big)_{l^2(I\times J)}$.
Die Dichte von Lf ist unter 4. gezeigt worden.

□

Beispiel 29 $M_j, \mathrm{d}\mu_j$ σ-endliche Maßräume, $H_j = L^2(M_j,\mathrm{d}\mu_j),\ j=1,2$.
Dann gilt: $L^2(M_1\times M_2,\ \mathrm{d}\mu_1\otimes\mathrm{d}\mu_2) \simeq L2(H_1,H_2)$

$$K(x,y) \longmapsto \big(f(x) \mapsto \int f(x)K(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\big)$$

ist ein Isomorphismus von Hilberträumen.
Denn wenn $\{\varphi_i^{(j)} : i \in I_j\} \subset L^2(M_j,\mathrm{d}\mu_j)$ eine ONB, so ist $\big\{\overline{\varphi_i^{(1)}(x)}\varphi_k^{(2)}(y) : (i,k) \in I_1\times I_2\big\}$ eine ONB in $L^2(M_1\times M_2,\ \mathrm{d}\mu_1\otimes\mathrm{d}\mu_2)$ und es gilt:
$L^2(M_1\times M_2,\ \mathrm{d}\mu_1\otimes\mathrm{d}\mu_2) \simeq l^2(I_1\times I_2) \simeq L2(H_1,H_2)$,

$$K \longmapsto \iint K(x,y)\varphi_i^{(1)}(x)\varphi_k^{(2)}(y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\mathrm{d}\mu_2(y) \mapsto A$$

wobei
$(A\varphi_i^{(1)},\varphi_k^{(2)}) = \iint K(x,y)\varphi_i^{(1)}(x)\overline{\varphi_k^{(2)}(y)}\,\mathrm{d}\mu_1(x)\mathrm{d}\mu_2(y)$, d.h.
$Af = \int\limits_{M_1} K(x,y)f(x)\,\mathrm{d}x.$

E) Spuroperatoren

Definition 10.3
$A \in L(H_1, H_2)$ heißt nuklear oder Spuroperator: $\iff \forall\{\varphi_i : i \in I\} \subset H_1$
$\forall\{\psi_i : i \in I\} \subset H_2$ orthonormal: $\sum\limits_{i\in I} \big|(A\varphi_i, \psi_i)\big| < \infty$.
$L1(H_1, H_2) := \big\{A \in L(H_1, H_2)$ nuklear$\big\}$.

Satz 10.6 (*Eigenschaften von* $L1$)

1. $A \in L1 \implies A^* \in L1$;
2. $A \in L(H_0, H_1),\ B \in L1(H_1, H_2),\ C \in L(H_2, H_3) \implies$
   $CBA \in L1(H_0, H_3)$
3. Lf $\subset L1 \subset L2$;
4. mit $\|A\|_1 := \sup\Big\{\sum\limits_I \big|(A\varphi_i, \psi_i)\big| : \{\varphi_i : i \in I\} \subset H_1,\ \{\psi_i : i \in I\} \subset H_2$ orthonormal$\Big\}$ wird $L1$ ein Banachraum und Lf ist darin dicht. Weiters gilt $\|A\|_2 \le \|A\|_1$;
5. $A \in$ Lc, $\{\lambda_n\} = \sigma\big(\sqrt{A^*A}\,\big)$. Dann gilt:
   $A \in L1 \iff \sum \lambda_n < \infty$ und in diesem Fall ist $\|A\|_1 = \sum \lambda_n$;
6. $A \in L1(H_1, H_2) \iff \exists B \in L2(H_2),\ C \in L2(H_1, H_2) : A = BC$.

Beweis.

1. $(A\varphi_i, \psi_i) = (\varphi_i, A^*\psi_i)$.
2. α) A unitär, $B \in L1(H_1, H_2)$; dann ist $\sum\limits_I \big|(BA\varphi_i, \psi_i)\big| < \infty$, da $\{A\varphi_i\}$ wieder orthonormal ist $\implies BA \in L1$;
   β) $H_0 = H_1$, A symmetrisch, $B \in L1(H_1, H_2)$.
   $A = \int\limits_{-\|A\|}^{\|A\|} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda$ sei die Spektralzerlegung von A,
   $A_1 := \sqrt{\|A\|^2 I - A^2} := \int\limits_{-\|A\|}^{\|A\|} \sqrt{\|A\|^2 - \lambda^2}\,\mathrm{d}E_\lambda \implies \dfrac{1}{\|A\|}(A \pm \mathrm{i}A_1)$ unitär,

denn
$\big\|(A \pm \mathrm{i}A_1)\varphi\big\|^2 = \big((A \pm \mathrm{i}A_1)(A \mp \mathrm{i}A_1)\varphi, \varphi\big) = \big((A^2 + A_1^2)\varphi, \varphi\big) = \|A\|^2 \, \|\varphi\|^2$.
Aus α) folgt daher $BA \in L1$.
$\gamma)$ $H_0 = H_1,\ A \in L(H_1) \implies A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^*)}_{\text{sa.}} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\underbrace{\mathrm{i}(A - A^*)}_{\text{sa.}}\big)$.

Nach β) folgt $BA \in L1$.
$\delta)$ $\dim H_0 \leq \dim H_1$, $j : H_0 \hookrightarrow H_1$ sei eine Einbettung von H_0, d.h. $j : H_0 \longrightarrow \mathrm{Im}j$ ist Isometrie.
$A_1 \in L(H_1)$ sei so gewählt, dass

$$\begin{array}{ccc} H_0 & \xrightarrow{A} & H_1 \\ {\scriptstyle j}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle A_1} \\ & H_1 & \end{array}$$

kommutiert. $BA_1 \in L1$ nach $\gamma) \implies BA = BA_1 j \in L1$ nach $\alpha)$.
Somit ist nun gezeigt: $A \in L(H_0, H_1);\ B \in L1(H_1, H_2)$,
$\dim H_0 \leq \dim H_1 \implies BA \in L1(H_0, H_2)$.
Der Rest von 2. wird später gezeigt.

5. Es sei $A \in \mathrm{Lc},\ A\varphi = \sum \lambda_n(\varphi, \varphi_n)\psi_n$ mit $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$ orthonormal.
$A \in L1 \implies \sum \big|(A\varphi_n, \psi_n)\big| = \sum \lambda_n < \infty$.
Umgekehrt: Sei $\sum \lambda_n < \infty$ und $\{\varphi_i'\} \subset H_1,\ \{\psi_i'\} \subset H_2$ orthonormal $\implies$
$\sum\limits_i \big|(A\varphi_i', \psi_i')\big| = \sum\limits_I \big|\sum\limits_n \lambda_n(\varphi_i', \varphi_n)(\psi_n, \psi_i')\big|$
$\leq \sum\limits_{i,n} \lambda_n \big|(\varphi_i', \varphi_n)(\psi_n, \psi_i')\big| \leq \sum\limits_n \lambda_n \sqrt{\sum\limits_i \big|(\varphi_i', \varphi_n)\big|^2 \sum\limits_i \big|(\psi_n, \psi_i')\big|^2}$
$\leq \sum\limits_n \lambda_n \|\varphi_n\| \cdot \|\psi_n\| = \sum\limits_n \lambda_n$.

3. $\alpha)$ $\mathrm{Lf} \subset L1$ nach 5.
$\beta)$ $L1(H_1, H_2) \subset L2(H_1, H_2)$ für $\dim H_1 \leq \dim H_2$:
$A \in L1 \implies A^* \in L1 \implies A^*A \in L1(H_1)$ nach dem bereits gezeigten Teil von 2. $\implies$ für $\{\varphi_i\} \subset H_1$ ONB gilt:
$\sum \|A\varphi_i\|^2 = \sum \big|(A^*A\varphi_i, \varphi_i)\big| < \infty \implies A \in L2$.
$\gamma)$ Nun sei $\dim H_1 \geq \dim H_2$,

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{A} & H_2 \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle A_1} \\ & \ker A^\perp & \end{array}$$

$A_1 \in L1(\ker A^\perp, H_2)$, da $\{\varphi_i\} \subset \ker A^\perp$ orthonormal $\implies$ $\{\varphi_i\} \subset H_1$ orthonormal.
Daher ist nach $\beta)$ $A_1 \in L2(\ker A^T, H_2) \implies A = A_1 \circ \mathrm{pr} \in L2(H_1, H_2)$.

4. $\|\cdot\| : L1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist wohldefiniert nach 5. und 3. und offenbar eine Norm.
   Wegen $\|A\|_2^2 = \sum \lambda_n^2 \leq (\sum \lambda_n)^2 = \|A\|_1^2$ gilt $\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$.
   Weiters ist Lf $\subset L1$ dicht, da $\|A_J - A\|_1 = \sum\limits_{n \notin J} \lambda_n \to 0$, wenn A_J wie in B) definiert ist.
   $L1$ ist vollständig: $A_n \in L1$ sei eine C-Folge $\implies$
   $\|A_n - A_m\|_2 \leq \|A_n - A_m\|_1 \to 0$ für $\min\{n, m\} \to \infty$
   $\implies$ A_n C-Folge in $L2$ $\implies$ $A_n \longrightarrow A \in L2$;
   $A \in L1$, denn $\sum\limits_I \big|(A\varphi_i, \psi_i)\big| = \sup\limits_{\substack{J \subset I \\ \text{endlich}}} \sum\limits_J \big|(A\varphi_i, \psi_i)\big| =$
   $= \sup\limits_{\substack{J \subset I \\ \text{endlich}}} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i \in J} \big|(A_n\varphi_i, \psi_i)\big| \leq \sup\limits_n \|A_n\|_1 < \infty.$
   Ebenso folgt $\|A_n - A\|_1 \to 0$.

6. $\alpha)$ $B \in L2(H_2, H_3)$, $C \in L2(H_1, H_2)$ $\implies$
   $\sum\limits_I \big|(BC\varphi_i, \psi_i)\big| = \sum\limits_I \big|(C\varphi_i, B^*\psi_i)\big| \leq \sum\limits_i \|C\varphi_i\| \, \|B^*\psi_i\| \leq$
   $\leq \big[\sum\limits_I \|C\varphi_I\|^2 \cdot \sum \|B^*\psi_i\|^2\big]^{1/2} \leq \|C\|_2 \cdot \|B\|_2$ $\implies$ $BC \in L1$ und $\|BC\|_1 \leq \|B\|_2 \cdot \|C\|_2$.
   $\beta)$ Umgekehrt: $A \in L1(H_1, H_2)$, $A\varphi = \sum \lambda_i(\varphi, \varphi_i)\psi_i$ $\implies$ $A = B \cdot C$, wobei $C\varphi = \sum \sqrt{\lambda_i}\,(\varphi, \varphi_i)\psi_i$ und $B\psi = \sum \sqrt{\lambda_i}\,(\psi, \psi_i)\psi_i$, d.h.
   $B, C \in L2$.

2. folgt aus 6.

□

Satz und Definition

H Hilbertraum, $\{\varphi_i : i \in I\}$ ONB. Die Abbildung (genannt „Spur")

$$\mathrm{Sp} : L1(H) \longrightarrow \mathbb{C} : A \longmapsto \sum_I (A\varphi_i, \varphi_i)$$

liegt in $L1(H)'$ und ist von der Wahl der ONB unabhängig.
$\mathrm{Sp}\,(A^*) = \overline{\mathrm{Sp}(A)}$, $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ für $A \in L1$, $B \in L$; $\|A\|_1 = \mathrm{Sp}\big(\sqrt{AA^*}\big)$.

Beweis.

1. Es sei $A\varphi = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i(\varphi, \varphi_i)\psi_i$, $\sum \lambda_i < \infty$, $\{\varphi_i\}, \{\psi_i\}$ ONB, $\lambda_i \geq 0$ und $B \in L(H)$. Dann gilt:
   $\sum\limits_{i \in I}(AB\varphi_i, \varphi_i) = \sum\limits_{i \in I}\big(\sum\limits_{k \in I} \lambda_k(B\varphi_i, \varphi_k)(\psi_k, \varphi_i)\big)$;

die letzte Doppelreihe ist absolut konvergent, denn
$\sum_i \sum_k \big|(B\varphi_i,\varphi_k)\big| \cdot \lambda_k \big|(\psi_k,\varphi_i)\big| = \sum_k \lambda_k \sum_i \big|(B\varphi_i,\varphi_k)\big|\,\big|(\psi_k,\varphi_i)\big|$
$\le \sum_k \lambda_k \Big[\underbrace{\sum_i \big|(B\varphi_i,\varphi_k)\big|^2}_{\|B^*\varphi_k\|^2} \cdot \underbrace{\sum_i \big|(\psi_k,\varphi_i)\big|^2}_{1} \Big]^{1/2}$
$= \sum_k \lambda_k \|B^*\varphi_k\| \le \|B^*\| \cdot \sum \lambda_k < \infty.$
Daher gilt:
$\sum_i (AB\varphi_i,\varphi_i) = \sum_k \sum_i \underbrace{(B\varphi_i,\varphi_k)}_{(\varphi_i,B^*\varphi_k)} (A\varphi_k,\varphi_i)$
$= \sum_k (A\varphi_k, B^*\varphi_k) = \sum (BA\varphi_k,\varphi_k).$
Für $A_1 := UA,\ U \in L(H)$ unitär, erhalten wir:
$\sum (A_1\varphi_k,\varphi_k) = \sum (U^{-1}A_1U\varphi_i,\varphi_i) = \sum (A_1\psi_i,\psi_i)$, wobei $\psi_i = U\varphi_i$. Wenn wir A_1 festhalten und U variieren, so ergibt sich daraus, dass Sp wohldefiniert ist, d.h. von der Wahl der ONB unabhängig ist.

2. $|\mathrm{Sp}\, A| \le \|A\|_1 \implies \mathrm{Sp} \in L1(H)'$;
$\mathrm{Sp}(A^*) = \sum (A^*\varphi_n,\varphi_n) = \sum (\varphi_n, A\varphi_n) = \overline{\mathrm{Sp}(A)}$;
$\|A\|_1 = \sum \lambda_n = \sum \big(\sqrt{AA^*}\,\varphi_n,\varphi_n\big) = \mathrm{Sp}\,(\sqrt{AA^*}\,)$, wenn wie üblich $A\varphi = \sum \lambda_n(\varphi,\varphi_n)\psi_n$.

□

Beispiel 30

$(M, \mathrm{d}\mu)$ Maßraum, $H = L^2(M,\mathrm{d}\mu)$;
$I:\ F := \big\{ \sum_{j=1}^N g_j(x)h_j(y) :\ N \in \mathbb{N}, g_j, h_j \in H \big\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lf}(H)$
$K(x,y) = \sum g_j(x)h_j(y) \longmapsto \big(f(x) \mapsto \sum_j h_j(f,\overline{g_j}) \big).$

Dann gilt:
$\widetilde{\mathrm{Sp}}:\ F \xrightarrow{I} \mathrm{Lf}(H) \xrightarrow{\mathrm{Sp}} \mathbb{C}:\ K(x,y) \longmapsto \int K(x,x)\,\mathrm{d}\mu(x).$

Denn: $\sum_n (IK\varphi_n,\varphi_n) = \sum_n \sum_j (h_j,\varphi_n)\cdot(\varphi_n,\overline{g_j}) = \sum_j (h_j,\overline{g_j})$
$= \sum_{j=1}^N \int g_j(x)h_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int K(x,x)\,\mathrm{d}\mu(x).$

Spezialfall: $M = \mathbb{N}$, $\int\limits_A \mathrm{d}\mu = \#A$. Dann ist $\varphi_n(x) = \delta_{n,x}$ eine ONB und Sp : $L1(H) \longrightarrow \mathbb{C} : (a_{ij}) \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ii}$.

F) Nukleare Räume und Kernsatz

Definition 10.4
Ein vollständiger topologischer Vektorraum E heißt **abzählbarer Hilbertraum** $\Longleftrightarrow \exists$ Skalarprodukte $(-,-)_n$ auf E mit

1. $\forall n, m:$ $(-,-)_n$ und $(-,-)_m$ sind kompatibel, d.h.
   φ_k C-Folge bzgl. $\|\cdot\|_n$ und $\varphi_k \to 0$ bzgl. $m \implies \varphi_k \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|_n$;
2. E trägt die von $\|\cdot\|_n$ induzierte Topologie, d.h.
   $\Big\{\big\{\varphi : \|\varphi\|_1 < \epsilon, \cdots, \|\varphi\|_n < \epsilon\big\} : n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0\Big\}$ ist eine 0-Umgebungsbasis von E.

Bemerkung 1) Abzählbare Hilberträume sind spezielle Fréchet-Räume.
2) OEdA. $\|\varphi\|_m \leq \|\varphi\|_{m+1}$ für alle m
(sonst definiere $(\varphi,\psi)^{\text{neu}}_{m+1} := (\varphi,\psi)^{\text{alt}}_{m+1} + (\varphi,\psi)_m$).
Wenn E_m die Vervollständigung von E bzgl. $\|\cdot\|_m$ bezeichnet, so gilt:
(i) $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$
(ii) $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$
(Denn (i) folgt aus der Kompatibilität;
(ii): wenn $\varphi \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, so existiert $\forall m : \varphi_m \in E$ mit $\|\varphi - \varphi_m\|_m < \frac{1}{m}$. φ_m ist C-Folge in E und $\varphi_m \to \varphi$ in E.) Weiters ist (per definitionem) $E' = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E'_m$.

Beispiel 31 1) $E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \|f\|^2_m = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \int \left|\partial^\alpha f(x)\right|^2 \cdot \left(1 + |x|^2\right)^m \mathrm{d}x$.
2) $E = \mathcal{D}_{L^2},\ E_m = \mathcal{H}^{(m)}$ = Sobolev-Raum, vgl. S. 24.
3) $E = \mathcal{D}(K) = \big\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \subset K\big\}$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,
$\|f\|_m = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \int \left|\partial^\alpha f(x)\right|^2 \mathrm{d}x$.

Definition 10.5
Ein abzählbarer Hilbertraum E heißt **nuklear**:$\iff \forall m \in \mathbb{N} : \exists n > m : \ i_{m,n} : E_n \hookrightarrow E_m$ nuklear.

Bemerkung Da die Zusammensetzung zweier $L2$-Abbildungen eine $L1$-Abbildung ergibt (vgl. Satz 10.6), können wir ebensogut die Nuklearität durch die Bedingung charakterisieren $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n > m : \ i_{m,n} \in L2(E_n, E_m)$.

Beispiel 32 1) $A > 0,\ B_a := \{x \in \mathbb{R}^d : \forall j \le d : |x_j| \le a\}$,
$E := \mathcal{D}_a := \mathcal{D}(B_a) = \{\varphi \in \mathcal{D} : \operatorname{supp}\varphi \in B_a\}$ ist nuklear.
Denn: $\left\{\varphi_k(x) := \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{a}\sum_{j=1}^{d} k_j x_j\right) : k \in \mathbb{Z}^d\right\}$ ist orthogonal und dicht in F_m, wobei $F = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi(x + ak) = \varphi(x),\ \forall k \in \mathbb{Z}^d\}$. Weiters gilt: $\|\varphi_k\|^2_{F_m} = \sum_{|\alpha|\le m} \left|\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{a}k\right)^\alpha\right|^2 \int_{B_a} |\varphi_k(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{|\alpha|\le m} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2|\alpha|} |k_1|^{2\alpha_1}\cdots|k_d|^{2\alpha_d}\cdot(2a)^d$, d.h.
$0 < C_1(m) < \dfrac{\|\varphi_k\|_{F_m}}{|k|^m} < C_2(m),\ |k| \ge 2.$
Für $n > m$ gilt: $F_n \hookrightarrow F_m : \varphi \longmapsto \sum_k \underbrace{\frac{\|\varphi_k\|_{F_m}}{\|\varphi_k\|_{F_n}}}_{\lambda_k} \cdot \left(\varphi, \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|_{F_n}}\right)_{F_n} \cdot \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|_{F_m}}$ und
$\sum_k \lambda_k < \infty$ für $n > m + d$.
E_n ist ein abgeschlossener Teilraum von F_n und daher ist auch
$i_{m,n} : E_n \hookrightarrow F_n \hookrightarrow F_m \underset{\text{proj.}}{\longrightarrow} E_m$ in $L1$ für $n > m + d$.

2) $E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ist nuklear. Denn nach Übung 4. in S. 99 ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\sim} s_d : g \longmapsto \left(\int f_{k_1}(x_1)\cdots f_{k_d}(x_d) g(x)\,\mathrm{d}x\right)_{k\in\mathbb{N}_0^d},$$

wobei f_j die Hermiteschen Funktionen sind und

$$s_d = \left\{(c_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^d} : \forall m \in \mathbb{N} : \|(c_k)\|_m < \infty\right\},\ \|(c_k)\|_m^2 := \sum_k \left(1 + |k|\right)^{2m} |c_k|^2.$$

(In S. 99 stehen andere Normen, welche zwar dieselbe Fréchetraumstruktur auf s_d erzeugen, jedoch keine Struktur als abzählbarer Hilbertraum.) Eine ONB in $(s_d)_m = \left\{(c_k) : \|(c_k)\|_m < \infty\right\}$ ist $\{\Phi_{k_0}^{(m)}\} = \left\{\left(\delta_{kk_0}/\left(1 + |k_0|\right)^m\right)_k : k_0 \in \mathbb{N}_0^d\right\}$ und $i_{m,n} : (s_d)_n \longrightarrow (s_d)_m$ ist nuklear, wenn $\sum_{k_0} \dfrac{\left(1 + |k_0|\right)^m}{\left(1 + |k_0|\right)^n} < \infty$, d.h. für $n > m + d$.

Abstrakter Kernsatz E, F seien abzählbare Hilberträume und einer von beiden sei nuklear, z.B. E.
$B : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$ sei bilinear und partiell stetig (d.h. $\forall \varphi \in E : \forall \psi \in F :\ B(\varphi, -)$ und $B(-, \psi)$ sind stetig). Dann gilt

$$\exists n, m \in \mathbb{N} : \exists A \in L1(E_n, F'_m) : \forall (\varphi, \psi) \in E \times F : B(\varphi, \psi) = (A\varphi)(\psi).$$

Beweis.

1. B ist stetig. Denn:
   Es sei $p_n(\psi) := \sup\Big\{\big|B(\varphi, \psi)\big| : \|\varphi\|_n \leq 1\Big\} \in [0, \infty]$ für $\psi \in F \implies$
   (i) $\forall \psi \in F : \exists n = n(\psi) : p_n(\psi) < \infty$, denn $B(-, \psi) : E \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig;
   (ii) $p_1(\psi) \geq p_2(\psi) \geq \cdots$, wenn wir $\|\varphi\|_n \leq \|\varphi\|_{n+1}$ voraussetzen (siehe S. 132);
   (iii) p_n konvex, d.h. $p_n(\lambda\psi) = |\lambda| p_n(\psi)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p_n(\psi_1 + \psi_2) \leq p_n(\psi_1) + p_n(\psi_2)$, denn $\big|B(\varphi, -)\big|$ ist konvex für jedes $\varphi \in E$;
   (iv) p_n ist nach unten halbstetig als Supremum von (unten halb-)stetigen Funktionen.
   Nach (iii) und (iv) ist $A_n := \big\{\psi : p_n(\psi) \leq 1\big\}$ absolut konvex (d.h. α) $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1,\ \forall \psi \in A_n : z\psi \in A_n$ und
   β) $\forall 0 < c < 1 : \forall \psi_1, \psi_2 \in A_n : c\psi_1 + (1 - c)\psi_2 \in A_n$) und abgeschlossen.
   Nach (i) gilt $\bigcup\limits_{k,n \in \mathbb{N}} k \cdot A_n = F$.
   Nach dem Baireschen Satz gilt dann:

   $$\exists n : \overset{\circ}{A}_n \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \exists \psi_0 \in F : \exists r > 0 : \big\{\psi : \|\psi - \psi_0\|_m \leq r\big\} \subset A_n;$$

   A_n absolutkonvex $\implies \big\{\psi : \|\psi\|_m \leq r/2\big\} \subset A_n \implies \exists m, n \in \mathbb{N} : \exists r' > 0 : \big[\|\psi\|_m \leq r' \implies p_n(\psi) \leq 1\big] \implies p_n(\psi) \leq \dfrac{1}{r'}\|\psi\|_m \implies \big|B(\varphi, \psi)\big| \leq \dfrac{1}{r'}\|\varphi\|_n \cdot \|\psi\|_m \implies B$ stetig.

2. Definiere $A_1 : E_n \longrightarrow F'_m : \varphi \longmapsto \big(\psi \mapsto B(\varphi, \psi)\big)$.
   Dann ist $\big|(A_1\varphi)(\psi)\big| = \big|B(\varphi, \psi)\big| \leq \dfrac{1}{r'}\|\varphi\|_n \|\psi\|_m$
   $\implies \|A_1\varphi\|_{F'_m} \leq \dfrac{1}{r'}\|\varphi\|_n \implies A_1 \in L(E_n, F'_m)$.

3. Da E nuklear ist, existiert $p > n$ mit $i_{n,p} : E_p \hookrightarrow E_n$ nuklear $\implies$
   $A := A_1 \circ i_{n,p} \in L1(E_p, F'_m)$.

□

Bemerkung Die Darstellung von B durch A_1 ist, wie der Beweis zeigt, in Fréchet-räumen immer möglich. $A \in L1(E_n, F'_m)$ bedeutet:
$\exists \lambda_k > 0,\ \sum \lambda_k < \infty,\ \exists \{\varphi_k\} \subset E_n,\ \exists \{H_k\} \subset F'_m$ orthonormal mit

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_n H_k(\psi).$$

Kernsatz in $\mathcal{S}$
Es sei $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein partiell stetiges, bilineares Funktional. Dann existiert

$$K(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d}_{x,y}) \text{ mit } B(\varphi,\psi) = {}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})}\big\langle \varphi(x)\psi(y), K(x,y)\big\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})}.$$

Beweis.
$B(\varphi,\psi) = \sum \lambda_k (\varphi,\varphi_k)_n H_k(\psi)$ sei die Darstellung nach dem abstrakten Kernsatz. Definiere $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$

$$\big\langle \varphi(x,y), K\big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k H_k\Big(\big(\varphi(x,y), \varphi_k(x)\big)_n\Big).$$

Dies ist wohldefiniert, denn $\psi_k(y) := \big(\varphi(x,y), \varphi_k(x)\big)_n =$
$= \sum\limits_{|\alpha|\le n} \int \big(1+|x|^2\big)^n \partial_x^\alpha \varphi(x,y) \cdot \overline{\partial^\alpha \varphi_k(x)}\, \mathrm{d}x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_y)$
und $\big|H_k(\psi_k)\big|^2 \le \|H_k\|_m^2 \cdot \|\psi_k\|_m^2 = \|\psi_k\|_m^2 =$
$= \sum\limits_{|\beta|\le m} \int \big(1+|y|^2\big)^m \Big|\big(\partial_y^\beta \varphi(x,y), \varphi_k(x)\big)_n\Big|^2 \mathrm{d}y \le$
$\le \sum\limits_{|\beta|\le m} \int \big(1+|y|^2\big)^m \underbrace{\|\varphi_k\|_n^2}_{=1} \cdot \big\|\partial_y^\beta \varphi(x,y)\big\|_n^2 \mathrm{d}y =$
$= \sum\limits_{|\beta|\le m} \sum\limits_{|\alpha|\le m} \iint \big(1+|y|^2\big)^m \big(1+|x|^2\big)^n \big|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\big|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$
das letzte ist eine Norm auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ und folglich ist $K \in \mathcal{S}'$. □

Kernsatz in $\mathcal{D}$
$B : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ sei ein partiell stetiges, bilineares Funktional. Dann existiert $K(x,y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}_{x,y})$ mit $B(\varphi,\psi) = \big\langle \varphi(x)\psi(y), K(x,y)\big\rangle$.

Beweis.
Da $\mathcal{D}_a$ nuklear ist (vgl. S. 133), kann auf B eingeschränkt auf $\mathcal{D}_a \times \mathcal{D}_a$ ebenso wie im Fall $\mathcal{S}$ der Kernsatz angewandt werden. Dies ergibt:

$$\forall a > 0 :\ \exists K_a \in \mathcal{D}'(B_a \times B_a) :\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(B_a) : B(\varphi,\psi) = \langle \varphi \otimes \psi, K_a\rangle.$$

Definiere $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d})$ durch $\big\langle \varphi(x,y), K \big\rangle := \langle \varphi, K_a \rangle$, wobei $\operatorname{supp}\varphi \subset B_a \times B_a$. □

G) Gel'fandsche Raumtripel

Definition 10.6
E sei ein nuklearer abzählbarer Hilbertraum, $(-,-) : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, positiv definite hermitesche Sesquilinearform, H die Vervollständigung von E bzgl. $(-,-)$. Dann gilt $E \hookrightarrow H \overset{\text{antilinear}}{\hookrightarrow} E'$. Dies nennt man ein **Gel'fandsches Raumtripel**, H wird als **rigged Hilbert space** bezeichnet.

Beispiel 33 $E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ (f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,\ H = L^2(\mathbb{R}^n)$,
$E \hookrightarrow H \hookrightarrow E' = \mathcal{S}'$.
$f \longmapsto f \longmapsto \overline{f}$.

Lemma
$E \subset H = L^2(X, \mathrm{d}\mu) \subset E'$ sei ein Gel'fandsches Raumtripel. Dann gilt

$$\forall x \in X : \exists T_x \in E' : \forall \varphi \in E : \varphi(x) = \langle \varphi, T_x \rangle \quad \mu - \text{f. ü.}$$

Beweis.

1. $i : E \hookrightarrow H$ stetig $\implies \exists n : i_n : E_n \hookrightarrow H$ stetig $\implies \exists n : i_n : E_n \hookrightarrow H$ nuklear $\implies \exists \lambda_k,\ \sum \lambda_k < \infty,\ \exists \{\varphi_k\} \subset E_n,\ \exists \{\psi_k\} \subset H$ orthonormal: $\forall \varphi \in E_n : i_n(\varphi) = \sum \lambda_k \psi_k (\varphi, \varphi_k)_n$.
   Definiere
   $$T_x : E_n \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \sum_k \lambda_k \psi_k(x)(\varphi, \varphi_k)_n.$$

2. Für $\mu-$fast alle x ist T_x wohldefiniert und liegt in $E_n' \subset E'$. Denn:
   $$T_{x,k} : E_n \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \psi_k(x)(\varphi, \varphi_k)_n$$
   liegt in E_n' $\mu -$ f. ü. und $\|T_{x,k}\|_{E_n'} = \big|\psi_k(x)\big| \cdot \|\varphi_k\|_n = \big|\psi_k(x)\big|$ und folglich ist $T_x = \sum\limits_k \lambda_k T_{x,k}$ überall dort wohldefiniert und in E_n', wo alle $T_{x,k}$ definiert sind und $\sum\limits_k \lambda_k \big|\psi_k(x)\big| < \infty$. Diese Summe ist aber $\mu-$f. ü. konvergent, da
   $$\Big(\sum \lambda_k \big|\psi_k(x)\big|\Big)^2 \le \sum_k \lambda_k \cdot \sum_k \lambda_k \big|\psi_k(x)\big|^2$$

und

$$\int \sum_k \lambda_k \big|\psi_k(x)\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = \sum \lambda_k \|\psi_k\|^2 = \sum \lambda_k < \infty.$$

3. $\varphi \in E \implies \varphi = \sum \lambda_k \psi_k (\varphi, \varphi_k)_n$, wobei die Konvergenz der Reihe in $H = L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ gemeint ist. Nach 2. gilt aber auch, dass die Reihe $\sum \lambda_k \psi_k(x)(\varphi, \varphi_k)_n$ $\mu-$f. ü. konvergiert. Da eine in L^2 konvergente Folge eine f. ü. konvergente Teilfolge (mit demselben Grenzwert) hat, gilt $\varphi(x) = \langle \varphi, T_x \rangle$ $\mu-$f. ü.

□

Definition 10.7 $E \subset H \subset E'$ Gel'fandsche Raumtripel.

1. Ein Operator $A \in \mathrm{Lsa}\,(H)$ heißt selbstadjungiert auf dem Gel'fandschen Raumtripel: $\iff$ (i) $E \subset D(A)$; (ii) $A : E \longrightarrow E$ stetig.
2. $\mathrm{Lsa}\,(H, E) := \{A$ wie unter 1.$\}$.
3. $T \in E'$ heißt verallgemeinerter Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda :\iff \forall \varphi \in E : \ \langle A\varphi, T\rangle = \lambda \langle \varphi, T\rangle \iff A^T T = \lambda T$ (wobei $A^T : E' \longrightarrow E'$ der zu A transponierte Operator ist.)

Hauptsatz *(Gel'fand-Vilenkin, p. 121)*
$E \subset H \subset E'$ Gel'fandsche Raumtripel, $A \in \mathrm{Lsa}\,(H, E)$.
Dann ist $\mathbb{C}\big\langle \{T \in E' \text{ verallg. Eigenv.}\}\big\rangle$ dicht in E' (in der Topologie $\sigma(E', E)$).

Beweis.
im Spezialfall $H = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$, $\mathrm{d}\mu$ Radonmaß auf $\mathbb{R}$,

$$A : \Big\{ f : \int x^2 \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty \Big\} \longrightarrow H$$
$$f \longmapsto xf,$$

der nicht so weit vom allgemeinen Fall entfernt ist, wie es zunächst erscheinen mag.
Da $A : E \longrightarrow E$ stetig ist, $\exists n : A : E_n \longrightarrow E_n$ stetig. n sei weiters so gewählt, dass die Darstellung $\langle \varphi, T_x \rangle = \sum\limits_k \lambda_k \psi_k(x)(\varphi, \varphi_k)_n$, $\varphi \in E_n$, aus dem Beweis des Lemmas gilt.
E_n ist separabel, denn wenn $\varphi \in E_n$ und $\forall k : \varphi \perp \varphi_k$, so folgt $\varphi(x) = 0$ f. ü. $\implies \varphi = 0$.
Für $\varphi \in E_n$ und $x \in \mathbb{R} \setminus N_\varphi$, $\int\limits_{N_\varphi} \mathrm{d}\mu = 0$ gilt

$$_{E_n}\langle \varphi, A^T T_x \rangle_{E_n'} = \langle A\varphi, T_x \rangle = x\varphi(x) = \langle \varphi, xT_x \rangle.$$

Wenn $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} \subset E_n$ dicht, so ist $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} N_{\varphi_j}$ eine Nullmenge und $A^T T_x = xT_x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus N$, d.h. $T_x \in E'$ ein verallgemeinerter Eigenvektor für $x \in \mathbb{R} \setminus N$. Weiters ist ${}_{\mathbb{C}}\big\langle \{T_x : x \in \mathbb{R} \setminus N\} \big\rangle \subset E'$ dicht, da
$\langle \varphi, T_x \rangle = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus N \implies \varphi(x) = 0 \quad \mu-$f. ü. $\implies \varphi = 0.$ □

Bemerkung 1. H und A lassen sich in der im Beweis vorausgesetzten Form darstellen, wenn A **zyklisch** ist, d.h. $\exists h \in H : \{A^j h : j \in \mathbb{N}_0\} \subset H$ dicht. (Im endlich-dimensionalen Fall bedeutet dies, dass A keine mehrfachen Eigenwerte besitzt.) Der allgemeine Fall ist technisch etwas aufwendiger, man verwendet das sogenannte direkte Integral von Hilberträumen.

2. Der Sinn des Satzes besteht darin, dass $\varphi \in E$ durch die Kenntnis von $\langle \varphi, T \rangle$, $T \in E'$ verallgemeinerter Eigenvektor, festgelegt ist. Hierauf aufbauend folgt dann die Theorie der einem $A \in$ Lsa entsprechenden Fourierzerlegung von $\varphi \in E$. Physikalisch: vgl. Landau-Lifschitz, 2. Band der Kurzfassung, § 5; mathematisch: K. Maurin, General eigenfunction expansions etc. p. 76.

Beispiel 34
1) $H = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\lambda),\ E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^1),\ A = \hat{x},\ T_x(\xi)$ entspricht $\delta(\xi - x)$.
2) $H = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\lambda),\ E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^1),\ A = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\ T_x(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}$, denn $\langle A\varphi, T_x \rangle = \big\langle \mathrm{i}\varphi'(\xi), \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \big\rangle = x\langle \varphi, T_x \rangle$.

10.1 Übungen

1. Zeige, dass $A \in L1(H_1, H_2) \iff \exists \{\varphi_i : i \in I\} \subset H_1$ ONB mit $\sum \|A\varphi_i\|_{H_2} < \infty$.

2. Konstruiere $A \in \mathrm{Lf}\,(l^2) \subset L1(l^2)$ und eine ONB $\{\varphi_n\} \subset l^2$ mit $\sum \|A\varphi_n\| = \infty$.

3. Zeige, dass $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ nuklear ist.

Kapitel 11

Axiome der relativistischen Quantentheorie

Bogolyubov, Logunov, Todorov *Axiomatic quantum field theory*

L. Schwartz *Matemática y física cuántica*

O. Forster *Riemannsche Flächen*

A) Das Heisenberg-Bild

In S. **??** sind die Axiome der Schrödingerschen Quantenmechanik angeführt. Aufgrund der verschiedenartigen Behandlung von Raum und Zeit, ist diese Beschreibungsart für eine relativistische Theorie nicht gut geeignet. In diesem „Schrödinger-Bild“ ist der Mittelwert der Messergebnisse einer Apparatur V_f für einen Zustand z durch $(Ax,x)/\|x\|^2$ gegeben, wobei $z=\mathbb{C}\cdot x, x\in H$ und $A\in L(H)\cap \mathrm{Ls}(H)$ der Observablen f entspricht (vgl. S. 76–77). Weiters geht der Zustand z im Zeitpunkt $t=0$ in den Zustand $z(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x\cdot\mathbb{C}$ zu einem späteren Zeitpunkt t über (vgl. S. 78, 79) und die Messung ergibt dann den Mittelwert

$$(A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x)/\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x\|^2=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}x,x)}{\|x\|^2}\,,$$

da $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}$ unitär ist. Wenn wir $A(t):=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}$ setzen, so können wir die Zeitabhängigkeit der Messungen in den Operator verschieben und den Zustand z zeitunabhängig lassen. Damit gelangt man zu folgender Axiomatik (das sogenannte Heisenberg-Bild):

Axiom 1 Die Zustände eines physikalischen Systems entsprechen den 1-dimensionalen Unterräumen eines Gel'fandschen Raumtripels $E \subset H \subset E'$; $\mathbb{C}x,\ x \in E'$ heißen *verallgemeinerte*, $\mathbb{C}x,\ x \in E$ heißen *reguläre* Zustände. Die Zustände werden als zeitunabhängig aufgefasst.

Axiom 2 Die Observablen entsprechen den selbstadjungierten Operatoren $L(H) \cap \mathrm{Lsa}(H, E)$. Der Mittelwert der Messwerte der A entsprechenden Observablen im Zustand $\mathbb{C} \cdot x,\ x \in H$, ist durch $(Ax, x)/\|x\|^2$ gegeben. Die Observablen werden als zeitabhängig betrachtet mit der Zeitentwicklung $A(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar} A(0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}/\hbar}$.

Beispiel 35 n ungekoppelte harmonische Oszillatoren. Nach Kap. 8 setzen wir $H = L^2(\mathbb{R}^n),\ \hat{x}_j =$ Ortsoperator des j-ten Teilchens, $p_j = -\mathrm{i}\hbar \dfrac{\partial}{\partial x_j}$,
$\overset{\circ}{\mathcal{H}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H : f \longmapsto \left(-\dfrac{\hbar}{2m} \Delta + \dfrac{k}{2} |x|^2 \right) f,\ E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ E' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Der Einfachheit halber sei $\hbar = 1,\ \dfrac{k}{2} = 1,\ \dfrac{\hbar^2}{2m} = 1$. Nach S. 91 sind die (verallgemeinerten) Eigenvektoren von $\mathcal{H}$ durch $\left\{ f_\alpha := \prod\limits_{j=1}^{n} f_{\alpha_j}(x_j) \in E : \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}$ gegeben, wobei $f_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi},}} \mathrm{e}^{x^2/2} \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} (\mathrm{e}^{-x^2})$ die Hermiteschen Funktionen sind. E wird nicht zufällig gleich $\mathcal{S}$ gewählt, sondern es gilt:

$$E = \left\{ f \in H : \forall \text{ Polynome } P(x, y) : P(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n,\ p_1, \cdots, p_n) f \in H \right\}$$

$$= \bigcap_p D\big(P(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n, p_1, \cdots, p_n)\big).$$

Wenn wir $a_j = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_j + \mathrm{i}p_j)$ setzen, so gilt

$$\prod_{j=1}^{n} f_{\alpha_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j^{*\alpha_j}}{\sqrt{\alpha_j!}} \Phi_0,$$

wobei $\Phi_0 = \prod\limits_{j=1}^{n} f_0(x_j) = \pi^{-n/4} \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$ der Grundzustand in der Ortsdarstellung ist. Wegen

$$H \simeq l^2(\mathbb{N}_0^n) : f \longmapsto (f, f_\alpha)$$

können wir auch auf $l^2(\mathbb{N}_0^n)$ rechnen. f_α geht über in

$$(\delta_{\alpha,\beta})_{\beta\in\mathbb{N}_0^n},\ \mathcal{H} \simeq \Big(\sum_{j=1}^{n}(2\alpha_j+1)\delta_{\alpha,\beta}\Big)_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n},\ a_j \simeq \big(\sqrt{\beta_j}\,\delta_{\alpha+(0\cdots\underset{\substack{|\\ j}}{1}0\cdots0),\beta}\big)_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n}.$$

Dies gilt für $t=0$.
$\mathcal{H}$ bleibt weiterhin zeitunabhängig, aber $a_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathcal{H}}a_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{H}} = a_j\cdot\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}$.

B) Die Poincaré-Gruppe

Unsere Raum-Zeit ist (nach Einstein) eine Menge M mit folgenden Strukturen:

1. $\exists V$ reeller Vektorraum der Dimension 4,

   $f : M\times V \longrightarrow M$ mit (i) $f(m,0)=m$
   (ii) $f\big(f(m,u),v\big) = f(m,u+v)$
   (iii) $\forall m\in M$(oder $\exists m\in M$) :
   $f_m : V\longrightarrow M : v\longmapsto f(m,v)$ ist bijektiv.

   Bemerkung
   a) Wenn $m_1,m_2\in M$, so ist $\overrightarrow{m_1m_2}$ das eindeutig bestimmte $v\in V$, sodass $f(m_1,v)=m_2$;
   b) für $f(m,v)$ schreibt man auch $m+v$.

2. M ist $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit vermöge einer der Bijektionen f_m. (Das Ergebnis ist unabhängig von m.)

3. Auf V ist eine Lorentz-Metrik gegeben, d.h.
   $V\times V\longrightarrow\mathbb{R} : (u,v)\longmapsto [u,v],\ [-,-]$
   ist nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform mit Signatur 1,3.

4. Auf V ist eine Orientierung ω gegeben, d.h. ein Element der zweielementigen Menge $V^*\wedge V^*\wedge V^*\wedge V^*/\mathbb{R}_+$.

5. Auf V ist eine Richtung der Zeitachse gegeben, d.h. eine der beiden Zusammenhangskomponenten von $\big\{v\in V : [v,v]>0\big\}$ wird als positiver Lichtkegel V_+ ausgezeichnet.

Definition 11.1
Die Gruppe von Transformationen $\Lambda : M\longrightarrow M$, die 1. – 3. invariant lassen, heißt *erweiterte Poincaré-Gruppe* P; diejenigen, die auch 4., 5. invariant lassen, bilden die *eingeschränkte Poincaré-Gruppe* $P_+^\uparrow$.

Bemerkung
Dass Λ 1. invariant lässt, bedeutet, dass $\Lambda\big(f(m_1, \overrightarrow{m_2m_3})\big) = f(\Lambda m_1, \overrightarrow{\Lambda m_2 \Lambda m_3})$. Daraus ergibt sich sofort, dass die Abbildung

$$\tilde{\Lambda} : V \longrightarrow V : \overrightarrow{m_1m_2} \longmapsto \overrightarrow{\Lambda m_1 \Lambda m_2}$$

wohldefiniert ist. Aus 3. ergibt sich, dass $\tilde{\Lambda}$ eine Lorentztransformation ist. Durch 4. und 5. wird eine Untergruppe vom Index 4 aus der Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ ausgesondert, die sogenannte *eingeschränkte Lorentzgruppe* $\mathcal{L}_+^\uparrow$.
In Koordinaten auf V mit $[x,y] = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$,
$\omega = \mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$, $V_+ \subset \{x^0 > 0\}$ gilt:
$\mathcal{L} = \big\{(a_\nu^\mu) \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{R}) : a_\mu^\kappa g_{\kappa\lambda} a_\nu^\lambda = g_{\mu\nu}\big\}$,
$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{A \in \mathcal{L} : \det A = 1,\ a_0^0 > 0\}$.
Wenn $m_0 \in M$, so gilt
$P = \{\Lambda : M \longrightarrow M \text{ mit } \exists m_1 \in M : \exists A \in \mathcal{L} : \forall m \in M : \Lambda m = m_1 + A\overrightarrow{m_0m}\}$.

C) Der Zustandsraum eines Elementarteilchens mit Spin 0

Die Annahme Spin = 0 besagt, dass wir nur skalare Wellenfunktionen betrachten, d.h. H besteht aus Funktionen $f(x)$, $x \in M$. Etwas allgemeiner lassen wir zu, dass $H \subset \mathcal{D}'(M)$ und machen die Annahme, dass die Einbettung $j : H \hookrightarrow \mathcal{D}'(M)$ stetig ist. Der Kernsatz ergibt nach S. 119, dass

$$\exists! K \in \mathcal{D}'(M \times M) : \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(M) : (j^T\varphi, j^T\overline{\psi})_{H'} = \big\langle \varphi(x)\psi(y), K \big\rangle.$$

Offenbar gilt $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ und $\big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y)\big\rangle \geq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, d.h. der Kern K ist „positiv definit“.
Umgekehrt: Wenn $K \in \mathcal{D}'(M \times M)$ positiv definit, so ist $B : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} : (\varphi, \psi) \longmapsto \big\langle \varphi(x)\overline{\psi(y)}, K(x,y)\big\rangle$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform. Wenn wir $N := \Big\{\varphi \in \mathcal{D} : \big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y)\big\rangle = 0\Big\}$ setzen, so ist $\mathcal{D}/N$ ein Prähilbertraum, seine Vervollständigung werde H' genannt, der Dual H.
Die kanonische Abbildung $j^T : \mathcal{D} \longrightarrow H'$ hat dichtes Bild, ihre konjugierte
$j : H \longrightarrow \mathcal{D}'$ ist injektiv.
Explizite Bestimmung von H : H' = Vervollständigung von $\mathcal{D}/N$,
$H = (H')' = \Big\{T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} : \text{(i) } T|_N = 0 \text{ (ii) } T \text{ linear (iii) } T \text{ stetig bzgl. der Halbnorm } p(\varphi) = \sqrt{\big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y)\big\rangle}\Big\} =$

$$= \Big\{ T \in \mathcal{D}' : \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D} : \big|\langle \varphi, T\rangle\big|^2 \leq C \cdot \big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y)\big\rangle \Big\}.$$

Weiters ist $\|T\|_H = \sup\limits_{\substack{\varphi\in\mathcal{D} \\ \text{Nenner}\neq 0}} \dfrac{\big|\langle \varphi, T\rangle\big|}{\sqrt{\big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y)\big\rangle}}$.

Dies ergibt den

Satz 11.1

$$\big\{ H \subset \mathcal{D}'(M) \text{ Hilbertraum} \big\} \simeq \big\{ K \in \mathcal{D}'(M \times M) \text{ positiv definit} \big\}$$

Seit Einstein nehmen wir an, dass die Gesetze unserer Welt unter allen Abbildungen $\Lambda \in P_+^\uparrow$ invariant bleiben, d.h. ein von uns verschiedener Beobachter des Universums, charakterisiert durch $\Lambda \in P_+^\uparrow$, muss zum gleichen Zustandsraum wie wir gelangen, d.h.

$$\forall \Lambda \in P_+^\uparrow : \ \forall \varphi, \psi \in H : \ \varphi(\Lambda x) \in H \quad \text{ und } \quad (\varphi, \psi) = \big(\varphi(\Lambda x), \psi(\Lambda x)\big).$$

Das bedeutet: $\forall \Lambda \in P_+^\uparrow : \ K(\Lambda x, \Lambda y) = K(x,y)$.

Insbesondere ist für $v \in V$ die Abbildung $\Lambda_v : M \longrightarrow M : x \longmapsto x + v = f(x,v)$ in $P_+^\uparrow$.
Wenn wir $K \in \mathcal{D}'(M \times M)$ vermöge des Isomorphismus

$$M \times V \longrightarrow M \times M : (x,u) \longmapsto \big(x, x + u = f(x,u)\big)$$

nach $M \times V$ transportieren, so erhalten wir $K_1 \in \mathcal{D}'(M \times V)$, und es gilt $\forall v \in V$: $\forall \varphi_1 \in \mathcal{D}(M \times V)$:

$$\begin{aligned}
\big\langle \varphi_1(x,u), K_1 \big\rangle &= \big\langle \varphi_1(x, \overrightarrow{xy}), K(x,y)\big\rangle = (\text{Invarianz von } K \text{ unter } \Lambda_v) \\
&= \big\langle \varphi_1(x, \overrightarrow{xy}), K(x+v, y+v)\big\rangle \\
&= \big\langle \varphi_1(x-v, \overrightarrow{xy}), K(x,y)\big\rangle \\
&= \big\langle \varphi_1(x-v, u), K_1(x,u)\big\rangle,
\end{aligned}$$

d.h. $K_1(x,u)$ ist von x unabhängig.

$\mathrm{d}\lambda$ sei ein Haar-Maß in M (d.h. ein unter Λ_v invariantes Maß). Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'(V) &\xrightarrow{\sim} \big\{ T \in \mathcal{D}'(M \times V) : T(x,u) \text{ von } x \text{ unabh.} \big\} \\
S &\longmapsto \Big(\varphi(x,u) \mapsto \big\langle \textstyle\int \varphi(x,u)\, \mathrm{d}\lambda(x), \ S(u)\big\rangle \Big).
\end{aligned}$$

Für $K(x,y)$ ergibt sich also: $\exists S \in \mathcal{D}'(V)$ mit

$$\begin{aligned}\big\langle \varphi(x,y), K\big\rangle &= \big\langle \varphi(x, x+u), K_1(x,u)\big\rangle \\ &= \Big\langle \int \varphi(x,x+u)\,\mathrm{d}\lambda(x), S(u)\Big\rangle.\end{aligned}$$

Dass K positiv definit ist, bedeutet: $S = \check{\overline{S}}$ und

$$\begin{aligned}0 \le \big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y)\big\rangle &= \Big\langle \int \varphi(x)\overline{\varphi(x+u)}\,\mathrm{d}\lambda(x), S_u\Big\rangle \\ &= \langle \check{\varphi} * \overline{\varphi}, S\rangle.\end{aligned}$$

(wobei, wie üblich, $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$).

Definition 11.2
Eine Distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt von positivem Typ (geschrieben $S \gg 0$) $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varphi \in \mathcal{D} : \langle \check{\varphi} * \overline{\varphi}, S\rangle \ge 0$. (Diese Bedingung impliziert $S = \check{\overline{S}}$).

Theorem *(Bochner-Schwartz)*
$S \gg 0 \Longleftrightarrow \exists$ positives Maß $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : S = \overline{\mathcal{F}}\mu$.

Beweis.
leichte Richtung: $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pos. Maß $\Longrightarrow$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\psi = \overline{\mathcal{F}}\varphi$ gilt: $\langle \check{\varphi} * \overline{\varphi}, \overline{\mathcal{F}}\mu\rangle = \big\langle \overline{\mathcal{F}}(\check{\varphi} * \overline{\varphi}), \mu\big\rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}\check{\varphi} \cdot \overline{\mathcal{F}}\overline{\varphi}, \mu\rangle = \underbrace{\int \psi(-x)\overline{\psi(-x)}\,\mathrm{d}\mu(x)}_{\ge 0}$;
schwere Richtung: L. Schwartz, Théorie des distributions, Ch. VII, § 9. □

Somit erhalten wir: $\exists$ pos. Maß $\mu \in \mathcal{S}'(V')$ mit

$$\big\langle \varphi(x,y), K(x,y)\big\rangle = \int\limits_{w\in V'} \int\limits_{u\in V} \int\limits_{x\in M} \varphi(x,x+u)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\langle u,w\rangle}\,\mathrm{d}\lambda(u)\mathrm{d}\mu(w),$$

wobei $\mathrm{d}\lambda(u)$ nun auch ein Haarmaß auf V bezeichnet.
Auf V' erhält man wie üblich durch Dualität eine Lorentzmetrik und die Invarianz von $K(x,y)$ unter $\Lambda \in P_+^\uparrow$ bedeutet: $\forall \Lambda \in P_+^\uparrow : K(\Lambda x, \Lambda y) = K(x,y) \Longleftrightarrow$
$\forall \tilde{\Lambda} \in \mathcal{L}_+^\uparrow : S(\tilde{\Lambda} v) = S \Longleftrightarrow \forall \Lambda_1 \in \mathcal{L}_+^\uparrow(V') : \mu(\Lambda_1 w) = \mu$, d.h. μ ist invariant unter der eingeschränkten Lorentzgruppe.
Angenommen, wir haben einen unter $P_+^\uparrow$ invarianten Hilbertraum $H \subset \mathcal{D}'(M)$ gefunden. Dann liefert

$$P_+^\uparrow \longrightarrow L(H) : \Lambda \longmapsto \big(f(x) \longmapsto f(\Lambda^{-1}x)\big)$$

eine unitäre Darstellung der Liegruppe $P_+^\uparrow$ (näheres darüber unten). Diese Darstellung heißt irreduzibel $\Longleftrightarrow$ die einzigen unter $P_+^\uparrow$ invarianten abgeschlossenen Teilräume von H sind 0 und H. Wenn die Darstellung reduzibel ist, so $\exists 0 \neq G \lneq H$ mit $\Lambda G = G,\ \forall \Lambda \in P_+^\uparrow,\ G = \overline{G}$. Dann ist auch $G^\perp$ invariant, da die Darstellung unitär ist. Somit: $H = G \textcircled{\perp} G^\perp$ und in diesem Sinn ist der Zustandsraum auf zwei elementarere Zustandsräume zurückführbar.

Definition 11.3
Ein Hilbertraum $H \subset \mathcal{D}'(M)$, der invariant unter $P_+^\uparrow$ ist, heißt Zustandsraum eines Elementarteilchens:$\Longleftrightarrow$ die obige Darstellung ist irreduzibel.

Es sei H irreduzibel, d.h. $0 \neq G \overset{j_1}{\lneq} H \implies \forall \varphi \in \mathcal{D}(H)$:
$\big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K_H(x,y) \big\rangle = \|j^T\varphi\|^2_{H'} \geq \|j_1^T j^T \varphi\|^2_{G'} = \big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K_G(x,y) \big\rangle$, d.h.
$K_H - K_G$ positiv definit, d.h. $S_H - S_G \gg 0$, d.h. $\mu_H - \mu_G$ positives Maß.
Wegen $G \neq H$ sind μ_H und μ_G nicht proportional.
Auch das umgekehrte lässt sich zeigen, vgl. Schwartz, § 24.

Definition 11.4
Ein positives $\mathcal{L}_+^\uparrow$-invariantes Maß μ heißt minimal: $\Longleftrightarrow \forall 0 \leq \mu_1 \leq \mu$ mit
μ_1 $\mathcal{L}_+^\uparrow$-invariant: $\exists 0 \leq \alpha \leq 1 : \mu_1 = \alpha\mu$.

Der Zustandsraum eines Elementarteilchens wird also durch ein minimales positives $\mathcal{L}_+^\uparrow$-invariantes Maß charakterisiert. Eine einfache geometrische Überlegung zeigt, dass dann μ in einer der folgenden 6 Klassen enthalten ist (in Koordinaten mit $[x,y] = x_0y_0 - \cdots - x_3y_3$) :

a) $\operatorname{supp}\mu = \{0\} \Longleftrightarrow \mu = c \cdot \delta$;

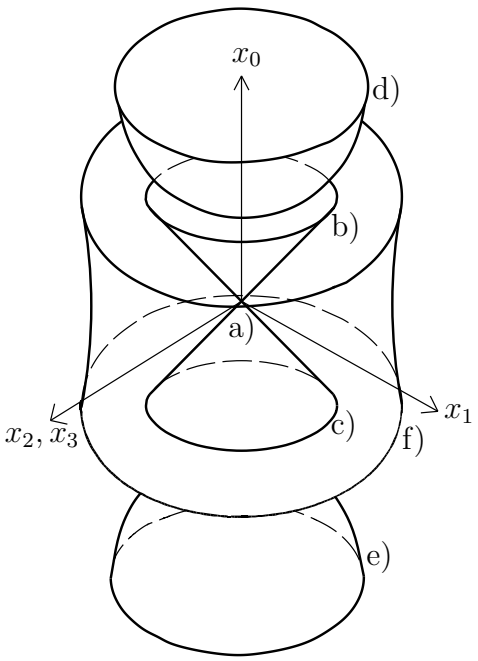
b) $\operatorname{supp}\mu = V_+'$ pos. Lichtkegel $\Longleftrightarrow \langle \varphi, \mu \rangle = c \displaystyle\int \frac{\varphi\big(|\vec{x}|, \vec{x}\big)\, \mathrm{d}\vec{x}}{|\vec{x}|}$;
(In b) und c) wird außerdem $\mu\big(\{0\}\big) = 0$ vorausgesetzt.)

c) $\operatorname{supp}\mu = V_-'$ neg. Lichtkegel;

d) $\exists M > 0 : \operatorname{supp}\mu = \big\{x : [x,x] = M^2,\ x_0 > 0\big\} \Longleftrightarrow$
$\langle \varphi, \mu \rangle = c \displaystyle\int \frac{\varphi\big(\sqrt{M^2 + |\vec{x}|^2}, \vec{x}\big)}{\sqrt{M^2 + |\vec{x}|^2}}\, \mathrm{d}\vec{x}$;

e) $\exists M > 0 : \operatorname{supp}\mu = \big\{x : [x,x] = M^2,\ x_0 < 0\big\}$;

f) $\exists k > 0 : \mathrm{supp}\mu = \big\{x : [x,x] = -k^2\big\}$



Übergang in den Impulsraum:
$H = \Big\{T \in \mathcal{D}'(M) : \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(M) : \big|\langle \varphi, T\rangle\big|^2 \leq C \cdot \big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K(x,y)\big\rangle =$
$C \cdot \langle \check{\varphi} * \overline{\varphi}, S\rangle = C\big\langle |\mathcal{F}\varphi|^2, \mu\big\rangle\Big\} \implies \forall T \in H : \exists C > 0 : \exists k > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(M) :$

$$\big|\langle \varphi, T\rangle\big| \leq C \max\Big\{\big(1 + |x|^2\big)^k \big|\mathcal{F}\varphi(x)\big|\Big\}$$

$\implies H \subset \mathcal{S}'(M)$. Nach Wahl eines Nullpunktes in M ist $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(M) \longrightarrow \mathcal{S}'(V')$ definiert und damit $\tilde{H} := \{\tilde{\mathcal{F}}T : T \in H\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\|U\|_{\tilde{H}} := (2\pi)^4 \|\overline{\mathcal{F}}^{-1}U\|_H = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}} \frac{\big|\langle \varphi, \overline{\mathcal{F}}^{-1}U\rangle\big|}{\sqrt{\int |\mathcal{F}\varphi|^2 \,\mathrm{d}\mu}} \cdot (2\pi)^4 = \sup_{\psi \in \mathcal{S}} \frac{\big|\langle \psi, U\rangle\big|}{\sqrt{\int |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mu}}$$

$\implies \forall U \in \tilde{H} : U \in \big(L^2(\mathrm{d}\mu)\big)' \simeq L^2(\mathrm{d}\mu) \implies$
$\implies \tilde{H} \simeq L^2(\mathrm{d}\mu) = \Big\{f : \mathrm{supp}\mu \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar bzgl. $\mathrm{d}\mu$ mit $\int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty\Big\}$
$f \,\mathrm{d}\mu \longmapsto f$
und $(f \,\mathrm{d}\mu, g \,\mathrm{d}\mu)_{\tilde{H}} = \int f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}\mu(x)$, denn

$$\|f \,\mathrm{d}\mu\|_{\tilde{H}} = \sup_{\psi \in \mathcal{S}} \frac{\Big|\int \psi(x) f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)\Big|}{\|\psi\|_{L^2(\mathrm{d}\mu)}} = \|f\|_{L^2(\mathrm{d}\mu)}.$$

Darauf aufbauend wird später der Fock-Raum konstruiert. Speziell, wenn μ wie im Fall d) ist, so gilt:
$\big(M^2 - [x,x]\big)\mu = 0$, d.h. $\forall U \in \tilde{H} : \big(M^2 - [x,x]\big)U = 0$, d.h.
$\forall T \in H : (\partial_t^2 - \Delta + M^2)T = 0$, Klein-Gordon-Gleichung.
Wenn wir $P_+^\uparrow$ durch $\big\{(a,A) : a \in V, A \in \mathcal{L}_+^\uparrow\big\}$ darstellen, so operiert
$P_+^\uparrow$ auf M (0 in M gewählt, $M \simeq V$) :
$P_+^\uparrow \longrightarrow \mathrm{End}(M) : (a,A) \longmapsto (m \longmapsto a + Am)$; es operiert auf $\mathcal{D}'(M)$ so:
$P_+^\uparrow \longrightarrow \mathrm{End}\big(\mathcal{D}'(M)\big) : (a,A) \longmapsto \Big(T \longmapsto T\big(A^{-1}(m-a)\big)\Big)$, ebenso auf H und daher auf $\tilde{H}$ so:
$P_+^\uparrow \longrightarrow L(\tilde{H}) : (a,A) \longmapsto \Big(f\mathrm{d}\mu \longmapsto \overline{\mathcal{F}}\Big[\big(\overline{\mathcal{F}}^{-1}(f\mathrm{d}\mu)\big)\big(A^{-1}(m-a)\big)\Big] = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\langle a,w\rangle} f(A^T w)\mathrm{d}\mu\Big)$
(Man beachte, dass $w \in V'$ und $A^T : V' \longrightarrow V'$).

D) Relativistische Invarianz

Entsprechend den Axiomen 1 und 2 sei $E \subset H \subset E'$ gegeben. Relativistische Invarianz bedeutet, dass

$$\forall \Lambda \in P_+^\uparrow : \exists \tilde{T}_\Lambda : \{\mathbb{C}x : x \in H\} \longrightarrow \{\mathbb{C}x : x \in H\},$$

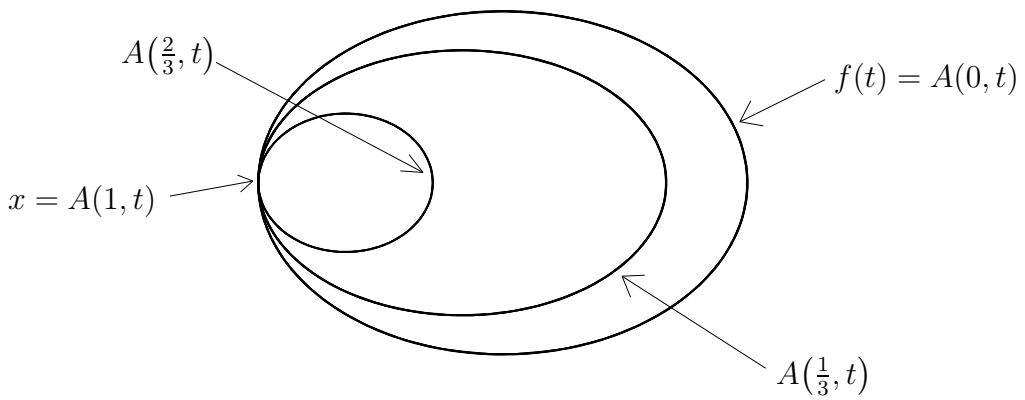
sodass für $\tilde{T}_\Lambda(\mathbb{C}x) = \mathbb{C}x_1,\ \tilde{T}_\Lambda(\mathbb{C}y) = \mathbb{C}y_1$ gilt: $\dfrac{\big|(x,y)\big|}{\|x\|\,\|y\|} = \dfrac{\big|(x_1,y_1)\big|}{\|x_1\|\,\|y_1\|}$.
(Im Spezialfall $H \subset \mathcal{D}'(M)$ in C) wurde $\tilde{T}_\Lambda\big(\mathbb{C}\,U(x)\big) = \mathbb{C}\,U(\Lambda^{-1}x)$ gesetzt.)
Weiters gelte $\tilde{T}_{\Lambda_1\Lambda_2^{-1}} = \tilde{T}_{\Lambda_1} \circ (\tilde{T}_{\Lambda_2})^{-1}$ und $\Lambda \longmapsto \tilde{T}_\Lambda \mathbb{C}x$ stetig, $\forall x$.

Theorem 1 *(Wigner, 1939)*
Wenn $\tilde{T} : \{\mathbb{C}x : x \in H\} \longrightarrow \{\mathbb{C}x : x \in H\}$ so wie oben (d.h. Winkel erhält), so gilt: $\exists T : H \longrightarrow H$: (i) $\tilde{T}(\mathbb{C}x) = \mathbb{C} \cdot Tx$
(ii) T linear, unitär oder T antilinear, antiunitär (d.h. $(Tx,Ty) = \overline{(x,y)}$).
T ist bis auf einen Phasenfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma},\ \gamma \in \mathbb{R}$, eindeutig durch $\tilde{T}$ bestimmt.

Theorem 2 *(Bargmann, 1954)*
Wenn $\forall \Lambda \in P_+^\uparrow\ \tilde{T}_\Lambda$ wie oben, so können T_Λ unitär gewählt werden mit $\tilde{T}_\Lambda \mathbb{C}x = \mathbb{C}T_\Lambda x$, so dass $T_{\Lambda_1}T_{\Lambda_2} = \pm T_{\Lambda_1,\Lambda_2}$.
(Dass man gelegentlich auch $-$ erhält, liegt daran, dass $P_+^\uparrow$ nicht einfach zusammenhängend ist.)

Definition 11.5
Ein kurvenzusammenhängender topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend: $\Longleftrightarrow$ jede geschlossene Kurve in X lässt sich zu einem Punkt zusammenziehen $\Longleftrightarrow \forall f : [0,1] \longrightarrow X$ stetig mit $f(0) = f(1) = x : \exists A : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ stetig mit:

$$\forall t \in [0,1] : A(0,t) = f(t),\ A(1,t) = x,\ A(t,0) = A(t,1) = x$$



Allgemeiner nennt man zwei stetige Kurven $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ mit $f(0) = g(0) = f(1) = g(1)$ homotop, wenn ein A wie oben mit $A(1,t) = g(t)$ existiert.
Die Menge aller Äquivalenzklassen unter der Homotopierelation bildet bzgl. der Zusammensetzung von Kurven eine Gruppe, welche mit $\pi_1(X,x)$ bezeichnet wird und von x im wesentlichen unabhängig ist.

$$X \quad \text{einfach zusammenhängend} \quad \Longleftrightarrow \pi_1(X,x) \simeq \{1\}.$$

Es gilt $\pi_1(P_+^\uparrow, A) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Eine auf Dirac zurückgehende Konstruktion, welche zeigt, dass die Kurve

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathrm{SO}_3 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & \sin 2\pi t & 0 \\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathrm{SO}_3$$

nicht nullhomotop, die Kurve $f \circ f \simeq f(2t)$ jedoch schon, findet sich in Biedenhorn/Louck, Angular Momentum in Quantum Physics I, p. 12. (In der Tat ist auch $\pi_1(\mathrm{SO}_3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

Definition 11.6
X, Y topologische Räume. $f : Y \longrightarrow X$ heißt (unverzweigte, unbegrenzte) Überlagerung: $\Longleftrightarrow \forall x \in X : \exists$ Umgebung $U : f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,\ V_j$ paarweise disjunkt, offen und $\forall j \in J : f\big|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ Homöomorphismus.

Beispiel 36 $\exp : \mathrm{i}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ \exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus 0.$

Satz und Definition
X, Y zusammenhängende endlich dimensionale Mannigfaltigkeiten,
$f : Y \longrightarrow X$ unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung. Äquivalent:

1. Y einfach zusammenhängend,
2. $\forall g : Z \longrightarrow X$ unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung, Z zusammenhängend, $\forall y \in Y,\ z \in Z$ mit $f(y) = g(z) : \exists h : Y \longrightarrow Z$ mit $g \circ h = f$ und $h(y) = z$.

Man nennt $f : Y \longrightarrow X$ *universelle Überlagerung* von X.

Beweis siehe Forster, § 5.

Definition 11.7
Eine endlich-dimensionale (reell) analytische Mannigfaltigkeit G mit (reell) analytischen Gruppenoperationen $G \times G \longrightarrow G,\ (-)^{-1} : G \longrightarrow G$ heißt komplexe (reelle) *Liegruppe*.

Ein Satz von Gleason, Montgomery, Zippin (1952) besagt, dass man eine lediglich topologische Liegruppe (d.h. mit $\mathcal{C}^0$-Mannigfaltigkeitsstruktur über $\mathbb{R}^n$) so parametrisieren kann, dass $\cdot$ und $(-)^{-1}$ analytische Funktionen sind.

Satz 11.2
X zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine universelle Überlagerung $f : Y \longrightarrow X$ und diese ist bis auf Homöomorphie eindeutig (vgl. 2. oben). Wenn X eine Liegruppe ist, so kann man auch Y zu einer machen und f zu einem Liegruppenhomomorphismus.

Beweis siehe Forster, § 5; Naĭmark/Štern, Theory of Group Representations, Ch. IX, § 3, VII.

Speziell für die Lorentzgruppe: Es sei $\mathbb{R}^4$ mit der Metrik $[x,x] = g_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ gegeben.

$$F: \quad \mathbb{R}^4 \quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ls}(\mathbb{C}^2) = \big\{A \in \mathrm{gl}_2(\mathbb{C}) : A^* = A\big\}$$

$$x \quad \longmapsto \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^\alpha \sigma_\alpha,$$

wobei $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

$F^{-1}(A)^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(\sigma_\mu A)$, (mit Sp = Spur: $\mathrm{gl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$), $[x,x] = \det F(x)$.

$\pi : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow : B \longmapsto \Big(x \mapsto F^{-1}\big(BF(x)B^*\big)\Big)$ ist wohldefiniert, denn $\big[\pi(B)x, \pi(B)x\big] = \det F\big(\pi(B)x\big) = \det\big(BF(x)B^*\big) = \det\big(F(x)\big) = [x,x] \implies \mathrm{Im}\,\pi \subset \mathcal{L}$;

π ist stetig und $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ zusammenhängend $\implies \mathrm{Im}\,\pi \subset \mathcal{L}_+^\uparrow$.

11 $\pi\big|_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})} : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, denn

$B \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \implies B^{-1} = B^* \implies \mathrm{Sp}\big(BF(x)B^*\big) = \mathrm{Sp}\big(F(x)\big) = 2x^0$, d.h. $\pi(B) : \binom{x^0}{\vec{x}} \longmapsto \binom{x^0}{\dots}$.

$$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \implies \pi(B)x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1\cos 2\beta + x^3 \sin 2\beta \\ x^2 \\ -x^1 \sin 2\beta + x^3 \cos 2\beta \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \end{pmatrix} \implies \pi(B)x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1\cos 2\beta - x^2 \sin 2\beta \\ x^1 \sin 2\beta + x^2 \cos 2\beta \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass $\pi\big(\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})\big) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix},\ \gamma \neq 0,\ \gamma \in \mathbb{R} \implies \pi(B)x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})x^0 + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma^{-2})x^3 \\ x^1 \\ x^2 \\ \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})x^3 + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma^{-2})x^0 \end{pmatrix}.$$

Da sich ganz $\mathcal{L}_+^\uparrow$ aus solchen speziellen Lorentztransformationen ("boosts") und SO_3 bilden lässt, folgt dass π surjektiv ist.

$\pi(B) = \mathrm{id} \iff \forall A \in \mathrm{Ls}(\mathbb{C}^2) : BAB^* = A \implies$ speziell für $A = I$) :

$B^{-1} = B^* \implies \forall A \in \mathrm{Ls}(\mathbb{C}^2) : BA = AB \implies \forall A \in \mathrm{gl}_2(\mathbb{C}) : BA = AB \implies$

$B = \lambda I,\ \lambda \in \mathbb{C} \implies B = \pm I$.

Somit gilt $\ker \pi = \{\pm I\}$.
Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist (siehe Übung). Daher ist π „die“ universelle Überlagerung von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ und gilt $\pi_1(\mathcal{L}_+^\uparrow) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ausgehend von π erhält man die universelle Überlagerungsgruppe P_0 von $P_+^\uparrow$:

$$P_0 \simeq \big\{(a,A) : a \in \mathbb{R}^4,\ A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\big\},\ (a,A)\circ(b,B) = \big(a + \pi(A)b, AB\big),$$

$$\mathbb{T} : P_0 \longrightarrow P_+^\uparrow : (a,A) \longmapsto \big(x \longmapsto a + \pi(A)x\big),$$
$$\ker \mathbb{T} = \big\{(0, \pm I)\big\},\ I = \text{ Einheitsmatrix}.$$

Das Bargmannsche Theorem kann nun so formuliert werden:

Theorem
$\forall \Lambda \in P_+^\uparrow$ seien $\tilde{T}_\Lambda$ wie zu Beginn von D).
Dann existiert ein stetiger (bzgl. der starken Topologie) Gruppenhomomorphismus $\varrho : P_0 \longrightarrow \big\{U \in L(H) \text{ unitär}\big\}$, sodass $\forall (a,A) \in P_0 : \forall x \in H : \mathbb{C}\varrho(a,A)x = \tilde{T}_{\mathbb{T}(a,A)}(\mathbb{C}x)$.

Beweis in D.J. Simms: Lie Groups and Quantum Mechanics.

Es sei noch bemerkt, dass P_0 (und auch die universelle Überlagerungsgruppe von $\mathcal{L}_+^\uparrow$) koordinatenfrei definiert werden können:

$$P_0 = \big\{(\Lambda, s) : \Lambda \in P_+^\uparrow,\ s \text{ Weg von } I \text{ nach } \Lambda\big\}/\text{Homotopie}.$$

Mittels des letzten Theorems gelangen wir zu

Axiom 3 Es existiert ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\varrho : P_0 \longrightarrow \big\{U \in L(H,E) \text{ unitär}\big\}$, sodass für zwei Beobachter, deren Bezugssysteme durch $\Lambda \in P_+^\uparrow$ ineinander übergehen, die beobachteten Zustände jeweils $\mathbb{C}\cdot x$ und $\mathbb{C}\cdot\varrho\big(\mathbb{T}^{-1}(\Lambda)\big)x,\ (x \in H\backslash 0)$, sind.
(Stetig bedeutet dabei stark stetig, d.h. $\forall x \in H : p \longmapsto \varrho(p)x$ stetig.)

11.1 Übungen

1. Zeige, dass $\mathcal{L}_+^\uparrow$ und $P_+^\uparrow$ zusammenhängend sind.

2. Zeige, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist.

3. Zeige, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist.
   Hinweis: Für einen geschlossenen Weg $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ ist jedenfalls $\begin{pmatrix} a(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ nullhomotop.

4. Zeige, dass $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist.
   Hinweis: $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3 : A \longmapsto A\binom{1}{0}$.

5. Zeige, dass

$$\pi\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2\big) & \mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\gamma}+\beta\overline{\delta}) & \mathrm{Im}\,(\gamma\overline{\alpha}+\delta\overline{\beta}) \\ \mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}+\gamma\overline{\delta}) & \mathrm{Re}\,(\beta\overline{\gamma}+\alpha\overline{\delta}) & \mathrm{Im}\,(\gamma\overline{\beta}+\delta\overline{\alpha}) \\ \mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}+\gamma\overline{\delta}) & \mathrm{Im}\,(\gamma\overline{\beta}+\alpha\overline{\delta}) & \mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\delta}-\beta\overline{\gamma}) \\ \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2+|\gamma|^2-|\beta|^2-|\delta|^2\big) & \mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\gamma}-\beta\overline{\delta}) & \mathrm{Im}\,(\delta\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma}) \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2+|\beta|^2-|\gamma|^2-|\delta|^2\big) \\ \mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}-\gamma\overline{\delta}) \\ \mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}+\delta\overline{\gamma}) \\ \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2+|\delta|^2-|\beta|^2-|\gamma|^2\big) \end{matrix} \Bigg).$$

Kapitel 12

Endlich-dimensionale Darstellungen der Lorentzgruppe

B.L. van der Waerden *Group theory and Quantum Mechanics*

J. Belinfante, B. Kolman *Lie Groups and Lie Algebras*

J. Humphreys *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*

A) Lie-Algebra von $P_+^\uparrow$.

G sei eine reelle/komplexe Lie-Gruppe, $e =$ Einselement in G,
$M := T_eG =$ Tangentialraum in e an G. Dann gilt:
$\{f : \mathbb{R}/\mathbb{C} \longrightarrow G$ analytisch, multiplikativ$\} \simeq M : f \longmapsto f'(0)$.
Exp: $M \longrightarrow G : \xi \longmapsto f(1),\ f$ wie oben mit $f'(0) = \xi$.
M ist eine reelle/komplexe Lie-Algebra mit

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [\mathrm{e}^{s\xi}\mathrm{e}^{t\eta}\mathrm{e}^{-s\xi}\mathrm{e}^{-t\eta}](0,0).$$

Ein (reell-) analytischer Gruppenhomomorphismus $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ heißt n-dimensionale Darstellung von G. Dieser liefert eine Darstellung von M :

$$T_e\varrho : M \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C}).$$

Dass das eine Darstellung ist, bedeutet:

$$T_e\varrho\big([\xi,\eta]\big) = \big[T_e\varrho(\xi), T_e\varrho(\eta)\big]_{\mathrm{gl}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})} = T_e\varrho(\xi)T_e\varrho(\eta) - T_e\varrho(\eta)T_e\varrho(\xi).$$

Umgekehrt gilt:

Satz 12.1
G einfach zusammenhängende reelle bzw. komplexe Lie-Gruppe. Dann ist
$\{\varrho : G \longrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ Lie-Gruppenhom.$\} \simeq \{\sigma : M \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ Lie-Algebrahom.$\}$:
$\varrho \longmapsto T_e\varrho$ bijektiv.

Beweis siehe Naĭmark/Štern: Theory of Group Representations, Ch. XI, § 1.

Wir betrachten daher als nächstes die Lie-Algebra von P_0, die isomorph zu der von $P_+^\uparrow$ ist, da diese zwei Gruppen lokal isomorph sind. $P_0, P_+^\uparrow$ sind 10-dimensionale reelle Lie-Gruppen.

Allgemein, wenn die Lie-Gruppe G eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ bildet, so kann $T_I(G)$ als Teilraum von $\mathrm{gl}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ aufgefasst werden und exp als gewöhnliche Exponentialabbildung von Matrizen (vgl. Kap. 2, S. 23). Die Lie-Klammer ist dann:

$$[B, C] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [\mathrm{e}^{sB}\mathrm{e}^{tC}\mathrm{e}^{-sB}\mathrm{e}^{-tC}](0,0) = B \cdot C - C \cdot B.$$

Mit Koordinaten wie in Kap. 11 gilt:

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \cong \big\{(a^\mu{}_\nu) \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{R}) : a_{\lambda\mu}a^\lambda{}_\nu = g_{\mu\nu},\ \det(a^\mu{}_\nu) = 1,\ a^0{}_0 > 0\big\}.$$

Wenn $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{tB} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, so folgt $0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(\mathrm{e}^{tB})_{\lambda\mu}(\mathrm{e}^{tB})^\lambda{}_\nu\big](0) = b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu},\ \forall \mu, \nu$, d.h. $(b_{\mu\nu})$ ist schiefsymmetrisch.
Umgekehrt, wenn $(b_{\mu\nu})$ schiefsymmetrisch, so ist

$$(\mathrm{e}^{tB})_{\lambda\mu} = (\mathrm{e}^{-tB})_{\mu\lambda},\ \text{d.h.}\ \ (\mathrm{e}^{tB})_{\lambda\mu}(\mathrm{e}^{tB})^\lambda{}_\nu = \big((\mathrm{e}^{tB})^{-1}\big)_{\mu\lambda}(\mathrm{e}^{tB})^\lambda{}_\nu = g_{\mu\nu}.$$

Daher ist die Lie-Algebra von $\mathcal{L}_+^\uparrow$:

$$T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow) \simeq \big\{(b^\mu{}_\nu) \in \mathrm{gl}_4(\mathbb{R}) : b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}\big\}.$$

In der Physik werden $(b^\mu{}_\nu) \in T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)$ als infinitesimale Lorentztransformationen bezeichnet.
$l_{\mu\nu} \in T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)$ werden durch $(l_{\mu\nu})_{\alpha\beta} := g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}$ definiert, d.h.
$(l_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \delta_\mu{}^\alpha g_{\nu\beta} - \delta_\nu{}^\alpha g_{\mu\beta}$. Offenbar bilden $l_{\mu\nu},\ \mu > \nu$, eine Basis von $T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)$.

Nun zur Poincaré-Gruppe:

$P_+^\uparrow \simeq \big\{(a, A) : a \in \mathbb{R}^4, A \in \mathcal{L}_+^\uparrow\big\} \implies$

$T_{(0,I)}P_+^\uparrow \simeq \left\{ \left(\xi^\lambda \frac{\partial}{\partial a^\lambda}, B \right) : \xi \in \mathbb{R}^4, B \in T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow) \right\}.$

$\left(\frac{\partial}{\partial a^\lambda}, 0 \right)$ wird mit p_λ bezeichnet. Die Lie-Algebra-Struktur von $T_{(0,I)}P_+^\uparrow$ ist durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$[p_\lambda, p_\mu] = 0, \ [l_{\mu\nu}, p_\varrho] = g_{\nu\varrho}p_\mu - g_{\mu\varrho}p_\nu,$$

$$[l_{\lambda\mu}, l_{\varrho\sigma}] = g_{\mu\varrho}l_{\lambda\sigma} - g_{\lambda\varrho}l_{\mu\sigma} + g_{\lambda\sigma}l_{\mu\varrho} - g_{\mu\sigma}l_{\lambda\varrho}.$$

Überprüfung etwa für die 2. Formel:
$\mathrm{Exp}\,(tp_\lambda) = (ta_{(\lambda)}, I), \ {a_{(\lambda)}}^\alpha = {\delta_\lambda}^\alpha, \ (a, A) \circ (b, B) = (a + Ab, AB) \implies$
$[l_{\mu\nu}, p_\varrho] = \dfrac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[(0, \mathrm{e}^{sl_{\mu\nu}}) \circ (ta_{(\varrho)}, I) \circ (0, \mathrm{e}^{-sl_{\mu\nu}}) \circ (-ta_{(\varrho)}, I) \right](0,0) =$
$\dfrac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[\left(\mathrm{e}^{sl_{\mu\nu}}(ta_{(\varrho)}) - ta_{(\varrho)}, I \right) \right](0,0) = \left({(l_{\mu\nu})^\alpha}_\beta {\delta^\beta}_\varrho \dfrac{\partial}{\partial a^\alpha}, 0 \right) = {(l_{\mu\nu})^\alpha}_\varrho p_\alpha =$

$g_{\nu\varrho}p_\mu - g_{\mu\varrho}p_\nu.$

Wegen $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Sp}A}$ erhalten wir für $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ die Lie-Algebra
$\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) = \{ A \in \mathrm{gl}_2(\mathbb{C}) : \mathrm{Sp}A = 0 \}$.
Da $\pi : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ wie in Kap. 11, S. 150, ein lokaler Gruppenisomorphismus ist, muss $T_I\pi : \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)$ ein reeller Lie-Algebra-Isomorphismus sein.
Konkret:
$\big((T_I\pi)(A)x\big)^\mu = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} \pi(\mathrm{e}^{At})(0)x \right)^\mu = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{1}{2} \mathrm{Sp}(\sigma_\mu \mathrm{e}^{At} x^\alpha \sigma_\alpha \mathrm{e}^{A^* t})(0)$

$= \dfrac{1}{2} \mathrm{Sp}\big[\sigma_\mu (Ax^\alpha \sigma_\alpha + x^\alpha \sigma_\alpha A^*) \big].$

Eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ ist $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und es gilt $[h, a] = 2a, \ [h, b] = -2b, \ [a, b] = h.$

Mit Hilfe der obigen Formel und unter Verwendung von $\mathrm{Sp}(\sigma_\mu\sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$, $\mathrm{Sp}(\sigma_j\sigma_k\sigma_l) = 2\mathrm{i}\varepsilon_{jkl}$ erhält man: $(T_I\pi)(h) = 2l_{03}, \ (T_I\pi)(\mathrm{i}h) = -2l_{12},$
$(T_I\pi)(a) = l_{01} + l_{13}, \ T_I\pi(\mathrm{i}a) = -l_{02} - l_{23}, \ T_I\pi(b) = l_{01} - l_{13},$
$(T_I\pi)(\mathrm{i}b) = l_{02} - l_{23}.$

Die Lie-Algebra der Untergruppe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ wird durch $l_{ij}, \ i, j \in \{1, 2, 3\}$ erzeugt. Die universelle Überlagerung $\pi\big|_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})} : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ergibt folgenden

Lie-Algebren-Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{su}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) : A^* = -A\} & \longrightarrow & \mathrm{so}_3(\mathbb{R}) \\ \mathrm{i}h & \longmapsto & -2l_{12} \\ a - b & \longmapsto & 2l_{13} \\ \mathrm{i}(a+b) & \longmapsto & -2l_{23} \end{array}$$

B) Die komplexen Darstellungen von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$.

Definition 12.1 M Lie-Algebra.

1) $I \leq M$ heißt Ideal: $\Longleftrightarrow \forall x \in M,\ \forall y \in I : [x,y] \in I$.

2) M heißt einfach: $\Longleftrightarrow \{\text{Ideale von } M\} = \{\{0\}, M\}$.

3) M heißt halbeinfach: $\Longleftrightarrow \exists\, I_1, \cdots, I_m \leq M$ mit

   i) $M = I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$

   ii) $\forall j : I_j$ Ideal

   iii) $\forall j : I_j$ ist einfach.

Satz 12.2
$\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ ist eine einfache komplexe Lie-Algebra. $\mathrm{su}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{so}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ sind einfache reelle Lie-Algebren.

Beweis siehe Übung.

M sei eine Lie-Algebra über dem Körper $\mathbb{F}$ (mit Charakteristik 0), V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}$. Eine Darstellung von M auf V ist einerseits als Abbildung $\sigma : M \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}} V$ auffassbar, andererseits bedeutet dies, dass V ein „Modul“ über M ist, d.h.

$$x \cdot v = \sigma(x)(v),\ \forall x \in M,\ \forall\, v \in V.$$

Dabei ist zu fordern, dass

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

Definition 12.2 Eine Darstellung heißt

1) irreduzibel: $\Longleftrightarrow \{M\text{-invariante Unterräume von } V\} = \big\{\{0\}, V\big\}$.
(Eine Lie-Algebra M ist also einfach $\Longleftrightarrow$ die adjungierte Darstellung $M \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}} M : x \longmapsto \big(y \longmapsto [x, y]\big)$ ist irreduzibel)

2) vollständig reduzibel: $\Longleftrightarrow \exists V_1, \cdots, V_m \leq V$ mit

   i) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$,

   ii) $\forall j : V_j \quad M$-invariant,

   iii) $\forall j : M$ operiert auf V_j irreduzibel.
   (Eine Lie-Algebra ist also halbeinfach $\Longleftrightarrow$ die adjungierte Darstellung ist vollständig reduzibel.)

Bemerkung Eine unitäre Darstellung ist immer vollständig reduzibel, vgl. S. 145.

Satz 12.3 *(H. Weyl)*
Wenn M halbeinfach ist, so ist jede endlich-dimensionale Darstellung vollständig reduzibel.

Beweis: Humphreys, 6.3.

Definition 12.3
Zwei Darstellungen von M auf V bzw. W heißen äquivalent: $\Longleftrightarrow \exists M$-Modul-Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$.

Es sei nun eine endlich-dimensionale komplexe Darstellung der Lie-Gruppe $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ gegeben, d.h. $a : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ ein komplexer Lie-Gruppenhomomorphismus. Dies ist gleichbedeutend mit einer komplexen Darstellung von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ nach A). Diese ist vollständig reduzibel. $a, b, h \in \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ seien wie in S. 155.

Satz 12.4 und Definition
$\sigma : \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, sei eine irreduzible komplexe Darstellung

(komplex bedeutet $\sigma(\mathrm{i}B) = \mathrm{i}\sigma(B)$). Dann existieren eindimensionale Unterräume V_μ von V, $\mu = 1-n, 3-n, \cdots, n-1$, sodass gilt:

i) $V = \bigoplus_{\mu=1-n}^{n-1} V_\mu$,

ii) $\forall v \in V_\mu : hv = \mu v$

iii) $aV_\mu = \begin{cases} V_{\mu+2} & : \ \mu \neq n-1 \\ 0 & : \ \mu = n-1 \end{cases}$

iv) $bV_\mu = \begin{cases} V_{\mu-2} & : \ \nu \neq 1-n \\ 0 & : \ \mu = 1-n \end{cases}$

v) Man kann Basisvektoren v_μ in V_μ finden, sodass
$av_\mu = \sqrt{\frac{n-\mu-1}{2} \cdot \frac{n+\mu+1}{2}}\, v_{\mu+2}, \qquad bv_\mu = \sqrt{\frac{n-\mu+1}{2} \cdot \frac{n+\mu-1}{2}}\, v_{\mu-2}.$

Insbesondere sind alle komplexen Darstellungen der gleichen Dimension äquivalent. Die Darstellung der Dimension n werde mit $\mathcal{D}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ bezeichnet.

Beweis.
a) h ist diagonalisierbar in der adjungierten Darstellung:
$[h,a] = 2a$, $[h,b] = -2b$, $[h,h] = 0 \implies h$ ist in jeder Darstellung diagonalisierbar. Dies gilt allgemein für ein Element einer halbeinfachen Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0, vgl. Humphreys, 6.3. In unserem Fall können wir auch mit einem ad hoc-Argument arbeiten:
$\exp : \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$, $\exp(2\pi\mathrm{i}h) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}} \end{pmatrix} = I$, d.h. die eindimensionale, reelle Lie-Gruppe G, die von $\mathrm{i}h$ erzeugt wird, ist kompakt (und isomorph zu $\mathbb{S}^1$). (Das ist kein Wunder, da $(T_I\pi)(\mathrm{i}h) = -2l_{12}$, d.h. $\mathrm{i}h$ in der Lorentzgruppe einer infinitesimalen Drehung um die z-Achse entspricht.) Nun kommt der *Unitarian Trick:* $b(v,w)$ sei irgendein Skalarprodukt auf V, $\tilde{b}(v,w) := \int_0^1 b(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ht}v, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ht}w)\,\mathrm{d}t$,
wobei $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ht} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ und $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ nach A) auf V operiert. G operiert auf V unitär bzgl. $\tilde{b} : \tilde{b}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sh}v, \mathrm{e}^{\mathrm{i}sh}w) = \tilde{b}(v,w)$. $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}sh} : V \longrightarrow V : 0 \leq s < 2\pi\}$ bilden also eine Menge von unitären, vertauschbaren Operatoren und können simultan diagonalisiert werden. Folglich ist auch h diagonalisierbar. (Gewöhnlich wird der *unitarian trick* verwendet, um zu zeigen, dass eine Darstellung einer *kompakten* Liegruppe unitär gemacht werden kann und daher vollständig reduzibel ist.)

b) $hv = \mu v \Longrightarrow h(av) = a(hv) + [h,a]v = (\mu+2)av$.
Wenn also $V_\mu = \big\{v : hv = \mu v\big\}$, so gilt $aV_\mu \subset V_{\mu+2},\ bV_\mu \subset V_{\mu-2}$.

c) Es sei Reλ maximal mit $V_\lambda \neq 0,\ 0 \neq v_0 \in V_\lambda$.
Dann ist $av_0 = 0;\ v_j := b^j v_0,\ j \in \mathbb{N},\ m := \max\{j : v_j \neq 0\}$.
$hv_j = (\lambda - 2j)v_j,\ av_1 = abv_0 = bav_0 + [a,b]v_0 = hv_0 = \lambda v_0$,
$av_2 = abv_1 = bav_1 + [a,b]v_1 = b\lambda v_0 + hv_1 = 2(\lambda-1)v_1 \cdots$ (Induktion)
$av_j = j(\lambda - j + 1)v_{j-1}$.
Daher ist der von $v_0, \cdots, v_m$ erzeugte Vektorraum in V $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-invariant und folglich gleich V. Die v_j sind linear unabhängig, da sie Eigenvektoren von h zu verschiedenen Eigenwerten sind. Weiters ist $n = m+1 = \dim_{\mathbb{C}} V$, alle Eigenräume von h sind eindimensional.
$0 = av_{m+1} = (m+1)(\lambda - m)v_m \implies \lambda = m = n-1$.

d) Wenn wir v_μ rekursiv durch die Vorschrift $bv_\mu = \sqrt{\frac{(n+\mu-1)(n-\mu+1)}{2}}\, v_{\mu-2} = c_\mu v_{\mu-2}$ definieren, so gilt $av_\mu = abv_{\mu+2}/c_{\mu+2} = \sqrt{\frac{n-\mu-1}{2} \cdot \frac{n+\mu+1}{2}}\, v_{\mu+2}$. □

Bemerkung In der Quantentheorie wird dieses Ergebnis verwendet, um die endlich-dimensionalen Darstellungen der Drehgruppe zu klassifizieren. Man geht dabei aus von einer unitären Darstellung ϱ von SO_3 bzw. SU_2 auf einem endlich-dimensionalen Eigenraum H des Hamiltonoperators. Daraus erhält man die Darstellung $T\varrho : \mathrm{so}_3 \simeq \mathrm{su}_2 \longrightarrow L(H)$. l^{12}, l^{23}, l^{31} bilden eine Basis von so_3.
Die sogenannten Drehimpulsoperatoren $M^{jk} := -\mathrm{i}\hbar T\varrho(l^{jk})$ sind hermitesch (denn $\mathbb{R} \longrightarrow L(H) :\ s \longmapsto \varrho\big(\mathrm{Exp}(sl^{jk})\big)$ gibt eine Gruppe von unitären Operatoren, nach Stone ist

$$\varrho\big(\mathrm{Exp}(sl^{jk})\big) = \exp\big(s(T\varrho)(l^{jk})\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sM^{jk}/\hbar}, M^{jk} \in \mathrm{Ls}(H)\big).$$

Das bedeutet, dass ausgehend von der *reellen* Darstellung $T\varrho : \mathrm{so}_3 \longrightarrow L(H)$ ihre Komplexifikation

$$(T\varrho)_c : (\mathrm{so}_3)_c := \mathrm{so}_3 + \mathrm{iso}_3 \simeq \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow L(H)$$

betrachtet wird, bzw. äquivalent dazu, eine komplexe Darstellung der zugehörigen Lie-Gruppe $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$.

Explizite Realisierung der irreduziblen Darstellungen

Wenn $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ wie üblich auf $V = \mathbb{C}^2$ operiert, so nennt man die transformierte

Größe *Spinor*. Damit operiert auch $\mathcal{L}_0$ auf V :

$$\mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) : (\Lambda, \overline{s}) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \longmapsto \pm\pi^{-1}(\Lambda) \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \right),$$

wobei entsprechend dem Weg s das Vorzeichen zu wählen ist. (Der Querstrich auf s bedeutet Äquivalenz bzgl. Homotopie.) Drehungen um die x^3-Achse wirken etwa diagonal:

$$\Lambda_\beta : x \longmapsto \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \cos 2\beta - x^2 \sin 2\beta \\ x^1 \sin 2\beta + x^2 \cos 2\beta \end{pmatrix} \implies (\Lambda_\beta, \overline{s}) \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} z^1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} z^2 \end{pmatrix},$$

vgl. S. 150. Durch Betrachtung von Tensorprodukten erhält man alle irreduziblen Darstellungen: $\mathcal{L}_0$ wirkt auf $\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2 \ni (z^{\alpha_1 \cdots \alpha_n})$, $\alpha_j \in \{1, 2\}$ und damit auch auf dem Raum der symmetrischen Tensoren $z^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = z^{\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)}$, $\sigma \in S_n$. Dieser Raum ist $(n+1)$-dimensional mit Basis $\{z_{(j)} : j = 0, \cdots, n\}$, wobei $z_{(j)}^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = \begin{cases} 1 & : \ \alpha_k = 1 \text{ genau } j\text{-mal} \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$ und $hz_{(j)} = (2j - n) z_{(j)}$,
d.h. $h \in \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ wirkt wie in der irreduziblen Darstellung $\mathcal{D}^{(n/2)}$.

C) Reelle Darstellungen von $\mathcal{L}_+^\uparrow, \mathcal{L}_0$.

Zum Unterschied von B) werden hier Darstellungen von $\mathcal{L}_+^\uparrow, \mathcal{L}_0$ auf $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ betrachtet, welche stetig bzw., äquivalent dazu, reellanalytisch sind. Man beachte, dass die durch π auf $\mathcal{L}_+^\uparrow$ definierte komplex-analytische Struktur von π abhängt und daher physikalisch bedeutungslos ist.
Somit werden wir *reelle* Darstellungen (jedoch auf komplexen Vektorräumen) von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ betrachten, d.h. $\sigma : \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ reeller, stetiger Lie-Algebren-Homomorphismus, $\sigma(\mathrm{i}B)$ und $\mathrm{i}\sigma(B)$ können verschieden sein.
Allgemein sei M eine komplexe Lie-Algebra, M_r die gleiche Lie-Algebra als reelle aufgefasst; für das Element $\mathrm{i} \cdot m, \mathrm{i} = \sqrt{-1}$, werde nun $j \cdot m$ geschrieben. $M_{rc} := M_r \oplus \mathrm{i}M_r$. Eine reelle Darstellung von M_r induziert eine komplexe Darstellung von M_{rc}.

Satz 12.5
$M_{rc} = M_+ \oplus M_-$, wobei $M_\pm$ Ideale von M_{rc} sind, $M_\pm = \{m \pm \mathrm{i}jm : m \in$

$M_r\}$, $M_- \simeq M : \frac{1}{2}(m - \mathrm{i}jm) \longmapsto m$,
$M_+ \simeq \overline{M} : \frac{1}{2}(m + \mathrm{i}jm) \longmapsto m$, wobei $\overline{M} = M$ als reelle Lie-Algebra, jedoch $j\overline{m} = -\overline{jm}$.

Beweis. a) $n \in M_{rc}$, $n = n_1 + \mathrm{i}n_2$, $n_k \in M_r$, $m \in M_r \implies [n, m \pm \mathrm{i}jm] = [n, m] \pm \mathrm{i}[n, jm] = [n_1, m] + \mathrm{i}[n_2, m] \pm \mathrm{i}\big(j[n_1, m] + \mathrm{i}j[n_2, m]\big) = p_1 \pm \mathrm{i}jp_1 + p_2 \pm \mathrm{i}jp_2$, wobei $p_1 = [n_1, m]$, $p_2 = \mp j[n_2, m]$. Das zeigt, dass $M_\pm$ Ideale sind.
b) $m, n \in M_r \implies [n - \mathrm{i}jn, m - \mathrm{i}jm] = p_1 - \mathrm{i}jp_1 + p_2 - \mathrm{i}jp_2$, wobei
$p_1 = [n, m]$, $p_2 = j[-jn, m] = [n, m] \implies M \simeq M_- : m \longmapsto \frac{1}{2}(m - \mathrm{i}jm)$ ist ein reeller Lie-Algebren-Isomorphismus.
Er ist sogar komplex, da $jm \longmapsto \frac{1}{2}(jm + \mathrm{i}m) = \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2}(m - \mathrm{i}jm)$. Ebenso zeigt man, dass $\overline{M} \simeq M_+ : m \longmapsto \frac{1}{2}(m + \mathrm{i}jm)$. □

Insbesondere gilt, dass $T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)_c \simeq \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc} \simeq \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, d.h. die Komplexifizierung von $T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)$ ist eine halbeinfache Lie-Algebra mit zwei einfachen Idealen, welche isomorph zu $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ sind. (Beachte, dass $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \overline{\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})} : B \longmapsto \overline{B}$.)

Explizit: $\underset{=\langle h_-, a_-, b_-\rangle}{\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})} \oplus \underset{=\langle h_+, a_+, b_+\rangle}{\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})} \simeq \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc} \overset{(T_I\pi)_c}{\simeq} T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)_c$

$h_\pm \longmapsto \frac{1}{2}(h \pm \mathrm{i}jh) \longmapsto l_{03} \mp \mathrm{i}l_{12}$

$a_\pm \longmapsto \frac{1}{2}(a \pm \mathrm{i}ja) \longmapsto \frac{1}{2}\big(l_{01} + l_{13} \mp \mathrm{i}(l_{02} + l_{23})\big)$

$b_\pm \longmapsto \frac{1}{2}(b \pm \mathrm{i}jb) \longmapsto \frac{1}{2}\big(l_{01} - l_{13} \pm \mathrm{i}(l_{02} - l_{23})\big)$,
vgl. S. 155.
Die zwei Ideale von $T_I(\mathcal{L}_+^\uparrow)_c$ werden also durch $l_{01} \mp \mathrm{i}l_{23}$, $l_{02} \mp \mathrm{i}l_{31}$, $l_{03} \mp \mathrm{i}l_{12}$ aufgespannt.

Satz 12.6
$\mathcal{D}^{(J)}$, $J = 0, \frac{1}{2}, \cdots$ seien wie in Satz 12.4, S. 158, die irreduziblen komplexen Darstellungen von $M = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$. Dann gilt: Jede irreduzible komplexe Darstellung von M_{rc} ist zu einer der folgenden äquivalent:

$$\begin{aligned}
\big\{\mathcal{D}^{(J,K)} : M_{rc} &\longrightarrow \mathrm{gl}_{(2J+1)(2K+1)}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{gl}(\mathbb{C}^{2J+1} \otimes \mathbb{C}^{2K+1}) : J, K = 0, \tfrac{1}{2}, \cdots\big\} \\
M_- \ni m_- &\longmapsto \mathcal{D}^{(J)}(m_-) \otimes I \\
M_+ \ni m_+ &\longmapsto I \otimes \overline{\mathcal{D}^{(K)}(m_+)}
\end{aligned}$$

Beweis. $h_\pm$ sind diagonalisierbar (vgl. S. 158). W sei der Eigenraum von h_+ mit maximalem Eigenwert $2K$. $[h_+, M_-] = 0 \implies M_-$ lässt W invariant. W_0 sei

ein bzgl. M_- irreduzibler Unterraum von W, auf dem M_- mit der Darstellung $\mathcal{D}^{(J)}$ operiert. Da $[M_+, M_-] = 0$, induziert M_- die gleiche Darstellung $\mathcal{D}^{(J)}$ auf $W_l := (b_+)^l W_0,\ 0 \leq l \leq 2K$. $\bigoplus_{l=0}^{2K} W_l$ ist M-invariant $\implies V = \bigoplus_{l=0}^{2K} W_l$, und die Darstellung von M ist $\mathcal{D}^{(J,K)}$. □

Zusammenfassung
Aus dem bisherigen folgt, dass die reell-analytischen, $\mathbb{C}$-irreduziblen Darstellungen $\mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ genau den Darstellungen $\mathcal{D}^{(J,K)}$ auf $T_I(\mathcal{L}_0)_c \simeq \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc}$ entsprechen. $\mathbb{C}$-irreduzibel bedeutet dabei, dass in $\mathbb{C}^n$ kein nicht-trivialer $\mathcal{L}_0$-invarianter $\mathbb{C}$-Untervektorraum existiert.

Explizite Realisierung Die in B) angegebene Spinordarstellung von $\mathcal{L}_0$ entspricht $\mathcal{D}^{(1/2,0)}$, denn eine *komplexe* Darstellung von M lässt $M_+ \subset M_{rc}$ trivial operieren: $\varrho : M \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbb{C}),\ \varrho_c : M_{rc} \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ und $\varrho_c(m+\mathrm{i}jm) = \varrho(m) - \varrho(m) = 0$. Die Darstellung $\mathcal{D}^{(0,1/2)}$ ergibt sich so:
$\mathcal{D}^{(0,1/2)}_G : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) : (\Lambda, s) \mapsto \left(\binom{z^1}{z^2} \mapsto \overline{\mathcal{D}^{(1/2)}_G(\Lambda, s)} \binom{z^1}{z^2} \right)$. ($\mathcal{D}^{\cdot\cdot}_G$ bezeichnet hier die Gruppendarstellungen.)
In der Tat ist dies eine reell-, aber nicht komplexanalytische Darstellung von L_0, die folglich $\mathcal{D}^{(0,1/2)}_G$ sein muss. Natürlich folgt das auch direkt daraus, dass
$\varrho(jm) = -j\varrho(m),\ m \in T_I\mathcal{L}_0 \underset{T_I\pi}{\simeq} \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}),\ \varrho = T\mathcal{D}^{(0,1/2)}_G$.
Es ist üblich, Vektoren $z \in \mathbb{C}^2$, auf denen $\mathcal{L}_0$ oder $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ entsprechend $\mathcal{D}^{(0,1/2)}_{(G)}$ operiert, mit punktierten Indizes zu bezeichnen: $z = \binom{z^{\dot 1}}{z^{\dot 2}}$. Die Darstellung $\mathcal{D}^{(J,K)}_G$ wird auf $(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{2J})_{\mathrm{sym}} \otimes (\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{2K})_{\mathrm{sym}}$ realisiert:

$$A \longmapsto \Big((z^{\alpha_1 \cdots \alpha_{2J} \dot\beta_1 \cdots \dot\beta_{2K}}) \longmapsto \big(\mathcal{D}^{(1/2)}_G(A)^{\alpha_1}{}_{\varrho_1} \cdots \mathcal{D}^{(1/2)}_G(A)^{\alpha_{2J}}{}_{\varrho_{2J}} \overline{\mathcal{D}^{(1/2)}_G(A)^{\beta_1}{}_{\sigma_1}} \cdots$$

$$\cdots \overline{\mathcal{D}^{(1/2)}_G(A)^{\beta_{2K}}{}_{\sigma_{2K}}}\ z^{\varrho_1 \cdots \varrho_{2J} \dot\sigma_1 \cdots \dot\sigma_{2K}} \big) \Big).$$

Die Darstellung $\mathcal{D}^{(J,K)}_G$ von $\mathcal{L}_0$ ergibt eine Darstellung von $\mathcal{L}^{\uparrow}_+$ genau dann, wenn $\mathcal{D}^{(J,K)}_G(-I) = I,\ -I \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{L}_0$. Wegen $\mathcal{D}^{(1/2)}_G(-I) = -I$ ist das äquivalent dazu, dass $2(J+K)$ gerade ist.

D) Die komplexe Lorentzgruppe

Die reell-analytische Abbildung $\pi : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}^1_+$ induziert den Lie-Algebren-Isomorphismus (vgl. S. 155) $T_I\pi : \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_r \tilde{\to} T_I(\mathcal{L}^\uparrow_+)$. Dieser kann komplexifiziert werden: $(T_I\pi)_c : \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc} \longrightarrow T_I(\mathcal{L}^\uparrow_+)_c$. Dabei ist $(T_I\mathcal{L}^\uparrow_+)_c = \{A + \mathrm{i}B : A, B \in T_I\mathcal{L}^\uparrow_+\}$. Die gleichen Überlegungen wie in S. 154 zeigen, dass die *komplexe Lorentzgruppe* $\mathcal{L}^c := \big\{A \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{C}) : a_{\lambda\mu}a^\lambda\nu = g_{\mu\nu}\big\}$ als Lie-Algebra $(T_I\mathcal{L}^\uparrow_+)_c$ hat. Die Zusammenhangskomponente von I in $\mathcal{L}^c$ ist $\mathcal{L}^c_+ = \big\{A \in L^c : \det A = 1\big\}$. Es gilt wieder: $A \in \mathcal{L}^c \Longleftrightarrow [Az, Aw] = [z, w],\ \forall z, w \in \mathbb{C}^4$. Nach Satz 12.5 gilt weiters:

$$\begin{array}{rcccl}
\text{kan: } \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) & \simeq & \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_- \oplus \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_+ & = & \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc} \\
(A, B) & \longmapsto & \frac{1}{2}(A - \mathrm{i}jA) + \frac{1}{2}(\overline{B} + \mathrm{i}j\overline{B}) & = & \frac{1}{2}\big(A + \overline{B} - \mathrm{i}j(A - \overline{B})\big) \\
(C + jD, \overline{C} + j\overline{D}\,) & \longleftarrow & C + \mathrm{i}D & &
\end{array}$$

ist ein komplexer Lie-Algebren-Isomorphismus.

$\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ ist die Lie-Algebra der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ und entsprechend Satz 12.1 existiert ein komplexer Lie-Gruppen-Homomorphismus

$$\tilde{\pi} : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}^c_+ \text{ so, dass } T\tilde{\pi} = (T_I\pi)_c \circ \mathrm{kan}.$$

Der zu $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc} \underset{\mathrm{kan}^{-1}}{\tilde{\to}} \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) : B \mapsto B \mapsto (B, \overline{B}\,)$ gehörige Lie-Gruppen-Homomorphismus ist

$$k : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) : A \longmapsto (A, \overline{A}\,).$$

Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) & \underset{T_I\pi}{\longrightarrow} & T_I(\mathcal{L}^\uparrow_+) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc} & \overset{(T_I\pi)_c}{\longrightarrow} & T_I(\mathcal{L}^c_+) = T_I(\mathcal{L}^\uparrow_+)_c
\end{array}$$

nach Konstruktion kommutiert, gilt dasselbe für

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) & \overset{\pi}{\longrightarrow} & \mathcal{L}^\uparrow_+ \\
\downarrow k & & \updownarrow \\
\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) & \overset{\tilde{\pi}}{\longrightarrow} & \mathcal{L}^c_+
\end{array}$$

und $\tilde{\pi}$ ist der einzige komplexe Lie-Gruppen-Homomorphismus, für den das gilt. Daher:

$$\tilde{\pi} : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}^c_+ : (A, B) \longmapsto \Big(x \longmapsto F^{-1}\big(AF(x)B^T\big)\Big).$$

Direkte Verifikation (vgl. S. 155):

$$\big((T_{(I,I)}\tilde{\pi})(A,B)x\big)^\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\big[\sigma_\mu(Ax^\alpha\sigma_\alpha + x^\alpha\sigma_\alpha B^T)\big];$$

$$\big((T_I\pi)_c \circ \mathrm{kan}(A,B)x\big)^\mu = \Big((T_I\pi)_c\big(\tfrac{1}{2}(A+\overline{B} - \mathrm{i}j(A-\overline{B}\,))\big)x\Big)^\mu$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\big[(T_I\pi)(A+\overline{B}\,) - \mathrm{i}(T_I\pi)\big(j(A-\overline{B}\,)\big)\big]x\Big)^\mu$$

$$= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\Big[\sigma_\mu\big\{(A+\overline{B}\,)x^\alpha\sigma_\alpha + x^\alpha\sigma_\alpha(A+\overline{B}\,)^* + (A-\overline{B}\,)x^\alpha\sigma_\alpha - x^\alpha\sigma_\alpha(A-\overline{B}\,)^*\big\}\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\Big[\sigma_\mu(Ax^\alpha\sigma_\alpha + x^\alpha\sigma_\alpha B^T)\Big].$$

Wieder gilt, dass $\tilde{\pi}$ „die“ universelle Überlagerung von $\mathcal{L}_+^c$ ist. Die Darstellungen $\mathcal{D}^{(J,K)}$ lassen sich nun auch als die Menge der irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathcal{L}_0^c$, der universellen Überlagerungsgruppe von $\mathcal{L}_+^c$, auffassen.

Kapitel 13

Unitäre Darstellungen der Poincaré-Gruppe

G. Warner *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*

L. Schwartz *Applications of Distributions to the Theory of Elementary Particles in Quantum Mechanics*

Gel'fand-Graev-Vilenkin *Generalized Functions V, Ch. III*

Eine nicht-kompakte Liegruppe mit einfacher Lie-Algebra (so wie $\mathcal{L}_+^\uparrow$) besitzt keine nicht triviale *endlich-dimensionale unitäre* Darstellung (Warner, p. 250, Ex. 4). Daher werden nun Darstellungen im Hilbertraum betrachtet.

A) Impuls- und Drehimpulsoperatoren

Entsprechend Axiom 3, Kap. 11, S. 151, gehen wir aus von einer stark stetigen unitären Darstellung von P_0 :

$$\varrho : P_0 \longrightarrow \big\{U \in L(H,E) \text{ unitär}\big\},\ \forall x \in H : P_0 \longrightarrow H : \Lambda \longmapsto \varrho(\Lambda x) \text{ stetig.}$$

$M := T_{(0,I)}P_0 = T_{(0,I)}P_+^\uparrow$ ist die Lie-Algebra zu P_0. Für $m \in M$ ist
$t \longmapsto \varrho\big(\mathrm{Exp}(tm)\big)$ eine stark stetige Operatorgruppe, welche nach Stone einen „infinitesimalen Generator“ $A_m \in \mathrm{Lsa}(H)$ besitzt so, dass $\varrho\big(\mathrm{Exp}(tm)\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA_m}$. Damit erhalten wir eine Abbildung

$$T\varrho : M \longrightarrow \mathrm{Lsa}(H) : m \longmapsto A_m.$$

Eine Basis von M bilden $p_\lambda, l_{\mu\nu}$. Die zugehörigen Operatoren in $\mathrm{Lsa}(H)$ werden mit $P_\lambda, M_{\mu\nu}$ bezeichnet und heißen Impuls- bzw. Drehimpulsoperatoren.

Beispiel 37 $H = L^2(\mathbb{R}^4),\ E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$,
$\varrho : P_0 \longrightarrow P_+^\uparrow \longrightarrow \{U \in L(H,E) \text{ unitär}\}$
$\mathbb{R}^4 \times \mathcal{L}_+^\uparrow \ni (a,A) \longmapsto \Big(f(x) \longmapsto f\big(A^{-1}(x-a)\big)\Big)$
$\varrho\big(\mathrm{Exp}(tp_\lambda)\big)f = f(x - t\delta^\alpha{}_\lambda) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tP_\lambda} f \implies P_\lambda = \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$.
Ebenso gilt $M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$.

Problem M ist zwar eine Lie-Algebra, $\mathrm{Lsa}(H)$ jedoch nicht einmal ein Vektorraum. Um auch im ∞-dimensionalen Fall die Lie-Algebra zur Klassifizierung der Darstellungen einsetzen zu können, fordern wir

Axiom 3.1
$\forall x \in E : \varrho_x : P_0 \longrightarrow E : \Lambda \longmapsto \varrho(\Lambda)x$ ist $\mathcal{C}^\infty$.

Bemerkung Dieses Axiom scheint sehr stark zu sein, jedoch nach Resultaten von Gårding (1947), Harish-Chandra, Nelson (1959) existieren immer dichte Unterräume E von H, auf denen Axiom 3.1 gilt, vgl. Warner, Ch. 4.4. (Differentiation von Funktionen mit *Werten* in topologischen Vektorräumen ist in der üblichen Weise definiert: $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ differenzierbar: $\Longleftrightarrow \forall t_0 \in \mathbb{R} : \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existiert in E.) Axiom 3.1 ist z.B. im obigen Beispiel erfüllt.

Definition 13.1
$T_E\varrho : M = T_{(0,I)}P_0 \longrightarrow L(E,E) : m \longmapsto \left(x \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho\big(\mathrm{Exp}(tm)\big)x\Big|_{t=0}\right)$
(Dabei ist $L(E,E) = \{f : E \longrightarrow E \text{ linear und stetig}\}$.)

Satz 13.1
$T_E\varrho$ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus.
($L(E,E)$ ist eine ∞-dimensionale Lie-Algebra mit $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.)

Beweis.
a) $T_E\varrho$ ist wohldefiniert:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho\big(\mathrm{Exp}(tm)\big)x\big|_{t=0} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varrho\big(\mathrm{Exp}(tm)\big)x - x}{t}$ = (punktweiser Limes von stetigen Abbildungen) $\in L(E,E)$ nach Banach-Steinhaus.

b) $f(t) = \mathrm{Exp}\big(t(m_1+m_2)\big)\cdot\mathrm{Exp}(-tm_1)\cdot\mathrm{Exp}(-tm_2) = o(t),\ t\to 0 \implies$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho\big(f(t)\big)x\big|_{t=0} = 0 \implies T_E\varrho$ linear.

c) $f(t) := \mathrm{Exp}(tm_1)\mathrm{Exp}(tm_2)\mathrm{Exp}(-tm_1)\mathrm{Exp}(-tm_2) = \mathrm{Exp}\big(t^2[m_1,m_2]\big) + o(t^2)$,
$t\to 0 \implies \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\varrho\big(f(t)\big)x\big|_{t=0}$ = (längere Rechnung)
$= 2\big(T_E\varrho(m_1)T_E\varrho(m_2) - T_E\varrho(m_2)T_E\varrho(m_1)\big)x = 2T_E\varrho\big([m_1,m_2]\big)$.
Somit geht bis auf a) alles wie im endlich-dimensionalen. □

Von vornherein ist nicht klar, welche Beziehung zwischen $T\varrho(m)$ und $T_E\varrho(m)$ besteht. Es sei $A_m := T\varrho(m)$.
Es gilt $\big[x\in D(A_m) \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA_m}x$ differenzierbar in $H\big]$ (eine Richtung siehe Kap. 8, S. 93) und folglich, da $E\hookrightarrow H$ stetig, ist $E\subset D(A_m)$, d.h. $T_E\varrho(m) = \mathrm{i}T\varrho(m)\big|_E$. Nach Reed/Simon I, Th. VIII.10 gilt sogar $\overline{T_E\varrho(m)} = \mathrm{i}T\varrho(m)$ ($\bar{}$ bedeutet dabei Abschluss eines Operators), d.h. $-\mathrm{i}T_E\varrho(m)$ ist wesentlich selbstadjungiert und bestimmt $T\varrho(m)$.

B) Die universelle einhüllende Algebra

Definition 13.2
M Lie-Algebra, U assoziative Algebra mit Einselement, $j: M\longrightarrow U$ linear. Das Paar (U,j) heißt universelle einhüllende Algebra von M, wenn gilt:

a) $j\big([x,y]\big) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$

b) $\forall j': M\longrightarrow U'$ mit a): $\exists\Phi: U\longrightarrow U'$ Algebrenhomomorphismus mit $j' = \Phi\circ j$.

Theorem (*Poincaré-Birkhoff-Witt)*
Für jede Lie-Algebra M existiert eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte universelle einhüllende Algebra $j: M\longrightarrow U$. Wenn $x_1,\cdots,x_n$ eine Vektorraumbasis von M ist, so ist $\big\{j(x_{j_1})\cdots j(x_{j_k}) : k=0,1,2,\cdots,\ 1\le j_1\le\cdots\le j_k\le n\big\}$ eine

Vektorraumbasis von U.

Beweis siehe Humphreys, § 17.

Im Folgenden wird M als Teilraum von U aufgefasst (was nach dem PBW-Theorem möglich ist), d.h. $j(x) = x$ geschrieben. Wenn $\sigma : M \longrightarrow L(E,E)$ eine Darstellung auf einem endlich- oder unendlich-dimensionalen Vektorraum E ist, so können wir $L(E,E) = U'$, $\sigma = j'$ setzen und erhalten $\Phi =: \sigma_U : U \longrightarrow L(E,E)$, d.h. eine Darstellung der assoziativen Algebra U. Auch das umgekehrte gilt natürlich: Eine Darstellung von U ergibt eine Darstellung von M.

Beispiel 38
$M = T_{(0,I)}P_0 \implies$ eine Basis von U bilden
$p^{\lambda_1} \cdots p^{\lambda_k} l^{\mu_1\nu_1} \cdots l^{\mu_r\nu_r}$, $0 \le \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_k \le 3$, $\mu_j < \nu_j$,
$(\mu_1,\nu_1) \le \cdots \le (\mu_r,\nu_r)$, $k + r = 0, 1, \cdots$.
(Für $k + r = 0$ ist das Einselement in U gemeint.)

Definition 13.3
$u \in U$ heißt *Casimir-Element*: $\iff \forall m \in M : um = mu \iff \forall v \in U :$
$uv = vu \iff u \in$ Zentrum (U).

Beispiel 39
1) $M = T_{(0,I)}P_0$. $u = p^\lambda p_\lambda$ ist ein Casimir-Element in U, denn
a) $p^\lambda p_\lambda p^\mu = p^\mu p^\lambda p_\lambda$,
b) $p^\lambda p_\lambda l^{\mu\nu} = p^\lambda(l^{\mu\nu}p_\lambda + \delta^\mu{}_\lambda p^\nu - \delta^\nu{}_\lambda p^\mu) = p^\lambda\ l^{\mu\nu}p_\lambda =$ (ebenso) $l^{\mu\nu}p^\lambda p_\lambda$,
vgl. Kap. 12, S. 155.

2) $M = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, $u := \frac{1}{2}\,h^2 + ab + ba$.
a) $uh = \frac{1}{2}h^3 + abh + bah = \frac{1}{2}h^3 + ahb + bha + 2ab - 2ba = \frac{1}{2}h^3 + hab + hba = hu$,
b) $ua = \frac{1}{2}h^2a + aba + ba^2 = \frac{1}{2}hah + ha + a^2b + aba - ah - ha = \frac{1}{2}ah^2 + ah + a^2b + aba - ah = au$ und ebenso $ub = bu$.
Bei einer Darstellung der Drehgruppe bzw. SU_2 erhält man nach Komplexifikation eine Darstellung von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, wobei $h \simeq 2\mathrm{i}l^{12}$, $\left\{ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right\} \simeq \pm l^{13} + \mathrm{i}l^{23}$ (vgl. Kap. 12, S. 159, 156), d.h. $u \simeq -2\big[(l^{12})^2 + (l^{13})^2 + (l^{23})^2\big]$. Die linearen Transformationen, in die l^{jk} bei einer Darstellung $\sigma : \mathrm{so}_3 \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ übergeht, sind nach S. 166 $(\hbar)\mathrm{i}M^{jk}$

und folglich gilt

$$\sigma_U(u) = 2\big[(M^{12})^2 + (M^{23})^2 + (M^{13})^2\big] = 2\hat{L}^2$$

in der Notation von Landau-Lifschitz. Für eine irreduzible Darstellung ist bekanntlich $\hat{L}^2$ eine Konstante und das ist kein Zufall.

Lemma *(Schur)*
$\sigma : M \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ sei eine irreduzible Darstellung einer komplexen Lie-Algebra und $A \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ sei mit $\sigma(M)$ vertauschbar (d.h. $AB = BA,\ \forall B \in \sigma(M)$). Dann ist $A = cI,\ c \in \mathbb{C}$.

Beweis. c sei ein Eigenwert von A, $V := (A - cI)\mathbb{C}^n \implies \dim V < n$ und V ist $\sigma(M)$-invariant: $v \in V \implies \sigma(m)v = \sigma(m)(A - cI)w = (A - cI)\sigma(m)v \in V$. Aufgrund der Irreduzibilität der Darstellung folgt $V = 0 \implies A = cI$. □

Nun zu ∞-dimensionalen Darstellungen. Wie in A) seien $\varrho : G \longrightarrow \big\{U \in L(H)$ unitär$\big\}$ eine stark stetige Darstellung einer reellen Liegruppe und

$$T\varrho : M = T_eG \longrightarrow \mathrm{Lsa}(H).$$

Definition 13.4
ϱ heißt (topologisch) irreduzibel: $\iff \{\varrho$-invariante abgeschlossene $\mathbb{C}$-Untervektorräume von $H\} = \big\{\{0\}, H\big\}$.

Satz 13.2
$T\varrho(m) = \displaystyle\int \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda^{(m)}$ sei die Spektraldarstellung von $T\varrho(m)$. Äquivalent sind:
a) ϱ irreduzibel;
b) $H_1 \leq H$ abgeschlossen, $\forall m, \forall \lambda : E_\lambda^{(m)} H_1 \subset H_1 \implies H_1 \in \big\{\{0\}, H\big\}$.

Beweis.
a) $\implies$ b): $E_\lambda^{(m)} H_1 \subset H_1 \implies \mathrm{e}^{\mathrm{i}T\varrho(m)} H_1 = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\,\mathrm{d}E_\lambda^{(m)} H_1 \subset H_1 \implies H_1$ ϱ-invariant $\implies H_1 \in \big\{\{0\}, H\big\}$.
b) $\implies$ a): Wenn $\varrho(x)H_1 \subset H_1$, so ist auch $\varrho(x)H_1^\perp \subset H_1^\perp$.
Für $m \in M$ ist daher $\varrho\big(\mathrm{Exp}(tm)\big)$ eine Operatorgruppe auf H_1 und auf $H_1^\perp \implies \varrho\big(\mathrm{Exp}(tm)\big)\big|_{H_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA_m^1},\ A_m^1 \in \mathrm{Lsa}(H_1)$ und ähnlich für $H_1^\perp \implies T\varrho(m) = A_m^1 \oplus A_m^{1\perp},\ E_\lambda^{(m)} = E_\lambda^{(m)1} \oplus E_\lambda^{(m)1\perp} \implies E_\lambda^{(m)} H_1 \subset H_1$. □

Satz 13.3
$\sigma : M \longrightarrow \mathrm{Lsa}(H)$ sei irreduzibel im Sinn von b) des obigen Satzes, $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ sei mit $\sigma(M)$ vertauschbar, d.h. $A = \int \lambda \, \mathrm{d}{E_\lambda}^A$ und $\forall \lambda, \mu, m : {E_\lambda}^A {E_\mu}^{(m)} = {E_\mu}^{(m)} {E_\lambda}^A$. Dann gilt $A = cI, \ c \in \mathbb{R}$.

Beweis.
$H_1 := {E_\lambda}^A(H)$ ist unter ${E_\lambda}^{(m)}$ invariant $\implies \exists c \in \mathbb{R} : \forall \lambda < c : {E_\lambda}^A(H) = \{0\}$ und ${E_c}^A(H) = H \implies A = cI$. □

$\varrho : G \longrightarrow L(H, E)$ sei wieder eine irreduzible, unitäre Darstellung einer reellen Liegruppe, $T_E\varrho : M \longrightarrow L(E, E), \ T_U\varrho : U \longrightarrow L(E, E), \ T_U^c\varrho : U \oplus \mathrm{i}U =: U^c \longrightarrow L(E, E)$. $u \in U^c$ heißt hermitesch: $\iff u = \overline{u}$, wobei $\overline{\ } : U^c \longrightarrow U^c$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, die
a) $\overline{m} = -m$
b) $\overline{u_1 u_2} = \overline{u}_2 \overline{u}_1$
c) $\overline{\mathrm{i}u} = -\mathrm{i}\overline{u}$ für $u \in U^c, \ m \in M$ erfüllt.
Wegen $(T_U^c\varrho(u)x, y) = \big(x, T_U^c\varrho(u)y\big)$ für $x, y \in E$, ist $T_U^c\varrho(u)$ auf E symmetrisch für hermitesches u.

Axiom 3.2
$u \in U^c$ hermitesches Casimir-Element.

a) $T_U^c\varrho(u)$ wesentlich sa.

b) $\overline{T_U^c\varrho(u)}$ (d.h. der Abschluss) ist mit $T\varrho(M)$ vertauschbar.

Bemerkung Für ein Casimir-Element u ist natürlich immer $T_U^c\varrho(u)$ mit $T_E\varrho(M)$ vertauschbar, d.h. auf E sind die Operatoren vertauschbar, da $um = mu$ für $m \in M$. Leider folgt daraus im Allgemeinen nicht b) von Axiom 3.2, d.h. die Vertauschbarkeit im Sinne des letzten Satzes (Nelson's Gegenbeispiel). Die Voraussetzung a) ist bei richtiger Wahl von E) immer erfüllbar (vgl. Warner, p. 269, Ex. 2).
Der letzte Satz ergibt, dass $\overline{T_U^c\varrho(u)} = \mathrm{const}\, I$, falls die Darstellung irreduzibel ist.

C) Die Spektralbedingung

$p^\lambda p_\lambda$ ist eine hermitesches Casimir-Element, dem physikalisch das Betragsquadrat aus dem Vierimpuls, d.h. Masse^2 entspricht. Für eine irreduzible Darstellung von $P_0 \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ gilt also $(P)^2 := P^\alpha P_\alpha = \mathrm{const}\, I$. Da die P^λ vertauschbar sind, besitzen sie ein totales System von gemeinsamen Eigenvektoren. Dies ist eine leichte Verallgemeinerung des Hauptsatzes in S. 137 (vgl. Gel'fand-Vilenkin, p. 121). $\sigma(P^\alpha) := \{\lambda^\alpha \in \mathbb{R}^4 : \exists 0 \neq f \in E' : P^\alpha f = \lambda^\alpha f\}$.

Axiom 4 $\sigma(P^\alpha) \subset \overline{V}_+ = \{x : x^0 \geq 0,\ [x,x] \geq 0\}$, vgl. S. 141.
Insbesondere folgt $\sigma\big((P)^2\big) \subset [0,\infty)$.

Axiom 5 a) $\exists 0 < m_1 < \cdots < m_k : \sigma_p\big((P)^2\big) = \{0, m_1^2, \cdots, m_k^2\}$; der Eigenraum zu 0 ist $\mathbb{C}\cdot\Omega \subset E$.
($\mathbb{C}\cdot\Omega$ wird Vakuum genannt.)
b) $\sigma_e\big((P)^2\big) \subset [4m_1^2, \infty) \cup \{m_1^2, \cdots, m_k^2\}$.

Bemerkung Axiom 4 wird in Analogie zur klassischen Physik gefordert, wo $m =$ Masse $\geq 0 \implies m^2 = (P)^2 \geq 0$ und $m = P^{0\prime} =$ Energie im Ruhesystem des Teilchens $\geq 0 \implies P^\alpha \in \overline{V}_+$. Axiom 5 bedeutet „anschaulich", dass es endlich viele Möglichkeiten für eine definierte Ruhmasse gibt und dass der Grundzustand eindeutig ist.
Situationen des Typs sind dadurch ausgeschlossen.

D) Die irreduziblen, unitären Darstellungen von P_0 mit positiver Masse

Nach Axiom 4 ist bei einer irreduziblen Darstellung $(P)^2 = m^2 I,\ m \geq 0$. m wird als Ruhmasse des Teilchens interpretiert. Im Folgenden wird nur $m > 0$ betrachtet. *Eine* zugehörige irreduzible Darstellung wurde bereits in S. 146 konstruiert:

$$\langle \varphi, \mathrm{d}\mu \rangle = \int \frac{\varphi\big(\sqrt{m^2 + |\vec{x}|^2}\,, \vec{x}\big)\, \mathrm{d}\vec{x}}{\sqrt{m^2 + |\vec{x}|^2}}\,,$$

$$\begin{aligned} H &= L^2(\mathrm{d}\mu),\ P_+^\uparrow \longrightarrow L(H) : (c, A) \longmapsto \big(f\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle c, w\rangle} f(A^T w)\,\mathrm{d}\mu\big), \\ E &= \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Nun sollen *heuristisch* alle irreduziblen, unitären Darstellungen von P_0 mit $m > 0$ gefunden werden.

Definition 13.5
$w_\alpha := \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda l^{\mu\nu} \in U$ (wobei $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} = \operatorname{sign}(\lambda\mu\nu\alpha)$) heißt *Pauli-Lubanski-Bargmann-Vektor*.

Er erfüllt: $[w_\lambda, p_\nu] = 0,\ w_\mu p^\mu = 0,\ [w_\mu, w_\nu] = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} w^\alpha p^\beta,\ w^\mu w_\mu$ ist ein Casimir-Element.
$-T_U \varrho(w_\alpha) =: W_\alpha$ ist für $\vec{P} = 0$ (d.h. im Ruhsystem) durch $\frac{1}{2}\varepsilon_{ij\alpha} M^{ij}$ gegeben und folglich entspricht W_α dem Eigendrehimpuls = Spin.
Im Folgenden sei $\tilde{\pi}(A) : V' \longrightarrow V' : a \longmapsto \pi(A)^{T-1} a$.

Nun sei ${E_a}' \subset E'$ der Eigenraum von P^α zu einem festen 4-Impuls $a \in \mathbb{R}^4$ mit $a^\mu a_\mu = m^2$.
Wegen $[W^\mu, P^\nu] = 0$ bleibt ${E_a}'$ unter W^μ invariant und es gilt $a_\mu W^\mu = 0$.
Unter der Annahme, dass $\dim_{\mathbb{C}} {E_a}' < \infty$, erhalten wir eine endlich-dimensionale Darstellung der von w^α erzeugten Lie-Algebra. Für $A \in \mathcal{L}_0 \tilde{=} \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ gilt
$\varrho'(A){E_a}' = {E_b}'$, wenn $b = \tilde{\pi}(A)a$ und $\varrho' : P_0 \longrightarrow L(E', E'),\ \varrho'(A) = \varrho_E(A^{-1})^T$:
$x \in {E_a}' \implies c^\alpha P_\alpha\big(\varrho'(A)x\big) = +\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho'\big(\mathrm{Exp}(tc^\alpha p_\alpha)\cdot A\big)x\big|_{t=0}$
$= +\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho'\Big(A\cdot\mathrm{Exp}\big(\big(\pi(A)^{-1}c\big)^\alpha p_\alpha t\big)\Big)x = \varrho'(A)\big(\pi(A)^{-1}c\big)^\alpha P_\alpha x$
$= \varrho'(A)x\cdot\big(\pi(A)^{-1}\big)^\alpha{}_\lambda c^\lambda a_\alpha = c^\lambda\big(\tilde{\pi}(A)a\big)_\lambda\cdot\varrho'(A)x.$

Außerdem ist

$$\begin{array}{ccc} {E_a}' & \xrightarrow{\varrho'(A)} & {E_b}' \\ {\scriptstyle c^\alpha W_\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \left(\pi(A)c\right)^\alpha W_\alpha} \\ {E_a}' & \xrightarrow{\varrho'(A)} & {E_b}' \end{array} \qquad \text{kommutativ.}$$

(In einer etwas abstrakteren Sichtweise ist p eine Differentialform auf $\mathbb{R}^4$ mit Werten in $T_{(0,I)}P_+^\uparrow =: M$, d.h. $p \in L(\mathbb{R}^4, M),\ l = (l^{\mu\nu})$ eine 2-Form, wo $w = \frac{1}{2} p \wedge l \in L(\mathbb{R}^{4\otimes 3}, U);\ p, l$ sind invariant unter $B \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ (für p ist das die obige Rechnung), d.h. unter

$$\tilde{B} : L(\mathbb{R}^{4\otimes k}, M) \longrightarrow L(\mathbb{R}^{4\otimes k}, M) : f \longmapsto \big(x \longmapsto B^{-1} f(Bx) B\big)$$

und folglich gilt dasselbe für w (wenn man M durch U ersetzt.))
Die Darstellungen für verschiedene a sind also alle äquivalent, wir können $a = \binom{m}{0}$

setzen. Dann gilt $w^0 = 0,\ w_i = \varepsilon_{ijk} l^{jk}$, d.h. die von w^α erzeugte Lie-Algebra ist so_3. Nach Komplexifizierung ergibt sich eine komplexe Darstellung von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ auf ${E_a}'$. Wenn ϱ' auch auf E' irreduzibel ist (das alles ist nur heuristisch!), so ist diese Darstellung gleich $\mathcal{D}^{(J)}$. Für $a, b \in V_+$ mit $[a,a] = [b,b] = m^2$ existiert genau eine positiv definite Matrix $H_{b,a} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ mit $\tilde{\pi}(H_{ba})a = b$.
(Existenz: OEdA $a = \binom{m}{0}$; $A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ mit $\tilde{\pi}(A)a = b, H_{ba} := \sqrt{A^*A}$, denn $\left\|\sqrt{A^*A}\, z\right\| = \|Az\| \implies H_{ba}^{-1} A \in \mathrm{SU}_2 \implies \tilde{\pi}(H_{ba}^{-1}A) \in \mathrm{SO}_3 \implies \tilde{\pi}(H_{ba})a = \tilde{\pi}(H_{ba}H_{ba}^{-1}A)a = \tilde{\pi}(A)a = b$.
Eindeutigkeit: $\tilde{\pi}(H)a = a,\ a = \binom{m}{0} \implies \tilde{\pi}(H) \in \mathrm{SO}_3 \implies H \in \mathrm{SU}_2;\ H$ positiv definit $\implies H = I$.)
Wir identifizieren nun ${E_a}'$ und ${E_b}'$ vermöge $\varrho(H_{ba})$. Für beliebiges b und A ist damit die Wirkung von $\varrho(A)$ auf ${E_b}'$ festgelegt: $a = \binom{m}{0}$

$$\begin{array}{ccc} {E_b}' & \xrightarrow{\varrho(H_{ab})} & {E_a}' \\ {\scriptstyle \varrho(A)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varrho(U)} \\ {E'}_{\tilde{\pi}(A)b} & \xleftarrow[\varrho(H_{\tilde{\pi}(A)b,a})]{} & {E_a}' \end{array}$$

, wobei $U = H_{a,\tilde{\pi}(A)b} \circ A \circ H_{ba}$ den Punkt a fest lässt und somit in SU_2 liegt und daher $\varrho(U)$ entsprechend $\mathcal{D}^{(J)}$ wirkt. Mit dieser sehr heuristischen Analyse gelangen wir zur folgenden Darstellung von P_0 :
$H = L^2(\mathrm{d}\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{2J+1},\ \mathrm{d}\mu$ wie in S. 171, SU_2 unitär auf $\mathbb{C}^{2J+1}$,

$$P_0 \longrightarrow L(H)$$

$$(c, I) \longmapsto (f\,\mathrm{d}\mu \otimes v \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}cy} f\,\mathrm{d}\mu \otimes v)$$

$$(0, A) \longmapsto \Big(f\,\mathrm{d}\mu \otimes v \longmapsto f\big(\tilde{\pi}(A)^{-1}y\big)\ \mathrm{d}\mu \mathcal{D}^{(J)}(H_{ay} \circ A \circ H_{\tilde{\pi}(A)_y^{-1},a}) v\Big)$$

$a = \binom{m}{0},\ y$ entspricht $\tilde{\pi}(A)b$ von oben, $\mathcal{D}^{(J)} : \mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{Gl}_{2J+1}(\mathbb{C})$;
hier ist $E = \mathcal{S}\,\mathrm{d}\mu \otimes \mathbb{C}^{2J+1},\ E' \simeq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3_{\vec{y}}) \otimes \mathbb{C}^{2J+1},\ {E_a}' \simeq \mathbb{C}\delta(\vec{y} - \vec{a}) \otimes \mathbb{C}^{2J+1}$.
Nach einem Satz von Wigner (1939) sind dies (bis auf Äquivalenz) alle irreduziblen, unitären Darstellungen von P_0 mit positiver Masse. Dies ist die sogenannte *Wigner-Darstellung*.

E) Der Zustandsraum von Spin-Teilchen nach L. Schwartz

Die irreduziblen, unitären Darstellungen von P_0 sollen nun mit derselben Methode

wie in Kap. 11, C) abgeleitet werden. Dabei ergibt sich für positive Masse auch $H = L^2(\mathrm{d}\mu) \otimes \mathbb{C}^{2J+1}$, jedoch eine einfachere Darstellung von P_0 auf H aber dafür ein kompliziertes Skalarprodukt in H.
W sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $2J+1$, auf dem $\mathcal{L}_0$ entsprechend $\mathcal{D}^{(J,0)}$ operiert, M sei wie in Kap. 11, B). $\mathcal{D}'(M;W)$ bezeichne den Raum der Distributionen mit Werten in W, d.h. $T \in \mathcal{D}'(M;W) \iff T : \mathcal{D}(M) \longrightarrow W$ linear und stetig. Gesucht ist ein stetig in $\mathcal{D}'(M;W)$ eingebetteter Hilbertraum H, der unter P_0 invariant ist, d.h. (vgl. S. 151):
$\forall S,T \in H : \forall \Lambda = (a,A) \in P_0 : T_\Lambda := \mathcal{D}^{(J)}(A)\big(T \circ \mathbb{T}(a,A)^{-1}\big) \in H$ und $(S,T)_H = (S_\Lambda, T_\Lambda)_H$.

Genauer: $T_\Lambda : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) \xrightarrow{T} W \xrightarrow{\mathcal{D}^{(J)}(A)} W.$
$\varphi(x) \longmapsto \varphi\big(\mathbb{T}(a,A)x\big)$

inj: $H \hookrightarrow \mathcal{D}'(M;W)$ führt zu $\mathrm{inj}^T : \mathcal{D}(M;W') \longrightarrow H'$ und zu einer bilinearen Abbildung $\mathcal{D}(M;W') \times \mathcal{D}(M;W') \longrightarrow \mathbb{C}$
$(\varphi,\psi) \longmapsto (\mathrm{inj}^T\varphi, \mathrm{inj}^T\overline{\psi})_{H'}$
($\overline{\psi}$ bedeutet hierbei $\overline{\ }$ bzgl. einer Basis w_j von W', d.h.
$\overline{\ } : W' \longrightarrow W' : c^j w_j \longmapsto \overline{c^j} w_j$).
Nach dem Kernsatz liefert das $K \in \mathcal{D}'(M \times M; W \otimes W)$ mit $(\mathrm{inj}^T\varphi, \mathrm{inj}^T\overline{\psi})_{H'} = \big\langle \varphi(x) \otimes \psi(y), K(x,y) \big\rangle,\ \varphi,\psi \in \mathcal{D}(M;W')$.
K muss positiv definit sein, d.h.
$\widetilde{K(x,y)} = \overline{K(y,x)}$ und $\big\langle \varphi(x) \otimes \overline{\varphi(y)}, K \big\rangle \geq 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(M,W')$, wobei
$\widetilde{\ } : W \otimes W \longrightarrow W \otimes W : u \otimes v \longmapsto v \otimes u$.
Die Translationsinvarianz führt zu $S \in \mathcal{D}'(V; W \otimes W)$ mit $\big\langle \varphi(x,y), K \big\rangle =$
$\left\langle \int\limits_M \varphi(x, x+u)\,\mathrm{d}\lambda(x), S_u \right\rangle$ für $\varphi \in \mathcal{D}(M \times M; W' \otimes W')$.
Die Positivität von K bedeutet für S :

i) $\overline{\langle \varphi, S\rangle} = \langle \overline{\varphi}, \tilde{\tilde{S}}\rangle$ für $\varphi \in \mathcal{D}(V; W' \otimes W')$ und

ii) $\langle \breve{\varphi} * \overline{\varphi}, S\rangle \geq 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(M;W')$
$\big(\breve{\varphi} * \overline{\varphi}(u) = \int\limits_M \varphi(x+u) \otimes \overline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\big)$.

Nach Bochner-Schwartz wird S durch ein „positives Maß“ $P \in \mathcal{S}'(V'; W \otimes W)$ dargestellt: $S = \overline{\mathcal{F}}P$. Positiv wird definiert z.B. durch

i) $\overline{\langle \varphi, P\rangle} = \langle \overline{\varphi}, \tilde{P}\rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(V'; W' \otimes W')$ und

ii) $\langle \varphi \otimes \overline{\varphi}, P\rangle \geq 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(V'; W')$.

Dies ist äquivalent dazu, dass P eine positiv definite, hermitesche Matrix von temperierten Maßen ist. P ist invariant unter $\mathcal{L}_0$.

Genauer: Für $A \in \mathcal{L}_0 = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ gilt:
a) $K = \big(\mathcal{D}^{(J)}(A) \otimes \overline{\mathcal{D}^{(J)}(A)}\big)\big(K \circ \pi(A)^{-1}\big)$, wobei
$\overline{\mathcal{D}^{(J)}(A)}w := \overline{\mathcal{D}^{(J)}(A)\overline{w}}$,
$\Longrightarrow$ b) $S = \mathcal{D}^{(J)}(A) \otimes \overline{\mathcal{D}^{(J)}(A)}\big(S \circ \pi(A)^{-1}\big)$
$\Longrightarrow$ c) $P = \mathcal{D}^{(J)}(A) \otimes \overline{\mathcal{D}^{(J)}(A)}\big(P \circ \pi(A)^{T}\big),\ \pi(A)^T : V' \longrightarrow V'$.
Um eine irreduzible Darstellung zu erhalten, wird wieder P minimal vorausgesetzt, d.h.

$$P_1 \geq 0,\ P - P_1 \geq 0 \implies P_1 = \alpha P,\ 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad \text{(vgl. Def. 11.4, S. 145)}.$$

Dies bedingt, dass auch der Träger von P minimal wird und daher hat P die Gestalt $P(y) = G(y)\,\mathrm{d}\mu$.
$G : \operatorname{supp}\mathrm{d}\mu \longrightarrow W \otimes W$ $\mathrm{d}\mu$-messbar, $\mathrm{d}\mu$ wie in S. 145.
Da auch G $\mathcal{L}_0$-invariant sein muss (d.h. $G(y) = \mathcal{D}^{(J)}(A) \otimes \overline{\mathcal{D}^{(J)}(A)}\Big(G\big(\pi(A)^T y\big)\Big)$, ist $G(y)$ durch Angabe von $G(a),\ a \in \operatorname{supp}\mathrm{d}\mu$, bestimmt. $G(a)$ muss eine positiv definite, hermitesche Matrix sein, welche außerdem invariant unter $\mathcal{D}^{(J)}(A) \otimes \overline{\mathcal{D}^{(J)}(A)}$ für alle $A \in \mathcal{L}_0^a = \big\{A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \text{ mit } \pi(A)^T a = a\big\}$.

Spezialisierung: $\mathrm{d}\mu =$ obere Schale eines 2-schaligen Hyperboloides $[y, y] = m^2$,
$a = \binom{m}{0},\ \mathcal{L}_0^a = \mathrm{SU}_2$. Auf W' werde ein inneres Produkt $(-|-)$ eingeführt so, dass es unter $\mathcal{D}^{(J)}(A)^T,\ A \in \mathrm{SU}_2$, invariant bleibt (Unitarian Trick!).
Offenbar ist dann $I \in W \otimes W,\ I : W' \otimes W' \longrightarrow \mathbb{C} : (z, w) \mapsto (z|\overline{w})$ hermitesch (d.h. $I(\overline{w_1}, \overline{w_2}) = \overline{I(w_2, w_1)}$), positiv definit $\big(I(w, \overline{w}) \geq 0\big)$, invariant unter $\mathcal{L}_0^a$ und eindeutig (bis auf skalare Vielfache) mit diesen Eigenschaften (diagonalisieren, SU_2 operiert irreduzibel auf W).
Somit: $G(y) = \mathcal{D}^{(J)}(A_y) \otimes \overline{\mathcal{D}^{(J)}(A_y)}\, I$ mit $A_y \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}),\ \pi(A_y)^T y = a \implies$
$G(y) : W' \otimes W' \longrightarrow \mathbb{C} : z \otimes w \longrightarrow \big(\mathcal{D}^{(J)T}(A_y) z | \mathcal{D}^{(J)T}(A_y)\overline{w}\big)$, wobei
$\mathcal{D}^{(J)T}(A) : W' \longrightarrow W'$ die duale Abbildung zu $\mathcal{D}^{(J)}(A)$ ist.

Übergang in den Impulsraum wie in S. 146:

$$H = \Big\{T \in \mathcal{D}'(M; W) : \exists C \geq 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(M; W') : \big|\langle \varphi, T\rangle\big|^2 \leq C \underbrace{\big\langle \varphi(x)\overline{\varphi(y)}, K\big\rangle}_{=\langle \overline{\mathcal{F}}\tilde{\varphi} \otimes \overline{\mathcal{F}}\overline{\varphi}, P\rangle}\Big\}$$

$\mathcal{F}H =: \tilde{H}$ hat das Skalarprodukt

$$\|U\|_{\tilde{H}} = \sup_{\psi \in \mathcal{S}(V'; W')} \frac{\langle \psi, U\rangle}{\sqrt{\langle \psi \otimes \overline{\psi}, P\rangle}}\,;$$

$\langle \psi \otimes \overline{\psi}, P\rangle = \int \langle \psi(y) \otimes \overline{\psi}(y), G(y)\rangle \,\mathrm{d}\mu(y) = \int \big\|\mathcal{D}^{(J)T}(A_y)\psi(y)\big\|_W^2$,
$\mathrm{d}\mu(y) =: \|\psi\|^2$.
$\tilde{H}$ = Dualraum zu $\big\{\psi : \mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu) \longrightarrow W'$ messbar mit $\|\psi\|^2 < \infty\big\}$
(bzgl. der Auswertung $\langle \psi, U\rangle$) $= \Big\{U = f(y)\,\mathrm{d}\mu,\ f : \mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu) \longrightarrow W$ messbar mit $\|U\|^2 = \int \big\|\mathcal{D}^{(J)}(A_y)^{-1} f(y)\big\|_W^2 \,\mathrm{d}\mu(y) < \infty\Big\}$, wobei $\|\cdot\|_W$ dual zu $\|\cdot\|_{W'}$ und in den obigen Mengen - wie üblich - zwei Elemente U_1, U_2 mit $\|U_1 - U_2\| = 0$ identifiziert werden.

Explizite Realisierung $W = \big\{z = (z^{\alpha_1\cdots\alpha_n})$ symmetrisch, $\alpha_j \in \{1,2\}\big\}$, $\dim W = n+1 = 2J+1$, $\big(z|w\big) = z^{\alpha_1\cdots\alpha_n}\overline{w_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}$ (Hier ist $w^\alpha = w_\alpha$),
$\mathcal{D}^{(J)}(A) : W \longrightarrow W : z \longmapsto A^{\alpha_1}{}_{\beta_1}\cdots A^{\alpha_n}{}_{\beta_n} z^{\beta_1\cdots\beta_n}$ für $A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ (vgl. S. 160).
$\big\|\mathcal{D}^{(J)}(A_y)^{-1} f(y)\big\|_W^2 = \big(\mathcal{D}^{(J)}(A_y A_y^*)^{-1} f(y)|f(y)\big)$, $\pi(A_y)^T y = a$.
Es sei $\mathrm{kan} : V \longrightarrow V' : x^\alpha \longmapsto x_\alpha$, $\mathrm{kan}\, x = y$ und F wie in S. 150. Dann gilt:
$\pi(A_y)^T y = a \Longleftrightarrow x = \pi(A_y)\binom{m}{0} = F^{-1}\Big(A_y F\big(\binom{m}{0}\big) A_y^*\Big) = F^{-1}\big(A_y m \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) A_y^*\big) =$
$mF^{-1}(A_y A_y^*) \implies F(x)/m = A_y A_y^*$, $(A_y A_y^*)^{-1} = mF(x)^{-1} = F'(y)/m$,
$F' : V' \longrightarrow \mathrm{Ls}(\mathbb{C}^2) : y \longmapsto \sum y_\alpha \sigma_\alpha$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \Big\{U = \big(z^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(y)\big)\,\mathrm{d}\mu : \|U\|^2 = \\ &= \int B(y)_{\alpha_1\beta_1}\cdots B(y)_{\alpha_n\beta_n} z^{\beta_1\cdots\beta_n}(y)\overline{z^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(y)}\,\mathrm{d}\mu(y) < \infty\Big\},\end{aligned}$$

wobei $B(y) = F'(y)/m = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{\alpha=0}^{3} y_\alpha\sigma_\alpha$, $\mathrm{d}\mu = \dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\sqrt{m^2+\vec{y}^2}}$.
P_0 operiert auf $\tilde{H}$ entsprechend der Einbettung $\tilde{H} \subset \mathcal{D}'(V'; W)$ (vgl. S. 151 oben):

$$\varrho : P_0 \simeq V \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow L(\tilde{H}) : \Lambda = (a, A) \longmapsto$$
$$\Big(z(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,y\rangle} A^{\alpha_1}{}_{\beta_1}\cdots A^{\alpha_n}{}_{\beta_n} \cdot z^{\beta_1\cdots\beta_n}\big(\pi(A)^T y\big)\,\mathrm{d}\mu(y)\Big)$$

Äquivalenz mit der Wigner-Darstellung H_1 bezeichne den Hilbertraum H von S. 173. Wenn dort $\mathbb{C}^{2J+1} = W$ gesetzt wird, so ist

$$H_1 = \Big\{U_1 = f_1(y)\,\mathrm{d}\mu : f_1(y) \in W,\ \|U_1\|^2 = \int \big\|f_1(y)\big\|_W^2 \,\mathrm{d}\mu(y) < \infty\Big\};$$

$\pi(A_y)^T y = a \implies (A_y A_y^*)^{-1} = H_{ya}^{-2}$ in der Notation von S. 173 (beachte, dass dort $\pi(A_y)$ direkt auf V' wirkt, d.h. dem $\pi(A_y)^{T-1}$ von S. 175 ff. entspricht) $\implies$

$\|U\|^2_{\tilde{H}} = \int \big(\mathcal{D}^{(J)}(A_y A_y^*)^{-1} f(y) | f(y)\big)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int \big\|\mathcal{D}^{(J)}(H_{ya}^{-1}) f(y)\big\|^2\,\mathrm{d}\mu(y) \implies$
$\implies \Psi : H_1 \longrightarrow \tilde{H} : f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \longmapsto \mathcal{D}^{(J)}(H_{ya}) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ ist ein Hilbertraum-Isomorphismus. Die angegebenen Darstellungen von P_0 sind vermöge Ψ äquivalent: $U_1 \in H_1,\ A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \implies \Psi\big(\varrho_1(A)U_1\big) =$
$\Psi\Big(\mathcal{D}^{(J)}(H_{ay} A H_{\pi(A)^T y,a}) \cdot f_1\big(\pi(A)^T y\big) \cdot \mathrm{d}\mu\Big) = \mathcal{D}^{(J)}(A H_{\pi(A)^T y,a}) f_1\big(\pi(A)^T y\big)\,\mathrm{d}\mu =$
$\varrho(A)\big(\mathcal{D}^{(J)}(H_{ya}) f_1(y)\,\mathrm{d}\mu\big) = \varrho(A)\Psi(U_1)$, wenn $U_1 = f_1(y)\,\mathrm{d}\mu$.

F) Raum- und Zeitspiegelungen

Der Zustandsraum einer relativistischen Theorie sollte auch unter Raum- und Zeitspiegelungen invariant sein, d.h., wenn P die volle Poincaré-Gruppe bezeichnet, so sollte $\forall \Lambda \in P$ ein $\tilde{T}_\Lambda : \{\mathbb{C}x : x \in H \setminus 0\} \longrightarrow \{\mathbb{C}x : x \in H \setminus 0\}$ mit den Eigenschaften von S. 151 existieren. Nach Wigner existieren also unitäre oder antiunitäre Operatoren $\varrho(I_s)$ bzw. $\varrho(I_t) : H \longrightarrow H$, welche den Spiegelungen I_s bzw. $I_t : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : x \longmapsto \binom{x^0}{-\vec{x}}$ bzw. $\binom{-x^0}{\vec{x}}$ entsprechen. Es sei weiters $\varrho(I_s), \varrho(I_t) : E \longrightarrow E$ stetig.

Satz 13.4

1) Für $u \in \{s,t\}$ gilt: $\varrho(I_u)$ kann so gewählt werden, dass

   a) $\varrho(I_u)^2 = \pm \mathrm{Id}_H$,

   b) $\varrho(I_u)\varrho\big((a,A)\big)\varrho(I_u)^{-1} = \varrho\big((I_u a, A^{*-1})\big)$ für $(a,A) \in P_0$,

   c) $\varrho(I_u) P^\lambda \varrho(I_u)^{-1} = \begin{cases} I_u(P)^\lambda = (I_u)^\lambda{}_\mu P^\mu & : \ \varrho(I_u) \text{ unitär} \\ -I_u(P)^\lambda & : \ \varrho(I_u) \text{ antiunitär} \end{cases}$
   (Das ist eine Gleichung in $\mathrm{Lsa}(H)$.)

2) $\varrho(I_s)$ ist unitär, $\varrho(I_t)$ ist antiunitär.

Beweis.
1) a) Da $\varrho(I_u)^2$ unitär ist und auf dem Zustandsraum wie I operiert, gilt:
$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \varrho(I_u)^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} I$. Wenn $\varrho(I_u)$ unitär ist, so kann $\varrho(I_u)^{\mathrm{neu}} := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\varrho(I_u)$ gesetzt werden. Wenn $\varrho(I_u)$ antilinear ist, so gilt $\varrho(I_u) = A \cdot K,\ A$ linear,
$K : H \longrightarrow H : \sum c_j f_j \longmapsto \sum \overline{c}_j f_j,\ \{f_j\} \subset H$ ONB. Mit $\overline{A} := KAK$ folgt dann $A\overline{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} I,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} I = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} I} = \overline{A} A \implies A^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\overline{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\overline{A} \implies \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \pm 1$.

b) In der erweiterten Poincaré-Gruppe P gilt:
$I_u\mathbb{T}(a,A)I_u^{-1} = \big(I_u a,\ I_u\pi(A){I_u}^{-1}\big),\ (a,A)\in\mathbb{R}^4\times\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \implies \varrho(I_u)\varrho(a,A)\varrho(I_u)^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(a,A)}\cdot\varrho(I_u a, A^{*-1})$, wobei $f(a,A)\in\mathbb{R}$, denn: $\pi(A^{*-1}) = I_u\pi(A)I_u = I_u\pi(A){I_u}^{-1}$.
$P_0 = \mathbb{R}^4\times\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} : (a,A)\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(a,A)}$ ist eine kommutative Darstellung, $P_0 = \{pqp^{-1}q^{-1} : p,q\in P_0\} \implies \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(a,A)} = 1,\ \forall (a,A)\in P_0$.
c) Für $x\in E$ folgt aus b) mit $A = I$:
$-\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho(I_u)\varrho(at,I)\varrho(I_u)^{-1}x\big|_{t=0} = -\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho(I_u a,I)x\big|_{t=0}$
$\implies -\mathrm{i}\varrho(I_u)\mathrm{i}a_\lambda P^\lambda\varrho(I_u)^{-1}x = (I_u a)_\lambda P^\lambda x;\ \varrho(I_u)\mathrm{i} = \pm\mathrm{i}\varrho(I_u)$.
2) $\varrho(I_u)P^\lambda\varrho(I_u)^{-1} = P'^\lambda$ ist der Impulsoperator im gespiegelten System. Er muss ebenfalls Axiom 4 erfüllen und folglich ist $P'^0 = +P^0,\ \varrho(I_s)$ unitär, $\varrho(I_t)$ antiunitär. □

Speziell für den Zustandsraum $\tilde H$ eines spinlosen Teilchens (vgl. S. 146) setzen wir
$\varrho(I_s) : \tilde H \longrightarrow \tilde H : f(y)\,\mathrm{d}\mu \longmapsto f(y_0,-\vec y)\,\mathrm{d}\mu$,
$\varrho(I_t) : \tilde H \longrightarrow \tilde H : f(y)\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \overline{f(y_0,-\vec y)}\,\mathrm{d}\mu$.
($\varrho(I_t)$ muss antiunitär sein und den Impuls umkehren.)
Wenn man dann für $\Lambda_1\in P_+^\uparrow,\ \Lambda = \Lambda_1\cdot I_u\in P,\ u\in\big\{\{\},s,t,st\big\}$,
$I_{st} := I_s\cdot I_t,\ \varrho(I_{st}) := \varrho(I_s)\varrho(I_t)$ definiert $\varrho(\Lambda) := \varrho(\Lambda_1)\cdot\varrho(I_u)$, so erhält man eine Abbildung $\varrho : P\longrightarrow \mathrm{End}(\tilde H)$, die multiplikativ ist. Denn $\varrho : P^\uparrow := P_+^\uparrow\cup P_+^\uparrow\cdot I_s \longrightarrow L(\tilde H) : (a,A)\longmapsto \big(T\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,y\rangle}T(A^Ty)\big)$ ist klarerweise multiplikativ und für $\Lambda_1,\Lambda_2 = (a,A)\in P^\uparrow$ gilt:

$\alpha)$ $\varrho(\Lambda_1\Lambda_2 I_{st})T \overset{\text{def}}{=} \varrho(\Lambda_1\Lambda_2)\varrho(I_{st})T = \varrho(\Lambda_1\Lambda_2)\overline{T}$,
$\varrho(\Lambda_1)\varrho(\Lambda_2 I_{st})T = \varrho(\Lambda_1)\varrho(\Lambda_2)\overline{T} = \varrho(\Lambda_1\Lambda_2)\overline{T}$;

$\beta)$ $\varrho(\Lambda_1 I_{st}\Lambda_2)T = \varrho\big(\Lambda_1(-a,A)I_{st}\big)T \overset{\text{def}}{=} \varrho\big(\Lambda_1(-a,A)\big)\overline{T}$,
$\varrho(\Lambda_1 I_{st})\varrho(\Lambda_2)T \overset{\text{def}}{=} \varrho(\Lambda_1)\varrho(I_{st})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,y\rangle}T(A^Ty) =$
$\varrho(\Lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle a,y\rangle}\overline{T}(A^Ty) = \varrho\big(\Lambda_1(-a,A)\big)\overline{T}$;

$\gamma)$ $\varrho(\Lambda_1 I_{st}\cdot\Lambda_2 I_{st}) = \varrho(\Lambda_1 I_{st})\cdot\varrho(\Lambda_2 I_{st})$ ebenso.

In diesem Fall lässt sich also sogar eine Darstellung der erweiterten Poincaré-Gruppe auf dem Hilbertraum angeben. Wenn $\varrho(I_t)^2 = -\mathrm{Id}_H$ (was sich wegen der Antiunitarität von $\varrho(I_t)$ nicht durch Multiplikation mit einem Phasenfaktor verändern lässt), so ist das offenbar nicht möglich.

Kapitel 14

Die Gårding-Wightman-Axiome

Reed-Simon *Methods of Modern Mathematical Physics II, Ch. IX.8, X.7*

Streater-Wightman *PCT, Spin and Statistics, and all that*

R. Jost *General Theory of Quantized Fields*

A) Relativistische Feldoperatoren

In der klassischen Physik ist ein „Feld“ ein (z.B. kontravariantes) Tensorfeld $\Phi^{\lambda_1\cdots\lambda_k}(x) \in T_xM\otimes\cdots\otimes T_xM$ auf dem in Kap. 11 B) betrachteten Minkowskiraum M (der in dieser Vorlesung als nicht gekrümmt angenommen wird.) Auf diesen Feldern operiert die Poincaré-Gruppe in der üblichen Weise:
$\Lambda = (v, A) \in V \times \mathcal{L}_+^\uparrow = P_+^\uparrow \implies$

$$\tilde{\Lambda}\big(\Phi^{\lambda_1\cdots\lambda_k}(x)\big) = A^{\lambda_1}{}_{\mu_1}\cdots A^{\lambda_k}{}_{\mu_k}\Phi^{\mu_1\cdots\mu_k}\big(A^{-1}(x-v)\big).$$

Mathematisch: Wenn $T\Lambda : T^kM \longrightarrow T^kM$ die Tangentialabbildung zu $\Lambda : M \longrightarrow M$ ist, so ist $\tilde{\Lambda}(\Phi) = (T\Lambda)\Phi(\Lambda^{-1}x)$.
Ein Beispiel ist der elektromagnetische Feldtensor

$$F^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{vgl. Landau-Lifschitz II.}$$

Etwas abstrakter kann man sagen (hier ist wesentlich, dass M nicht gekrümmt ist und folglich alle Tangentialräume identifiziert werden können): $\Phi : M \longrightarrow W$, auf W operiert die Lorentz-Gruppe, d.h. $\varrho : \mathcal{L}_+^\uparrow \longrightarrow \mathrm{Gl}(W)$ ist vorgegeben, und für

$\Lambda = (a, A) \in P_+^\uparrow$ gilt $\tilde{\Lambda}(\Phi) = \varrho(A)\Phi(\Lambda^{-1}x)$. $\Phi(x)^{\lambda_1\cdots\lambda_k} \in \mathbb{R}$ wird als Messgröße x interpretiert, d.h. etwa für $\Phi = F^{\lambda\mu}$ als elektrische bzw. magnetische Feldstärke. Gelegentlich erweist es sich, dass $\Phi(x)^{\lambda_1\cdots\lambda_k}$ in einigen Punkten ∞ bzw. undefiniert wird, wie etwa die Fundamentallösung der Wellengleichung $\dfrac{1}{4\pi x^0}\,\delta\big(x^0 - |\vec{x}|\big)$.
Diese Phänomene lassen sich dadurch bewältigen, dass man Φ als vektorwertige Distribution auffasst: $\Phi \in \mathcal{D}'(M; W)$ (vgl. Kap. 13, E)). Das bedeutet, dass $\Phi^{\lambda_1\cdots\lambda_k} \in \mathcal{D}'(M)$ bzw., dass $\Phi : \mathcal{D}(M) \longrightarrow W$ bzw., dass $\Phi : \mathcal{D}(M; W') \longrightarrow \mathbb{R}$. Wenn Φ höchstens polynomial wächst, können wir $\Phi : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow \mathbb{R}$ voraussetzen. In der Quantentheorie entsprechen $\Phi(x)^{\lambda_1\cdots\lambda_k}$ selbstadjungierten Operatoren und für $\Phi(x)^{\lambda_1\cdots\lambda_k} \in \mathbb{C}$ sogar beliebige Operatoren, d.h. $\Phi : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow \mathrm{Lu}(H)$. Um von der Linearität von Φ reden zu können, nimmt man $L(E, E)$ anstelle von $\mathrm{Lu}(H)$.
Mit ϱ wirkt $\tilde{\varrho}$ kanonisch auf $\mathcal{S}(M; W')$: $\tilde{\varrho}(\Lambda)\big(\varphi(x)\big) = \varrho(A)^{T-1}\varphi\big(\mathbb{T}(\Lambda)^{-1}x\big)$.
Wenn $U : P_0 \longrightarrow L(H, E)$ entsprechend Axiom 3, so wirkt $\tilde{U}$ kanonisch auf

$$L(E, E) : \tilde{U} : P_0 \longrightarrow \mathrm{End}\big(L(E, E)\big) : \Lambda \longmapsto \big(B \mapsto U(\Lambda)BU(\Lambda)^{-1}\big).$$

Dies entspricht der üblichen Praxis in der Quantentheorie: Wenn $U : H \longrightarrow H$ die Zustände transformiert (unitär oder antiunitär) und $B \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ eine Observable ist, so sollte die transformierte Messgröße $\tilde{B}$ im transformierten Zustand $\mathbb{C} \cdot Ux$ dasselbe ergeben wie B in $\mathbb{C}x$, d.h. $(\tilde{B}Ux, Ux)/\|x\|^2 = (Bx, x)/\|x\|^2 \iff \tilde{B} = UBU^{-1}$. Auf der Menge aller Abbildungen $\Phi : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow L(E, E)$ wirkt P_0 kanonisch so

$$\Lambda\Phi(\varphi) = \tilde{U}(\Lambda)\Phi\big(\tilde{\varrho}(\Lambda)^{-1}\varphi\big) = U(\Lambda)\Phi\Big(\varrho(A)^T\varphi\big(\mathbb{T}(\Lambda)x\big)\Big)U(\Lambda)^{-1}.$$

Damit gelangen wir zu

Axiom 6 H, E wie immer, $U : P_0 \longrightarrow L(H, E)$ wie in Axiom 3, W sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum auf dem L_0 entsprechend $\varrho = \mathcal{D}^{(J,K)}$ operiert.
Ein (relativistisch invariantes) Quantenfeld ist eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow L(E, E)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\forall\varphi \in \mathcal{S}(M; W') : \Phi^*(\varphi) := \Phi(\varphi)^*\big|_E \in L(E, E)$;

b) Φ schwach stetig, d.h. $\forall x, y \in E : \Phi_{xy} : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow \mathbb{C}$
$\varphi \longmapsto \big(\Phi(\varphi)x, y\big)_H$
ist stetig.

c) $\forall\Lambda = (a, B) \in P_0 : \Lambda\Phi = \Phi$ oder ausgeschrieben:
$\forall\varphi \in \mathcal{S}(M; W') : \Phi\Big(\varrho(A)^{T-1}\varphi\big(\mathbb{T}(\Lambda)^{-1}x\big)\Big) = U(\Lambda)\Phi(\varphi)U(\Lambda)^{-1}$.

Für $\varphi \in \mathcal{S}(M;W')$ wird $\Phi(\varphi)$ als Integral über die Feldoperatoren $\Phi(x)$ mit der Dichte $\varphi(x)$ aufgefasst, d.h. $\Phi(\varphi) =_{\text{„}} \int \varphi(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x$“. Diese Gleichung ist nur symbolisch, da $\Phi(x) = \Phi\big(\delta(x-\xi)\big)$ i.a. nicht existiert.
Wenn $x, y \in M$ mit $[x-y, x-y] < 0$, so sollten die Feldoperatoren $\Phi(x), \Phi(y)$ zugleich gemessen werden können, d.h. vertauschbar sein (vgl. Kap. 7, S. 82). Dies führt zu

Axiom 7 (Lokalitätsprinzip)
Es seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(M;W')$ und $[x-y, x-y] \leq 0$, $\forall x \in \mathrm{supp}\varphi$, $\forall y \in \mathrm{supp}\psi$. Dann gilt entweder $\forall h \in E : \big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big]_- h := \big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big]h = \big(\Phi(\varphi)\Phi(\psi) - \Phi(\psi)\Phi(\varphi)\big)h = 0$ oder
$\forall h \in E : \big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big]_+ h := \big(\Phi(\varphi)\Phi(\psi) + \Phi(\psi)\Phi(\varphi)\big)h = 0$.
Die entsprechenden Gleichungen sollen auch für $\Phi(\varphi), \Phi(\psi)^*$ gelten.

Bemerkung
Die zweite Möglichkeit ist gegenüber der Quantenmechanik neu. Wie noch gezeigt werden soll, ist nur die „+-Quantelung“ mit den übrigen Axiomen verträglich, wenn $2(J+K)$ ungerade ist, d.h. ϱ keine Darstellung von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist. Umgekehrt ist für $2(J+K)$ gerade nur $[-,-]_-$ möglich. Dies ist das „Spin-Statistik-Theorem“.

Axiom 8 (Zyklizität des Vakuums)
$\mathbb{C}\Omega$ sei das Vakuum entsprechend Axiom 5. Dann ist

$$\underset{\mathbb{C}}{\Big\langle}\big\{\Phi^{(*)}(\varphi_1)\cdots\Phi^{(*)}(\varphi_k)\Omega : k \in \mathbb{N},\ \varphi_j \in \mathcal{S}(M;W')\big\}\Big\rangle \subset H \qquad \text{dicht.}$$

Das bedeutet etwas Ähnliches wie Irreduzibilität bei einer Darstellung einer Lie-Gruppe.

B) Der Fockraum

Der 1-Teilchen-Zustandsraum von Kap. 13 reicht nicht aus, um Feldoperatoren zu definieren, da durch Messungen Teilchen erzeugt bzw. vernichtet werden können.

Definition 14.1
H_1, H_2 Hilberträume. $H_1 \hat{\otimes} H_2 :=$ Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes $H_1 \otimes H_2$ bzgl. des Skalarproduktes

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^1 \otimes g_i^1,\ \sum_{j=1}^{m} f_j^2 \otimes g_j^2 \Big) = \sum_{i,j} (f_i^1, f_j^2)_{H_1} \cdot (g_i^1, g_j^2)_{H_2}.$$

Satz 14.1

1) Das obige Skalarprodukt ist wohldefiniert.

2) Wenn $\{\varphi_i\} \subset H_1$ und $\{\psi_j\} \subset H_2$ ONBasen, so ist $\{\varphi_i \otimes \psi_j\} \subset H_1 \otimes H_2$ eine ONB von $H_1 \hat{\otimes} H_2$.

Beweis: Übung.

Beispiel 40 Wenn $H_i = L^2(X_i, \mathrm{d}\mu_i)$ separabel sind, so ist

$$\begin{array}{lcll} H_1 \hat{\otimes} H_2 & \simeq & L^2(X_1 \times X_2, \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mathrm{d}\mu_2) & \big(\simeq L2(H_1, H_2)\big) \\ f \otimes g & \longmapsto & f(x_1) g(x_2) & \end{array}$$

Definition 14.2
H Hilbertraum.

1) $H^k := \underbrace{H \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} H}_{k\text{-mal}}$; $H^0 := \mathbb{C}$;

2) $F := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k$ heißt *Fockraum* über H;

3) $\sigma \in S_k =$ Permutationsgruppe: $\hat{\sigma} : H^k \longrightarrow H^k$
$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k \longmapsto \varphi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(k)}$

$H^k_{s \text{ bzw. } a} := \{\varphi \in H^k : \forall \sigma \in S_k : \hat{\sigma}(\varphi) = \varphi \text{ bzw. } \operatorname{sign}\sigma \cdot \varphi\}$;
$F_{s|a} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k_{s|a} \leq F$ heißen symmetrischer bzw. antisymmetrischer Fockraum. $F_{s|a}$ sind abgeschlossene Unterräume von F, $P_{s|a} : F \longrightarrow F_{s|a}$ seien die Projektoren darauf, d.h. $P_{s|a}(\underbrace{\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k}_{\varphi}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \operatorname{sign}\sigma \end{array} \right\} \hat{\sigma}(\varphi)$.

4) $F_{(s|a)}$ bezeichne einen der 3 Räume F, F_s, F_a.

Beispiel 41 1) $H = L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ separabel $\Longrightarrow$
$F \simeq \Big\{ \big(\psi_k(x_1, \cdots, x_k)\big) : \psi_0 \in \mathbb{C},\ \psi_k \in L^2(\prod_{j=1}^{k} X, \mathrm{d}\mu^{\otimes k}),\ k \in \mathbb{N},$
$\|\psi\|^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \int \big|\psi_k(x_1, \cdots, x_k)\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(x_1) \cdots \mathrm{d}\mu(x_k) < \infty \Big\}$.

2) $\tilde{H}$ sei wie in Kap. 13 E), d.h.
$\tilde{H} = \{U = z^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu := z^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}(y)\,\mathrm{d}\mu : \|U\|^2 =$
$\int B(y)_{\dot{\alpha}_1\beta_1} \cdots B(y)_{\dot{\alpha}_n\beta_n} z^{\beta}(y) \overline{z^{\dot{\alpha}}(y)}\,\mathrm{d}\mu(y) < \infty \Big\}$, wobei $B(y) = \frac{1}{m} \sum_{\lambda=0}^{3} y_\lambda \sigma_\lambda$.

Zur Abkürzung sei $B(y)_{\dot{\alpha}\beta} := B(y)_{\dot{\alpha}_1\beta_1} \cdots B(y)_{\dot{\alpha}_n\beta_n}$. Dann ist
$\tilde{H}^k = \Big\{ U = z^{\alpha^{(1)} \cdots \alpha^{(k)}}(y^{(1)}, \cdots, y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y^{(1)}) \cdots \mathrm{d}\mu(y^{(k)}) : \|U\|^2 =$
$\int B(y^{(1)})_{\dot{\alpha}^{(1)}\beta^{(1)}} \cdots B(y^{(k)})_{\dot{\alpha}^{(k)}\beta^{(k)}} z^{\beta^{(1)} \cdots \beta^{(k)}}(y) \overline{z^{\dot{\alpha}^{(1)} \cdots \dot{\alpha}^{(k)}}(y)}\,\mathrm{d}\mu(y^{(1)}) \cdots \mathrm{d}\mu(y^{(k)}) < \infty \Big\}$,
wobei $y = y^{(1)}, \cdots, y^{(k)}$ und $\alpha^{(j)} = \alpha^{(j)}_1 \cdots \alpha^{(j)}_n$ etc.

Es gilt also $\tilde{H}^k \subset \mathcal{S}'(\underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{k}; \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{k})$.

Bemerkung Wenn H wie in Kap. 13 E), so können wir H^n, H^n_s, H^n_a als Raum der ((anti-)symmetrischen) n-Teilchen-Zustände ansehen. Aus $\varrho : P_0 \longrightarrow L(H)$ ergibt sich kanonisch $\varrho_F : P_0 \longrightarrow L(F_{(s|a)})$.

Satz 14.2
$\tilde{H}$ sei wie in Kap. 13 E) und $\tilde{F}_{(s|a)}$ die zugehörigen Fockräume. Sie erfüllen Axiome 4 und 5, siehe S. 171.

Beweis. a) Die Operation von P_0 auf $\tilde{H}^k$ ist gegeben durch
$\varrho : P_0 \longrightarrow L(\tilde{H}^k)$
$\Lambda = (a, A) \longmapsto \Big(z(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a, y^{(1)}+\cdots+y^{(k)}\rangle} Az\big(\pi(A)^T y\big)\,\mathrm{d}\mu(y)\Big)$, wobei
$z(y) = z^{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(k)}}(y^{(1)}, \cdots, y^{(k)})$, $\mathrm{d}\mu(y) := \mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)})$,
$\pi(A)^T y := \big(\pi(A)^T y^{(1)}, \cdots, \pi(A)^T y^{(k)}\big)$, $Az = A^{\alpha^{(1)}}{}_{\beta^{(1)}} \cdots A^{\alpha^{(k)}}{}_{\beta^{(k)}} z^{\beta^{(1)}\cdots\beta^{(k)}}$,
$A^{\alpha^{(j)}}{}_{\beta^{(j)}} := A^{\alpha_1^{(j)}}{}_{\beta_1^{(j)}} \cdots A^{\alpha_n^{(j)}}{}_{\beta_n^{(j)}}$, $j = 1, \cdots, k$.
$E_{(k)} := \big\{z(y)\,\mathrm{d}\mu : z \in \mathcal{S}(V'^k; W \otimes \cdots \otimes W)\big\}$. Dann ist Axiom 3.1 auf $\tilde{H}^k$ erfüllt. Da $E_{(k)}$ das Bild unter der Abbildung $\mathcal{S}(V'^k; W^{\otimes k}) \longrightarrow E_{(k)} : z(y) \longmapsto z(y)\,\mathrm{d}\mu$ ist, ist $E'_{(k)} \hookrightarrow \big\{f \in \mathcal{S}'(V'^k; W^{\otimes k}) : \mathrm{supp} f \subset \mathrm{supp}\,\mathrm{d}\mu \times \cdots \times \mathrm{supp}\,\mathrm{d}\mu\big\}$.
Der Impulsoperator ist auf $E_{(k)}$ gegeben durch

$$P_\alpha(z\,\mathrm{d}\mu) = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a^\alpha}\big(\varrho(a, I)z\,\mathrm{d}\mu\big) = (y^{(1)} + \cdots + y^{(k)})_\alpha \cdot z(y)\,\mathrm{d}\mu;$$

$f \in E'_{(k)}$, $P^\alpha f = \lambda^\alpha f \implies (y^{(1)} + \cdots + y^{(k)})^\alpha f = \lambda^\alpha f \implies$
$\mathrm{supp} f \subset \big\{(y^{(1)}, \cdots, y^{(k)}) : y^{(1)} + \cdots + y^{(k)} = \lambda\big\} \implies$
$\sigma\big((P^\alpha)\big) \subset \big\{y^{(1)} + \cdots + y^{(k)} : y^{(j)} \in \mathrm{supp}\,\mathrm{d}\mu\big\} \subset \big\{y : [y, y] \geq m^2 k^2,\ y^0 > 0\big\}$, denn
$[y^{(1)} + \cdots + y^{(k)}, y^{(1)} + \cdots + y^{(k)}] = \sum\limits_{1 \leq j,l \leq k} [y^{(j)}, y^{(l)}]$ und $[y^{(j)}, y^{(l)}] =$ (Lorentztransf.)
$= \big[\binom{m}{0}, y^{(l)\prime}\big] \geq m^2$.
Insbesondere gilt auf $\tilde{H}^k$, dass $\sigma\big((P^\alpha)\big) \subset \overline{V}_+$. Eine genaue Betrachtung ergibt, dass $\sigma\big((P)^2\big) = [m^2 k^2, \infty)$.

b) Der nukleare Raum in $\tilde{F}_{(s|a)}$ wird durch die Räume $E_{(k)}$ so gebildet:

$$p_{k,n}\big(z(y)\,\mathrm{d}\mu\big) = \sup_{\substack{\vec{y}^{(j)} \in \mathbb{R}^3, \\ 1 \leq j \leq k}} \big(1 + |y|\big)^n \sum_{\substack{|\gamma^{(j)}| \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \Big\| \big(\prod_{j=1}^{k} \partial_{\vec{y}^{(j)}}^{\gamma^{(j)}}\big) z(y) \Big\|_{W^{\otimes k}}$$

(wobei $y = (\sqrt{m^2|\vec{y}^{(1)}|^2},\ \vec{y}^{(1)}, \cdots)$) definiert die Topologie in $E_{(k)}$;

$$E := \Big\{f = (f_k) \in \prod_{k=0}^{\infty} E_{(k)} : \forall n : p_n(f) := |f_0| + \sum_{k=1}^{\infty} k^n p_{k,n}(f_k) < \infty\Big\}.$$

Genauer ist dies in Bogolyubov etc., p. 197 ausgeführt. Damit ergibt sich wie oben $\sigma\big((P^\alpha)\big) \subset \overline{V}_+$.

c) $f = (f_k) \in \tilde{F}_{(s|a)}$ mit $(P)^2 f = \lambda f$, wobei hier
$(t)^2 := [t, t] \implies \forall k \geq 1 : (y^{(1)} + \cdots + y^{(k)})^2 f_k = \lambda f_k$
$\implies \mathrm{supp} f_k \subset \big\{(y^{(1)}, \cdots, y^{(k)}) \in V' \times \cdots \times V' : (y^{(1)} + \cdots + y^{(k)})^2 = \lambda\big\}$.

Für $k \geq 2$ oder $k = 1,\ \lambda \neq m^2$, hat diese Menge Maß 0 bzgl. $\mathrm{d}\mu \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\mu$, d.h. $\sigma_p\big((P)^2\big) = \{0, m^2\}$. Bei Betrachtung verallgemeinerter Eigenfunktionen findet man, dass $\sigma\big((P)^2\big) = \{0, m^2\} \cup [4m^2, \infty)$. □

C) Die kanonischen Kommutatorrelationen

Wie sich in Kap. 11 A) gezeigt hat, lassen sich die Ortsoperatoren $\hat{x}_j$ von ungekoppelten Oszillatoren durch a_j, a_j^* ausdrücken. Dabei gilt $[a_j, a_k] = 0,\ [a_j, a_k^*] = \delta_{j,k}$. Die Feldoperatoren $\Phi(x)$ entsprechen in etwa $\hat{x}_j$ ($\Phi \longleftrightarrow \hat{x},\ x \longleftrightarrow j$). Wenn wir annehmen, dass sie ebenso durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrückbar sind (d.h. die einzelnen Feldoperatoren „harmonische Schwinger“ sind), so gelangen wir zur

Definition 14.3
G, F seien Hilberträume, $E_1 \leq F$ dicht, $\Omega \in E_1,\ \|\Omega\| = 1$. Eine *Darstellung der kanonischen ± Kommutatorrelationen* (+ bzw. − KKR) über G ist eine lineare Abbildung $a : G \longrightarrow \{f : E_1 \longrightarrow E_1 \text{ linear}\}$ mit

i) $a^*(g) := a(g)^*\big|_{E_1}$ geht von E_1 nach E_1;

ii) $\forall g, h \in G : \big[a(g), a(h)\big]_{\pm} = 0$ auf E_1, und $\big[a(g), a^*(h)\big]_{\pm} = (g, h)_G \cdot \mathrm{Id}_{E_1}$;

iii) $\forall g \in G : a(g)\Omega = 0$ und $E_1 = \underset{\mathbb{C}}{\Big\langle} \big\{a^*(g_1) \cdots a^*(g_k)\Omega :\ k \in \mathbb{N}_0,\ g_j \in G\big\} \Big\rangle$.

Satz 14.3
Zwei verschiedene KKR desselben Typs (+ oder −) a_1, a_2 über G sind unitär äquivalent, d.h. $\exists U : F_1 \longrightarrow F_2$ unitär, sodass $\forall g \in G :\ a_2(g) = U a_1(g) U^{-1}$. U ist eindeutig bestimmt, wenn $U\Omega_1 = \Omega_2$ gefordert wird.

Beweis. a) Eindeutigkeit: Wenn U existiert und $U\Omega_1 = \Omega_2$ erfüllt, so gilt:
$U\big(a_1^*(g_1) \cdots a_1^*(g_k)\Omega_1\big) = a_2^*(g_1) \cdots a_2^*(g_k)\Omega_2$. Damit ist U auf E_1 festgelegt und folglich eindeutig, da $E_1 \leq F_1$ dicht.

b) Existenz: Es sei $A_j := a_j^*(g_1) \cdots a_j^*(g_k)\Omega_j,\ j = 1, 2,$
$B_j := a_j^*(h_1) \cdots a_j^*(h_m)\Omega_j,\ j = 1, 2,\ g_i, h_i \in G.$
$(A_j, B_j)_{F_j} = \big(a_j(h_1)a_j^*(g_1) \cdots a_j^*(g_k)\Omega_j,\ a_j^*(h_2) \cdots a_j^*(h_m)\Omega_j\big)_{F_j}$

$= \sum_{l=1}^{k} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ (-1)^l \end{array} \right\} (h_1, g_l)_G \big(a_j^*(g_1)\cdots a_j^*(g_{l-1}) a_j^*(g_{l+1})\cdots a_j^*(g_k)\Omega_j, a_j^*(h_2)\cdots a_j^*(h_m)\Omega_j\big)_{F_j},$
wobei 1 bzw. $(-1)^l$ für $-$ bzw. $+$ Quantelung zu nehmen ist.
Durch Induktion erkennen wir, dass $(A_j, B_j)_{F_j}$ von j unabhängig ist, d.h.
$(A_1, B_1)_{F_1} = (A_2, B_2)_{F_2}$.
Wenn also $\sum_{n=1}^{r} A_{1,n} = \sum_{n=1}^{r} a_1^*(g_{1,n})\cdots a_1^*(g_{k_n,n})\Omega_1 = 0$ in F_1, so folgt:
$\forall B_1 : \big(\sum_n A_{1,n}, B_1\big)_{F_1} = 0 \implies \forall B_2 : \big(\sum_n A_{2,n}, B_2\big)_{F_2} = 0 \implies \sum_n A_{2,n} = 0$ in F_2,
da $E_2 \leq F_2$ dicht.
Daher ist $U : E_1 \longrightarrow E_2 : \sum A_{1,n} \longmapsto \sum A_{2,n}$ wohldefiniert und unitär, lässt sich also zu $U : F_1 \longrightarrow F_2$ stetig fortsetzen. □

Beispiel 42
1) H Hilbertraum, F Fockraum dazu, $\Omega = 1 \in H^0 = \mathbb{C}$, $a : H' \longrightarrow L(F) : g \longmapsto f$ mit i) $f(\Omega) = 0$ ii) $f\big|_{H^k} : H^k \longrightarrow H^{k-1} : \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k \longmapsto \langle \varphi_1, g\rangle \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_k$.
$\alpha)$ $a(g) \in L(F)$, denn für $\varphi = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k \in H^k$ gilt:
$\big\|a(g)\varphi\big\|_F = \big|\langle \varphi_1, g\rangle\big| \|\varphi_2\|_H \cdots \|\varphi_k\|_H = \dfrac{\big|\langle \varphi_1, g\rangle\big|}{\|\varphi_1\|_H} \cdot \|\varphi\|_{H^k} \leq \|g\|_{H'} \cdot \|\varphi\|_F$, d.h.
$\big\|a(g)\big\|_{L(F)} \leq \|g\|_{H'}$.
$\beta)$ $\varphi = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k$, $\psi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{k-1} \implies$
$\big(a(g)\varphi, \psi\big)_F = {}_H\langle \varphi_1, g\rangle_{H'} (\varphi_2, \psi_1)_H \cdots (\varphi_k, \psi_{k-1})_H = (\varphi, \tilde{g} \otimes \psi)_{H^k}$, wobei
$H' \underset{\text{antilin.}}{\xrightarrow{\sim}} H : g \longmapsto \tilde{g}$ mit $(\varphi_1, \tilde{g})_H = {}_H\langle \varphi_1, g\rangle_{H'}$. Daher gilt:
$a^*(g)\big|_H : H^k \longrightarrow H^{k+1} : \psi \longmapsto \tilde{g} \otimes \psi$.
$\gamma)$ $\big[a(g), a(h)\big]_{\pm} \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k = \big(\langle \varphi_1, h\rangle\langle \varphi_2, g\rangle \pm \langle \varphi_1, g\rangle\langle \varphi_2, h\rangle\big) \cdot \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_k \neq 0$
i.a. Daher werde

2) $F_{s|a}$ betrachtet, $\Omega = 1$, $E_1 = \big\{ \sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_{1,n} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_n,n} \in F_{s|a} : c_n \in \mathbb{C}, \varphi_j \in H \big\}$, $a : H' \longrightarrow \{f : E_1 \longrightarrow E_1 \text{ linear}\} : g \longmapsto f$, wobei
$f(\Omega) = 0$, $f\big|_{H^k_{s|a}} := \sqrt{k}\, f_{\text{Beispiel 1}}\big|_{H^k_{s|a}}$.
Man beachte, dass für $\varphi \in H^k_{s|a}$ auch $f(\varphi) \in H^k_{s|a}$. Die Rechnung in 1 $\beta)$ ergibt

$$a^*(g)\big|^k_{H_{s|a}} : H^k_{s|a} \longrightarrow H^{k+1}_{s|a} : \psi \longmapsto \sqrt{k+1}\, P_{s|a}(\tilde{g} \otimes \psi).$$

Die Rechnung in $\gamma)$ funktioniert nun: $\big[a(g), a(h)\big]_{\pm} = 0$.

Nun soll noch $\big[a(g), a^*(h)\big]_{\pm}$ berechnet werden.
$\varphi = \sum_j c_j \varphi_1^j \otimes \cdots \otimes \varphi_k^j \in H^k_{s|a} \implies a(g)a^*(h)\varphi =$

$$= a(g)\sqrt{k+1}\,P_{s|a}(\tilde{h}\otimes\varphi) = a(g)\sqrt{k+1}\sum_j c_j\,\frac{1}{k+1}\cdot$$
$$\cdot\{\tilde{h}\otimes\varphi_1^j\otimes\cdots\otimes\varphi_k^j \pm \varphi_1^j\otimes\tilde{h}\otimes\cdots\otimes\varphi_k^j + \varphi_1^j\otimes\varphi_2^j\otimes\tilde{h}\otimes\cdots\otimes\varphi_k^j\pm\cdots\} =$$

$$= \sum_j c_j\big\{\langle\tilde{h},g\rangle\varphi_1^j\otimes\cdots\otimes\varphi_k^j + \langle\varphi_1^j,g\rangle(\pm\tilde{h}\otimes\cdots\otimes\varphi_k^j + \varphi_2^j\otimes\tilde{h}\otimes\cdots\otimes\varphi_k^j\pm\cdots)\big\} =$$
$$= \langle\tilde{h},g\rangle\varphi \pm \sum_j c_j\langle\varphi_1^j,g\rangle\cdot k\cdot P_{s|a}(\tilde{h}\otimes\varphi_2^j\otimes\cdots\otimes\varphi_k^j) =$$
$$= \big((\tilde{h},\tilde{g})_H \pm a^*(h)a(g)\big)\varphi \implies \big[a(g),a^*(h)\big]_\pm = (g,h)_{H'}\cdot\mathrm{Id}_{F_{s|a}}.$$

Weiters ist klar, dass $E_1 = {}_{\mathbb{C}}\big\langle\{a^*(g_1)\cdots a^*(g_k)\Omega : k\in\mathbb{N}_0,\ g_j\in H'\}\big\rangle$.
Somit ist dies die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte Darstellung der KKR über H'. Man beachte, dass im antisymmetrischen Fall $a(g)$ sogar ein beschränkter Operator ist, da
$\big\|a^*(g)\varphi\big\|_{F_a}^2 + \big\|a(g)\varphi\big\|_{F_a}^2 = \Big(\big[a(g),a^*(g)\big]_+\varphi,\varphi\Big)_{F_a} = \|g\|_{H'}^2\cdot\|\varphi\|_{F_a}^2$ für $\varphi\in E_1 \implies$
$\big\|a(g)\big\|_{L(F_a)} \le \|g\|_{H'}$.

D) Das freie, neutrale Skalarfeld

Nun sei H wie in Kap. 11 B), $j : H\hookrightarrow\mathcal{S}'(M), F_s$ der symmetrische Fockraum. Es ist $\Phi(\varphi)$ für $\varphi\in\mathcal{S}(M)$ zu definieren.

$$j^T : \mathcal{S}(M)\longrightarrow H',\ \Phi(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j^T\varphi) + a^*(j^T\varphi)\big).$$

$\Phi(\varphi)$ sollte $\mathbb{C}$-linear sein, ist dies so aber noch nicht, da a^* antilinear ist. Daher wird $\Phi(\varphi)$ wie oben nur für reellwertiges φ definiert und allgemein durch

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j^T\varphi) + a^*(j^T\overline{\varphi})\big).$$

Übergang in den Impulsraum: $\overline{\mathcal{F}} : H\xrightarrow{\sim}\tilde{H}$ induziert $\overline{\mathcal{F}} : F_s\xrightarrow{\sim}\tilde{F}_s$, wobei $\tilde{F}_0$ der symmetrische Fockraum zu $\tilde{H}$ ist. Auf $\tilde{F}_s$ erhalten wir $\tilde{\Phi}$ durch $\tilde{\Phi}(\varphi) := \overline{\mathcal{F}}\Phi(\varphi)\overline{\mathcal{F}}^{-1}$ und ebenso $\tilde{a},\tilde{a}^*$.

Für $f = z(y^{(1)},\cdots,y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)})\in\tilde{H}^k$ gilt:
$\tilde{a}(\varphi)(f) = \overline{\mathcal{F}}a(j^T\varphi)\overline{\mathcal{F}}^{-1}f = \sqrt{k}\,\overline{\mathcal{F}}_{x^{(1)},\cdots,x^{(k-1)}}\Big(\big\langle\varphi(y),\overline{\mathcal{F}}^{-1}_{y,y^{(1)},\cdots,y^{(k-1)}}z\,\mathrm{d}\mu\big\rangle\Big)$

$$= \frac{\sqrt{k}}{(2\pi)^4} \left\langle \mathcal{F}\varphi(y), z(y, y^{(1)}, \cdots, y^{(k-1)})\, \mathrm{d}\mu \right\rangle$$
$$= \frac{\sqrt{k}}{(2\pi)^4} \int \hat{\varphi}(y) z(y, y^{(1)}, \cdots, y^{(k-1)})\, \mathrm{d}\mu(y) \cdot \mathrm{d}\mu(y^{(1)}) \cdots \mathrm{d}\mu(y^{(k-1)}),\ \hat{\varphi}(y) := \mathcal{F}\varphi(y).$$

Wenn a_1, a_1^* wie in C) die Darstellung der $-$KKR auf $\tilde{F}_s$ ist, so ist also

$$\tilde{a}(\varphi) = (2\pi)^{-4} a_1(\mathrm{kan}\,\hat{\varphi}),$$

wobei

$$\mathrm{kan} : \mathcal{S}(V') \longrightarrow \tilde{H}' : \psi \longmapsto \left(f\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \int \psi(y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \right).$$

Daher ist $\tilde{a}^*(\overline{\varphi}) = (2\pi)^{-4} a_1^*(\mathrm{kan}\hat{\overline{\varphi}})$; $\hat{\overline{\varphi}} = \overline{\hat{\varphi}(-y)}$; für $f \in \tilde{H}^k$ ist $a_1^*(g)f = P_s(\tilde{g} \otimes f)$, wobei $\sim: \tilde{H}' \underset{\text{antilin.}}{\xrightarrow{\sim}} \tilde{H}$. Insbesondere gilt für $g = \mathrm{kan}\,\hat{\overline{\varphi}}$, dass $\tilde{g} = \hat{\varphi}(-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$.

Insgesamt ergibt sich:
Es sei $f = \big(z_k(y^{(1)}, \cdots, y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y^{(1)}) \cdots \mathrm{d}\mu(y^{(k)})\big)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \tilde{F}_s,\ \varphi \in \mathcal{S}(M)$. Dann ist

$$\big(\tilde{\Phi}(\varphi) f\big)_k(y^{(1)}, \cdots, y^{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,(2\pi)^4} \Big\{ \sqrt{k+1} \int \hat{\varphi}(y) z_{k+1}(y, y^{(1)}, \cdots, y^{(k)})\, \mathrm{d}\mu(y)$$

$$+ \sqrt{k}\, P_s\big(\hat{\varphi}(-y^{(1)}) z_{k-1}(y^{(2)}, \cdots, y^{(k)})\big) \Big\} \mathrm{d}\mu(y^{(1)}) \cdots \mathrm{d}\mu(y^{(k)}),$$

wobei $P_s\big(\hat{\varphi}(-y^{(1)}) z_{k-1}(y^{(2)}, \cdots, y^{(k)})\big) = \frac{1}{k} \big[\hat{\varphi}(-y^{(1)}) z_{k-1}(y^{(2)}, \cdots, y^{(k)}) + \hat{\varphi}(-y^{(2)}) \cdot$
$\cdot z_{k-1}(y^{(1)}, y^{(3)}, \cdots, y^{(k)}) + \cdots + \hat{\varphi}(-y^{(k)}) z_{k-1}(y^{(1)}, \cdots, y^{(k-1)})\big]$.

Eigentlich ist $\tilde{\Phi}(\varphi)$ nach C) auf E_1 definiert, es ist jedoch offenbar auf $E \subset \tilde{F}_s$ (definiert im Beweis des Satzes in B) in gleicher Weise definierbar.

Satz 14.4 Axiom 6 ist erfüllt.

Beweis.
a) folgt aus $\Phi^*(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(a(j^T \overline{\varphi}) + a^*\big(j^T \varphi\big)\big) = \Phi(\overline{\varphi})$.
b) $f_{(1)}, f_{(2)} \in E$. Zu zeigen ist z.B. (im Impulsraum), dass

$$\mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1} \int \hat{\varphi}(y) z_{(1),k+1}(y, y^{(1)}, \cdots, y^{(k)}) \cdot$$

$$\cdot\,\overline{z_{(2),k}(y^{(1)},\cdots,y^{(k)})}\,\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)})$$

stetig ist. Die rechte Seite lässt sich durch die L^2-Norm von φ und die Normen $p_n(f_{(1)}), p_n(f_{(2)})$ von S. 184 abschätzen. Ähnlich für den anderen Teil von $\tilde{\Phi}(\varphi)$.

c) Wieder im Ortsraum soll die Poincaré-Invarianz von $a(j^T\varphi)$ nachgeprüft werden. $\Lambda = (a, A) \in P_+^\uparrow$, $\varphi \in \mathcal{S}(M)$, oEdA $f = T_1 \otimes \cdots \otimes T_k \in H^k$. Dann ist $U(\Lambda)a\big(j^T\varphi(\Lambda x)\big)U(\Lambda)^{-1}f = a(j^T\varphi)f$ zu zeigen.

$U(\Lambda)a\big(j^T\varphi(\Lambda x)\big)U(\Lambda)^{-1}f = U(\Lambda)a\big(j^T\varphi(\Lambda x)\big)T_1(\Lambda x)\otimes\cdots\otimes T_k(\Lambda x)$
$= U(\Lambda)\,{}_H\big\langle T_1(\Lambda, x), j^T\varphi(\Lambda x)\big\rangle_{H'}\cdot T_2(\Lambda x)\otimes\cdots\otimes T_k(\Lambda x) =$
$= {}_{\mathcal{S}}\big\langle\varphi(\Lambda x), T_1(\Lambda x)\big\rangle_{\mathcal{S}'}T_2\otimes\cdots\otimes T_k = \langle\varphi, T_1\rangle T_2\otimes\cdots\otimes T_k = a(j^T\varphi)f.$ □

Bemerkung $\Phi(\varphi)$ ist für reellwertiges φ sogar wesentlich selbstadjungiert nach Th. X.41, Reed-Simon. Weiters gilt
$\Phi\big((\Box + m^2)\varphi\big) = 0$, da $\big(j^T(\Box + m^2)\varphi\big)(T) = \big\langle\varphi, (\Box + m^2)T\big\rangle = 0$ für $T \in H$.

Satz 14.5 Axiom 7 ist erfüllt.

Beweis.
$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(M) \implies \big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big] = \frac{1}{2}\Big(\big[a(j^T\varphi), a^*(j^T\overline{\psi})\big]_- + \big[a^*(j^T\overline{\varphi}), a(j^T\psi)\big]_-\Big)$

$= \frac{1}{2}\big((j^T\varphi, j^T\overline{\psi})_{H'} - (j^T\psi, j^T\overline{\varphi})_{H'}\big)\cdot\mathrm{Id}_{F_s}$

$= \frac{1}{2}\Big(\big\langle\varphi(x)\psi(y), K\big\rangle - \big\langle\psi(x)\varphi(y), K\big\rangle\Big)\cdot\mathrm{Id}$

$= \frac{1}{2}\langle\check{\varphi} * \psi - \check{\psi} * \varphi, S\rangle\cdot\mathrm{Id}$, wobei $K \in \mathcal{D}'(M\times M)$, $S \in \mathcal{D}'(V)$ wie in S. 142 ff.

Also: $\big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big] = \langle\check{\varphi} * \psi, \Delta\rangle$, $\Delta := \frac{1}{2}(S - \check{S})$ heißt *Kommutatorfunktion*.
$\Delta \in \mathcal{S}'(V)$ ist durch $\Delta = \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}}\left(\mathrm{sign}(y_0)\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\sqrt{m^2 + \vec{y}^2}}\right)$ gegeben, wenn nach S. 144 $S = \overline{\mathcal{F}}\mu$. Δ ist offenbar ungerade und ist Lorentz-invariant, da S es ist. Aufgrund der Lorentz-Invarianz lässt sich Δ in $\big\{[x, x] < 0\big\}$ so darstellen (Methée):

$\exists D \in \mathcal{D}'\big((-\infty,0)\big) : \forall \varphi \in \mathcal{D}\Big(\big\{x : [x,x] < 0\big\}\Big) :$

$$\langle \varphi, \Delta \rangle = \left\langle \int\limits_{[x,x]=t} \varphi, D_t \right\rangle, \qquad \text{wobei}$$

$$\int\limits_{[x,x]=t} \varphi := \iiint\limits_{\substack{|\vec{x}|^2 > -t \\ x^0 = \sqrt{\vec{x}^{\,2}+t}}} \frac{\big(\varphi(x) + \varphi(-x)\big)}{\sqrt{\vec{x}^{\,2}+t}}\, \mathrm{d}\vec{x}.$$

Aus der Schiefsymmetrie von Δ folgt daher $\mathrm{supp}\Delta \subset \big\{x : [x,x] \geq 0\big\}$.
Wenn nun φ, ψ wie in Axiom 7 sind, so ist $\mathrm{supp}(\check{\varphi} * \psi) =$
$= \mathrm{supp}\left(\int \varphi(\xi - x)\psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi\right) \subset \mathrm{supp}\psi - \mathrm{supp}\varphi \subset \big\{x : [x,x] \leq 0\big\} \implies$
$\implies \langle \check{\varphi} * \psi, \Delta \rangle = 0.$ □

Bemerkung Auch Axiom 8 ist erfüllt, da

$$\mathbb{C}\Big\langle \big\{\tilde{\Phi}(\varphi_1)\cdots\tilde{\Phi}(\varphi_k)\Omega : k \in \mathbb{N},\ \varphi_j \in \mathcal{S}(M)\big\}\Big\rangle = \text{ (Induktion) } =$$

$$\mathbb{C}\Big\langle \big\{\tilde{a}^*(\varphi_1)\cdots\tilde{a}^*(\varphi_k)\Omega : k \in \mathbb{N}_0,\ \varphi_j \in \mathcal{S}(M)\big\}\Big\rangle = E \cap E_1 \subset \tilde{F}_s \text{ dicht.}$$

E) Ein freies Feld mit beliebigem Spin

Es liegt nahe H wie in Kap. 13 E) zu wählen, $j : H \hookrightarrow \mathcal{S}'(M; W)$, $F_{s|a}$ zugehöriger Fockraum, $\Phi(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j^T\varphi) + a^*(j^T\overline{\varphi})\big)$ für $\varphi \in \mathcal{S}(M; W')$.
$\overline{\varphi}$ ist jedoch von der Wahl einer Basis w_j in W' abhängig, vgl. S. 174. Auch K, S, P, G hängen von der Wahl der w_j ab, während das Endergebnis, die Hilberträume $H, \tilde{H}$, natürlich davon unabhängig ist. Aus dem expliziten Ausdruck für $\tilde{H}$ in S. 176 sieht man, dass $H, \tilde{H}$ eindeutig durch die Aktion $\mathcal{D}^{(J)}$ von $\mathcal{L}_0$ auf W und die Masse m bestimmt sind. (Der Ausdruck $\big\langle \varphi(x)\overline{\psi(y)}, K(x,y)\big\rangle = (j^T\varphi, j^T\psi)_{H'}$ hängt also nicht von der Wahl der Konjugation $-$ ab.) Ebenso eindeutig sollte sich Φ ergeben. Ein weiteres Indiz dafür, dass die obige Definition nicht zielführend ist, liefert die Untersuchung des Lokalitätsaxioms. Es ergäbe sich wie oben, dass $\big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big]_\pm = \frac{1}{2}\langle \check{\varphi} * \psi, S \pm \tilde{\check{S}}\rangle$, wobei

$\sim: W \otimes W \longrightarrow W \otimes W : u \otimes v \longmapsto v \otimes u;\ S = \overline{\mathcal{F}}\big(G(y)\,\mathrm{d}\mu\big).$

In Koordinaten wie in S. 176 ist
$G(y)(z,w) = \big(\mathcal{D}^{(J)T}(A_y A_y^*)z|\overline{w}\big) = \Big(\mathcal{D}^{(J)T}\big(\frac{F(x)}{m}\big)z|\overline{w}\Big)$, d.h.
$G(y) = \big(\frac{F(x)}{m}\big)^{\alpha_1\dot\beta_1}\cdots\big(\frac{F(x)}{m}\big)^{\alpha_n\dot\beta_n},\ \mathrm{kan}\,x = y.$
Folglich ist $S(x) = \big(\frac{F(-\mathrm{i}\partial)}{m}\big)^{\alpha_1\dot\beta_1}\cdots\big(\frac{F(-\mathrm{i}\partial}{m}\big)^{\alpha_n\dot\beta_n}S_0,\ S_0 = \overline{\mathcal{F}}\,\mathrm{d}\mu,\ \partial^\lambda = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} = g^{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,.$

Leider erfüllt der Differentialoperator $Q(\partial)$ vor S_0 nicht $\tilde{\tilde{Q}} = \pm Q$, denn $\left(\dfrac{F(-\mathrm{i}\partial)}{m}\right)^T$ ist nicht proportional zu $\dfrac{F(-\mathrm{i}\partial)}{m}$, da $\sigma_2^T = -\sigma_2,\ \sigma_\alpha^T = \sigma_\alpha,\ \alpha \neq 2$.
Es ergibt sich jedoch die vom Koordinatensystem unabhängige Aussage, dass sich S in der Form $Q(\partial)S_0$ schreiben lässt, wobei $Q(\partial)$ ein homogener Differentialoperator vom Grad $n = 2J$ mit Koeffizienten in $W \otimes W$ ist. $Q(\partial)$ hängt ebenso wie S von der Wahl der Basis w_j ab. Die Funktion $Q(\partial)(\check\varphi * \overline{\psi}) \in \mathcal{S}(V)$ für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(V; W')$ ist jedoch koordinatenunabhängig, da $(j^T\varphi, j^T\psi)_{H'} = \langle\check\varphi * \overline{\psi}, S\rangle = (-1)^n\ {}_{\mathcal{S}(V)}\big\langle Q(\partial)(\check\varphi * \overline{\psi}), S_0\big\rangle_{\mathcal{S}'(V)}$.
Ebenso invariant definiert ist daher die antilineare Abbildung
$t : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow \mathcal{S}(M; W) : \psi \longmapsto Q(\partial)\overline{\psi}$, wobei
$Q(\partial) = \sum\limits_{|\alpha|=n} c_\alpha\partial^\alpha,\ c_\alpha \in W \otimes W,\ c_\alpha : W' \longrightarrow W = W''$

$$f \longmapsto \big(g \longmapsto \langle c_\alpha, g \otimes f\rangle\big).$$

Denn $(j^T\varphi, j^T\psi)_{H'} = (-1)^n\ {}_{\mathcal{S}(V)}\Big\langle\ {}_{W'}\big\langle\varphi(u-x), t(\psi)(u)\big\rangle_W, S_0\Big\rangle_{\mathcal{S}'(V)}$.
Eigentlich bräuchten wir eine antilineare Abbildung $\mathcal{S}(M; W') \longrightarrow \mathcal{S}(M; W')$. Das erreichen wir so: $\mathcal{L}_0$ operiert auf W vermöge $\mathcal{D}^{(J)} = \varrho$ und damit kanonisch (dual) auf $W' : \varrho' : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W') : \Lambda \longmapsto \varrho(\Lambda)^{T-1}$. Wie wir wissen (S. 157), existiert bis auf Äquivalenz nur *eine* irreduzible komplexe Darstellung von $\mathcal{L}_0$ auf einem Vektorraum der Dimension n. (ϱ' ist auch irreduzibel, denn ließe es $0 \neq W_1' \not\leq W'$ invariant, so ließe $\varrho\ W_1'^{\perp}$ invariant.) Folglich existiert $U : W \xrightarrow{\sim} W'$ mit $U\varrho(\Lambda)w = \varrho'(\Lambda)Uw$ für $w \in W, \Lambda \in \mathcal{L}_0$. ($U$ ist eindeutig bis auf skalare Vielfache nach dem Schur'schen Lemma.) Damit setzen wir

$$\Phi(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j^T\varphi) + a^*(j^T U t\varphi)\big).$$

Da alles invariant definiert ist, ist Φ Poincaré-invariant.

Überprüfung der Lokalität

Vorläufig sei $\Phi(\varphi)$ auf F_s bzw. F_a definiert und entsprechend wird $\big[\Phi(\varphi),\Phi(\psi)\big]_{-\text{ bzw. }+}$ untersucht.

$$\big[\Phi(\varphi),\Phi(\psi)\big]_\pm = \frac{1}{2}\big((j^T\varphi, j^TUt\psi)_{H'} \pm (j^T\psi, j^TUt\varphi)_{H'}\big)$$

$$= \frac{1}{2}\langle \check\varphi * \overline{Ut\psi} + \check\psi * \overline{Ut\varphi}, S\rangle \quad (\cdot \mathrm{Id}_E \text{ genau genommen}).$$

In der Standarddarstellung (S. 176) gilt:
$\alpha = \alpha_1\cdots\alpha_n,\ \beta = \beta_1\cdots\beta_n;\ (t\varphi)^\alpha = \dfrac{1}{m^n}F(-\mathrm{i}\partial)^{\alpha\dot\beta}\overline{\varphi_{\dot\beta}},\ (U\varphi)_\alpha = \zeta_{\alpha\beta}\varphi^\beta$, wobei
$\zeta = \mathrm{i}\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, denn für $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ gilt
$A^{-1T} = \begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix} = \zeta A\zeta^{-1}$. ($\zeta_{\alpha\beta} := \zeta_{\alpha_1\beta_1}\cdots\zeta_{\alpha_n\beta_n}$ etc.) Daher ist
$(\check\varphi * \overline{Ut\psi}\,)_{\alpha\beta} = \check\varphi_\alpha * \zeta_{\dot\beta\dot\gamma}\dfrac{1}{m^n}F(-\mathrm{i}\partial)^{\dot\gamma\delta}\,\psi_\delta \implies$
$\implies \langle \check\varphi * \overline{Ut\psi}, S\rangle = (-1)^n\big\langle \frac{1}{m^n}F(-\mathrm{i}\partial)^{\alpha\dot\beta}\check\varphi_\alpha * \zeta_{\dot\beta\dot\gamma}\frac{1}{m^n}(-1)^nF(-\mathrm{i}\partial)^{\delta\dot\gamma}\cdot\psi_\delta, S_0\big\rangle,$
$F(p)^{\alpha\dot\beta}\zeta_{\dot\beta\dot\gamma} = \big(\det F(p)\big)^{n/2}\cdot\Big(\underbrace{\dfrac{F(p)}{\sqrt{\det F(p)}}}_{\in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})}\Big)^{\alpha\dot\beta}\zeta_{\dot\beta\dot\gamma} = \big(\det F(p)\big)^n\cdot\zeta^{\alpha\beta}F(p)^{-1T}{}_{\beta\dot\gamma}$

$$\implies \langle \check\varphi * \overline{Ut\psi}, S\rangle = \left\langle \left(\frac{\det F(-\mathrm{i}\partial)}{m^2}\right)^n \check\varphi_\alpha\zeta^{\alpha\beta} * \psi_\beta, S_0\right\rangle;$$

$\det F(-\mathrm{i}\partial) = -\Box \implies$
$\big[\Phi(\varphi),\Phi(\psi)\big]_\pm = \dfrac{1}{2}\left\langle \check\varphi_\alpha\zeta^{\alpha\beta} * \psi_\beta \pm \check\psi_\alpha\zeta^{\alpha\beta} * \varphi_\beta, \big(-\frac{\Box}{m^2}\big)^n S_0\right\rangle$
$= \dfrac{1}{2}\Big\langle \check\varphi_\alpha\zeta^{\alpha\beta}\psi_\beta, S_0 \pm (-1)^n\check S_0\Big\rangle$ wegen $\zeta^{\alpha\beta} = (-1)^n\zeta^{\beta\alpha}$ und $-\Box S_0 = m^2S_0$, da $\big([y,y]-m^2\big)\,\mathrm{d}\mu = 0$.
Invariant geschrieben erhalten wir

$$\big[(\Phi(\varphi),\Phi(\psi)\big]_\pm = (-1)^n\Big\langle \check\varphi * U^{-1}\psi, \frac{1}{2}\big(S_0 \pm (-1)^n\check S_0\Big\rangle.$$

Wir wissen bereits, dass $S_0 - \check S_0$ in $[x,x] < 0$ verschwindet. $S_0 + \check S_0$ verschwindet dort nicht, da

$$S_0(x) = \overline{\mathcal{F}}_y\left(\frac{\mathrm{d}\vec y}{\sqrt{m^2+\vec y^2}}\right) = \frac{4\pi m}{\sqrt{[-x,x]}}\,K_1\big(m\sqrt{[-x,x]}\,\big) \text{ für } [x,x] < 0.$$

Folglich ist das betrachtete Feld lokal genau dann, wenn mit $(-1)^{n+1}$ gequantelt wird, wobei $n = 2J,\ J = \text{Spin}$. Ein erster Hinweis auf das Spin-Statistik-Theorem.

(Eigentlich ist für die letzte Aussage noch nachzurechnen, dass $\big[\Phi(\varphi),\Phi^*(\psi)\big]_\pm = \Big\langle \check\varphi * t\psi, \frac{1}{2}\big(\pm\check S_0 + (-1)^n S_0\big)\Big\rangle$. Dadurch ist U bis auf $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau},\ \tau\in\mathbb{R}$, festgelegt.)

Explizite Realisierung von Φ

$\tilde F_{s|a}$ sei je nach Spin der richtige Impuls-Fockraum, $\tilde\Phi(\varphi) = \overline{\mathcal{F}}\Phi(\varphi)\overline{\mathcal{F}}^{-1}$,
$f = \big(z_k^{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(k)}}(y^{(1)},\cdots,y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \tilde F_{s|a},\ \alpha^{(1)} = \alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_n^{(1)}$,
vgl. S. 183, $\varphi_\alpha(x)\in\mathcal{S}(M;W')$.
Ebenso wie in S. 188 gilt

$$\big(\tilde a(\varphi)f\big)_k^{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(k)}}(y^{(1)},\cdots,y^{(k)}) =$$

$$\frac{\sqrt{k+1}}{(2\pi)^4}\left[\int \hat\varphi_\alpha(y) z_{k+1}^{\alpha\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(k)}}(y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)})\cdot\mathrm{d}\mu(y)\right]\mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)}).$$

Etwas schwieriger ist der 2. Teil von $\tilde\Phi$ zu berechnen.
$\tilde a^*(\varphi) = a_1^*(\mathrm{kan}\,\hat\varphi)\cdot(2\pi)^{-4}$ (siehe S. 188), wobei
$\mathrm{kan}: \mathcal{S}(V';W') \longrightarrow \tilde H' : \psi_\alpha(y) \longmapsto \left(f^\alpha(y)\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \int \psi_\alpha(y) f^\alpha(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)$
$\sim: \tilde H' \underset{\text{antilin.}}{\longrightarrow} \tilde H : \mathrm{kan}\,\hat\varphi \longmapsto g^\alpha(y)\,\mathrm{d}\mu$, wobei (vgl. S. 186):
$\int \hat\varphi_\alpha(y) f^\alpha(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \;=\; (f\,\mathrm{d}\mu, g\,\mathrm{d}\mu)_{\tilde H} \;=\; \int B(y)_{\dot\alpha\beta} f^\beta(y)\overline{g^{\dot\alpha}(y)}\,\mathrm{d}\mu(y)$ nach S. 176
$\Longrightarrow\ B(y)_{\dot\beta\alpha}\overline{g^{\dot\beta}(y)} = \hat\varphi_\alpha,\ g^\alpha(y) = \big(\overline{B(y)}^{T-1}\big)^{\alpha\dot\beta}\overline{\hat\varphi}_{\dot\beta} = B(y)^{-1\alpha\dot\beta}\overline{\hat\varphi}_{\dot\beta}$
$= \left(\frac{F(y)}{m}\right)^{\alpha\dot\beta}\overline{\hat\varphi}_{\dot\beta} \ \Longrightarrow\ \big(\tilde a^*(\varphi)f\big)_k = (2\pi)^{-4}P_{s|a}(\widetilde{\mathrm{kan}\,\hat\varphi}\otimes f_{k-1}) =$
$= P_{s|a}\left(\frac{F(y^{(1)})^{\alpha^{(1)}\dot\beta}}{m}\,\overline{\hat\varphi}_{\dot\beta}(y^{(1)}) z_{k-1}^{\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(k)}}(y^{(2)},\cdots,y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y)\right)$ mit
$\mathrm{d}\mu(y) := \mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)})$.
Wir haben nicht $\tilde a^*(\varphi)$, sondern $\tilde a^*(Ut\varphi)$ zu betrachten;
$(Ut\varphi)\hat{}_\alpha = \zeta_{\alpha\beta}\frac{1}{m}F(y)^{\beta\dot\gamma}\hat{\overline{\varphi}}_{\dot\gamma} \ \Longrightarrow\ \big(\tilde a^*(Ut\varphi)f\big)_k =$
$= (2\pi)^{-4}P_{s|a}\left(\frac{1}{m}F(y^{(1)})^{\alpha^{(1)}\dot\beta}\zeta_{\dot\beta\dot\gamma}\frac{1}{m}\overline{F(y^{(1)})^{\dot\gamma\delta}}\cdot\hat\varphi_\delta(-y^{(1)})\cdot z_{k-1}^{\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(k)}}(y^{(2)},\cdots,y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y)\right) =$
$= (2\pi)^{-4}P_{s|a}\big(\zeta^{\alpha^{(1)}\beta}\hat\varphi_\beta(-y^{(1)}) z_{k-1}^{\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(k)}})(y^{(2)},\cdots,y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y)\big).$

Das Endergebnis ist daher:

$$\big(\tilde\Phi(\varphi)f\big)_k = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^4}\left\{\sqrt{k+1}\int \hat\varphi_\alpha(y) z_{k+1}^{\alpha\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(k)}}(y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y) +\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{2J(j+1)}\zeta^{\alpha^{(j)}\beta}\hat{\varphi}_\beta(-y^{(j)})\cdot z_{k-1}^{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(j-1)}\alpha^{(j+1)}\cdots\alpha^{(k)}}(y^{(1)},\cdots,y^{(j-1)},y^{(j+1)},\cdots,y^{(k)})\Big\}.$$

$\mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)})$, $J=$ Spin, vgl. Streater-Wightman, p. 103.

F) Freie Felder mit Ladung

Ausgehend von der Vorstellung, dass ein Teilchen mit Zustandsraum H wie in Kap. 11 B) auch eine bestimmte Ladung tragen kann, bilden wir $H_c := H_+ \oplus H_-$, wobei $H_\pm$ beide wie in Kap. 11 B) zur Masse m, $j_\pm : H_\pm \hookrightarrow \mathcal{S}'(M)$. Für $x \in H_\pm \setminus 0$ wird $\mathbb{C}x$ als Einteilchenzustand mit Ladung $\pm e$ angesehen. Allerdings tritt nun eine zusätzliche Schwierigkeit auf: Die in einem Zustand gemessene Ladung ist bei jeder Messung die gleiche und verändert sich durch die Messung nicht. Dies ist eine experimentelle Beobachtung.
Als Zustandsraum ist daher $Z = \big\{\mathbb{C}x : x \in (H_+ \cup H_-)\setminus 0\big\}$ anzusehen. Als Observable betrachtet man alle mit den Projektoren $P_\pm : H_c \longrightarrow H_\pm$ vertauschbaren Operatoren in Lsa, d.h. solche, die Zustände in Zustände abbilden. $P_\pm$ nennt man *Superauswahlregeln*. F_s sei der symmetrische Fockraum über H_c, $E \subset F_s$ der nukleare Raum, dessen Fourierbild in B) angegeben wurde.

$$\Phi : \mathcal{S}(M) \longrightarrow L(E,E) : \varphi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j_+^T\varphi) + a^*(j_-^T\overline{\varphi})\big).$$

Dann gilt $\big[\Phi(\varphi),\Phi(\psi)\big] = 0$ (da $H_+ \perp H_-$) und $\big[\Phi(\varphi),\Phi^*(\psi)\big] =$
$= \frac{1}{2}\big((j_+^T\varphi, j_+^T\psi) - (j_-^T\overline{\psi}, j_-^T\overline{\varphi})\big) = \frac{1}{2}\langle\check{\varphi} * \overline{\psi}, S_0 - \check{S}_0\rangle$ und $\big[\Phi^*(\varphi),\Phi^*(\psi)\big]_- = 0.$

Man beachte, dass wir als Zustandsraum über F_s nicht $\{\mathbb{C}x : x \in F_s \setminus 0\}$ ansehen können, sondern eine kleinere Menge. Es gilt $F_s = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} F_{(k)}$, wobei $F_{(k)}$ die „kohärenten“ Teilräume der Ladung ke sind, z. B. ist $F_{(2)} \cap H_c^2 = P_s(H_+ \otimes H_+)$. Genauer: Wenn $\{\varphi_n^+\}$, $\{\varphi_n^-\}$ ONBen in $H_\pm$ sind, so ist $F_{(k)}$ der Abschluss von $_{\mathbb{C}}\Big\langle\big\{P_s(\varphi_{n_1}^+ \otimes\cdots\otimes\varphi_{n_j}^+\otimes\varphi_{m_1}^-\otimes\cdots\otimes\varphi_{m_l}^-) : j-l=k\big\}\Big\rangle$. (Bei $F_{(0)}$ ist noch $\mathbb{C}\Omega$ dazuzunehmen). Der Zustandsraum ist $\{\mathbb{C}x : x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} F_{(k)} \setminus 0\}$.
$\Phi(\varphi) : E\cap F_{(k)} \longrightarrow E\cap F_{(k-1)}$, $\Phi^*(\varphi) : E\cap F_{(k)} \longrightarrow E\cap F_{(k+1)}$, d.h. Φ^* erhöht, Φ verringert die Ladung. Dementsprechend sind $\Phi(\varphi),\Phi^*(\varphi)$ keine Observable und nur Produkte von Feldoperatoren, in denen Φ,Φ^* als Faktoren gleich oft auftreten, sind beobachtbar. Ebenso lässt sich ein freies, geladenes Spinorfeld definieren. $j_\pm : H_\pm \hookrightarrow \mathcal{S}'(M;W)$ seien wie in Kap. 13 E) Einteilchen-Zustandsräume mit Spin

J, Masse m, $H_c := H_+ \oplus H_-$, $F_{s|a}$ je nach Spin der entsprechende Fockraum über H_c, $\Phi : \mathcal{S}(M;W') \longrightarrow L(E,E) : \varphi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j_+^T\varphi) + a^*(j_-^T U t\varphi)\big)$, U, t wie in S. 191. Wie oben gilt dann $\big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big]_\pm = 0$,

$\big[\Phi(\varphi), \Phi^*(\psi)\big]_\pm = \frac{1}{2}\big((j_+^T\varphi, j_+^T\psi)_{H'_+} \pm (j_-^T U t\psi, j_-^T U t\varphi)_{H'_-}\big) =$

$= \big\langle \check{\varphi} * t\psi, \frac{1}{2}\big(\pm\check{S}_0 + (-1)^n S_0\big)\big\rangle$, $n = 2J$, vgl. S. 193.

G) Bemerkung zu den Superauswahlregeln

Die oben angeführte Darstellung des Zustandsraumes $Z = \big\{\mathbb{C}x : x \in (H_+ \cup H_-) \setminus 0\big\}$ ist offenbar nicht mit den Axiomen 1 und 2, S. 140, verträglich. Man könnte sich zunächst auf den Standpunkt stellen, dass unter allen Zuständen $\mathbb{C}x, x \in H_+ \oplus H_- \setminus 0$, durch physikalische Überlegungen eine Untermenge von „beobachtbaren Zuständen“ ausgesondert wird. Wir kommen jedoch für halbzahligen Spin (d.h. $2J$ ungerade) dann mit Axiom 3, S. 151 in Konflikt. Denn wenn $F_a = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_a^n$ der antisymmetrische Fockraum über H wie in S. 176 mit ungeradem $2J$ ist (man könnte auch den symmetrischen Fockraum nehmen, aber dann gibt es kein Feld darauf), so gilt für $T = (T_{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0} \in F_a$ und die in S. 184 betrachtete Darstellung $\varrho : P_0 \longrightarrow L(F_a)$, dass $\varrho(-I)T = \big((-1)^k T_{(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$, wobei $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \subset P_0$.

Für $\Lambda = (0, I) \in P_+^\uparrow$ ist $\mathbb{T}^{-1}(\Lambda) = \big\{(0,I),(0,-I)\big\} \subset P_0$ und $\mathbb{C}T$, $\mathbb{C}\varrho(-I)T$ sollten nach Axiom 3, S. 151 denselben Zustand darstellen. Das ist nur der Fall, wenn $T \in F_{a+} \cup F_{a-}$, wobei $F_{a+} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_a^{2n}$, $F_{a-} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_a^{2n+1}$. Wir erhalten also eine neue Superauswahlregel, die durch die Projektoren $P_\pm(T) := \frac{1}{2}\big(T_{(k)} \pm (-1)^k T_{(k)}\big)$ gegeben ist. Daher werden Axiom 1 und 2 so abgeändert:

Axiom 1' Die Menge der Zustände ist durch $\mathbb{C}x$, $x \in \bigcup_{i\in I} H_i \setminus 0$ gegeben, wobei $E \subset H = \bigoplus_{i\in I} H_i \subset E'$ ein GRT ist.

Axiom 2' Die Observablen entsprechen *den* Operatoren in $L(H) \cap \mathrm{Lsa}(H,E)$, die mit allen Projektoren $P_i : H \longrightarrow H_i$ vertauschbar sind.

Man beachte, dass dann auch im neutralen Fall für halbzahligen Spin $\Phi(\varphi) + \Phi^*(\varphi)$ keine Observable ist, da $\Phi(\varphi) : F_{a\pm} \longrightarrow F_{a\mp}$, $\Phi(\varphi)\Phi^*(\varphi)$ jedoch schon.

Kapitel 15

Das Dirac-Feld

P.A.M. Dirac *Die Prinzipien der Quantenmechanik*

E.M. Rose *Relativistische Elektronentheorie*

Bjorken-Drell *Relativistische Quantenmechanik*

A) Der 1-Teilchen-Zustandsraum nach Dirac

Bei der Ermittlung der 1-Teilchen-Zustandsräume nach L. Schwartz (Kap. 13 E)) wurde ohne Erklärung angenommen, dass $\mathcal{L}_0$ auf W vermöge einer Darstellung $\mathcal{D}^{(J,0)}$ operiert. Dies ergab schon alle unitären Darstellungen von P_0 für positive Masse (Satz von Wigner). Wenn wir mit einer Darstellung $\mathcal{D}^{(J,K)}$ starten, tritt in S. 175 eine Schwierigkeit auf: $G(y)$ ist nicht (bis auf Vielfache) eindeutig, da SU_2 dann nicht irreduzibel auf W operiert, es sei denn $K = 0$ oder $J = 0$. Die Darstellung $\mathcal{D}^{(0,K)}$ führt genau wie in S. 176 in Standardkoordinaten auf

$$\tilde{H}^{\bullet} = \left\{ U = w^{\dot{\alpha}_1 \cdots \dot{\alpha}_n}(y)\,\mathrm{d}\mu : \|U\|^2 = \int \overline{B(y)}_{\alpha\dot{\beta}} w^{\dot{\beta}} \overline{w^{\alpha}}\,\mathrm{d}\mu(y) < \infty \right\},$$

$$B(y) = \frac{1}{m} \sum y_\lambda \sigma_\lambda,\ n = 2K.$$

P_0 operiert auf $\tilde{H}^{\bullet}$ so:

$$\varrho : P_0 \longrightarrow L(\tilde{H}^{\bullet}) : \Lambda = (a, A) \longmapsto \Big(w^{\dot{\alpha}}\,\mathrm{d}\mu \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,y\rangle} \overline{A^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}}\, w^{\dot{\beta}} \big(\pi(A)^T y\big)\,\mathrm{d}\mu \Big).$$

In der Tat sind die Darstellungen auf $\tilde{H}$ und auf $\tilde{H}^{\bullet}$ äquivalent für $J = K$:

$$\tilde{H} \simeq \tilde{H}^{\bullet} : w\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \mathcal{D}^{(0,J)}(H_{ya}) \mathcal{D}^{(J,0)}(H_{ya})^{-1} w\,\mathrm{d}\mu,$$

vgl. S. 176 unten. Explizit ergibt sich

$$w^\alpha \,\mathrm{d}\mu \longmapsto D(y)^{\dot\alpha_1}{}_{\beta_1} \cdots D(y)^{\dot\alpha_n}{}_{\beta_n} w^\beta(y)\,\mathrm{d}\mu,$$

wobei

$$D(y) = \frac{1}{m(m+y_0)} \begin{pmatrix} m^2 + my_0 + y_2^2 - \mathrm{i}y_1y_2 & \mathrm{i}y_2(m+y_0+y_3) \\ -\mathrm{i}y_2(m+y_0-y_3) & m^2 + my_0 + y_2^2 - \mathrm{i}y_1y_2 \end{pmatrix},$$

falls ich mich nicht verrechnet habe. Es ist auch $- : \tilde H \longrightarrow \tilde H^{\bullet} : U \longmapsto \overline{U}$ eine (allerdings antilineare) Äquivalenz.
Wir fassen $\tilde H_{\cdot}$ als Teilraum von $\mathcal{S}'(V';W')$ anstelle von $\mathcal{S}'(V';W)$ auf.
Wenn $\varrho : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W)$ die Operation von $\mathcal{L}_0$ auf W ist, so operiert $\mathcal{L}_0$ auf W' dual: $\varrho' : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W') : A \longmapsto \varrho(A^{-1})^T$ und folglich operiert P_0 auf $\tilde H_{\cdot}$ so:

$$P_0 \longrightarrow L(\tilde H_{\cdot}) : \Lambda \longmapsto \Big(w_{\dot\alpha}\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,y\rangle} (\overline{A}^{-1T})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} w_{\dot\beta}\big(\pi(A)^T y\big)\,\mathrm{d}\mu \Big).$$

Eine noch bessere Herleitung dieser (natürlich ebenfalls zu der auf $\tilde H$ äquivalenten) Darstellung ist die folgende: $\mathcal{L}_0$ operiert auch kanonisch auf $\overline{W}' := \{f : W \longrightarrow \mathbb{C}$ antilinear$\}$ vermöge $\dot\varrho' : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(\overline{W}') : A \longmapsto \big(f \longmapsto f \circ \varrho(A)^{-1}\big)$.
Dies ergibt gerade die betrachtete Operation auf $\tilde H_{\cdot}$, denn in Standardkoordinaten gilt:

$W = \mathbb{C}^{2\otimes n}_{\mathrm{sym}},\ \varrho(A)z^\alpha = A^\alpha{}_\beta z^\beta,\ W' \cong \mathbb{C}^{2\otimes n}_{\mathrm{sym}} \ni z_\alpha,\ \varrho'(A)z_\alpha = (A^{-1})^\beta{}_\alpha\, z_\beta,$
$\overline{W}' \cong \mathbb{C}^{2\otimes n}_{\mathrm{sym}} \ni z_{\dot\alpha},\ {}_W\langle w^\alpha, z_{\dot\alpha}\rangle_{\overline{W}'} = \overline{w^{\dot\alpha}} z_{\dot\alpha};$

${}_W\langle w, \dot\varrho'(A)z\rangle_{\overline{W}'} \overset{\mathrm{def}}{=} {}_W\langle \varrho(A)^{-1}w, z\rangle_{\overline{W}'} = \big\langle (A^{-1})^\alpha{}_\beta w^\beta, z\big\rangle = \overline{(A^{-1})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}}\ \overline{w^{\dot\beta}}\, z_{\dot\alpha} =$
$\big\langle w, (\overline{A}^{-1})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\, z_{\dot\beta}\big\rangle$, d.h. $\big(\dot\varrho'(A)z\big)_{\dot\alpha} = (\overline{A}^{-1T})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} z_{\dot\beta}$, wie es sein muss.

Anstelle des Hilbertraums H wird nun $H_D := H \oplus H_{\cdot} \subset \mathcal{S}'(M; W \oplus \overline{W}')$ betrachtet, wobei $H, H_{\cdot}$ kanonisch zur Masse m und zu den gegebenen Darstellungen von $\mathcal{L}_0$ auf W und auf $\overline{W}'$ bestimmt sind. (Eine kleine Unbestimmtheit besteht hier noch insofern, als die Skalarprodukte in H und $H_{\cdot}$ nur bis auf einen Faktor bestimmt sind. Diese Faktoren sind so zu wählen, dass die SU_2-invarianten Skalarprodukte I auf W' und auf $(\overline{W}')'$ (vgl. S. 175) dual sind.)

Für $J = \dfrac{1}{2}$ ist H_D der Dirac'sche 1-Teilchen-Zustandsraum. $\tilde H_D \ni U = u(p)\,\mathrm{d}\mu$ heißt **Bispinor** (ab hier wird p anstatt $y \in V'$ geschrieben.) In Standardkoordinaten ist $u(p) = (z^\alpha, w_{\dot\beta})(p)$ und

$$\|U\|^2 = \int \Big[B(p)_{\dot\alpha\beta} z^\beta \overline{z^{\dot\alpha}} + \big(\overline{(B(p)}^{-1T}\big)^{\alpha\dot\beta} w_{\dot\beta} \overline{w}_\alpha \Big]\,\mathrm{d}\mu(p)$$

mit $B(p)_{\dot\alpha\beta} = B(p)_{\dot\alpha_1\beta_1}\cdots B(p)_{\dot\alpha_n\beta_n}$, $B(p) = \frac{1}{m}\sum_{\lambda=0}^{3} p_\lambda\sigma_\lambda$, vgl. S. 176. Wenn wir
$B(p) : W \longrightarrow \overline{W}\,' : z^\beta \longmapsto \big(u^\alpha \longmapsto B(p)_{\dot\alpha\beta} z^\beta \overline{u^{\dot\alpha}}\big)$ und
$\dot B(p) : \overline{W}\,' \longrightarrow \overline{(\,\overline{W}\,')}\,' \cong W : w_{\dot\beta} \longmapsto \big(v_{\dot\alpha} \longmapsto \overline{B(p)}^{-1T\alpha\dot\beta} w_{\dot\beta}\overline{v}_\alpha\big)$ setzen, und weiters
$\hat W := W \oplus \overline{W}\,'$,
$\not p : \hat W \longrightarrow \hat W : (z,w) \longmapsto \big(\dot B(p)w, B(p)z\big)$,
$(-,-)_{\hat W} : \hat W \times \hat W \longrightarrow \mathbb{C} : \big((z_1,w_1);(z_2,w_2)\big) \longmapsto w_1(z_2) + \overline{w_2(z_1)}$, so gilt

$$\|U\|^2 = \int \Big[B(p)(z)(z) + \overline{w\big(\dot B(p)w\big)}\Big]\,\mathrm{d}\mu(p) = \int (\not p\, u, u)_{\hat W}\,\mathrm{d}\mu(p).$$

Da $(-,-)_{\hat W}$ eine **nicht ausgeartete** hermitesche Sesquilinearform (mit Signatur $(n+1,n+1)$) ist, ist die lineare Abbildung $\not p$ eindeutig bestimmt und insbesondere koordinatenunabhängig definiert. (Man könnte hier noch etwas abstrakter werden und direkt von einem $2(n+1)$-dimensionalen Vektorraum $\hat W$ ausgehen mit einer solchen Sesquilinearform, die unter $\mathcal{L}_0$ invariant bleibt.) Wie sich in Koordinaten gezeigt hat, ist $\not p$ ein homogenes Polynom vom Grad $n = 2J$ in p mit Werten in $L(\hat W)$. Weiters gilt $\overline{B(p)}^{-1T} = B(p)^{-1} \implies B(p)\cdot\dot B(p) = I_{\overline{W}\,'}$,
$\dot B(p)\cdot B(p) = I_W \implies \not p\cdot\not p = I_{\hat W}$.
$\not p^* = \not p$ bzgl. $(-,-)_{\hat W}$, da

$$(U,V)_{\tilde H_D} = \int (\not p\, u, v)_{\hat W}\,\mathrm{d}\mu(p) = \overline{(V,U)_{\tilde H_D}} = \int (u,\, \not p\, v)_{\tilde W}\,\mathrm{d}\mu(p),\ \forall U,V \in \tilde H_D.$$

Mit $U = u\,\mathrm{d}\mu \in \tilde H_D$ ist auch $\not p\, u\,\mathrm{d}\mu \in \tilde H_D$, da

$$\|\not p\,\mathrm{d}\mu\|^2 = \int (\not p\,\not p\, u,\, \not p\, u)_{\tilde W}\,\mathrm{d}\mu(p) = \|u\,\mathrm{d}\mu\|^2.$$

Der Operator $u\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \not p\, u(p)\,\mathrm{d}\mu$ ist also unitär und selbstadjungiert und besitzt folglich nur die Eigenwerte ± 1. Die Projektoren auf die 2 Eigenräume sind:

$$\tilde P_\pm : \tilde H_D \longrightarrow \tilde H_D : u\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \frac{1}{2}(u \pm \not p\, u)\,\mathrm{d}\mu$$

und offenbar gilt $\overline{H}_D = \tilde H_+ \oplus \tilde H_-$, $\tilde H_\pm := \tilde P_\pm(\tilde H_D)$. Die Distributionen $T_\pm \in H_\pm$ erfüllen eine Differentialgleichung n-ten Grades, welche für $n = 1$ als **Dirac'sche Gleichung** bezeichnet wird, nämlich

$$(1 \mp \not\partial\,)T_\pm = 0,\ D_\mu = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,.$$

In Koordinaten ist für $n=1$: $\not{D} = -\frac{\mathrm{i}}{m}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$.
$\tilde{P}_\pm$ sind mit der Operation von P_0 auf $\tilde{H}_D$ vertauschbar, da sie invariant definiert sind. Genauer: $\Lambda = (a, A) \in P_0 \implies \|U\|^2 = \|\Lambda U\|^2 =$

$$\int \Big(\not{p}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,p\rangle} V(A) u\big(\pi(A)^T p\big),\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,p\rangle} V(A) u\big(\pi(A)^T p\big) \Big)_{\hat{W}} \,\mathrm{d}\mu(p) =$$

$$\int \big(V(A)^{-1}\, \not{\pi}(A)^{T-1} \not{p}\, V(A) u, u \big)_{\hat{W}} \,\mathrm{d}\mu(p),$$

wobei $V(A)$ die Operation von $\mathcal{L}_0$ auf $\hat{W}$ bezeichnet, d.h. $V(A) = \varrho(A) \oplus \dot{\varrho}'(A)$. (Man beachte, dass $(-,-)_{\hat{W}}$ nach Konstruktion $V(A)$-invariant ist.) Da $(-,-)_{\hat{W}}$ nicht ausgeartet ist, folgt $V(A)^{-1}\, \not{\pi}(A)^{T-1} \not{p}\, V(A) = \not{p} \implies$
$\tilde{P}_\pm(\Lambda U) = \frac{1}{2}(I \pm \not{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,p\rangle} V(A) u\big(\pi(A)^T p\big)\,\mathrm{d}\mu =$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a,p\rangle} V(A) \frac{1}{2}\big(I + \not{\pi}(A)^T \not{p}\big) u\big(\pi(A)^T p\big)\,\mathrm{d}\mu = \Lambda(\tilde{P}_\pm U)$.
Die Darstellung von P_0 auf H_D zerfällt also auf zwei Weisen:
$H_D = H \oplus H_{\cdot} = H_+ \oplus H_-$. Für $n=1$ werden $T_\pm$ als Positron- bzw. Elektron-Wellenfunktionen angesehen. Als Zustandsraum wird entsprechend S. 194
$z = \{\mathbb{C}x : x \in H_+ \cup H_- \setminus 0\}$ betrachtet. Man beachte, dass von den je 4 linear unabhängigen Lösungen der Dirac-Gleichungen $(1 \mp \not{p})U = 0$ durch die Spektralbedingung jeweils 2 ausgesondert werden.
Auf $H_\pm$ erhalten wir übrigens die Wigner-Darstellung, denn $U \in H_\pm \implies$

$$\|U\|^2 = \int (\not{p}\, u, u)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}\int \big(\not{p}\,(1 \pm \not{p})u, u\big)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}\int (\not{p}\, u, u) \pm (u,u)\,\mathrm{d}\mu \implies$$

$$\|U\|^2 = \pm \int (u,u)\,\mathrm{d}\mu(p).$$

Bei Wahl einer (von p abhängigen) ONB in den $(n+1)$-dimensionalen Unterräumen $(1 \pm \not{p})\hat{W}$ von $\hat{W}$ und Identifikation mit $\mathbb{C}^{2J+1}$ ergibt sich die Wigner-Darstellung.

B) Diskrete Transformationen

Die Sesquiliniearform $(-,-)_{\hat{W}}$ induziert einen Antiisomorphismus $\sim$: $\hat{W} \simeq \hat{W}'$: $u \longmapsto \big(v \mapsto (v,u)_{\hat{W}}\big)$. Für $u \in \hat{W}$ wird $\tilde{u}$ als **Dirac-konjugierter Spinor** bezeichnet. In Koordinaten ist $u = (z^\alpha, w_{\dot\beta})$, $\tilde{u} = (\overline{w_\alpha}, \overline{z^{\dot\beta}})$ $\quad (= u\gamma^0$ für $J = \frac{1}{2})$.
Die Darstellungen $V(A)$ von $\mathcal{L}_0$ auf $\hat{W}$ und $V(A)^{-1T}$ auf $\hat{W}'$ sind äquivalent (vgl.

S. 191), daher existiert wieder $U : \hat{W} \longrightarrow \hat{W}'$ so, dass $U\big(V(A)u\big) = V(A)^{-1T}\cdot U(u)$. Da $\mathcal{D}^{(J,0)}$ und $\mathcal{D}^{(0,J)}$ inäquivalent sind, muss gelten

$$U = U_1 \oplus U_2,\ U_1 : W \longrightarrow W',\ U_2 : \overline{W}\,' \longrightarrow (\,\overline{W'}\,)'.$$

In Koordinaten ist also $U = \begin{pmatrix} c_1\zeta_{\alpha_1\beta_1}\cdots\zeta_{\alpha_n\beta_n} & 0 \\ 0 & c_2\zeta^{\dot\mu_1\dot\nu_1}\cdots\zeta^{\dot\mu_n\dot\nu_n} \end{pmatrix}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{C}\setminus 0$ zunächst beliebig wählbar sind.

Der Antiisomorphismus $C : \hat{W} \simeq \hat{W}' \overset{U^{-1}}{\longrightarrow} \hat{W}$ soll der Ladungskonjugation entsprechen, d.h. $C : H_\pm \longrightarrow H_\mp$ und $C^2 = \pm I$ (mehr lässt sich für eine antiunitäre Abbildung nicht verlangen, vgl. S. 177). Somit ist $C\not{p} = -\not{p}C$ zu fordern. In Koordinaten:

$$C\not{p}\,u = C\big(\dot B(p)w, B(p)z\big) = \left(\frac{1}{c_1}\,\zeta^{-1}\overline{B(p)}\overline{z},\ \frac{1}{c_2}\,\zeta^{-1}\overline{\dot B(p)}\overline{w}\right)$$

$$= \left(\dot B(p)\frac{1}{c_1}\,\zeta^{-1}\overline{z},\ B(p)\frac{1}{c_2}\,\zeta^{-1}\overline{w}\right) = \not{p}\,C\left(\frac{\overline{c_2}}{c_1}\,z, \frac{\overline{c_1}}{c_2}\,w\right).$$

Also ergibt sich die Forderung $c_1 = -c_2$.
Wegen $\zeta^2 = (-1)^n I$ ist $C^2 = (-1)^{n+1}|c_1|^{-2}I$, d.h. $|c_1| = 1,\ C^2 = (-1)^{n+1}I$. Ich setze $c_1 = 1,\ c_2 = -1$ (dies letztere ist natürlich koordinatenabhängig). Wenn wir $\tilde C$ auf $\tilde H \subset \mathcal{S}'(V';\hat W)$ durch die Wirkung von C auf $\hat W$ definieren, so ist $\tilde C\tilde P_\pm = \tilde P_\pm\tilde C$ und $\tilde C$ antiunitär:

$$\|\tilde C u\,\mathrm{d}\mu\|^2 = \int(\not{p}\,Cu, Cu)_{\hat W}\,\mathrm{d}\mu = -\int(C\not{p}\,u, Cu)_{\hat W}\,\mathrm{d}\mu = \int(\not{p}\,u, u)_{\hat W}\,\mathrm{d}\mu = \|u\,\mathrm{d}\mu\|^2,$$

da $(Cu, Cv)_{\hat W} = -(v,u)_{\hat W}$. Durch Fouriertransformation erhalten wir schließlich die **Ladungskonjugation** $C : H_D \longrightarrow H_D$. Für $T = (f^\alpha, g_{\dot\beta}) \in H_D$ gilt
$CT = U^{-1}(\,\overline{\check g}_\alpha, \overline{\check f^{\dot\beta}}\,) = \big((\zeta^{-1})^{\alpha\mu}\overline{\check g}_\mu,\ -(\zeta^{-1})_{\dot\beta\dot\varrho}(f^{\dot\varrho})^\nabla\big)$. Aufgrund des Schurschen Lemmas (S. 169) ist $C : H_D \longrightarrow H_D$ eindeutig (bis auf Vielfache) durch die Forderungen

(i) C antiunitär,

(ii) $C : H_\pm \longrightarrow H_\mp$,

(iii) $C\varrho(a,A) = \varrho(-a,A)C,\ (a,A) \in V\times\mathcal{L}_0 = P_0$ ($\varrho : P_0 \longrightarrow L(H_D)$) bestimmt.

Als nächstes werde die Rauminversion I_s betrachtet. (Es ist übrigens durchaus möglich, Raum- und Zeitinversionen auf H allein darzustellen, wobei ein ähnliches Argument wie bei der Äquivalenz der Darstellungen auf $\tilde H$ und $\tilde H_\cdot$ zu verwenden ist (siehe S. 196). Der Grund für die Verdoppelung der Dimension von W liegt

also lediglich in der Ladung.) In S. 177 wurde I_s koordinatenabhängig definiert $\big(I_s(x^0,\vec{x})=(x^0,-\vec{x})\big)$ und gezeigt, dass $\varrho(I_s)$ unitär ist und $\varrho(I_s)\varrho(a,A)\varrho(I_s)^{-1}=\varrho(I_sa,A^{*-1})$, $(a,A)\in P_0$, erfüllen muss.
Es sei $\varrho(I_s):\tilde{H}_D\longrightarrow\tilde{H}_D:u\,\mathrm{d}\mu\longmapsto \not{p}_s\,u(I_s^Tp)\,\mathrm{d}\mu$, wobei $p_s=\binom{m}{0}$. Dann ist $\not{p}_s\,(z^\alpha,w_{\dot\beta})=(w^\alpha,z_{\dot\beta})$ und die obige Bedingung ist erfüllt.
$P_0^\uparrow$ sei die Überlagerungsgruppe der orthochronen Poincaré-Gruppe. In Koordinaten ist $P_0^\uparrow=P_0\dot\cup P_0\cdot I_s$ mit den Multiplikationsregeln $I_s\cdot(a,A):=(I_sa,A^{*-1})I_s$ $I_s\cdot I_s=(0,I)$. Noch konkreter: $P_0^\uparrow\simeq\mathbb{R}^4\times\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\times\{\pm1\}$ mit der Multiplikationsregel

$$(a,A,\varepsilon)\circ(b,B,\delta)=\begin{cases}\big(a+\pi(A)b,AB,\delta\big): & \varepsilon=1\\ \big(a+\pi(A)I_sb,AB^{*-1},-\delta\big): & \varepsilon=-1\end{cases}.$$

Wenn wir $\varrho\big((a,A)\cdot I_s\big):=\varrho(a,A)\varrho(I_s)$ definieren, erhalten wir also eine unitäre Darstellung von $P_0^\uparrow$ auf $\tilde{H}_D$ und mittels $\mathcal{F}$ auf H_D.
Allgemein heiße eine Poincaré-Tranformation $R:M\longrightarrow M$ **Rauminversion**, wenn sie in einem Koordinatensystem die Gestalt I_s hat. Wenn I_s wieder wie oben die Rauminversion bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems bezeichnet, so ist $R=\Lambda I_s\Lambda^{-1}$, $\Lambda\in P_+^\uparrow$. Wenn $(a,A)\in P_0$ mit $\mathbb{T}(a,A)=\Lambda$, so ist also $\varrho(R)=\varrho(a,A)\varrho(I_s)\cdot\varrho\big(-\pi(A)^{-1}a,A^{-1}\big)$. Folglich gilt, dass $\varrho(R)u\,\mathrm{d}\mu=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a-\tilde{R}a,p\rangle}\not{p}_R\,u(\tilde{R}^Tp)\,\mathrm{d}\mu$ für $u\,\mathrm{d}\mu\in\tilde{H}_D$, wobei $\tilde{R}=\pi(A)I_s\pi(A^{-1}):V\longrightarrow V$ wie in S. 142 und $p_R=\pi(A)^{T-1}p_s$ der eindeutig bestimmte Vektor in ${V_+}'$ mit $[p_R,p_R]=m^2$ und $\tilde{R}^Tp_R=p_R$ ist.
In Koordinaten sehen wir unmittelbar, dass $\not{p}\,\varrho(I_s)=\varrho(I_s)\not{p}$, und somit erhalten wir eine Darstellung von $P_0^\uparrow$ sowohl auf H_+ als auch auf H_- (nicht aber auf H und $H_.$).
Nun zur Zeitinversion I_t, zunächst koordinatenabhängig. Da $\varrho(I_t)$ antiunitär sein muss, liegt es nahe, $\varrho(I_t):\tilde{H}_D\longrightarrow\tilde{H}_D:u\,\mathrm{d}\mu\longmapsto\not{p}_t\,Cu(-I_t^Tp)\,\mathrm{d}\mu$ zu setzen, $p_t=\binom{m}{0}$. Dann würde jedoch wegen $C\not{p}=-\not{p}C$ gelten, dass $\varrho(I_t)\not{p}=-\not{p}\,\varrho(I_t)$, d.h. $\varrho(I_t);\tilde{H}_\pm\longrightarrow\tilde{H}_\mp$ wäre nicht observabel (vgl. S. 199). Daher betrachtet man

$$U'=\begin{pmatrix}c_1'\zeta_{\alpha\beta} & 0\\ 0 & c_1'\zeta^{\dot\mu\dot\nu}\end{pmatrix},\quad C':\hat{W}\simeq\hat{W}'\overset{U'^{-1}}{\longrightarrow}\hat{W}.$$

Dieses C' erfüllt $C'\not{p}=\not{p}C'$ und $C'^2=(-1)^n(c_1')^{-2}I$.
Wieder sei $c_1'=1$. Die sogenannte **Wigner'sche Zeitumkehr** wird daher so definiert:

$$\varrho(I_t):\tilde{H}_D\longrightarrow\tilde{H}_D:u\,\mathrm{d}\mu\longmapsto\not{p}_t\,C'u(-I_t^Tp)\,\mathrm{d}\mu$$

und man sieht leicht, dass $\varrho(I_t)\varrho(a,A)\varrho(I_t)^{-1}=\varrho(I_ta,A^{*-1})$ erfüllt ist (was bei der vorigen Definition zwar auch richtig gewesen wäre.) Dann geht $\varrho(I_t)$ offenbar von $H_\pm$ nach $H_\pm$. Weiters gilt $\varrho(I_t)\varrho(I_s)\varrho(I_t)^{-1}=\varrho(I_s)$ und $\varrho(I_t)^2=(-1)^nI$.

Daher erhalten wir eine Darstellung der Überlagerungsgruppe $\hat{P}$ der vollen Poincaré-Gruppe P, wenn wir definieren $\hat{P} := P_0^{\uparrow} \dot\cup P_0^{\uparrow} \cdot I_t$ mit den Multiplikatonsregeln $I_t \cdot (a, A, \varepsilon) = (I_t a, A^{*-1}, \varepsilon)$ und $I_t \cdot I_t = \big(0, (-1)^n I, 1\big)$. (Die zu wählende Gruppenstruktur in $\hat{P}$ hängt also vom Spin ab!)
Allgemein folgt genau wie oben, dass eine Zeitinversion $Z = \Lambda I_t \Lambda^{-1},\ \Lambda \in P_+^{\uparrow}$, $\Lambda = \mathbb{T}(a, A)$ durch $\varrho(Z) u \,\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a - \tilde{z} u, p\rangle}\ \not{p}_z\, C' u(-\tilde{Z}^T p)\,\mathrm{d}\mu$ dargestellt wird, wobei $\tilde{Z}^T p_z = -p_z,\ [p_z, p_z] = m^2,\ p_z \in {V_+}'$.
Die Transformation $I_s \cdot \widetilde{I_t} : M \longrightarrow M$ ist durch die Angabe ihres Fixpunktes eindeutig bestimmt (denn $\widetilde{I_s \cdot I_t} : V \longrightarrow V : v \longmapsto -v$). $\varrho(I_s I_t)$ ist daher bis auf eine Phase vom Koordinatensystem unabhängig und es ist

$$\varrho(I_s I_t)(u \,\mathrm{d}\mu) = C' u(p)\,\mathrm{d}\mu.$$

$C \cdot \varrho(I_s I_t)$ ist ein unitärer Isomorphismus von H_D und wird auch als PCT bezeichnet ($P \hat{=} \varrho(I_s),\ T \hat{=} \varrho(I_t)$; eigentlich betrachten wir $CPT = -PCT$. Es gilt $C \cdot \varrho(I_s I_t)(u \,\mathrm{d}\mu) = CC'(z^\alpha, w_{\dot\beta})\,\mathrm{d}\mu = (-z^\alpha, w_{\dot\beta})\,\mathrm{d}\mu$. PCT ist ebenfalls bis auf eine Phase bestimmt.

C) Das Dirac-Feld

$F_{s|a}$ sei entsprechend dem Spin J der symmetrische bzw. antisymmetrische Fockraum über $H_D,\ n = 2J$.
Wie üblich ist $j : H_D \hookrightarrow \mathcal{S}'(M; \hat{W}),\ j^T : \mathcal{S}(M; \hat{W}') \longrightarrow H_D'$.
$P_\pm^T : H_D' \longrightarrow H_D'$ seien die Projektionsoperatoren, die sich aus $P_\pm : H_D \longrightarrow H_D$ durch Transposition ergeben.
Ähnlich seien C^T bzw. $C'^T : H_D' \longrightarrow H_D' : f \longmapsto \big(T \longmapsto \overline{f(CT)}$ bzw. $\overline{f(C'T)}\big)$.
Das Dirac-Feld wird definiert durch

$$\Phi(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}}\, a(P_+^T j^T \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} a^*(P_-^T C^T j^T \breve{\varphi}) & : \ n \text{ gerade} \\ a^*(P_-^T C'^T j^T \breve{\varphi}) & : \ n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Offenbar gilt $\big[\Phi(\varphi), \Phi(\psi)\big]_\pm = 0$.

Für $T \in H_D$ gilt: ${}_{H_D}\langle T, P_\pm^T j^T \varphi\rangle_{H_D'} = \langle P_\pm T, j^T \varphi\rangle = {}_{\mathcal{S}}\langle \varphi, P_\pm T\rangle_{\mathcal{S}'} =$
$\big\langle \varphi, \frac{1}{2}(1 \pm \not{D})T\big\rangle = \big\langle \frac{1}{2}(1 \pm \not{D}^T)\varphi, T\big\rangle$, d.h. $P_\pm j^T \varphi = j^T\big(\frac{1}{2}(1 \pm \not{D}^T)\varphi\big)$.

Wegen $P_+ \cdot P_- = 0$ ist also $P_\pm^T j^T\big[(1 \mp \not{D}^T)\varphi\big] = 0$.

Für gerades n ist weiters $P_-^T C^T j^T \check{\varphi} = C^T P_+^T j^T \check{\varphi}$ und $P_+^T j^T \big[(1 - \not{\mathcal{D}}^T)\varphi\big]^\vee = P_+^T j^T \big[(1 - \not{\mathcal{D}}^T)\check{\varphi}\big] = 0$.

Für ungerades n ist hingegen $P_-^T C'^T j^T \check{\varphi} = C'^T P_-^T j^T \check{\varphi}$ und $P_-^T j^T \big[(1 - \not{\mathcal{D}}^T)\varphi\big]^\vee = P_-^T j^T \big[(1 + \not{\mathcal{D}}^T)\check{\varphi}\big] = 0$.

Also folgt in beiden Fällen, dass $\Phi\big((1 - \not{\mathcal{D}}^T)\varphi\big) = 0$ bzw. $(1 - \not{D})\Phi = 0$.
Zur Überprüfung der Lokalität ist $\big[\Phi(\varphi), \Phi^*(\psi)\big]_\pm$
$= \frac{1}{2}\big[a(P_+^T j^T \varphi) + a^*(P_-^T C^{(\prime)T} j^T \check{\varphi}),\ a^*(P_+^T j^T \psi) + a(P_-^T C^{(\prime)T} j^T \check{\psi})\big]_\pm$

$= \frac{1}{2}(j^T\varphi, P_+^T j^T \psi)_{H'_D} \pm \frac{1}{2}(C^{(\prime)T} j^T \check{\psi}, P_-^T C^{(\prime)T} j^T \check{\varphi})_{H'_D}$ zu berechnen.

a) $(j^T\varphi, P_+^T j^T\psi)_{H'_D} = \frac{1}{2}\big\langle \check{\varphi} * \overline{(1 + \not{\mathcal{D}}^T)\psi}, S\big\rangle$
$\underset{\psi=(y,v)}{\uparrow} = \frac{1}{2}\Big\langle \check{\varphi} * \big(\overline{y} + \overline{B(-D)^T \overline{v}}, \overline{v} + \overline{\dot{B}(-D)^T \overline{y}}\big), S\Big\rangle;$

$S = \begin{pmatrix} \dot{B}(D) & 0 \\ 0 & B(D) \end{pmatrix} S_0 \in \mathcal{S}'(V'; \hat{W} \otimes \hat{W})$, vgl. S. 190 $\implies$ $(j^T\varphi, P_+^T j^T \psi)$

$= \frac{1}{2}\Big\langle \check{\varphi} * \big(\dot{B}(-D)\overline{y} + (-1)^n \dot{B}(-D)\overline{B}^T(-D)\overline{v}, B(-D)\overline{v} + (-1)^n \underbrace{B(-D)\overline{\dot{B}}^T(-D)}_{(-\Box/m^2)^n}\overline{y}\big), S_0\Big\rangle$

$= \frac{1}{2}(-1)^n\Big\langle \check{\varphi} * \big(\dot{B}(D)\overline{y} + \overline{v}, B(D)\overline{v} + \overline{y}\big), S_0\Big\rangle$

$= \frac{1}{2}(-1)^n\big\langle \check{\varphi} * (1 + \not{D})\tilde{\psi}, S_0\big\rangle,\ \sim: \hat{W}' \simeq \hat{W}$
$(y, v) \longmapsto (\overline{v}, \overline{y})$.

b) $(C^{(\prime)T} j^T \check{\psi}, P_-^T C^{(\prime)T} j^T \check{\varphi})_{H'_D} = (C^{(\prime)T} j^T \check{\psi}, C^{(\prime)T} P_\pm^T j^T \check{\varphi})$
$= (C^{(\prime)T}$ antiunitär$) = (P_\pm^T j^T \check{\varphi}, j^T \check{\psi}) = (j^T \check{\varphi}, P_\pm^T j^T \check{\psi})$
$= (\text{nach } a)) = \frac{1}{2}(-1)^n\big\langle \varphi * \big((-1)^n + \not{D}\big)\check{\tilde{\psi}}, S_0\big\rangle = \frac{1}{2}\big\langle \check{\varphi} * (1 + \not{D})\tilde{\psi}, \check{S}_0\big\rangle.$
Zusammen: $\big[\Phi(\varphi), \Phi^*(\psi)\big]_\pm = (-1)^n\big\langle \check{\varphi} * \frac{1}{2}(1 + \not{D})\tilde{\psi},\ \underbrace{\frac{1}{2}\big(S_0 \pm (-1)^n \check{S}_0\big)}_{=\frac{1}{2}(S_0 - \check{S}_0) =: \Delta_0}\big\rangle,$
womit das Lokalitätsaxiom erfüllt ist. Als Kommutator ergibt sich in Koordinaten: $\big(\varphi = (z, w), \psi = (y, v)\big)$:
$\big[\Phi(\varphi), \Phi^*(\psi)\big]_\pm = \frac{1}{2}(-1)^n\Big\langle \check{z}_\alpha * \big(\overline{v}^\alpha + \dot{B}(D)^{\alpha\dot{\beta}}\overline{y}_{\dot{\beta}}\big) + \check{w}^{\dot{\alpha}} * \big(\overline{y}_{\dot{\alpha}} + \dot{B}(D)_{\dot{\alpha}\beta}\overline{v}^\beta\big), \Delta_0\Big\rangle =$
$\langle \check{\varphi} \circledast \tilde{\psi}, \Delta\rangle,\ \tilde{\psi} = (\overline{v}, \overline{y})$,

$$\Delta = \frac{1}{2}(-1)^n \begin{pmatrix} I & \dot{B}(-D) \\ B(-D) & I \end{pmatrix} \Delta_0 = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}(I + \not{D})\Delta_0.$$

D) Zusammenhang mit Kapitel 14

Zunächst werde das „Dirac'sche Skalarfeld", d.h. der Fall $n = 0$ betrachtet. Dann ist $\hat{W} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$, $\not{p} : \hat{W} \longrightarrow \hat{W} : (z, w) \longmapsto (w, z)$,
$H_\pm = \big\{(T_1, T_2) \in H_D : T_1 \mp T_2 = 0\big\}$, $C(T_1, T_2) = (\overline{\check{T}_2}, -\overline{\check{T}_1})$,

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\left(j^T\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right) + a^*\left(j^T\left(-\frac{\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2}{2}, \frac{\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2}{2}\right)\right)\right).$$

Wenn $j_\pm : H_D \longrightarrow \mathcal{D}'(M) : (T_1, T_2) \longmapsto \frac{1}{2}(\pm T_1 + T_2)$, so ist

$j_\pm^T : \mathcal{D}(M) \longrightarrow H_D' : \psi \longmapsto j^T\left(\frac{1}{2}(\pm\psi, \psi)\right)$ und daher $\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Psi(\varphi_1 + \varphi_2)$,

wobei $\Psi(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j_+^T\psi) + a^*(j_-^T\overline{\psi})\big)$ wie in S. 194 definiert ist.

Nun sei wieder allgemein $\hat{W} = W \oplus \overline{W}'$;

$j_+ : H_D \longrightarrow \mathcal{S}'(M; W) : (T_1, T_2) \longmapsto \frac{1}{2}\big(T_1 + \dot{B}(D)T_2\big)$,

$j_- : H_D \longrightarrow \mathcal{S}'(M; W) : (T_1, T_2) \longmapsto \frac{1}{2}(-1)^n\big(-T_1 + \dot{B}(D)T_2\big)$

$\Longrightarrow\ j_+^T : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow H_D' : \psi \longmapsto j^T\left(\frac{1}{2}\big(\psi, \dot{B}(-D)^T\psi\big)\right)$;

wenn $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{S}(M; \hat{W}' = W' \oplus \overline{W'}')$, so ist also

$$P_+^T j^T\varphi = j^T\left(\frac{1}{2}(1 + \not{D}^T)\varphi\right) = j^T\frac{1}{2}\big(\varphi_1 + B(-D)^T\varphi_2, \varphi_2 + \dot{B}(-D)^T\varphi_1\big)$$
$$= j_+^T\big(\varphi_1 + B(-D)^T\varphi_2\big).$$

Etwas komplizierter ist der 2. Teil von $\Phi(\varphi)$:

$$C^{(\prime)T}j^T\check{\varphi} = j^T\big((-)\zeta\,\overline{\varphi}_2, \zeta\,\overline{\varphi}_1\big)\ \Longrightarrow\ P_-^T C^{(\prime)T}j^T\check{\varphi}$$
$$= j^T\big((-)\zeta\,\overline{\varphi}_2 - B(-D)^T\zeta\,\overline{\varphi}_1, \zeta\,\overline{\varphi}_1 - \dot{B}(-D)^T(-)\zeta\,\overline{\varphi}_2\big);$$

wenn U, t wieder wie in S. 191 definiert sind, so ist andererseits:

$Ut\big(\varphi_1 + B(-D)^T\varphi_2\big) = \zeta\dot{B}(D)\big(\overline{\varphi}_1 + \overline{B(-D)}^T\overline{\varphi}_2\big) = B(D)^T\zeta\,\overline{\varphi}_1 + (-\Box/m^2)^n\zeta\varphi_2\ \Longrightarrow$
$j_-^T UT\big(\varphi_1 + B(-D)^T\varphi_2\big) = P_-^T C^{(\prime)T}j^T\check{\varphi}$ und somit
$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Psi\big(\varphi_1 + B(-D)^T\varphi_2\big)$,
wobei $\Psi(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(j_+^T\psi) + a^*(j_-^T Ut\psi)\big)$ wie in S. 195.

Kapitel 16

Die Wightman-Funktionen

R.F. Streater - A.S. Wightman *PCT, Spin and Statistics, and all that*

V.S. Vladimirov *Generalized Functions in Mathematical Physics*

E.J. Beltrami - M.R. Wohlers *Distributions and the Boundary Values of Analytic Functions*

A) Definition und Beispiele

H, E, Ω seien entsprechend Axiom 1–8 (H entspricht $F_{s|a}$ bei den freien Feldern). Nach Axiom 6 b) ist für $x, y \in E$ das multilineare Funktional

$$\underbrace{\mathcal{S}(M;W') \times \cdots \times \mathcal{S}(M;W')}_{l} \longrightarrow \mathbb{C} : (\varphi_1, \cdots, \varphi_l) \longmapsto \big(\Phi(\varphi_1) \cdots \Phi(\varphi_l)x, y\big)_H$$

partiell stetig und folglich (Kernsatz) durch eine Distribution

$$T \in \mathcal{S}'(M \times \cdots \times M; W^{\otimes l})$$

darstellbar. Wenn manche der $\Phi(\varphi_j)$ durch $\Phi^*(\overline{\varphi}_j)$ ersetzt werden
(wobei $- : W^{(\prime)} \simeq W^{(\prime)}$ antilinear im folgenden fest gewählt ist), so gilt dasselbe.

Definition 16.1
Für $x = y = \Omega$ heißt T *Wightman-Funktion* oder *Vakuumerwartungswert* oder *l-Punkt-Funktion*.

Beispiel 43 Zunächst werde das freie, neutrale Skalarfeld aus S. 187 betrachtet.
$\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_l, T_l\rangle = \big(\Phi(\varphi_1)\cdots\Phi(\varphi_l)\Omega, \Omega\big)$
$= 2^{-l/2}\Big(\big(a(j^T\varphi_1) + a^*(j^T\overline{\varphi}_1)\big)\cdots\big(a(j^T\varphi_l) + a^*(j^T\overline{\varphi}_l)\big)\Omega, \Omega\Big)$
$= 2^{-l/2}\sum_{\varepsilon_j\in\{+,-\}}\big(a_{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots a_{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega, \Omega\big),$
wobei $a_-(\varphi_i) := a(j^T\varphi_i),\ a_+(\varphi_i) := a^*(j^T\overline{\varphi}_i)$.

$$a_{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots a_{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega \begin{cases} \in H^{\sum\varepsilon_j} & : \ \sum_{j=1}^{l}\varepsilon_j \geq 0 \\ = 0 & : \ \sum_{j=1}^{l}\varepsilon_j < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ \big(a_{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots a_{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega, \Omega\big) = 0 \text{ für } \sum_{j=1}^{l}\varepsilon_j \neq 0.$$

Daher ist jedenfalls $T_l = 0$ für ungerades l. Für $\sum_{j=1}^{l}\varepsilon_j = 0$ und $\varepsilon_1 = +$ ist $a_{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots a_{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega = 0$ und wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_k = -$ und $\varepsilon_{k+1} = +$, so gilt $a_{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots a_{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega = \sum_{j=1}^{k} a_{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots\widehat{a_{\varepsilon_j}(\varphi_j)}\cdots a_{\varepsilon_k}(\varphi_k)a_{\epsilon_{k+2}}(\varphi_{k+2})\cdots a_{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega\cdot$ $\langle\check{\varphi}_j * \varphi_{k+1}, S_0\rangle$ (vgl. auch S. 185). Also ist

$$a_{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots a_{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega = \sum_{\substack{\{1,\cdots,l\}=\{j_1,\cdots,j_{l/2}\}\cup\{k_1,\cdots,k_{l/2}\} \\ j_i<k_i,\ \varepsilon_{j_i}=-,\ \varepsilon_{k_i}=+}} \prod_{i=1}^{l/2}\langle\check{\varphi}_{j_i} * \varphi_{k_i}, S_0\rangle\cdot\Omega$$

(Wenn die Summe leer ist, ergibt sich 0). Insgesamt für gerades l :

$$T_l(m_1,\cdots,m_l) = 2^{-l/2}\sum_{\substack{\{1,\cdots,l\}=\{j_1,\cdots,j_{l/2}\}\cup\{k_1,\cdots,k_{l/2}\} \\ j_i<k_i\ \ (i=1,\cdots,l/2)}}\prod_{i=1}^{l/2}S_0(\overrightarrow{m_{j_i}m_{k_i}}) \in \mathcal{S}'(M^l),$$

z.B. für $l = 4 : T_4(m_1,m_2,m_3,m_4)$
$= \frac{1}{4}\big\{S_0(\overrightarrow{m_1m_2})S_0(\overrightarrow{m_3m_4}) + S_0(\overrightarrow{m_1m_3})S_0(\overrightarrow{m_2m_4}) + S_0(\overrightarrow{m_1m_4})S_0(\overrightarrow{m_2m_3})\big\}.$
Für das Spinorfeld aus S. 191 unten folgt in gleicher Weise:

$$T_l(m_1,\cdots,m_l) = 2^{-l/2}\sum_{j_i<k_i}\prod_{i=1}^{l/2}(-1)^{n(k_i-j_i-1)}\zeta^{\alpha^{(j_i)}\alpha^{(k_i)}}S_0(\overrightarrow{m_{j_i}m_{k_i}}) \in \mathcal{S}'(M^l; W^{\otimes l}),$$

$n = 2J, J =$ Spin.

Allgemeiner, wenn $\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_l, T_\varepsilon \rangle = \big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1) \cdots \Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega, \Omega\big)$ mit

$$\Phi^{\pm}(\varphi) = \begin{cases} \Phi(\varphi) & \text{für } + \\ \Phi^*(\overline{\varphi}) & \text{für } -, \end{cases}$$

so gilt

$$T_\varepsilon = 2^{-l/2} \sum_{j_i<k_i} \prod_{i=1}^{l/2} (-1)^{n(k_i-j_i-1)} A^{\alpha(j_i)a(k_i)}_{\varepsilon_{j_i}\varepsilon_{k_i}} S_0(\overrightarrow{m_{j_i} m_{k_i}}),$$

wobei $A_{++} = \zeta,\ A_{+-} = \dot{B}(D),\ A_{-+} = \dot{B}(D)^T,\ A_{--} = \zeta^T,\ D_\mu = -\mathrm{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

B) Eigenschaften der Wightman-Funktionen

Im Folgenden sei wieder $- : W \longrightarrow W$ (und dual dazu von W' nach W') fixiert, $\Phi^+(\varphi) := \Phi(\varphi),\ \Phi^-(\varphi) := \Phi^*(\overline{\varphi})$. $\mathcal{L}_0$ operiert vermöge $\varrho = \mathcal{D}^{(J,K)}$ auf W (vgl. S. 180), $\varrho^+ := \varrho,\ \varrho^- : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W) : A \longmapsto \big(w \longmapsto \overline{\varrho(A)(\overline{w})}\big)$.

Satz 16.1 *(Poincaré-Invarianz)*
Für $T \in \mathcal{S}'(M^l; W^{\otimes l})$ mit

$$\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_l, T \rangle = \big(\Phi^{\epsilon_1}(\varphi_1) \cdots \Phi^{\epsilon_l}(\varphi_l)\Omega, \Omega\big),\ \epsilon_j \in \{+,-\}$$

gilt: T ist Poincaré-invariant, d.h.

$$\forall \Lambda = (a, A) \in P_0 : \big(\varrho^{\epsilon_1}(A) \otimes \cdots \otimes \varrho^{\epsilon_l}(A)\big) T\big(\mathbb{T}(\Lambda)^{-1} m_1, \cdots, \mathbb{T}(\Lambda)^{-1} m_l\big) = T.$$

Beweis.
a) $U : P_0 \longrightarrow L(H)$ sei die unitäre Darstellung von P_0 auf H; $p^\lambda p_\lambda$ ist ein Casimirelement der Lie-Algebra von $P_0 \implies$ auf E sind die Operatoren $(P)^2$ und $T_E U(u),\ u \in T_{(0,I)}P_0$ vertauschbar $\implies T_E U(u)$ lässt $\mathbb{C}\Omega$, den Eigenraum von $(P)^2$ zum Eigenwert 0 fest $\implies \forall \Lambda \in P_0 : U(\Lambda)\mathbb{C}\Omega \subset \mathbb{C}\Omega \implies$
$\forall \Lambda \in P_0 : U(\Lambda)\Omega = \Omega$ (vgl. S. 178).

b) $\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_l, T \rangle = \big(\Phi^{\epsilon_1}(\varphi_1) \cdots \Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega, \Omega\big) =$

$= \big(U(\Lambda)\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1) \cdots \Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l) U(\Lambda)^{-1}\Omega, \Omega\big) =$ (Axiom 6)

$$= \Big(\Phi^{\varepsilon_1}\big(\varrho^{\epsilon_1}(A)^{T-1}\varphi_1\big(\mathbb{T}(\Lambda)^{-1}m\big)\big)\cdots\Omega,\Omega\Big)$$

$$= \Big\langle \varrho^{\epsilon_1}(A)^{T-1}\varphi_1\big(\mathbb{T}(\Lambda)^{-1}m\big)\otimes\cdots\otimes\varrho^{\epsilon_l}(A)^{T-1}\varphi_l\big(\mathbb{T}(\Lambda)^{-1}m\big), T\Big\rangle$$

$$= \Big\langle \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_l, \big(\varrho^{\varepsilon_1}(A)^{-1}\otimes\cdots\otimes\varrho^{\varepsilon_l}(A)^{-1}\big)T\big(\mathbb{T}(\Lambda)m_1,\cdots,\mathbb{T}(\Lambda)m_l\big)\Big\rangle$$

für $\Lambda=(a,A)\in P_0$. □

Bemerkung 1) Speziell für $\Lambda=\left(0,\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)\in P_0$ und $J+K$ ungerade ist $\varrho^{\varepsilon_j}(A)z^{\alpha_1\cdots\alpha_n\dot\beta_1\cdots\dot\beta_m}=-z^{\alpha\dot\beta}$, $n=2J$, $m=2K$ (vgl. S. 162) und $\mathbb{T}(\Lambda)m=m$, d.h. $(-1)^lT=T$ bzw. $T=0$ für ungerades l. Somit verschwinden die l-Punkt-Funktionen für ungerades l bei einer Darstellung $\mathcal{D}^{(J,K)}$ von $\mathcal{L}_0$, die keine von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist.

2) Die Translationsinvarianz von T bedeutet:

$$\exists t\in\mathcal{S}'(\underbrace{V\times\cdots\times V}_{l-1};W^{\otimes l}) \text{ mit } T(m_1,\cdots,m_l)=t(v_1,\cdots,v_{l-1}),\ v_j=\overrightarrow{m_jm_{j+1}}.$$

(D.h. $\langle\varphi,T\rangle=\big\langle\int\varphi(m_1,m_1+v_1,m_1+v_1+v_2,\cdots,m_1+v_1+\cdots+v_{l-1})\,\mathrm{d}m_1,t\big\rangle$.)
Wenn wir die Wightman-Funktionen der freien Felder betrachten, so sehen wir, dass sie aus Faktoren des Typs $S_0(\overrightarrow{m_jm_k})$, $j<k$, gebildet werden.

$$S_0=\overline{\mathcal{F}}\mu \text{ vgl. S. 144} \implies S_0(\overrightarrow{m_jm_k})=S_0(v_j+\cdots+v_{k-1})=(\overline{\mathcal{F}}\mu)(v_j+\cdots+v_{k-1})$$
$$=\overline{\mathcal{F}}\big[\mu(y_j)\delta(y_j-y_{j+1})\cdots\delta(y_j-y_{k-1})\big].$$

$\mathcal{F}t$ besteht aus Faltungen solcher Distributionen und daher ist
$\operatorname{supp}\mathcal{F}t\subset\underbrace{\overline{V'_+}\times\cdots\times\overline{V'_+}}_{l-1}$, $V'_+=$ positiver Lichtkegel in V'.

Satz 16.2 *(Spektralbedingung)*
t werde wie oben aus einer l-Punkt-Funktion gebildet. Dann ist $\operatorname{supp}\mathcal{F}t\subset\overline{V'_+}^{\,l-1}$.

Beweis.
a) $U:P_0\longrightarrow L(H,E)$ sei die Darstellung von P_0 nach Axiom 3. Aus technischen Gründen benötige ich hier eine Zusatzvoraussetzung zu Axiom 3.1, welches besagt, dass $\forall x\in E: P_0\longrightarrow E:\Lambda\longmapsto U(\Lambda)x\ \mathcal{C}^\infty$ ist, nämlich:

Axiom 3.3 $\forall x \in E : V \longrightarrow E : v \longmapsto U(v,I)x$ wächst höchstens polynomial, d.h. wenn p_n die E definierenden Halbnormen sind, so gilt:

$$\forall n : \exists m : \forall v : p_n\big(U(v,I)x\big) \leq m\big(1+|v|\big)^m$$

($|\cdot|$ eine beliebige Norm auf V).

(Wenn etwa $E = \mathcal{S}(M)$, so ist das mit $m = n$ erfüllt. Nun sei $x \in E$ fest. Dann ist

$$h : E' \longrightarrow \mathcal{S}'(V) : f \longmapsto \Big(v \longmapsto {}_E\big\langle U(v,I)x, f\big\rangle_{E'}\Big)$$

wohldefiniert und stetig, denn wenn p_{-n} die dualen Normen zu p_n sind (vgl. S. 132 ff.), so ist

$$\Big|\big\langle U(v,I)x, f\big\rangle\Big| \leq p_{-n}(f)\cdot m\big(1+|v|\big)^m$$

falls $p_{-n}(f) < \infty$.
Wenn speziell $P_\alpha f = y_\alpha f$ (vgl. S. 171), so ist $h(f) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle v,y\rangle}\cdot\langle x,f\rangle$ und $y \in \overline{V'_+}$ nach Axiom 4, d.h. $\mathcal{F}h(f) = \text{const}\cdot\delta_y$, $\operatorname{supp}\mathcal{F}\big(h(f)\big) \subset \overline{V'_+}$. Da die Menge dieser Eigenfunktionen in E' total ist, folgt: $\forall f \in E' : \operatorname{supp}\mathcal{F}\big(h(f)\big) \subset$ konvexe Hülle $\sigma(P_\alpha) \subset \overline{V'_+}$. Wenn speziell $f \in H \hookrightarrow E'$ (vgl. S. 136), so ist $h(f) = \big(U(v,I)x, f\big)_H$.

b) Es sei $1 \leq j \leq l$, $\varphi_i \in \mathcal{S}(M;W')$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} V \longrightarrow \mathbb{C} : v \longmapsto\ & \big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots\Phi^{\varepsilon_j}(\varphi_j)U(v,I)\Phi^{\varepsilon_{j+1}}(\varphi_{j+1})\cdots\Omega,\Omega\big) \\ =\ & \Big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots\Phi^{\varepsilon_j}(\varphi_j)\Phi^{\varepsilon_{j+1}}\big(\varphi_{j+1}(m-v)\big)\cdots\Phi^{\varepsilon_l}\big(\varphi_l(m-v)\big)\Omega,\Omega\Big) \\ =\ & \big\langle\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_l, T(m_1,\cdots,m_j,m_{j+1}+v,\cdots,m_l+v)\big\rangle \\ =\ & \big\langle\psi, t(v_1,\cdots,v_{j-1},v_j+v,v_{j+1},\cdots,v_{l-1})\big\rangle \end{aligned}$$

(wobei $\psi = \int\varphi_1(m_1)\varphi_2(m_1+v_1)\cdots\varphi_l(m_1+v_1+\cdots+v_{l-1})\,\mathrm{d}m_1$)

liegt nach a) in $\mathcal{S}'$ und ihre Fouriertransformierte hat Träger in $\overline{V'_+}$ $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $\forall\psi \in \mathcal{S}(V^{l-1};W'^{\otimes l}) : \operatorname{supp}\mathcal{F}_v\Big(\big\langle\psi, t(v_1,\cdots,v_j+v,\cdots,v_{l-1})\big\rangle\Big) \subset \overline{V'_+}$ $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $\forall\chi \in \mathcal{S}(V')$ mit $\operatorname{supp}\chi \cap \overline{V'_+} = \{\}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \ =\ & \Big\langle\chi, \mathcal{F}_v\Big(\big\langle\psi, t(v_1,\cdots,v_j+v,\cdots,v_{l-1})\big\rangle\Big)\Big\rangle = \\ =\ & (2\pi)^{-4(l-1)}\big\langle(\mathcal{F}\chi)(v), \big\langle\overline{\mathcal{F}}\psi, \mathcal{F}t\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle v,y_j\rangle}\big\rangle\big\rangle \\ =\ & (2\pi)^{-4(l-1)}\big\langle\overline{\mathcal{F}}\psi(y), \mathcal{F}t\cdot\big\langle(\mathcal{F}\chi)(v), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle v,y_j\rangle}\big\rangle\big\rangle \\ =\ & (2\pi)^{-4(l-2)}\big\langle\overline{\mathcal{F}}\psi(y), \mathcal{F}t\cdot\chi(y_j)\big\rangle = (2\pi)^{-4(l-2)}\big\langle\chi(y_j)\overline{\mathcal{F}}\psi, \mathcal{F}t\big\rangle \\ \Longrightarrow\ & \operatorname{supp}\mathcal{F}t \subset \overline{V}_+^{l-1}. \end{aligned}$$

□

Bezeichnungen Für $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l \in \{+,-\}$ sei $T_\varepsilon = T_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l} \in \mathcal{S}'(M^l; W^{\otimes l})$ durch $\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_l, T_\varepsilon \rangle = \big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1) \cdots \Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega, \Omega\big)$ definiert und $T_{\{\}} = 1 \in \mathbb{C}$.
Für $\sigma \in S_l$ sei $\sigma(T_\varepsilon) := T_{\varepsilon_{\sigma(1)} \cdots \varepsilon_{\sigma(l)}}(m_{\sigma(1)}, \cdots, m_{\sigma(l)})$.

Satz 16.3 *(Hermitizität)*

$$\overline{T_{-\varepsilon_1 \cdots -\varepsilon_l}} = \sigma(T_\varepsilon),\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & & l \\ l & & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 16.4 *(Lokalität)*
$\sigma = (j \longleftrightarrow j+1) \in S_l,\ 1 \le j \le l-1 \implies$
$\implies \operatorname{supp}\big(\sigma(T_\varepsilon) \pm T_\varepsilon\big) \subset \big\{m \in M^l : [\overrightarrow{m_j m_{j+1}}, \overrightarrow{m_j m_{j+1}}] \ge 0\big\}$
($\pm$ für $\pm$Quantelung).

Beweis Übung.

Satz 16.5 *(Positiv-Definitheit)*
$\varphi^{(0)} \in \mathbb{C},\ \varphi^{(1)} \in \mathcal{S}(M; W'), \cdots, \varphi^{(l)} \in \mathcal{S}(M^l; W'^{\otimes l}),\ \varepsilon^{(j)} \in \{+,-\}^j$. Dann gilt:

$$\sum_{i,j=0}^{l} \big\langle \overline{\varphi^{(i)}} \otimes \varphi^{(j)}, \sigma_{ij}(T_{-\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(j)}}) \big\rangle \ge 0,$$

wobei $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & i+j \\ i & \cdots & 1 & i+1 & \cdots & i+j \end{pmatrix} \in S_{i+j}$.

Beweis.
Wenn speziell $\varphi^{(j)} = \varphi_1^{(j)} \otimes \cdots \otimes \varphi_j^{(j)} \in \mathcal{S}(M^j; W'^{\otimes j})$, so ist
$0 \le \Big\| \sum_{j=0}^{l} \Phi^{\varepsilon_1^{(j)}}(\varphi_1^{(j)}) \cdots \Phi^{\varepsilon_1^{(j)}}(\varphi_j^{(j)})\Omega \Big\|^2$
$= \sum_{i,j=0}^{l} \big(\Phi^{-\varepsilon_i^{(i)}}(\overline{\varphi_i^{(i)}}) \cdots \Phi^{-\varepsilon_1^{(i)}}(\overline{\varphi_1^{(i)}}) \Phi^{\varepsilon_1^{(j)}}(\varphi_1^{(j)}) \cdots \Phi^{\varepsilon_j^{(j)}}(\varphi_j^{(j)})\Omega, \Omega\big)$
$= \sum_{i,j=0}^{l} \big\langle \overline{\varphi^{(i)}} \otimes \varphi^{(j)},\ \sigma_{ij}(T_{-\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(j)}}) \big\rangle.$
Die Behauptung folgt daraus mit einem Dichteargument. □

Beispiel 44
Die 2-Punkt-Funktionen $T_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in \mathcal{S}'(M \times M; W \otimes W)$ lassen sich nach Satz 16.1 durch $t_\varepsilon \in \mathcal{S}'(V; W \otimes W)$ darstellen, wobei t_ε Lorentz-invariant ist:

$\varrho^{\varepsilon_1}(A) \otimes \varrho^{\varepsilon_2}(A) t_\varepsilon\big(\pi(A)^{-1}v\big) = t_\varepsilon$ für $A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$. Nach Satz 16.3 sind die t_ε bereits durch t_{++}, t_{+-} und t_{-+} bestimmt. Satz 16.5 liefert $\langle \breve{\varphi} * \overline{\varphi}, t_{+-}\rangle \geq 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(M; W')$, d.h. t_{+-} ist positiv definit im Sinn von S. 174.
Wenn speziell $W = \mathbb{C}$, so erhalten wir (mit Satz 16.2) die Darstellung $\mathcal{F}t_{+-} = \nu =$ positives, Lorentz-invariantes Maß mit $\operatorname{supp}\nu \subset \overline{V'_+}$. ν lässt sich daher durch ein positives Maß $\mathrm{d}\lambda$ auf $[0,\infty)$ darstellen:

$$\big\langle \psi(y), \nu\big\rangle = \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(\sqrt{s^2+\vec{y}^{\,2}}, \vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y}}{\sqrt{x^2+\vec{y}^{\,2}}}, \mathrm{d}\lambda(s) \right\rangle + c\psi(0),\ c \geq 0.$$

Dies heißt *Källén-Lehmann-Darstellung* der 2-Punkt-Funktion.

Satz 16.6 *(Eindeutigkeit des Vakuums)*
Für $w \in V$ mit $[w,w] < 0$ gilt in $\mathcal{S}'(M^l; W^{\otimes l})$:

$$\lim_{s\to\infty} T_\varepsilon(m_1, \cdots, m_j, m_{j+1} + sw, \cdots, m_l + sw) =$$
$$= T_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}(m_1, \cdots, m_j) T_{\varepsilon_{j+1}\cdots\varepsilon_l}(m_{j+1}, \cdots, m_l).$$

Beweis.
a) $\varepsilon' := \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j,\ \varepsilon'' := \varepsilon_{j+1}\cdots\varepsilon_l,\ m' := (m_1, \cdots, m_j),\ m'' := (m_{j+1}, \cdots, m_l)$.
Nach Satz 16.4 ist für $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & & & j & j+1 & \cdots & l \\ j+1 & & \cdots & l & 1 & 2 & \cdots & \cdots & j \end{pmatrix}$:
$T_\varepsilon \pm \sigma(T_\varepsilon) = 0$ wenn $\overrightarrow{m_i m_k} \notin \overline{V_+} \cup \overline{V_-},\ \forall 1 \leq i \leq j,\ \forall j+1 \leq k \leq l$. (Dabei steht $-$ bei $-$Quantelung und $(-1)^{j(l-j)+1}$ bei $+$Quantelung.)

$$U(s) := \big(T_\varepsilon \pm \sigma(T_\varepsilon)\big)(m', \underbrace{m_{j+1} + sw, \cdots, m_l + sw}_{=:m''+sw})$$

$\Longrightarrow\ \forall s > 0 : \operatorname{supp} U(s) \subset M^l \setminus s \cdot B$, wobei $B = \big\{m \in M^l : \|m\| \leq 1\big\}$ und $\|\cdot\|$ eine geeignete Norm auf M^l. Denn: 0 sei ein beliebig gewählter Nullpunkt in $M \Longrightarrow (0, \cdots, 0) \in C := \{m \in M^l : \overrightarrow{m_i m_k} + w \notin \overline{V_+} \cup \overline{V_-},\ \forall 1 \leq i \leq j,\ \forall j+1 \leq k \leq l\}$ und C ist offen und wenn $B \subset C$, so ist $s \cdot B \subset s \cdot C = \{m : \overrightarrow{m_i m_k} + sw \notin \overline{V_+} \cup \overline{V_-}\} \subset M^l \setminus \operatorname{supp} U(s)$. ($M$ Vektorraum, da 0 gewählt.) Weiters sei

$$\chi \in \mathcal{D}(M^l),\ \chi = \begin{cases} 1 & : \ m \in \frac{1}{2} B \\ 0 & : \ m \notin B. \end{cases}$$

Für $\varphi \in \mathcal{S}(M^l; W'^{\otimes l})$ gilt:

$$\forall p \in \mathbb{N} : \lim_{s\to\infty} s^p \Big(1 - \chi\big(\tfrac{m}{s}\big)\Big) \cdot \varphi = 0 \text{ in } \mathcal{S}.$$

Da $T_\varepsilon \in \mathcal{S}'$ gilt weiters: $\exists N : U(s) \cdot s^{-N} \to 0$ in $\mathcal{S}'$.
Insgesamt: $\forall p \in \mathbb{N} : \forall \varphi \in \mathcal{S}(M^l; W'^{\otimes l})$:
$\lim\limits_{s\to\infty} s^p \big\langle \varphi, U(s)\big\rangle = \lim\limits_{s\to\infty} s^p \left\langle \Big(1 - \chi\big(\tfrac{m}{s}\big)\Big) \cdot \varphi, U(s)\right\rangle =$
$= \lim\limits_{s\to\infty} \left\langle s^{p+N}\Big(1 - \chi\big(\tfrac{m}{s}\big)\Big)\varphi,\ s^{-N}U(s)\right\rangle = 0$, d.h.
$\forall p \in \mathbb{N} : \lim\limits_{s\to\infty} s^p U(s) = 0$ in $\mathcal{S}'(M^l; W^{\otimes l})$.

b) Wenn wir Beweisteil a) von Satz 16.2 näher betrachten, so sehen wir, dass $\operatorname{supp} \mathcal{F}h(f_0) \subset \big\{v \in V'_+ : [v,v] \geq m_1^2\big\} =: \overline{V'_{m_1}}$, falls $f_0(\Omega) = 0$.
Denn $\sigma(P_\alpha) \subset \{0\} \cup \overline{V'_{m_1}}$ nach Axiom 5) a), b), S. 171, und wenn $f_0 \in E'$, $f_0(\Omega) = 0$, so kann f_0 durch Eigenfunktionen von P_α approximiert werden, deren Eigenwerte ± 0 sind. Im Beweisteil b) von Satz 16.2 liefert diese Beobachtung, dass die Fouriertransformierte bezüglich v von
$\big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots\Phi^{\varepsilon_j}(\varphi_j)U(v,I)\Phi^{\varepsilon_{j+1}}(\varphi_{j+1})\cdots\Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega,\Omega\big) -$
$\big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots\Phi^{\varepsilon_j}(\varphi_j)\Omega,\Omega\big)\cdot\big(\Phi^{\varepsilon_{j+1}}(\varphi_{j+1})\cdots\Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega,\Omega\big)$
Träger in $\overline{V'_{m_1}}$ hat.
(Hier ist $x = \Phi^{\varepsilon_{j+1}}(\varphi_{j+1})\cdots\Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega$, $f = \Phi^{-\varepsilon_j}(\overline{\varphi}_j)\cdots\Phi^{-\varepsilon_1}(\overline{\varphi}_1)\Omega \in H \hookrightarrow E'$, $f_0 = f - \Omega \cdot f(\Omega)$.)
Daher ist für $\varphi \in \mathcal{S}(M^l; W'^{\otimes l})$:

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_v\big[\big\langle \varphi, T_\varepsilon(m', m''+v) - T_{\varepsilon'}(m')T_{\varepsilon''}(m'')\big\rangle\big] \subset \overline{V'_{m_1}}.$$

Die Betrachtung von $\big(\Phi^{\varepsilon_{j+1}}(\varphi_{j+1})\cdots\Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)U(v,I)\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots\Phi^{\varepsilon_j}(\varphi_j)\Omega,\Omega\big)$
$-\big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1)\cdots\Phi^{\varepsilon_j}(\varphi_j)\Omega,\Omega\big)\cdot\big(\Phi^{\varepsilon_{j+1}}(\varphi_{j+1})\cdots\Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_l)\Omega,\Omega\big)$
ergibt ebenso, dass

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_v\big[\big\langle \varphi, T_{\varepsilon''\varepsilon'}(m''-v, m') - T_{\varepsilon'}(m')T_{\varepsilon''}(m'')\big\rangle\big] \subset \overline{V'_{m_1}}.$$

c) $U(s,v) := \big(T_\varepsilon \pm \sigma(T_\varepsilon)\big)(m', m''+v+sw) = A + B + C$, wobei
$A = T_\varepsilon(m', m''+v+sw) - T_{\varepsilon'}(m')T_{\varepsilon''}(m'')$,
$B = \pm\big[\sigma(T_\varepsilon)(m', m''+v+sw) - T_{\varepsilon'}(m')T_{\varepsilon''}(m'')\big]$,
$C = \begin{cases} 0 & \text{für } - \\ 2T_{\varepsilon'}(m')T_{\varepsilon''}(m'') & \text{für } + \text{ d.h. für } +\text{Quantelung und } j, (l-j) \text{ ungerade.} \end{cases}$

Wenn $\varphi \in \mathcal{S}(M^l; W'^{\otimes l})$, so ist $\forall s :$ $\operatorname{supp} \mathcal{F}_v\big(\langle \varphi, A\rangle\big) \subset \overline{V'_{m_1}}$,
$\operatorname{supp} \mathcal{F}_v\big(\langle \varphi, B\rangle\big) \subset -\overline{V'_{m_1}}$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}_v\big(\langle \varphi, C\rangle\big) \subset \{0\}$.

Andererseits gilt nach a), dass $\forall p$:

$$\lim_{s\to\infty} s^p U(s,v) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'(M^l \times V; W^{\otimes l}) \implies$$

$$\implies \lim_{s\to\infty} s^p \mathcal{F}_v\big(\langle\varphi, U(s,v)\rangle\big) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'(V).$$

Aufgrund der Trägerbedingung folgt: $\forall p : \lim_{s\to\infty} s^p\langle\varphi, A\rangle = 0$ in $\mathcal{S}'(V)$ und damit die Behauptung. □

Bemerkung Aus dem Beweis folgt auch, dass $C = 0$, d.h. die l-Punkt-Funktionen eines +gequantelten Feldes verschwinden für ungerades l. Dies stimmt (bei Zugrundelegung des Spin-Statistik-Theorems, vgl. S. 224) mit der Bemerkung in S. 208 überein.

C) Der Rekonstruktionssatz

Theorem *(Wightman 1956)*
$\varrho = \mathcal{D}^{(J,K)} : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W)$ und $- : W^{(\prime)} \longrightarrow W^{(\prime)}$ seien vorgegeben. Für $l = 0$ sei $T = 1$ und für $l = 1, 2, \cdots$, $\varepsilon \in \{+,-\}^l$ seien $T_\varepsilon \in \mathcal{S}'(M^l; W^{\otimes l})$ mit den Eigenschaften von Satz 16.1 bis 16.6. Dann existieren ein GRT $E \subset H \subset E'$ und ein Quantenfeld $\Phi : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow L(E,E)$, die die Axiome 1–4, 6–8 und Eindeutigkeit des Vakuums erfüllen und mit den l-Punkt-Funktionen T_ε. Φ ist eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz.

Beweisskizze $E_1 := \big\{\varphi = (\varphi_\varepsilon) \in \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{\varepsilon\in\{+,-\}^l} \mathcal{S}(M^l; W'^{\otimes l}) : \forall\varphi : \exists k : \forall l \geq k : \forall\varepsilon \in \{+,-\}^l : \varphi_\varepsilon = 0\big\}$ mit der kanonischen Operation von P_0 :

$$P_0 \longrightarrow L(E_1) : \Lambda = (a, A) \longmapsto \Big(\varphi \longmapsto \big(\varrho'^{\varepsilon_1}(A)\otimes\cdots\otimes\varrho'^{\varepsilon_l}(A)\varphi_\varepsilon\big(\mathbb{T}(\Lambda)^{-1}m_1, \cdots\big)\big)\Big),$$

wobei $\varrho' : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W')$, $\varrho'^{+} = \varrho'$, $\varrho'^{-}(A)w = \overline{\varrho'(A)\overline{w}}$.
Wenn $\forall\varepsilon : \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_\varepsilon^l$, so sollte φ dem Element $\sum_\varepsilon \Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_\varepsilon^1)\cdots\Phi^{\varepsilon_l}(\varphi_\varepsilon^l)\Omega$ entsprechen. Daher definieren wir: $(\varphi,\psi)_{E_1} := \sum_{\varepsilon,\varepsilon'} \big\langle\overline{\psi}_\varepsilon \otimes \varphi_{\varepsilon'}, \sigma_{|\varepsilon|\,|\varepsilon'|}(T_{-\varepsilon,\varepsilon'})\big\rangle$ mit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l)$,

$\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_{l'}),\ |\varepsilon| = l,\ |\varepsilon'| = l',\ \sigma_{ll'} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & l & l+1 & \cdots & l+l' \\ l & \cdots & 1 & l+1 & \cdots & l+l' \end{pmatrix} \in S_{l+l'}$.
Die Eigenschaften der Sätze 16.1,16.3, 16.5 bewirken, dass $(-,-)_{E_1}$ eine P_0-invariante positiv semidefinite Sesquilinearform wird.

$$\Phi_1 : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow L(E_1, E_1) : h \longmapsto (\varphi \longmapsto \psi),$$

wobei

$$\psi_\varepsilon = \begin{cases} 0 & : \ \varepsilon_1 = - \\ h \otimes \varphi_{\varepsilon'} & : \ \varepsilon = (+, \varepsilon'). \end{cases}$$

$$\Phi_1^* : \mathcal{S}(M; W') \longrightarrow L(E_1, E_1) : h \longmapsto (\varphi \longmapsto \psi),$$

wobei

$$\psi_\varepsilon = \begin{cases} 0 & : \ \varepsilon_1 = + \\ \overline{h} \otimes \varphi_{\varepsilon'} & : \ \varepsilon = (-, \varepsilon'). \end{cases}$$

Der * ist hier noch formal! Aber es gilt
$\forall h \in \mathcal{S}(M; W)\ \forall \varphi, \psi \in E_1 : \big(\Phi_1(h)\varphi, \psi\big)_{E_1} = \big(\varphi, \Phi_1^*(h)\psi\big)$.
Nun sei $E_2 := E_1 \big/ \big\{\varphi \in E_1 : (\varphi, \varphi)_{E_1} = 0\big\},\ H :=$ Vervollständigung von $E_2,\ \mathrm{kan} : E_1 \longrightarrow E_2$.
Wegen $\Big|\big(\Phi(h)\varphi, \Phi(h)\varphi\big)\Big| = \Big|\big(\varphi, \Phi^*(h)\Phi(h)\varphi\big)\Big| \leq \|\varphi\|_{E_1} \cdot \big\|\Phi^*(h)\Phi(h)\varphi\big\|_{E_1}$ sind Φ, Φ^* auf E_2 übertragbar. Die Sätze 16.4 und 16.6 ergeben die Lokalität und die Eindeutigkeit des Vakuums. $\Omega := \mathrm{kan}(1, 0, \cdots)$.

$$\big(\Phi^{\varepsilon'_1}(h_1) \cdots \Phi^{\varepsilon'_l}(h_l)\Omega, \Omega\big)_{E_2} = \big(\mathrm{kan}(\varphi), \Omega\big)_{E_2}$$

wobei

$$\varphi_\epsilon = \begin{cases} 0 & : \ \varepsilon \neq \varepsilon' \\ h_1 \otimes \cdots \otimes h_l & : \ \varepsilon = \varepsilon' \end{cases} \implies \big(\mathrm{kan}(\varphi), \Omega\big)_{E_2} = \langle h_1 \otimes \cdots \otimes h_l, T_{\varepsilon'} \rangle,$$

es ergeben sich also die geforderten Vakuumserwartungswerte. $E :=$ Vervollständigung von E_2 bzgl. der Normen $p_n(\mathrm{kan}\,\varphi) := \inf\limits_{\substack{\psi \in E_1 \\ \mathrm{kan}(\varphi - \psi) = 0}} \sum\limits_{\sum} |\varepsilon|^n p_{|\varepsilon|,n}(\varphi_\varepsilon)$, mit

$$|\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l| = l,\ p_{|\varepsilon|,n}(\varphi_\varepsilon) = \sup_{x \in M^{|\varepsilon|}} \big(1 + |x|\big)^n \sum_{|\alpha| \leq n} \big\|\partial^\alpha \varphi_\varepsilon(x)\big\|_{W^{\otimes|\varepsilon|}}.$$

Die Eindeutigkeit der Konstruktion bis auf Äquivalenz (abgesehen von E; dieses kann verschieden gewählt werden) folgt aus Axiom 8, S. 181: vgl. den Beweis in S. 185. Weitere Details: Streater-Wightman, p. 118; Bogolyubov, p. 287.

D) Holomorphe Fortsetzung der Wightman-Funktionen

V sei ein reeller, endlich-dimensionaler Vektorraum, $\Gamma \subset V'$ sei ein abgeschlossener, spitzer, konvexer Kegel mit Spitze in 0 und $\overset{\circ}{\Gamma} \neq \{\}$, z.B. $\overline{V'_+}$.
$\mathcal{S}'(\Gamma) := \big\{T \in \mathcal{S}'(V') : \operatorname{supp} T \subset \Gamma\big\}$ mit der von $\mathcal{S}'(V')$ induzierten Topologie.
$C := \Gamma^* := \big\{v \in V : \forall y \in \Gamma : \langle v, y\rangle > 0\big\}$ heißt dualer Kegel,
$H(C) := \big\{h : V + \mathrm{i}C \longrightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch } : \exists n : p_n(h) < \infty\big\}$, wobei
$p_n(h) := \sup\Big\{\big|h(u)\big|\big(1 + \|u\|\big)^{-n}\Delta_c(w)^n : u = v + \mathrm{i}w \in V + \mathrm{i}C\Big\}$ und $\Delta_C(w) := \sup\big\{\|w - w_1\| : w_1 \in \partial C\big\}$, $\|\cdot\|$ Norm auf $V + \mathrm{i}V$. $H(C)$ wird mit der induktiven Limestopologie bzgl. p_n versehen.

Satz 16.7
$\mathcal{L} : \mathcal{S}'(\Gamma) \longrightarrow H(\Gamma^*)$
$T \longmapsto \big(u = v + \mathrm{i}w \longmapsto \overline{\mathcal{F}}_y(T \cdot \mathrm{e}^{-\langle w,y\rangle}) = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle u,y\rangle}, T\rangle$ ist ein topologischer Isomorphismus. Für $T \in \mathcal{S}'(\Gamma)$ ist

$$\overline{\mathcal{F}}T = \lim_{\substack{w \in \Gamma^* \\ w \to 0}} (\mathcal{L}T)(v + \mathrm{i}w) \text{ in } \mathcal{S}'(V).$$

Beweis Vladimirov, § 12.

Anwendung Wenn t wie in S. 208, so gilt also nach Satz 16.2: $(2\pi)^{4l-4}t = \lim\limits_{\substack{w \in V_+^{l-1} \\ w \to 0}} h(v + \mathrm{i}w)$ in $\mathcal{S}'(V^{l-1})$, wobei $h = \mathcal{L}(\mathcal{F}t)$. Man beachte, dass $\overline{V'_+}^* = V_+$.
Nach Satz 16.1 ist t Lorentz-invariant:

$$\forall A \in \mathcal{L}_0 : \underbrace{\varrho^{\varepsilon_1}(A) \otimes \cdots \otimes \varrho^{\varepsilon_l}(A)}_{=:\varrho^{\varepsilon}(A)}\, t\, \underbrace{\big(\pi(A)^{-1}v_1, \cdots, \pi(A)^{-1}v_{l-1}\big)}_{=:\pi(A)^{-1}v} = t.$$

Für $\mathcal{F}t$ gilt daher:
$\forall A \in \mathcal{L}_0 : \varrho^{\varepsilon}(A)\mathcal{F}t\big(\pi(A)^T y\big) = \mathcal{F}t$ und für h folgt:
$\forall A \in \mathcal{L}_0 : \forall v + \mathrm{i}w \in V^{l-1} + \mathrm{i}V_+^{l-1} : \varrho^{\varepsilon}(A)h\big(\pi(A)^{-1}(v + \mathrm{i}w)\big) = h(v + \mathrm{i}w)$
$\varrho^{\varepsilon} : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W^{\otimes l})$ ist eine *reelle* (für $l \geq 2$ reduzible) Darstellung von $\mathcal{L}_0 \simeq \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$. Nach S. 162–164 erhalten wir durch Komplexifizierung eine *komplexe* Darstellung $\widetilde{\varrho^{\varepsilon}}$ von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$, der universellen Überlagerungsgruppe von $\mathcal{L}_+^C$. $\widetilde{\varrho^{\varepsilon}}$ könnte ganz analog zu $\tilde{\pi}$ in S. 164 durch Komplexifizierung der entsprechenden Lie-Algebren-Darstellung konstruiert werden ($\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})_{rc} \simeq \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ etc.) Da

$\widetilde{\varrho^\varepsilon}$ analytisch ist und da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & & \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) & \stackrel{\varrho^\varepsilon}{\longrightarrow} & \mathrm{Gl}(W^{\otimes l}) \\ \big\updownarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle k} & \nearrow{\scriptstyle \widetilde{\varrho^\varepsilon}} & \\ (A,\overline{A}) & & \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) & & \end{array}$$

kommutieren muss, können wir das Ergebnis in Standardkoordinaten sofort hinschreiben:

$$W = \mathbb{C}^{2\otimes n}_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{C}^{2\otimes m}_{\mathrm{sym}},\ n = 2J,\ m = 2K$$

$$\begin{array}{lcl} \varrho & = & \mathcal{D}^{(J,K)} : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Gl}(W) : A \longmapsto (z^{\alpha\dot\beta} \longmapsto A^\alpha{}_\gamma \overline{A^{\dot\beta}{}_{\dot\delta}}\, z^{\gamma\dot\delta}), \\ \varrho^- & \simeq & \mathcal{D}^{(K,J)} : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Gl}(W) : A \longmapsto (z^{\dot\alpha\beta} \longmapsto \overline{A^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}} A^\beta{}_\delta\, z^{\dot\gamma\delta}), \\ \varrho^\varepsilon & = & \varrho^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes \varrho^{\varepsilon_l}, \\ \tilde\varrho & : & \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Gl}(W) : (A,B) \longmapsto (z^{\alpha\beta} \longmapsto A^\alpha{}_\gamma B^\beta{}_\delta\, z^{\gamma\delta}), \\ \widetilde{\varrho^-} & : & \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Gl}(W) : (A,B) \longmapsto (z^{\alpha\beta} \longmapsto B^\alpha{}_\gamma A^\beta{}_\delta\, z^{\gamma\delta}), \\ \widetilde{\varrho^\varepsilon} & = & \widetilde{\varrho^{\varepsilon_1}} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\varrho^{\varepsilon_l}}. \end{array}$$

Wir betrachten nun wieder die Gleichung

$$\varrho^\varepsilon(A)h(u) = h\big(\pi(A)u\big),$$

$u = v + \mathrm{i}w \in V^{l-1} + \mathrm{i}V_+^{l-1} =: \mathcal{T}_{l-1},\ A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$.

Beide Seiten sind bzgl. A lediglich *reell*-analytisch, lassen sich jedoch als Einschränkungen der folgenden holomorphen Abbildungen auffassen:

$$\begin{array}{l} f_1 : X := \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{T}_{l-1} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad\qquad (A,B,u) \longmapsto \widetilde{\varrho^\varepsilon}(A,B)h(u); \\ f_2 : Y := \big\{(A,B,u) \in X : \tilde\pi(A,B)(u) \in \mathcal{T}_{l-1}\big\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad\qquad (A,B,u) \longmapsto h\big(\tilde\pi(A,B)u\big). \end{array}$$

f_1, f_2 stimmen überein, wenn $B = \tilde A$, und daher auch für alle (A,B,u) in einer Umgebung jedes $(A_0, \overline{A_0}, u_0),\ u_0 \in \mathcal{T}_{l-1}$, denn die Koeffizienten der Taylorreihen sind durch Kenntnis der Funktionen f_1, f_2 für $B = \overline{A}$ bereits festgelegt.
Wenn sich h von $\mathcal{T}_{l-1}$ analytisch fortsetzen lässt zu $\tilde h$ auf

$$\mathcal{T}'_{l-1} := \bigcup_{(A,B)\in\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})^2} \tilde\pi(A,B)\mathcal{T}_{l-1} = \bigcup_{C\in\mathcal{L}_+^C} C\mathcal{T}_{l-1},$$

so könnte auch f_2 unmittelbar auf X analytisch fortgesetzt werden. Wegen der Eindeutigkeit einer analytischen Fortsetzung in die zusammenhängende komplexe

Mannigfaltigkeit X müssen f_1 und f_2 überall übereinstimmen, d.h. es gilt der

Satz
Wenn sich h analytisch zu $\tilde{h}$ auf $\mathcal{T}'_{l-1}$ fortsetzen lässt, so gilt

$$\tilde{h}\big(\tilde{\pi}(A,B)u\big) = \widetilde{\varrho^{\varepsilon}}(A,B)h(u) \quad \text{für} \quad (A,B,u) \in X.$$

Dass sich h nach $\mathcal{T}'_{l-1}$ analytisch fortsetzen lässt, ist nicht selbstverständlich: Es könnte ja $\widetilde{\varrho^{\epsilon}}(A_1,B_1)h(u_1) \neq \widetilde{\varrho^{\varepsilon}}(A_2,B_2)h(u_2)$ sein für $\tilde{\pi}(A_1,B_1)(u_1) = \tilde{\pi}(A_2,B_2)(u_2),\ (A_i,B_i,u_i) \in X$.

Theorem *(Bargmann, Hall, Wightman 1957–60)*
$\varrho : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Gl}(W)$ sei eine endlichdimensionale reelle Darstellung,
$h : \mathcal{T}_m = V^m + \mathrm{i}V_+^m \longrightarrow W$ sei analytisch und $\mathcal{L}_0$-invariant, d.h.
$\varrho(A)h(u) = h\big(\pi(A)u_1, \cdots, \pi(A)u_m\big)$. Dann lässt sich h in $\mathcal{T}'_m$ analytisch fortsetzen.

Beweis.
a) Ebenso wie oben (wo $W \longleftrightarrow W^{\otimes l},\ \varrho \longleftrightarrow \varrho^{\varepsilon}$) sei die $\tilde{\varrho}$ die Komplexifizierung von ϱ. Angenommen, es sei bereits gezeigt, dass $\forall (A_i,B_i,u_i) \in X : \tilde{\pi}(A_1,B_1)(u_1) = \tilde{\pi}(A_2,B_2)(u_2) \implies \tilde{\varrho}(A_1,B_1)h(u_1) = \tilde{\varrho}(A_2,B_2)h(u_2)$.
Dann ist die Abbildung

$$\tilde{h} : \mathcal{T}'_m \longrightarrow \mathbb{C} : \tilde{\pi}(A,B)\underbrace{(u)}_{\in \mathcal{T}_m} \longmapsto \tilde{\varrho}(A,B)h(u)$$

wohldefiniert, offenbar analytisch und $\tilde{h}\big|_{\mathcal{T}_m} = h$.

b) Wenn wir $A = A_1^{-1}A_2,\ B = B_1^{-1}B_2$ setzen, so bleibt noch zu zeigen:

$$\forall (A,B,u) \in X : \tilde{\pi}(A,B)u \in \mathcal{T}_m \implies \tilde{\varrho}(A,B)h(u) = h\big(\tilde{\pi}(A,B)u\big)$$

oder, anders ausgedrückt, dass $f_2 = f_1\big|_Y$. Dafür wiederum genügt es nachzuweisen, dass Y (weg)zusammenhängend ist.

c) Es sei $(A,B,u) \in Y$; wenn $C,D \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$, so ist auch $\big(CAD, \overline{C}B\overline{D}, \pi(D)^{-1}u\big) \in Y$, denn

$$\tilde{\pi}(CAD, \overline{C}B\overline{D})\pi(D)^{-1}u = \pi(C)\tilde{\pi}(A,B)\pi(D)\pi(D)^{-1}u \in \mathcal{T}_m.$$

Es sei nun $(A_1,B_1,u_1) \in Y$ vorgegeben. Da die Menge
$\big\{(A,\overline{A},u) : A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}), u \in \mathcal{T}_m\big\} \subset Y$ zusammenhängend ist, genügt es, einen Weg

$g : [0,1] \longrightarrow Y$ mit $g(0) = (A_0, \overline{A}_0, u_0),\ u_0 \in \mathcal{T}_m,\ g(1) = (A_1, B_1, u_1)$ anzugeben. Wenn $\overline{g} : [0,1] \longrightarrow Y : t \longmapsto \big(A(t), B(t), u(t)\big)$ mit

$$\overline{g}(0) = \big(I, I, \pi(D)^{-1}u_0\big),\ \overline{g}(1) = \big(CA_1D, \overline{C}B_1\overline{D}, \pi(D)^{-1}u_1\big)$$

ist, so hat $g(t) := \big(C^{-1}A(t)D^{-1}, \overline{C}^{-1}B(t)\overline{D}^{-1}, \pi(D)u(t)\big)$ die erforderlichen Eigenschaften. Anstelle von $(A_1, B_1, u_1) \in Y$, können wir also
$(A_2, B_2, u_2) := (CA_1D, \overline{C}B_1\overline{D}, \pi(D)^{-1}u_1)$ vorgeben. Wenn wir speziell
$D = A_1^{-1}C^{-1}$ setzen, erhalten wir $(A_2, B_2, u_2) = \big(I, \overline{C}B_1\overline{A}_1^{-1}\overline{C}^{-1}, \pi(CA)u_1\big)$. Durch geeignete Wahl von $\overline{C}$ bringen wir $B_1\overline{A}_1^{-1}$ in Jordan'sche Normalform, d.h. oEdA $A_1 = I,\ B_1 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ oder $B_1 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{pmatrix},\ \gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$.

d) Es werde als erstes der Fall $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ betrachtet. Wir zeigen, dass dieser Fall gar nicht auftreten kann, da $\forall u \in \mathcal{T}_m : (I, B_1, u) \notin Y$, d.h. $\forall u \in \mathcal{T}_m : \tilde{\pi}(I, B_1)u = F^{-1}\big(F(u)B_1^T\big) \notin \mathcal{T}_m$. (Alles ist hier wie immer komponentenweise zu verstehen: $u = u_1, \cdots, u_m,\ F(u) = F(u_1), \cdots, F(u_m)$ etc.)
Ab hier sei oEdA $m = 1$.
$\tilde{u} := F^{-1}\big(F(u)B_1^T\big) = -u + F^{-1}\left(F(u)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -u + F^{-1}\begin{pmatrix} u^1 - \mathrm{i}u^2 & 0 \\ u^0 - u^3 & 0 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2}(-2u^0 + u^1 - \mathrm{i}u^2,\ -2u^1 + u^0 - u^3,\ -2u^2 - \mathrm{i}u^0 + \mathrm{i}u^3,\ -2u^3 + u^1 - \mathrm{i}u^2)$;
$u = v + \mathrm{i}w,\ \tilde{u} = \tilde{v} + \mathrm{i}\tilde{w} \implies$
$\tilde{w} = \frac{1}{2}(-2w^0 + w^1 - v^2,\ -2w^1 + w^0 - w^3,\ -2w^2 - v^0 + v^3,\ -2w^3 + w^1 - v^2)$. Wenn $u \in \mathcal{T}_1$, so ist $w \in V_+$ und daher $w^0 > w^3$ und damit $\tilde{w}^0 < \tilde{w}^3$, d.h. $\tilde{u} \notin \mathcal{T}_1$.

e) Als zweites werde $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ betrachtet. Wir setzen $A(t) = I$,
$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 1$. Zunächst sei $u(t) = u_0 = (\mathrm{i}, 0, 0, 0) \in \mathcal{T}_1$. Dann liegt $\big(A(t), B(t), u(t)\big)$ in Y, denn $\tilde{\pi}\big(A(t), B(t), u(t)\big) = \big(\mathrm{i}, \frac{\mathrm{i}t}{2}, \frac{t}{2}, 0\big) \in \mathcal{T}_1$. Wenn andererseits $(I, B_1, u_1) \in Y$, so ist auch $(I, B_1, su_0 + (1-s)u_1) \in Y$ für $0 \le s \le 1$, da $\mathcal{T}_1$ konvex ist. (Gleiches Argument für $\mathcal{T}_m$!)

f) Es bleibt der Fall $B_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^z & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-z} \end{pmatrix},\ z = \alpha + \mathrm{i}\beta,\ \alpha \in \mathbb{R},\ -\pi < \beta \le \pi$ zu betrachten. Wiederum genügt es, einen Weg von (I, I, u_0) zu (I, B_1, u_0) für irgendein $u_0 \in \mathcal{T}_1$ anzugeben (vgl. das Argument oben).

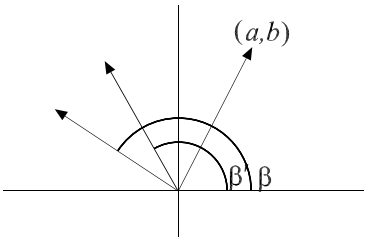
$$\tilde{u} := F^{-1}\big(F(u)B_1^T\big) = F^{-1}\begin{pmatrix} (u^0 + u^3)\mathrm{e}^z & (u^1 - \mathrm{i}u^2)\mathrm{e}^{-z} \\ (u^1 + \mathrm{i}u^2)\mathrm{e}^z & (u^0 - u^3)\mathrm{e}^{-z} \end{pmatrix} =$$

$$= (u^0 \mathrm{ch}\, z + u^3 \mathrm{sh}\, z,\ u^1 \mathrm{ch}\, z + \mathrm{i}u^2 \mathrm{sh}\, z,\ -\mathrm{i}u^1 \mathrm{sh}\, z + u^2 \mathrm{ch}\, z,\ u^0 \mathrm{sh}\, z + u^3 \mathrm{ch}\, z)$$

Speziell für $u_0 = (a\mathrm{i}, 0, 0, b),\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ ist $\tilde{u}_0 = \tilde{v}_0 + \mathrm{i}\tilde{w}_0$ mit
$\tilde{w}_0 = (a\cos\beta + b\sin\beta)(\mathrm{ch}\,\alpha, 0, 0, \mathrm{sh}\,\alpha) \in V_+ \Longleftrightarrow a\cos\beta + b\sin\beta > 0 \Longleftrightarrow$
$\left| \measuredangle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \right| < \frac{\pi}{2}.$

Wenn $|\beta| < \pi$, so ist das letzte für geeignetes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ erfüllt und es gilt dann sogar $\left| \measuredangle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\beta' \\ \sin\beta' \end{pmatrix} \right| < \frac{\pi}{2}$ für β' zwischen 0 und β.

Bild:



Daher ist in diesem Fall $g(t) = \left(I, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t(\alpha+\mathrm{i}\beta)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t(\alpha+\mathrm{i}\beta)} \end{pmatrix}, u_0 \right),\ 0 \le t \le 1$, ein Weg der gesuchten Art. Der Fall $\beta = \pi$ kann hingegen nicht auftreten, da für $u = v + \mathrm{i}w \in \mathcal{T}_1$ und $\beta = \pi$ gilt $\tilde{u}^0 = -u^0 \mathrm{ch}\,\alpha - u^3 \mathrm{sh}\,\alpha$, d.h. $\tilde{u} = \tilde{v} + \mathrm{i}\tilde{w}$ und $\tilde{w}^0 = -w^0 \mathrm{ch}\,\alpha - w^3 \mathrm{sh}\,\alpha < 0$ und somit $\tilde{u} \notin \mathcal{T}_1$. □

E) Jost-Punkte und Beispiel

Definition 16.2
$u \in \mathcal{T}'_m \cap V^m$ heißt *Jost-Punkt*.

Die Jost-Punkte sind also reelle Punkte v, in denen $t(v_1, \cdots, v_{l-1})$ analytisch ist.

Satz 16.8
v Jost-Punkt $\iff \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_m \geq 0$ mit $\sum \lambda_j > 0$ gilt:

$$\Big[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\Big] < 0.$$

Beweis.
" $\Longrightarrow$" Es sei $v = \tilde{\pi}(A,B)\overline{u} = \big(\tilde{\pi}(A,B)\overline{u}_1, \cdots, \tilde{\pi}(A,B)\overline{u}_m\big)$ mit $\overline{u} \in \mathcal{T}_m \implies \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = \tilde{\pi}(A,B)\big(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \overline{u}_j\big) = \tilde{\pi}(A,B)u, u \in \mathcal{T}_1 \implies \mathbb{R} \ni \big[\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j v_j,\ \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\big] = [u_0, u_0]$.

Es sei $u_0 = v_0 + \mathrm{i}w_0,\ w_0 \in V_+;\ [u_0, u_0] \in \mathbb{R} \implies [v_0, w_0] = 0$
$\implies [v_0, v_0] \leq 0$ (wegen $w_0 \in V_+$) $\implies [u_0, u_0] = [v_0, v_0] - [w_0, w_0]$
$< 0 \implies \big[\sum \lambda_j v_j, \sum \lambda_j v_j\big] < 0.$

" $\Longleftarrow$" Unter der angegebenen Bedingung spannen $v_1, \cdots, v_m \in V$ einen konvexen Kegel K auf, der zur Gänze in $V \setminus (\overline{V}_+ \cup \overline{V}_-)$ liegt. (Bild 1)

Bild 1:

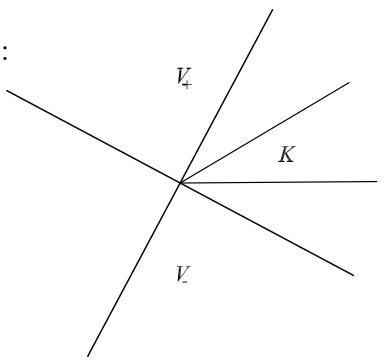
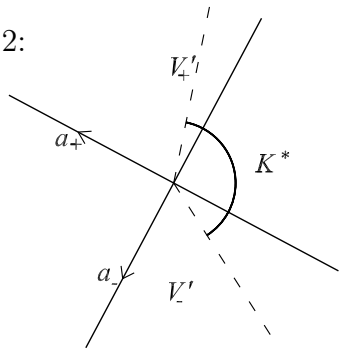


Bild 2:



Daher existieren $a_\pm \in V'$ mit $[a_\pm, a_\pm] = 0$ und $\langle a_\pm, v\rangle > 0$ für $v \in V_\pm$ und $\langle a_\pm, v\rangle < 0$ für $v \in K$ (Bild 2). Bei geeigneter Wahl von $a_\pm$ und der Koordinaten ist $a_\pm = (\pm 1, -1, 0, 0)$ und folglich $\pm v^0 - v^1 < 0,\ v^1 > |v^0|$ für $v \in K$. Die Transformation $C : u \longmapsto (\mathrm{i}u^1, \mathrm{i}u^0,\ u^2, u^3)$ liegt in $\mathcal{L}_+^C$ und $\forall v \in K : Cv \in \mathcal{T}_1$, d.h. $(v_1, \cdots, v_m) \in \mathcal{T}'_m$. □

Beispiel 45 a) Wir betrachten zunächst die 2-Punkt-Funktion des freien, neutralen Skalarfeldes, vgl. S. 187, S. 206: $T_2 = \frac{1}{2}S_0(\overrightarrow{m_1 m_2}),\ t = \frac{1}{2}S_0 = \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}}(\mathrm{d}\mu)$, $\mathrm{d}\mu = \dfrac{\delta\big(y_0 - \sqrt{m^2 + \vec{y}^2}\big)}{\sqrt{m^2 + \vec{y}^2}}$; wie in S. 215 sei $h = \mathcal{L}\mathcal{F}t = \frac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\mathrm{d}\mu) =$
$= \frac{1}{2}(2\pi)^4\mathcal{L}(\mathrm{d}\mu) = \frac{1}{2}(2\pi)^4\mathcal{F}_y(\mathrm{d}\mu \cdot \mathrm{e}^{-\langle w,y\rangle}),\ w \in V^+$.
$\mathrm{d}\mu \cdot \mathrm{e}^{-\langle w,y\rangle}$ ist ein integrables Maß $\Longrightarrow$
$h = \dfrac{1}{2}(2\pi)^4 \displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle v,y\rangle - \langle w,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle u,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu.$

Speziell für $v = 0,\ w = (w^0, 0, 0, 0)$ ergibt sich:
$h = \dfrac{1}{2}(2\pi)^4 \displaystyle\int \mathrm{e}^{-w_0\cdot\sqrt{m^2+\vec{y}^2}}\,\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\sqrt{m^2+\vec{y}^2}} =$
$= \dfrac{1}{2}(2\pi)^4 \cdot 4\pi \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-w^0\sqrt{m^2+r^2}}\,\frac{r^2\,\mathrm{d}r}{\sqrt{m^2+r^2}} = \left(s = \frac{1}{m}\sqrt{m^2+r^2}\right) =$
$= (2\pi)^5 m^2 \displaystyle\int_1^\infty \mathrm{e}^{-w^0 sm}\sqrt{s^2-1}\,\mathrm{d}s = (2\pi)^5\,\frac{mK_1(mw^0)}{w^0}\,.$
Für $v = 0$ muss h Lorentz-invariant sein, d.h.
$h(\mathrm{i}w) = \dfrac{(2\pi)^5 m}{\sqrt{[w,w]}}\,K_1\big(m\sqrt{[w,w]}\big)$ für $w \in V_+$. Da h analyisch ist, folgt nun allgemein für $u \in \mathcal{T}_1 : h(u) = \dfrac{(2\pi)^5 m}{\sqrt{[-u,u]}}\,K_1\big(m\sqrt{[-u,u]}\big)$. Beachte, dass für $u = v + \mathrm{i}w \in \mathcal{T}_1$ gilt $[-u,u] \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (vgl. " $\Longrightarrow$" im Beweis des letzten Satzes). In $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sind $K_1(z)$ und $\sqrt{z}$ analytisch. Wie wir wissen, lässt sich h analytisch zu $\tilde{h}$ in $\mathcal{T}'_1$ fortsetzen. Da $\mathcal{T}_1 \subset \big\{u : [u,u] \notin (-\infty, 0]\big\}$, gilt dasselbe auch für $\mathcal{T}'_1$ (tatsächlich ist $\mathcal{T}'_1$ diese Menge). Weiters ist $t = (2\pi)^{-4} \lim\limits_{\substack{w\in V_+\\ w\to 0}} h(v + \mathrm{i}w)$ in $\mathcal{S}'$; da h in die Jostpunkte $[v,v] < 0$ analytisch fortsetzbar ist, folgt insbesondere:

$$S_0 = \frac{4\pi m}{\sqrt{[-v,v]}} \cdot K_1\big(m\sqrt{[-v,v]}\big) \text{ für } [v,v] < 0.$$

In $[v,v] \geq 0$ ist der Limes etwas schwieriger zu berechnen. Für $v \in V_\pm$ und $w \in V_+$

ist $\pm[v,w] > 0$, d.h. $[-u,u] \longrightarrow -[v,v] \mp \mathrm{i}0$. Wegen $\sqrt{-x \pm \mathrm{i}0} = \pm\mathrm{i}\sqrt{x}$ und $K_1(\pm\mathrm{i}m\sqrt{x}\,) = -\frac{\pi}{2}\big[J_1(m\sqrt{x}\,) \mp \mathrm{i}\mathcal{N}_1(\sqrt{x}\,)\big]$ für $x > 0$ folgt

$$S_0 = \frac{2\pi^2 m}{\sqrt{[v,v]}}\,\big[\mathcal{N}_1\big(m\sqrt{[v,v]}\,\big) \mp \mathrm{i}J_1\big(m\sqrt{[v,v]}\,\big)\big],\ v \in V_\pm.$$

Wegen $\mathcal{N}_1(\varepsilon) = -\frac{2}{\pi\varepsilon} + O(\varepsilon\ln\varepsilon),\ K_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon\ln\varepsilon),\ \varepsilon \searrow 0$, ist die Distribution

$$S_1 = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2 m}{\sqrt{[v,v]}}\,\Big[\mathcal{N}_1\big(m\sqrt{[v,v]}\,\big) \mp \mathrm{i}J_1\big(m\sqrt{[v,v]}\,\big)\Big]; v \in V_\pm \\ \dfrac{4\pi m}{\sqrt{[-v,v]}}\,K_1\big(m\sqrt{[-v,v]}\,\big) : [v,v] < 0 \end{cases}$$

in ähnlicher Weise wie $\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ definiert, d.h.

$$\langle\varphi, S_1\rangle = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{\left|[v,v]\right|>\varepsilon} \varphi(v)S_1(v)\,\mathrm{d}v.$$

Es gilt jedoch noch nicht $S_0 = S_1$ (bisher wurde nur gezeigt, dass $\mathrm{supp}(S_0 - S_1) \subset \big\{v : [v,v] = 0\big\} = \partial V_+ \cup \partial V_-$. Dies liegt daran, dass ähnlich wie bei der Formel von Sochozkij $\big(\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}(x \pm \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} = \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x)\big)$ noch δ-Terme auftreten.
Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

$$\lim_{\substack{w\in V^+\\ w\to 0}} \langle\varphi, h\rangle = (2\pi)^5 m \lim_{\substack{w\in V^+\\ w\to 0}} \int \varphi(v)\bigg(\frac{K_1\big(m\sqrt{[-u,u]}\,\big)}{\sqrt{[-u,u]}} + \frac{1}{m[u,u]}\bigg)\,\mathrm{d}v -$$
$$- (2\pi)^5 \lim_{\substack{w\in V^+\\ w\to 0}} \int \frac{\varphi(v)}{[u,u]}\,\mathrm{d}v.$$

$\lim\bigg(\dfrac{K_1\big(m\sqrt{[-u,u]}\,\big)}{\sqrt{[-u,u]}} + \dfrac{1}{m[u,u]}\bigg)$ lässt sich mit dem Satz von Lebesgue behandeln $\big($da $K_1(z) - \frac{1}{z} = O(|z|\ln|z|)\big)$ für $z \to 0\big)$ und es ergibt sich die lokal-integrable Funktion $\dfrac{S_1}{4\pi m} + \dfrac{1}{m[v,v]}$.

Wenn $\varphi(v) = 0$ für $(v^0)^2 + \vec{v}^{\,2} > N^2$, so ist weiters:

$$\lim_{\substack{w\in V^+\\ w\to 0}} \bigg\langle\varphi, \frac{1}{[u,u]}\bigg\rangle = \big(\text{ speziell } w = (\varepsilon,0,0,0)\big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \frac{\varphi(v)}{[v,v] + 2\mathrm{i}\varepsilon v^0 - \varepsilon^2} \,\mathrm{d}v = (\text{ Substitution } s = v^{0\,2} - \vec{v}^{\,2})$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \mathrm{d}\vec{v} \int\limits_{-\vec{v}^{\,2}}^{N^2} \left(\frac{\varphi\big(\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}\,, \vec{v}\big)}{s + 2\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}} - \varepsilon^2} + \frac{\varphi\big(-\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}\,, \vec{v}\big)}{s - 2\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}} - \varepsilon^2} \right) \frac{\mathrm{d}s}{2\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}} \,;$$

der erste Teil ergibt:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \mathrm{d}\vec{v} \int\limits_{-\vec{v}^{\,2}}^{N^2} \left[\frac{\varphi\big(\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}\,, \vec{v}\big)}{2\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}} - \frac{\varphi\big(|\vec{v}|, \vec{v}\big)}{2|\vec{v}|} \right] \frac{\mathrm{d}s}{s + 2\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}} - \varepsilon^2} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \frac{\varphi\big(|\vec{v}|, \vec{v}\big)}{2|\vec{v}|} \,\mathrm{d}\vec{v} \underbrace{\int\limits_{-\vec{v}^{\,2}}^{N^2} \frac{\mathrm{d}s}{s + 2\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}} - \varepsilon^2}}_{\substack{\to -\mathrm{i}\pi + \log(N^2/\vec{v}^{\,2}) \\ (\text{majorisiert bzgl. } \vec{v})}} =$$

$$= \int\limits_{-N^2}^{N^2} \frac{\mathrm{d}s}{s} \int \left[\frac{Y(s+\vec{v}^{\,2})\varphi\big(\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}\,, \vec{v}\big)}{2\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}} - \frac{\varphi\big(|\vec{v}|, \vec{v}\big)}{2|\vec{v}|} \right] \mathrm{d}\vec{v} - \mathrm{i}\pi \int \frac{\varphi\big(|\vec{v}|, \vec{v}\big)}{2|\vec{v}|} \,\mathrm{d}\vec{v} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\substack{|s|>\varepsilon \\ s>-\vec{v}^{\,2}}} \frac{\varphi\big(\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}\,, \vec{v}\big)}{2\sqrt{s+\vec{v}^{\,2}}} \,\mathrm{d}\vec{v} \,\frac{\mathrm{d}s}{s} - \mathrm{i}\pi \int \frac{\varphi\big(|\vec{v}|, \vec{v}\big)}{2|\vec{v}|} \,\mathrm{d}\vec{v}.$$

Nach analoger Behandlung des zweiten Teils folgt:

$S_0 = S_1 + 4\mathrm{i}\pi^2 \,\mathrm{sign}(v^0)\delta\big([v,v]\big)$, wobei

$$\Big\langle \varphi, \mathrm{sign}(v^0)\delta\big([v,v]\big) \Big\rangle = \int \frac{\varphi\big(|\vec{v}|, \vec{v}\big) - \varphi\big(-|\vec{v}|, \vec{v}\big)}{2|\vec{v}|} \,\mathrm{d}\vec{v}.$$

Bemerkung

1) Man beachte, dass S_0 in $[v,v] \neq 0$ reellanalytisch ist, nicht nur in den Jost-Punkten $[v,v] < 0$. Das bedeutet, dass $\tilde{h}$ in $\mathcal{T}_1'$ nicht die einzig mögliche analytische Fortsetzung von S_0 ist. Allerdings lässt sich S_0 in kein $\mathcal{T}_1'$ umfassendes Gebiet in $V + \mathrm{i}V$ analytisch fortsetzen.

2) $\mathcal{T}_1'$ ist symmetrisch, d.h. $u \in \mathcal{T}_1' \implies -u \in \mathcal{T}_1'$, denn $(u \longmapsto -u) \in \mathcal{L}_+^C$. Somit kann man auch $\lim\limits_{\substack{w \in V_- \\ w \to 0}} \tilde{h}(u)$ bilden, erhält aber $\check{S}_0$, da $\tilde{h}(-u) = \tilde{h}(u)$.

b) Nun sei l gerade, $T_l = 2^{-l/2} \sum\limits_{j_i < k_i} \prod\limits_{i=1}^{l/2} S_0(\overrightarrow{m_{j_i} m_{k_i}})$,

$t = 2^{-l/2} \sum\limits_{j_i<k_i} \prod\limits_{i=1}^{l/2} S_0(v_{j_i} + \cdots + v_{k_i-1}),\ h = \mathcal{L}\mathcal{F}t = (2\pi)^{4(l-1)}t$ in den Jost-Punkten.
Durch analytische Fortsetzung folgt also für $u \in \mathcal{T}'_{l-1}$:

$$\tilde{h}(u) = 2^{-l/2}(2\pi)^{4(l-1)} \sum_{j_i<k_i} \prod_{i=1}^{l/2} \frac{4\pi m K_1\big(m\sqrt{[-u_{j_i} - \cdots - u_{k_i-1}, u_{j_i} + \cdots + u_{k_i-1}]}}{\sqrt{[-u_{j_i} - \cdots - u_{k_i-1}, u_{j_i} + \cdots + u_{k_i-1}]}}$$

Wieder gilt $[-u_{j_i} - \cdots - u_{k_i-1}, u_{j_i} + \cdots + u_{k_i-1}] \in \mathbb{C} \setminus 0$ für $u \in \mathcal{T}'_{l-1}$.

F) Das Spin-Statistik-Theorem

Theorem *(Lüders, Zumino, Bourgoyne 1958)*
$\Phi : \mathcal{S}(M;W) \longrightarrow L(E,E)$ sei ein Quantenfeld mit ε-Quantelung, $\varepsilon \in \{+,-\}$ (vgl. Axiom 7, S. 181). Die zugrundeliegende Darstellung von $\mathcal{L}_0$ auf W sei äquivalent $\mathcal{D}^{(J,K)}$. Dann ist $\varepsilon = (-1)^{2(J+K)+1}$ oder $\Phi = 0,\ \dim H = 1$.

Beweis.
Nach Satz 16.4 (Lokalität, S. 210) gilt $T_{+-}(m_1,m_2) + \varepsilon T_{-+}(m_2,m_1) = 0$ in $[\overrightarrow{m_1m_2}, \overrightarrow{m_1m_2}] < 0$. (Dabei ist $\langle \varphi_1 \otimes \varphi_2, T_{+-}\rangle = \big(\Phi(\varphi_1)\Phi^*(\overline{\varphi}_2)\Omega, \Omega\big)_H$.)
Es sei wieder $T_{+-} = t_{+-}(\overrightarrow{m_1m_2}),\ h_{+-} = \mathcal{L}\mathcal{F}t_{+-}$ und analog h_{-+}. Nach D) ist $h_{+-}(u)$ analytisch fortsetzbar zu $\widetilde{h_{+-}}$ in $\mathcal{T}'_1$ und insbesondere in die Jost-Punkte $V \setminus (\overline{V}_+ \cup \overline{V}_-)$. Dort gilt nach dem obigen $\widetilde{h_{+-}}(v) + \varepsilon\widetilde{h_{-+}}(-v) = 0$ und dies folgt mit analytischer Fortsetzung in ganz $\mathcal{T}'_1$, d.h.

$$\widetilde{h_{+-}}(u) + \varepsilon\widetilde{h_{-+}}(-u) = 0 \quad \text{für} \quad u \in \mathcal{T}'_1.$$

Der Satz in S. 217 besagt, dass mit $A = I,\ B = -I$, d.h. $\tilde{\pi}(A,B)u = -u$ gilt: $\widetilde{h_{-+}}(-u) = (-1)^{2(J+K)}\widetilde{h_{-+}}(u)$ (denn $\widetilde{\varrho^{-+}}(I,-I) = (-1)^{2(J+K)}$). Somit:

$$\widetilde{h_{+-}}(u) + \varepsilon'\widetilde{h_{-+}}(u) = 0,\ u \in \mathcal{T}'_1,\ \varepsilon' = \varepsilon(-1)^{2(J+K)}.$$

Dies gilt insbesondere auch für h und wegen
$(2\pi)^4 t = \lim\limits_{\substack{w\in V_+ \\ w\to 0}} h(v + \mathrm{i}w)$ folgt $t_{+-} + \varepsilon' t_{-+} = 0$
$\Longrightarrow\ T_{+-} + \varepsilon' T_{-+} = 0\ \Longrightarrow\ \forall \varphi_i \in \mathcal{S}(M;W') :$
$0 = \Big(\big[\Phi(\varphi_1)\Phi^*(\overline{\varphi}_2) + \varepsilon'\Phi^*(\overline{\varphi}_1)\Phi(\varphi_2)\big]\Omega, \Omega\Big)$
$= \big(\Phi^*(\overline{\varphi}_2)\Omega, \Phi^*(\varphi_1)\Omega\big) + \varepsilon'\big(\Phi(\varphi_2)\Omega, \Phi(\overline{\varphi}_1)\Omega\big).$
Speziell mit $\varphi = \varphi_2 = \overline{\varphi}_1$ und $\varepsilon' = +$ folgt:
$\forall \varphi : \Phi^{\pm}(\varphi)\Omega = 0$, d.h. $H = \mathbb{C}\Omega$ (Axiom 8, S. 181). □

Kapitel 17

Ausblick

A) Störungstheorie

R.P. Feynman *Quanten-Elektrodynamik (BI 401)*

Bjorken-Drell *Relativistische Quantenfeldtheorie*

N. Nakanishi *Graph Theory and Feynman Integrals*

$j : H \hookrightarrow \mathcal{S}'(M)$, $\tilde{j} : \tilde{H} \hookrightarrow \mathcal{S}'(V')$ seien wie in Kap. 11, B), $F_s, \tilde{F}_s$ die symmetrischen Fockräume und $\Phi, \tilde{\Phi}$ wie in S. 187 das freie, neutrale Skalarfeld.
Wenn a_1, a_1^* die KKR auf $\tilde{H}$ darstellen, so ist $\tilde{\Phi}(\varphi) = (2\pi)^{-4}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(a_1(\tilde{\jmath}^T\hat{\varphi}) + a_1^*(\tilde{\jmath}^T\hat{\overline{\varphi}})\big)$, vgl. S. 187.
Die Felder Φ und $\tilde{\Phi}$ sind äquivalent vermöge $\overline{\mathcal{F}} : H \simeq \tilde{H},\ F_s \simeq \tilde{F}_s$, d.h.
$\tilde{\Phi}(\varphi) = \overline{\mathcal{F}}\Phi(\varphi)\overline{\mathcal{F}}^{-1}$. $\tilde{\Phi}$ ist also *nicht* die Fouriertransformation des Feldes; sondern die Darstellung des Feldes auf $\tilde{H}$ statt auf H.

Definition 17.1
In M sei ein Nullpunkt gewählt und damit $M \simeq V$ identifiziert. Φ sei ein Feld entsprechend Kap. 14.

$$\mathcal{F}\Phi : \mathcal{S}(V'; W') \longrightarrow L(E, E) : \varphi \longmapsto \Phi(\mathcal{F}\varphi)$$

heißt *Fourier-transformiertes Feld*. Analog ist $\overline{\mathcal{F}}\Phi$ definiert.

Beispiel 46
Für das freie, neutrale Skalarfeld wie oben gilt $\overline{\mathcal{F}}\tilde{\Phi}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a_1(\tilde{\jmath}^T\varphi) + a_1^*(\tilde{\jmath}^T\overline{\check{\varphi}})\big)$.

Für $\Phi_1 = \overline{\mathcal{F}}\Phi$ oder $\overline{\mathcal{F}}\tilde{\Phi}$ gilt also $\big(m^2 - [y,y]\big)\Phi_1 = 0$, was bedeutet, dass $\forall\varphi : \Phi_1\Big(\big(m^2 - [y,y]\big)\varphi\Big) = 0$. In diesem Sinn ist also $\mathrm{supp}\Phi_1 \subset \big\{y : [y,y] = m^2\big\}$. Man beachte, dass Φ_1 wegen des $\vee$ Träger auf *beiden* Schalen des Hyperboloides $[y,y] = m^2$ hat. (Natürlich ist Φ_1 kein Quantenfeld im betrachteten Sinn, da es nicht lokal ist.)

In der Physik ist es üblich, $\overline{\mathcal{F}}\Phi(\varphi)$ durch ein Integral über $\varphi(y)$ auszudrücken. In der Tat sind

$$a_1(\vec{y}) : E \longrightarrow E : \big(z_k(y^{(1)}, \cdots, y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu\big)_k \longmapsto \big(\sqrt{k+1}\, z_{k+1}(\breve{y}, y^{(1)}, \cdots, y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu\big)_k,$$

wobei $\breve{y} = \big(\sqrt{m^2 + \vec{y}^2}, \vec{y}\big)$ und

$$a_1^*(\vec{y}) : E^{(\prime)} \longrightarrow E' : f \longmapsto \Big(\sqrt{k} P_s\big(\delta(\breve{y} - y^{(1)}) f_{k-1}(y^{(2)}, \cdots, y^{(k)})\big)\Big)_k$$

(mit ${}_{E_1}\big\langle z(y^{(1)})\,\mathrm{d}\mu, \delta(\breve{y} - y^{(1)})\big\rangle_{E_1'} := z(\breve{y})$) wohldefiniert und es gilt:

$$a_1(\tilde{\jmath}^T\varphi) = \int \varphi(y) a_1(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y), \qquad a_1^*(\tilde{\jmath}^T\psi) = \int \overline{\psi}(y) a_1^*(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Definition 17.2
$N : E \longrightarrow E : (f_k) \longmapsto (k \cdot f_k)$ heißt *Teilchenzahloperator*.

N ist wesentlich selbstadjungiert und mit der Darstellung der Poincaré-Gruppe vertauschbar. Offenbar gilt
$N = \int a^*(\vec{y}) a(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y)$ in folgendem Sinn:

$$\begin{aligned} \forall f, g \in E : {}_E\langle g, Nf\rangle_{E'} &= \int {}_E\big\langle g, a^*(\vec{y}) a(\vec{y}) f\big\rangle_{E'}\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int \big(a(\vec{y}) g, a(\vec{y})\overline{f}\,\big)_{F_s}\,\mathrm{d}\mu(y) \end{aligned}$$

(wobei $E_{(1)} \subset H \hookrightarrow E'_{(1)} : z_1\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \big(z_2\,\mathrm{d}\mu \longmapsto \int z_1 z_2\,\mathrm{d}\mu\big)$, nicht ganz kanonisch!)
Die letzte Formel gibt eine Möglichkeit an, den Operator $a^*(\vec{y}_1)a(\vec{y}_2)$ unabhängig vom nuklearen Raum E durch eine „quadratische Form“ zu definieren, vgl. Reed-Simon, VIII.6. Ebenso lässt sich $a^*(\vec{y}_1)\cdots a^*(\vec{y}_k)a(\vec{y}_{k+1})\cdots a(\vec{y}_{k+j})$ definieren, jedoch nicht $a(\vec{y})a^*(\vec{y})$.
Für den Impulsoperator gilt:

$$\begin{aligned} P_\lambda f &= \big((y^{(1)} + \cdots + y^{(k)})_\lambda f_k(y)\big)_k \qquad \text{(vgl. S. 184)} \\ &= \big(kP_s(y_\lambda^{(1)} f_k(y)\big)_k = \left[\int y_\lambda a^*(\vec{y}) a(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y)\right] f. \end{aligned}$$

Speziell für $\lambda = 0$ ergibt sich der Hamiltonoperator. Auch das Feld lässt sich nun als Integral auffassen:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}\tilde{\Phi}(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int \varphi(y)a_1(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y) + \int \varphi(-y)a_1^*(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y)\right),\\
\tilde{\Phi}(\varphi) &= (2\pi)^{-4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int \hat{\varphi}(y)a_1(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y) + \int \hat{\varphi}(-y)a_1^*(\vec{y})\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\\
&= \int \varphi(x)\tilde{\Phi}(x)\,\mathrm{d}x, \text{ wobei}\\
\tilde{\Phi}(x) &: E \longrightarrow E' : f \longmapsto (2\pi)^{-4}\frac{1}{\sqrt{2}}\int \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,y\rangle}a_1(\vec{y}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,y\rangle}a_1^*(\vec{y})\right]\mathrm{d}\mu(y)f =\\
&= (2\pi)^{-4}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left[\sqrt{k+1}\,\mathcal{F}_{y\to x}\big(z_{k+1}(y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)})\,\mathrm{d}\mu(y)\big)\right.\\
&\quad \left.+P_s\big(\sqrt{k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,y^{(1)}\rangle}z_{k-1}(y^{(2)},\cdots,y^{(k)})\big)\right]\mathrm{d}\mu(y^{(1)})\cdots\mathrm{d}\mu(y^{(k)})\Big)_k.
\end{aligned}$$

Es ist nicht sehr verwunderlich, dass das freie Feld physikalisch nicht befriedigend ist, da es aus dem Bild nicht wechselwirkender Oszillatoren abgeleitet wurde. (Dass das freie Feld keine Wechselwirkung hat, kann mathematisch präzisiert werden, vgl. Bogolyubov, Kap. IV.) Man versucht daher, den Hamiltonoperator P^0 durch Wechselwirkungsterme zu ergänzen. Dies bedeutet allerdings, dass nun sowohl Zustände, als auch Observable zeitabhängig sind, sogen. "Interaction Representation".
Sehr oft betrachtet wird das Φ^4-Modell:

$$\mathcal{H} = P^0 + \lambda\int \Phi(0,\vec{x})^4\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

Da wir wissen, dass Ausdrücke der Form $a(\vec{y})a^*(\vec{y})$ sinnlos sind, wird $\Phi(0,\vec{x})^4$ durch den „Wickgeordneten" Operator $:\Phi(0,\vec{x})^4:$ ersetzt, in dem alle a rechts von allen a^* stehen. Damit ergibt sich:

$$:\tilde{\Phi}(0,\vec{x})^4: := c\cdot\sum_{\varepsilon\in\{+,-\}^4}\iiiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}(\varepsilon_1\vec{y}_1+\cdots+\varepsilon_4\vec{y}_4)} :a_1^{\varepsilon_1}(\vec{y}_1)\cdots a_1^{\varepsilon_4}(\vec{y}_4):\,\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_4),$$

mit $a_1^- = a_1,\ a_1^+ = a_1^*$.
$\int :\tilde{\Phi}(0,\vec{x})^4:\,\mathrm{d}\vec{x}$ sollte zumindest auf Ω anwendbar sein. Es folgt jedoch:

$$\begin{aligned}
&\int :\tilde{\Phi}(0,\vec{x})^4:\Omega\,\mathrm{d}\vec{x} = c\iiiiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}(\vec{y}_1+\cdots+\vec{y}_4)}a_1^*(\vec{y}_1)\cdots a_1^*(\vec{y}_4)\Omega\,\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\vec{x}\\
&= c\left[\iiiiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}(\vec{y}_1+\cdots+\vec{y}_4)}\,\mathrm{d}\vec{x}\,2\sqrt{6}P_s\big[\delta(y_1-y^{(1)})\cdots\delta(y_4-y^{(4)})\big]\,\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_4)\right]
\end{aligned}$$

$$\cdot \mathrm{d}\mu(y^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mu(y^{(4)}) = X \in E'_{(4)} \text{ mit } {}_{E(4)}\big\langle z(y^{(1)}, \cdots, y^{(4)})\,\mathrm{d}\mu, X\big\rangle_{E'_{(4)}} =$$
$$= c(2\pi)^3 \iiint \frac{z\big(\breve{y}_1, \breve{y}_2, \breve{y}_3, (-\vec{y}_1 - \vec{y}_2 - \vec{y}_3)^{\breve{}}\big)\,\mathrm{d}\vec{y}_1 \mathrm{d}\vec{y}_2 \mathrm{d}\vec{y}_3}{\sqrt{\vec{y}_1^2 + m^2}\,\sqrt{\vec{y}_2^2 + m^2}\,\sqrt{\vec{y}_3^2 + m^2}\,\sqrt{(\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3)^2 + m^2}}\,.$$

Das Ziel der Renormierungstheorie ist, Terme wie das obige $X \in E' \setminus F_s$ durch „Renormierung“ in F_s hineinzubringen.

B) Euklidische Feldtheorie

B. Simon *The $P(\Phi)_2$ Euclidean (Quantum)Field Theory*

J. Fröhlich *An Introduction to some Topics in Constructice Quantum Field Theory, in: Many Degrees of Freedom in Field Theory, ed. L. Streit*

Wir wissen, dass sich für $\varepsilon = \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l$ die Wightman-function $T_\varepsilon(m_1, \cdots, m_l)$ durch $t_\varepsilon(v_1, \cdots, v_{l-1})$ ausdrücken lässt und dass $t_\varepsilon = (2\pi)^{-4(l-1)} \lim\limits_{\substack{w \in V_+^{l-1} \\ w \to 0}} h(v + \mathrm{i}w)$.

Daher ist auch $T_\varepsilon = \lim\limits_{\substack{q = m + \mathrm{i}n \in M^l + \mathrm{i}M^l \\ V_+ \ni \overrightarrow{n_j n_{j+1}} \to 0}} \underbrace{(2\pi)^{-4(l-1)} h(\overrightarrow{q_1 q_2}, \cdots, \overrightarrow{q_{l-1} q_l})}_{g(q_1, \cdots, q_l)}$.

g ist also analytisch in $\mathbb{T}_l := \big\{q \in M^l + \mathrm{i}M^l : (\overrightarrow{q_1 q_2}, \cdots, \overrightarrow{q_{l-1} q_l}) \in \mathcal{T}_{l-1}\big\}$.
Weiters lässt sich g analytisch zu $\tilde{g}$ in

$$\mathbb{T}'_l := \big\{q \in M^l + \mathrm{i}M^l : (\overrightarrow{q_1 q_2}, \cdots, \overrightarrow{q_{l-1} q_l}) \in \mathcal{T}'_{l-1}\big\}$$

fortsetzen. Aber es gilt noch mehr!

$$\mathbb{T}''_l := \bigcup_{\sigma \in S_l} \sigma \mathbb{T}'_l = \bigcup_{\sigma \in S_l} \big\{(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(l)}) : q \in \mathbb{T}'_l\big\}.$$

Satz 17.1
g lässt sich analytisch auf $\mathbb{T}''_l$ fortsetzen.

Bemerkung
Hier geht wesentlich das Lokalitätsaxiom ein.

Beweis.
a) Für $\sigma \in S_l$ sei $\tilde{g}_\sigma(q_1, \cdots, q_l)$ die holomorphe Funktion in $\mathbb{T}'_l$, die von $T_{\sigma(\varepsilon)}$

herrührt (so wie oben $\tilde{g}$ von T_ε).

$$\tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)} : \sigma^{-1}\mathbb{T}'_l = \big\{q \in M^l + \mathrm{i}M^l : (q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(l)}) \in \mathbb{T}'_l\big\} \longrightarrow W^{\otimes l}$$
$$q \longmapsto \pm\tilde{g}_\sigma(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(l)}).$$

Dabei steht + bei −Quantelung und $\operatorname{sign}\sigma$ bei +Quantelung. Wenn noch gezeigt wird, dass

$$\forall\sigma_1, \sigma_2 \in S_l : \forall q \in \sigma_1^{-1}\,\mathbb{T}'_l \cap \sigma_2^{-1}\,\mathbb{T}'_l : \tilde{\tilde{g}}_{(\sigma_1)}(q) = \tilde{\tilde{g}}_{(\sigma_2)}(q),$$

so können wir $\tilde{g}$ durch

$$\tilde{\tilde{g}} : \mathbb{T}''_l \longrightarrow W^{\otimes l} : q \longmapsto \tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)}(q) \quad (\text{für } q \in \sigma^{-1}\mathbb{T}'_l)$$

analytisch fortsetzen.

b) Durch Betrachtung von $q' = \sigma_1 q,\ \sigma = \sigma_2\sigma_1^{-1},\ \varepsilon' = \sigma_1\varepsilon$ sehen wir, dass es genügt zu zeigen, dass

$$\forall\sigma \in S_l : \forall q \in \mathbb{T}'_l \cap \sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l : \tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)}(q) = \tilde{g}(q).$$

Es sei $\hat{\pi} : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{End}(M^l + \mathrm{i}M^l)$

$$(A, B) \longmapsto \Big(q \longmapsto \big(q_1, q_1 + \tilde{\pi}(A, B)\overrightarrow{q_1q_2}, \cdots, q_1 + \tilde{\pi}(A, B)\overrightarrow{q_1q_l}\big)\Big).$$

Dann ist $\mathbb{T}'_l = \bigcup\big\{\hat{\pi}(A, B)q : A, B \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}),\ q \in \mathbb{T}_l\big\}$ und $\tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)}\big(\hat{\pi}(A, B)q\big) = \widetilde{\varrho^\varepsilon}(A, B)\tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)}(q)$ für $q \in \sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l$ (vgl. den Satz in S. 217). Daher genügt es zu zeigen, dass $\forall\sigma \in S_l : \forall q \in \mathbb{T}_l \cap \sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l : g(q) = \tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)}(q)$.

c) Es sei $\sigma \in S_l$ fest, $g_1 : Y_1 := \mathbb{T}_l \cap \sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l \longrightarrow W^{\otimes l}$

$$q \longmapsto \tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)}(q).$$

$Y_1 \neq \emptyset$, da $\sigma^{-1}\,(\mathbb{T}'_l)$ reelle Punkte enthält und $\partial\mathbb{T}_l \supset M^l$.
Die Jostpunkte von $\tilde{\tilde{g}}_{(\sigma)}$, d.h. $M^l \cap \sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l$, sind also Randpunkte der offenen Menge Y_1. g_1 hat dort den Randwert $\pm\sigma(T_\varepsilon)$ und g hat den Randwert T_ε.
Weiters ist $T_\varepsilon = \pm\sigma(T_\varepsilon)$ in der Menge

$$Z = \big\{m \in M^l : \forall 1 \leq i \neq k \leq l : [\overrightarrow{m_im_k}, \overrightarrow{m_im_k}] < 0\big\}$$

nach Satz 16.4, S. 210. Nach Satz 16.8 in S. 220 gilt $M^l \cap \sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l =$
$\Big\{m : \forall\lambda_1, \cdots, \lambda_{l-1} \geq 0 \text{ mit } \sum\limits_{j=1}^{l-1}\lambda_j > 0 : [v, v] < 0 \text{ für } v := \sum\limits_{j=1}^{l-1}\lambda_j\,\overrightarrow{m_{\sigma(j)}m_{\sigma(j+1)}}\Big\} \Longrightarrow$
$Z \cap M^l \cap \sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l \neq \emptyset$ (z.B. ist für $a \in V$ mit $[a, a] < 0$ und $m_0 \in M$ beliebig

$\big(m_0+\sigma^{-1}(1)a,\cdots,m_0+\sigma^{-1}(l)a\big)\in Z\cap M^l\cap\sigma^{-1}\,\mathbb{T}'_l$.)
Daher haben g und g_1 dieselben Randwerte in der offenen Menge $Z\cap M^l\cap\sigma^{-1}\mathbb{T}'_l$ und sind (nach dem Edge-of-the-Wedge-Theorem) in einer offenen Teilmenge von Y_1 gleich. Um $g_1=g|_{Y_1}$ zu zeigen, genügt es daher nachzuweisen, dass Y_1 zusammenhängend ist. $Y_1=\mathrm{pr}_3(Y)$, wobei

$$\mathrm{pr}_3: Y:=\big\{(A,B,u)\in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\otimes\mathbb{T}_l:\hat\pi(A,B)\sigma(q)\in\mathbb{T}_l\big\}\longrightarrow Y_1$$
$$(A,B,q)\longmapsto q.$$

Es genügt zu zeigen, dass Y zusammenhängend ist.

d) Es seien $A,B\in\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ mit $Z_0^{A,B}:=\big\{(A,B,q)\in Y: q\in\mathbb{T}_l\big\}\neq\emptyset$. $Z_0^{A,B}$ ist konvex und daher zusammenhängend. Wenn $C,D\in\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ und $(A,B,q)\in Y$, so ist auch $\big(CAD,\overline{C}B\overline{D},\hat\pi(D,\overline{D})^{-1}q\big)\in Y$ (vgl. S. 217) und durch einen Weg in Y mit (A,B,q) verbunden, da $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist. Daher ist auch $Z_1^{A,B}:=\big\{(CAD,\overline{C}B\overline{D},q)\in Y: q\in\mathbb{T}_l,\ C,D\in\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\big\}$ zusammenhängend. Es ist noch zu zeigen, dass $\emptyset\neq Z_1^{A,B},\ Z_1^{A',B'}$ für verschiedene $(A,B),\ (A',B')$ miteinander verbunden werden können. Da $Z_1^{CAD,\overline{C}B\overline{D}}=Z_1^{A,B}$, genügt es, $A=A'=I,\ B,B'\in\left\{\begin{pmatrix}\pm1&1\\0&\pm1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma&0\\0&1/\gamma\end{pmatrix}:\gamma\in\mathbb{C}\setminus0\right\}$ zu betrachten (vgl. S. 217).

e) Es sei $B=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^z&0\\0&\mathrm{e}^{-z}\end{pmatrix}$, $z=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ 0<|\beta|<\pi,\ q:=(q_1,\cdots,q_l)$,
$q_j=\Big(j\mathrm{i},0,0,\sigma^{-1}(j)l\big(1+|\mathrm{ctg}\,\beta|\big)\Big)\implies q\in\mathbb{T}_l$ und
$\big(\hat\pi(I,B)\sigma(q)\big)_{j+1}-\big(\hat\pi(I,B)\sigma(q)\big)_j=$
$\tilde\pi(I,B)\big(\sigma(q)_{j+1}-\sigma(q)_j\big)=\tilde\pi(A,B)(\overrightarrow{q_{\sigma(j)}q_{\sigma(j+1)}})=$
$\tilde\pi(A,B)\Big(\mathrm{i}\big(\sigma(j+1)-\sigma(j)\big),0,0,l\big(1+|\mathrm{ctg}\,\beta|\big)\Big)=\tilde v_j+\mathrm{i}\tilde w_j$ mit
$\tilde w_j=\big(\sigma(j+1)-\sigma(j)\big)\cos\beta+l\big(|\cos\beta|+\sin\beta\big)(\mathrm{ch}\,\alpha,0,0,\mathrm{sh}\,\alpha)\in V_+$ (vgl. S. 219), da $l+\sigma(j+1)-\sigma(j)>0$ und $0<|\beta|<\pi$.

Daher sind die Mengen $Z_1^{I,B}$, $Z_1^{I,B'}$ mit B,B' wie oben und $\beta,\beta'\in(0,\pi)$ oder $\beta,\beta'\in(-\pi,0)$ durch Wege in Y verbunden. Außerdem ist $Z_1^{I,B}=Z_1^{I,B'}$ für $B=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^z&0\\0&\mathrm{e}^{-z}\end{pmatrix}$ und $B'=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-z}&0\\0&\mathrm{e}^z\end{pmatrix}$, da $CBC^{-1}=B'$ für $C=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$.
Noch zu betrachten wären $B=\begin{pmatrix}\pm1&1\\0&\pm1\end{pmatrix}$ und $B=\pm I$.
Da Y offen ist und $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})\times\mathbb{T}_l$ lokal zusammenhängend, existiert für ein solches $(I,B,q)\in Y$ auch ein zusammenhängendes offenes $G\subset Y$ mit $(I,B,q)\in G$.

In G liegen jedoch Elemente (I, B', q) mit $CB'C^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^z & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-z} \end{pmatrix}$. □

Bemerkung
Der Beweis ergibt insbesondere, dass $\tilde{\tilde{g}}(q) = \pm\tilde{g}_\sigma(\sigma q)$ für $q \in \sigma^{-1}\mathbb{T}'_l$, wobei $\tilde{g}_\sigma$ zu $T_{\sigma(\varepsilon)}$ gehört. Speziell für die 2-Punktfunktion ist dies die Gleichung
$\tilde{h}_{+-}(u) + \varepsilon\tilde{h}_{-+}(-u) = 0$, vgl. S. 224.
Weiters ist $\tilde{\tilde{g}}$ Poincaré-invariant:

$$q_0 \in M + \mathrm{i}M,\ \mathbb{T}^C : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times (V + \mathrm{i}V) \longrightarrow L(M + \mathrm{i}M)$$
$$(A, B, u) \longmapsto \big(q \longmapsto u + \tilde{\pi}(A, B)(\overrightarrow{q_0 q})\big)$$
$$\Longrightarrow\ \widetilde{\varrho^\varepsilon}(A, B)\tilde{\tilde{g}}(q) = \tilde{\tilde{g}}\big(\mathbb{T}^C(A, B, u)\big),\ \forall A, B, u \text{ wie oben.}$$

Definition 17.3
Euklidischer Punktraum heißt ein affiner 4-dimensionaler reeller Unterraum M_E von $M + \mathrm{i}M$, auf dem gilt:

$$\forall q_1 \neq q_2 \in M_E : [\overrightarrow{q_1 q_2}, \overrightarrow{q_1 q_2}] < 0.$$

(Dabei ist $[-,-]$ die $\mathbb{C}$-Bilinearform auf $(V + \mathrm{i}V) \times (V + \mathrm{i}V)$, die auf $V \times V$ das Minkowski-Produkt ergibt, vgl. S. 163.)

Bemerkung
$V_E := \{\overrightarrow{q_1 q_2} : q_i \in M_E\}$ ist also 4-dimensional. Weiters ist $[-,-] : V_E \times V_E \longrightarrow \mathbb{R}$ negativ definit.
Es sei $0 \neq u_0 \in V_E$ mit $[u_0, u_0] = -1$ und x^α Standardkoordinaten auf V (d.h. $[x_{(1)}, x_{(2)}] = x^0_{(1)} \cdot x^0_{(2)} - \vec{x}_{(1)} \cdot \vec{x}_{(2)}$). Dann existiert $C \in \mathcal{L}^C_+$ mit $Cu_0 = (\mathrm{i}, \vec{0}) =: u'_0$ (z.B. $C = \tilde{\pi}\big(\mathrm{i}F(u_0)^{-1}, I\big)$). $\tilde{V}_E := CV_E$ ist offenbar auch ein euklidischer Punktraum (genaugenommen $q_0 + \tilde{V}_E = \tilde{M}_E$) und wenn $U := u'^{\perp}_0 \cap \tilde{V}_E$ und $u' = (v^0, \vec{v}) + \mathrm{i}(w^0, \vec{w}) \in U$, so gilt:

a) $v^0 = w^0 = 0$, da $[u', u'_0] = 0$

b) $\vec{v} \perp \vec{w}$, da $[u', u'] \in \mathbb{R}$.

Wenn $\mathrm{pr}_{1,2} : V + \mathrm{i}V \longrightarrow \mathbb{R}^3 : u \longmapsto \begin{cases} \mathrm{Re}\,\vec{u} \\ \mathrm{Im}\,\vec{u} \end{cases}$,

so ist also $\mathrm{pr}_1(U) \perp \mathrm{pr}_2(U)$ und $U \subset \mathrm{pr}_1(U) \oplus \mathrm{i}\,\mathrm{pr}_2(U)$
$\dim_{\mathbb{R}} U = 3 \implies U = \mathrm{pr}_1(U) \oplus \mathrm{i}\,\mathrm{pr}_2(U) \implies U = \mathrm{pr}_1(U) = \mathbb{R}^3$, da $[-,-]$ auf U

negativ definit.
Somit: $V_E = C^{-1}\big\{(\mathrm{i}x^4, \vec{x}\,) : x \in \mathbb{R}^4\big\}$.

Satz 17.2 *(Schwinger)*
$q_1, \cdots, q_l \in M_E$ seien paarweise verschieden. Dann ist $q = (q_1, \cdots, q_l) \in \mathbb{T}''_l$.

Beweis.
Es seien in M Nullpunkt und Standardkoordinaten gewählt, $u_0 \in V_E \cong M_E$ mit $[u_0, u_0] = -1$ und $[u_0, \overrightarrow{q_i q_j}] \neq 0,\ \forall i \neq j;\ C \in \mathcal{L}^C_+$ mit $Cu_0 = (\mathrm{i}, 0)$,
$M'_E := CM_E,\ Cq_j = (\mathrm{i}x^4_j, \vec{x}_j)$ (vgl. die Bemerkung) $\Longrightarrow\ x^4_i \neq x^4_j,\ \forall i \neq j\ \Longrightarrow$
$\exists \sigma \in S_l : x^4_{\sigma(1)} < \cdots < x^4_{\sigma(l)}\ \Longrightarrow\ (C\overrightarrow{q_{\sigma(1)}q_{\sigma(2)}}, \cdots, C\overrightarrow{q_{\sigma(l-1)}q_{\sigma(l)}}) \in \mathcal{T}_{l-1}\ \Longrightarrow$
$\sigma q \in \mathbb{T}'_l,\ q \in \mathbb{T}''_l$. □

Definition 17.4
M_E euklidischer Punktraum, $\varepsilon = \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l$, $\tilde{\tilde{g}}$ sei zu T_ε entsprechend dem Satz 17.1, S. 228, konstruiert. Die (reell-)analytische Funktion

$$S_\varepsilon : M^l_{E,nc} := \{q \in M^l_E : q_i \neq q_j,\ \forall i \neq j\} \longrightarrow W^{\otimes l} : q \longmapsto \tilde{\tilde{g}}(q)$$

heißt *Schwinger-Funktion*.

Beispiel 47
Für das freie, neutrale Skalarfeld sind $T_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l}$ und $S_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l}$ nur von l abhängig. Es sei l gerade und zunächst $M_E \simeq U_E = \big\{(\mathrm{i}x^4, \vec{x}) : x \in \mathbb{R}^4\big\}$. Wenn speziell $q \in M^l_{E,nc}$ mit $x^4_1 < x^4_2 < \cdots < x^4_l$, so ist

$$S_l(q) = g(q) = \ \text{(s. S. 224)}\ = 2^{-1-l/2} \sum_{\substack{j_i \neq k_i \\ \{j_1, \cdots, j_{l/2}\} \cup \{k_1, \cdots, k_{l/2}\} = \\ = \{1, \cdots, l\}}} \prod_{i=1}^{l/2} \frac{4\pi m K_1\big(m|x_{k_i} - x_{j_i}|\big)}{|x_{k_i} - x_{j_i}|}\,,$$

wobei $|x| = \sqrt{(x^4)^2 + \vec{x}^{\,2}}$.

Durch analytische Fortsetzung gilt diese Formel in ganz $M^l_{E,nc}$. Wenn M_E ein beliebiger euklidischer Punktraum ist, so gilt analog

$$S_l = 2^{-1-l/2} \sum_{j_i \neq k_i} \prod_{i=1}^{l/2} \frac{4\pi m K_1\big(m|\overrightarrow{q_{j_i} q_{k_i}}|\big)}{|\overrightarrow{q_{j_i} q_{k_i}}|}\,,$$

wobei $|u| := \sqrt{[-u,u]}$ für $u \in V_E$. Man beachte, dass S_l sogar lokalintegrable Funktionen darstellen, da $|x_1 - x_2|^{-2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^8_{x_1 x_2})$.

Bemerkung
1) Die Poincaré-Invarianz von $\tilde{\tilde{g}}$ (s. oben) impliziert, dass $S_\varepsilon\big(\mathbb{T}^C(A,B,u)q\big) = \widetilde{\varrho^\varepsilon}(A,B)S_\varepsilon(q)$ für $A, B \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ mit $\tilde{\pi}(A,B) = C \in \mathcal{L}^C_+$ so, dass $CV_E = V_E$. Wenn $\mathrm{SO}_4(V_E)$ wie üblich, so ist

$$\mathrm{SO}_4(V_E) \hookrightarrow \mathcal{L}^C_+ : A \longmapsto (q_1 + \mathrm{i}q_2 \longmapsto Aq_1 + \mathrm{i}Aq_2).$$

In Standardkoordinaten und für $V_E = \big\{(\mathrm{i}x^4, \vec{x}) : x \in \mathbb{R}^4\big\}$ gilt: $\tilde{\pi}(U_1,U_2) \in \mathrm{SO}_4(V_E) \Longleftrightarrow U_i \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, denn:
$q \in V_E \Longleftrightarrow F(q)F(q)^* = -\det F(q) \cdot I$ (vgl. auch S. 150).

Somit erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) & \underset{\tilde{\pi}_E}{\longrightarrow} & \mathrm{SO}_4(V_E) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathcal{L}^C_+ \end{array}$$

und $\tilde{\pi}_E := \tilde{\pi}\big|_{\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2}$ ist „die“ universelle Überlagerung von SO_4. Die Poincaré-Invarianz der Schwinger-Funktionen bedeutet also: $\forall u \in V_E,\ \forall A, B \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$: $S_\varepsilon\big(\mathbb{T}^C(A,B,u)q\big) = \widetilde{\varrho^\varepsilon}(A,B)S_\varepsilon(q)$.

2) Physikalische Betrachtungsweise:
Es seien $v_1, \cdots, v_{l-1} \in V,\ \varphi_1, \cdots, \varphi_l \in \mathcal{S}(M) \implies$
$W^{\otimes l} \ni I(v) := \big\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_l, T_\varepsilon(m_1, m_2 + v_1, \cdots, m_l + v_1 + \cdots + v_{l-1})\big\rangle =$
$\big\langle \varphi_1 \otimes \varphi_2(m - v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_l(m - v_1 - \cdots - v_{l-1}), T_\varepsilon\big\rangle =$
$\Big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1)\Phi^{\varepsilon_2}\big(\varphi_2(\Lambda_1 m)\big) \cdots \Phi^{\varepsilon_l}\big(\varphi_l(\Lambda_{l-1}m)\big)\Omega, \Omega\Big)$, wobei $\Lambda_j m = m - v_1 - \cdots - v_j$.
Nach Axiom 6 c), S. 180, gilt:

$$\Phi^{\varepsilon_j}\big(\varphi_j(\Lambda_{j-1}m)\big) = U(\Lambda_{j-1})^{-1}\Phi^{\varepsilon_j}(\varphi_j)U(\Lambda_{j-1}),$$

d.h.

$$I(v) = \big(\Phi^{\varepsilon_1}(\varphi_1) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}v_1^\lambda P_\lambda}\Phi^{\varepsilon_2}(\varphi_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}v_2^\lambda P_\lambda} \cdots \Omega, \Omega\big).$$

In der letzten Formel kann auch $u \in \mathcal{T}_{l-1}$ statt v eingesetzt werden, denn
$u = v + \mathrm{i}w \in \mathcal{T}_{l-1} \implies w_j \in V_+ \implies A := w_j^\lambda P_\lambda$ hat Spektrum in $[0,\infty)$
$\implies \mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{-|A|}$ ist wohldefiniert (vgl. S. 196 etc.). Damit ergibt sich formal für $\varphi_1 = \cdots = \varphi_l = \delta$ die Schwingerfunktion:

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(q) &= \big(\Phi^{\varepsilon_1}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\overrightarrow{q_1 q_2}, P\rangle}\Phi^{\varepsilon_2}(0) \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\overrightarrow{q_{l-1} q_l}, P\rangle}\Phi^{\varepsilon_l}(0)\Omega, \Omega\big) \\ &= \big(\Phi^{\varepsilon_1}(m_1)\mathrm{e}^{-\langle\overrightarrow{n_1 n_2}, P\rangle}\Phi^{\varepsilon_2}(m_2) \cdots \Phi^{\varepsilon_l}(m_l)\Omega, \Omega\big) \end{aligned}$$

für $q = m + \mathrm{i}n \in \mathbb{T}_l$, $P = (\mathcal{H}, P_1, P_2, P_3)$ = Impulsoperator.
Speziell in Koordinaten:
$q_j = (\mathrm{i}x_j, \vec{x}_j) \implies S_\varepsilon(q) = \big(\Phi^{\varepsilon_1}(0, \vec{x}_1)\mathrm{e}^{-(x_2^4 - x_1^4)\mathcal{H}}\Phi^{\varepsilon_2}(0, \vec{x}_2)\cdots\Omega, \Omega\big)$ für
$x_1^4 < x_2^4 \cdots < x_l^4$. Was passiert für andere x?
Ganz allgemein ist S_ε durch $\tilde{\tilde{g}}$ gegeben, d.h. wenn $x^4_{\sigma(1)} < \cdots < x^4_{\sigma(l)}$, dann durch $\pm g_\sigma(\sigma q)$, d.h.

$$S_\varepsilon(q) = \pm\big(\Phi^{\varepsilon_{\sigma(1)}}(0, \vec{x}_{\sigma(1)})\mathrm{e}^{-(x^4_{\sigma(2)} - x^4_{\sigma(1)})\mathcal{H}}\cdots\Omega, \Omega\big)$$

und somit:

$$S_\varepsilon(q) = \big(T\Phi^{\varepsilon_1}(0, \vec{x}_1)\mathrm{e}^{-(x_2^4 - x_1^4)\mathcal{H}}\cdots\Phi^{\varepsilon_l}(0, \vec{x}_l)\Omega, \Omega\big)$$

mit Zeitordnung T.

3) Durch S_ε ist mit analytischer Fortsetzung $\tilde{\tilde{g}}$ und damit auch T_ε eindeutig bestimmt.

Definition 17.5

$$- : V + \mathrm{i}V \longrightarrow V + \mathrm{i}V : v + \mathrm{i}w \longmapsto v - \mathrm{i}w$$

Bemerkung
Wenn V_E unter $-$ invariant ist, so existieren Standardkoordinaten mit
$V_E = \big\{(\mathrm{i}x^4, \vec{x}\,) : x \in \mathbb{R}^4\big\}$. Im Folgenden wird V_E unter $-$ invariant vorausgesetzt und sind die Koordinaten so gewählt. Außerdem sei in M_E ein Nullpunkt gewählt.

Definition 17.6

1) $\mathcal{S}_<(M_E^l; W'^{\otimes l}) := \big\{\varphi \in \mathcal{S}(M_E^l; W'^{\otimes l})$ mit $\mathrm{supp}\varphi \subset \mathcal{T}_l\big\}$;

2) $\mathcal{S}_+(V_E^{l-1}; W'^{\otimes l}) := \big\{\varphi \in \mathcal{S}(V_E^{l-1}; W'^{\otimes l}) : \mathrm{supp}\varphi \subset \overline{\mathcal{T}_{l-1}}\big\}$.

Für $\varphi \in \mathcal{S}_+(V_E^{l-1}; W'^{\otimes l})$ sei

$$\|\varphi\|_n := \sup\Bigg\{\big(1 + |y|^n\big)\sum_{|\alpha|\le n}\left\|\int x^\alpha \mathrm{e}^{\langle x,y\rangle}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right\|_{W^{\otimes l}} : y \in \mathbb{R}^{4(l-1)},$$

$$\langle x, y\rangle := x_1^1 y_1^1 + \cdots + x_{l-1}^4 y_{l-1}^4,\ y_j^4 \le 0,\ \forall j = 1, \cdots, l-1\Bigg\}.$$

Theorem *(Osterwalder-Schrader, 1973)*
$M_E \subset M + \mathrm{i}M$ sei ein euklidischer Punktraum, so dass V_E unter $-$ invariant ist.

1) S_ε seien die Schwinger-Funktionen eines Quantenfeldes. Sie erfüllen:

   OS_0 (Temperiertheit): $\exists S_\varepsilon^d \in \mathcal{S}'(M_E^l) : S_\varepsilon^d\big|_{M_{E,nc}^l} = S_\varepsilon$.

   OS_1 (Poincaré-Invarianz): $S_\varepsilon\big(\mathbb{T}^C(A,B,u)q\big) = \widetilde{\varrho^\varepsilon}(A,B)S_\varepsilon$,
   $\forall A,B \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}),\ \forall q \in M_{E,nc}^l,\ \forall u \in V_E$.

   OS_2 (Spektralbedingung): $\forall\varepsilon : \exists n > 0 : \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{S}_+(V_E^{l-1}; W'^{\otimes l}) :$
   $\left| \int {}_{W'^{\otimes l}}\big\langle \varphi(\overrightarrow{q_1q_2}, \cdots, \overrightarrow{q_{l-1}q_l}), S_\varepsilon(q)\big\rangle_{W^{\otimes l}} \,\mathrm{d}x \right| \le C \cdot \|\varphi\|_n$.

   OS_3 (Hermitizität): $\overline{S_{-\varepsilon}(\overline{q})} = \sigma(S_\varepsilon)(q) := S_{\sigma(\varepsilon)}\big(\sigma(q)\big),\ \forall q \in M_{E,nc}^l$, wobei
   $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & & l \\ l & & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   OS_4 (Lokalität-Symmetrie): $\forall \sigma \in S_l : \sigma(S_\varepsilon) = \pm S_\varepsilon$
   ($+$ für $-$Quantelung, $\operatorname{sign}\sigma$ für $+$Quantelung).

   OS_5 (Positiv-Definitheit): $\forall \varphi^{(0)} \in \mathbb{C},\ \varphi^{(1)} \in \mathcal{S}_<(M_E; W'), \cdots, \varphi^{(l)} \in \mathcal{S}_<(M_E^l; W'^{\otimes l}),\ \varepsilon^{(j)} \in \{+,-\}^j$:

   $$\sum_{i,j=0}^{l} \int_{M_E^{i+j}} \overline{\varphi^{(i)}(\overline{q}_1, \cdots, \overline{q}_i)}\, \varphi^{(j)}(q_{i+1}, \cdots, q_{i+j}) \sigma_{ij}(S_{-\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(j)}})(q)\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

   wobei $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & & i & i+1 & \cdots & i+j \\ i & & \cdots & 2 & 1 & i+1 & \cdots & i+j \end{pmatrix} \in S_{i+j}$.

   OS_6 (Eindeutigkeit des Vakuums): $\forall \varphi \in \mathcal{S}_<(M_E^l; W'^{\otimes l}) :\ \forall\ 1 \le j \le l :$
   $\forall 0 \ne \vec{a} \in \mathbb{R}^3$:

   $$\lim_{s\to\infty} \int_{M_E^l} \varphi(\overline{q}_j, \cdots, \overline{q}_1, q_{j+1}, \cdots, q_l) \big[S_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_l}(q_1, \cdots, q_j, q_{j+1}+s\vec{a}, \cdots, q_l+s\vec{a}) -$$

   $$- S_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}(q_1, \cdots, q_j) S_{\varepsilon_{j+1}\cdots\varepsilon_l}(q_{j+1}, \cdots, q_l)\big]\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_l = 0.$$

2) Wenn S_ε OS_0 - OS_6 erfüllen, so sind sie die Schwingerfunktionen eines eindeutig bestimmten Quantenfeldes.

Beweis.
siehe Simon, p. 64–73. □