1998 - 02 - 04

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 1997/98

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (2), (4), (5), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge von k Dingen aus n Dingen auszuwählen?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, beim Lotto "6 aus 45" genau 2 richtige Zahlen zu haben?

(2) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Poissonverteilung an!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, daß in $\frac{1}{2}$ h in einem Büro genau 2 Anrufe einlangen, wenn pro h im Schnitt 5 Anrufe eintreffen?

(3) (a) Was ist die Dichtefunktion von $N(\mu, \sigma)$?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 36 Würfen mit einer Münze mindestens 23 mal Zahl zu erhalten, mit der Normalverteilung.

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Augensumme zweier Würfel 8 ist, wenn beide Augenzahlen ungerade sind?

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße definiert?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert einer binomial verteilten Zufallsgröße!

(6) (a) Wie ist der Korrelationskoeffizient $\rho(\underline{x}, \underline{y})$ definiert?

(b) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{2}$, $\underline{x}(i) = i - 2$, $\underline{y} = \underline{x}^2$. Bestimmen Sie $\rho(\underline{x}, \underline{y})$!

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) Durch welche Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ läßt sich die Verteilung der Augensumme von 4 Würfeln approximieren?

(8) (a) Was ist die erwartungstreue Stichprobenvarianz $\underline{\hat{s}}^2$?

(b) Bestimmen Sie $\hat{s}^2$ zu $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$! (Hoffentlich sind Sie nicht abergläubisch!)

(9) (a) Was ist ein Fehler 1. Art?

(b) Zwei Stichproben der Größen 25 bzw. 16 ergaben jeweils $\hat{s}^2 = 6$ bzw. $\hat{s}'^2 = 15$. Ist die Hypothese gleicher Varianzen mit dem $F-$Test beim Signifikanzniveau 5% anzunehmen oder abzulehnen?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) $600-$maliges Würfeln ergab für die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ jeweils die Häufigkeiten $80, 120, 120, 110, 80, 90$. Ist nach dem χ^2-Test beim Signifikanzniveau 1% der Würfel in Ordnung?

1998 - 03 - 23

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 1997/98

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (3), (5), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ an!

(b) Aus einem Topf mit 5 roten und 10 blauen Kugeln wird fünfmal eine Kugel gezogen und danach wieder zurück gelegt. Wie wahrscheinlich ist es, genau dreimal eine rote Kugel zu ziehen?

(2) (a) Geben Sie Ω und p_i für die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{Hyp}(n,N,F)$ an!

(b) Was ergibt sich in (1b), wenn die Kugeln nicht zurückgelegt werden?

(3) (a) Wie wird $P_{N(\mu,\sigma)}([a,b])$ durch Φ ausgedrückt?

(b) Wieviel % normalverteilter Butterpakete mit $\mu = 25\,\mathrm{dkg}$, $\sigma = 2\,\mathrm{dkg}$ wiegen weniger als $20\,\mathrm{dkg}$?

(4) (a) Wann nennt man zwei Ereignisse A und B unabhängig?

(b) Sind A = "Augensumme = 7" und B = "der erste Würfel zeigt 5" beim Würfeln mit 2 Würfeln unabhängig?

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße definiert?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsgröße!

(6) (a) Wann heißen 2 Zufallsgrößen $\underline{d}, \underline{s}$ unkorreliert?

(b) Zeigen Sie daß $\underline{s}$ = "Anzahl der Sechser" und $\underline{d} = \underline{x} - \underline{y}$ = "Differenz der Augenzahlen" beim Würfeln mit 2 Würfeln unkorreliert sind!

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) Durch welche Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ läßt sich die Verteilung der Augensumme von 4 Würfeln approximieren?

(8) (a) Welche Formel gibt das zweiseitige Konfidenzintervall $[a, b]$ für μ bei unbekanntem σ ? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Bestimmen Sie $[a, b]$ zu $\alpha = 5\%$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

(9) (a) Was ist die Testgröße für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, wenn σ_1, σ_2 gleich und bekannt sind?

(b) Testen Sie H_0 (zweiseitiger Test!), wenn $\alpha = 5\%$, x_i wie in (8b), $x'_1 = 3$, $x'_2 = 7$, und $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ bekannt ist. ($\sqrt{3} \approx 1.73$)

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2- Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) $600-$ maliges Würfeln ergab für die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ jeweils die Häufigkeiten $80, 120, 120, 110, 80, 90$. Ist nach dem χ^2- Test beim Signifikanzniveau 1% der Würfel in Ordnung?

2003 - 02 - 04

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2002/03

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (2), (3), (5), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die hypergeometrische Verteilung Hyp(n,N,F) an!

(b) In einer Box sind 100 farbige und 400 weiße Kugeln. Wie wahrscheinlich ist es, genau drei farbige zu haben, wenn man 10 zugleich zieht?

(2) (a) Was gilt für Hyp(n,N,F), wenn $N \to \infty$, $F \to \infty$ und $\frac{F}{N} \to p$?

(b) Welche Approximation erhalten wir in (1) (b)?

(3) (a) Wie wird $P_{N(\mu,\sigma)}([a,b])$ durch Φ ausgedrückt?

(b) Wieviel % normalverteilter Butterpakete mit $\mu = 25\,\text{dag}$, $\sigma = 2\,\text{dag}$, wiegen weniger als $20\,\text{dag}$?

(4) (a) Wann nennt man zwei Ereignisse A und B unabhängig?

(b) Sind A = "Augensumme = 7" und B = "der erste Würfel zeigt 5" beim Würfeln mit zwei Würfeln unabhängig?

(5) (a) Wie ist die Varianz definiert und welche weitere Formel gilt dafür?

(b) Was ergibt sich für die Verteilung mit Dichte $f(t) = \begin{cases} 2t : 0 \leq t < 1 \\ 0 \ : \text{sonst} \end{cases}$?

(6) (a) Was wird bei der Regressionsgeraden von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert? Was ist die Formel für k?

(b) Es sei $\Omega = \{1,2,3\}$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{2}$, $\underline{x}(i) = i-2$, $\underline{y} = \underline{x}^2$. Bestimmen Sie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$!

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) Wie folgert man daraus das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich, wenn $n = 21$, $\hat{s}^2 = 8$, $\alpha = 5\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, wenn σ_1, σ_2 gleich und bekannt sind?

(b) Testen sie H_0 (zweiseitiger Test!), wenn $\alpha = 5\%$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ und $x'_1 = 3$, $x'_2 = 7$, $x'_3 = 2$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$.

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) $600-$maliges Würfeln ergab für die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ jeweils die Häufigkeiten $80, 110, 90, 110, 120, 90$. Ist nach dem χ^2-Test beim Signifikanzniveau 5% der Würfel in Ordnung?

2003 - 03 - 14

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2002/03

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (4), (7), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was gilt für $\mathrm{Bin}(n,p)$, wenn $n \to \infty$ und $np \to \lambda$?

(b) In Massachusetts waren in 64 Jahren 32 Tornados. In wieviel Jahren davon müssten genau 2 Tornados gewesen sein? ($\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1.6$)

(2) (a) Was ist die Dichtefunktion der Exponentialverteilung?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Glühbirne weniger als 200 h brennt, wenn ihre Lebensdauer exponentialverteilt ist mit $\mu = \frac{1}{200}\,[\mathrm{h}^{-1}]$? ($\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.37$)

(3) (a) Was sagt das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, zwischen 40 und 60 mal (inklusive) Zahl zu erhalten, wenn man 100 mal eine Münze wirft.

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) Was ist $P(B \mid A)$, wenn $P(A \mid B) = 0.4$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$? Sind A, B unabhängig?

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße definiert?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsgröße!

(6) (a) Wann heißen 2 Zufallsgrößen $\underline{d}, \underline{s}$ unkorreliert?

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{s} =$ "Anzahl der Sechser" und $\underline{d} = \underline{x} - \underline{y} =$ "Differenz der Augenzahlen" beim Würfeln mit 2 Würfeln unkorreliert sind! Sind $\underline{d}, \underline{s}$ unabhängig?

(7) (a) Was gilt für $\mathcal{V}(\underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_n)$, wenn $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ unabhängig sind?

(b) Bestimmen Sie damit die Varianz der Binomialverteilung!

(8) (a) Welche Formel gibt das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für μ bei unbekanntem σ? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Zur Schätzung der durchschnittlichen wöchentlichen Fernsehzeit wurden 25 Personen befragt und es ergab sich $\overline{x} = 15.3\,[\mathrm{h}]$ und $\hat{s}^2 = 100\,[\mathrm{h}^2]$. Bestimmen Sie das zweiseitige $1\,\%-$ Konfidenzintervall für μ.

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = 4, 3, 2, 3$ und $x'_j = 2, 3, 1, 2$. Testen Sie $\mu_1 = \mu_2$ mit dem $t-$ Test zum Signifikanzniveau $5\,\%$.

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2- Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) $100-$ maliges Münzewerfen ergab 40 mal Zahl und 60 mal Kopf. Ist nach dem χ^2- Test beim Signifikanzniveau 1% die Münze in Ordnung, d.h. $p = q = \frac{1}{2}$?

2003 - 06 - 06

3. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2002/03

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (3), (5), (6), (7), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ an!

(b) Aus einem Topf mit 5 roten und 10 blauen Kugeln wird fünfmal eine Kugel gezogen und danach wieder zurück gelegt. Wie wahrscheinlich ist es, genau dreimal eine rote Kugel zu ziehen?

(2) (a) Wie erhält man $P(]t_1, t_2])$ für die Exponentialverteilung aus der Poissonverteilung?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der 1. Anruf in den zweiten 10 Minuten eintrifft, wenn im Schnitt $\mu = 5$ Anrufe/Stunde sind?

(3) (a) Wie wird $P_{N(\mu,\sigma)}([a,b])$ durch Φ ausgedrückt?

(b) Wie ist σ in $N(25,\sigma)$ festzulegen, damit 23 das $1\%-$Fraktil ist?

(4) (a) Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{\underline{x}}$ der Zufallsgröße $\underline{x}$ definiert?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien die Augenzahlen zweier Würfel, $\underline{z} = \underline{x}/\underline{y}$. Bestimmen Sie $P_{\underline{z}}(\{\frac{2}{3}\})$ sowie $P_{\underline{z}}([3,\infty[)$!

(5) (a) Drücken Sie die Varianz der diskreten Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Werte x_i und Wahrscheinlichkeiten $p_i = P_{\underline{x}}(\{x_i\})$ aus!

(b) Was ergibt sich, wenn $\underline{x}$ die Augenzahl eines Würfels bezeichnet?

(6) (a) Wie ist $\operatorname{cov}(\underline{x}, \underline{y})$ definiert und was gilt für $\mathcal{V}(\underline{x} + \underline{y})$?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien unabhängig und $N(6,3)-$ bzw. $N(15,2)-$verteilt. Wie ist $2\underline{x} - \underline{y}$ verteilt?

(7) (a) Welche Formel gibt das einseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \infty[$ beim Signifikanzniveau α für μ bei unbekanntem σ? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Bestimmen Sie $[a, \infty[$ für 9 Betonproben mit $\overline{x} = 1.6$, $\hat{s} = 0.2$ und $\alpha = 5\%$.

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich bei den Daten von (7) (b)?

(9) (a) Was ist ein Fehler 1. Art? Wie wahrscheinlich ist er?

(b) Zwei Stichproben der Größen 9 bzw. 16 ergaben jeweils $\hat{s}^2 = 34$ bzw. $\hat{s}'^2 = 10$. Was liefert der $F-$Test bei $\alpha = 5\%$ bzgl. $H_0 : \sigma = \sigma'$?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Eine Stichprobe der Größe 100 ergab die Werte $0, 1, 2$ mit den Häufigkeiten $40, 40, 20$. Testen Sie beim Signifikanzniveau 5% die Hypothese, dass diese Zufallsgröße $\operatorname{Bin}(2, p)-$verteilt ist. Schätzen Sie p aus dem Mittelwert $\overline{x}$!

2004 - 02 - 03

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2003/04

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (4), (5), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die hypergeometrische Verteilung $\text{Hyp}(n, N, F)$ an!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, beim Lotto "6 aus 45" genau 4 richtige Zahlen zu haben? Was sind hier n, N, F, i?

(2) (a) Was sagt das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(b) Approximieren Sie mit der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, bei 180-maligem Würfeln zwischen 25 und 40 Sechser (inklusive) zu erhalten! (Hinweis: $180 = 5 \cdot 36$)

(3) (a) P sei absolutstetig mit Dichtefunktion f und $0 \leq \alpha \leq 100$. Wie ist das $\alpha\%-$ Fraktil u festgelegt?

(b) Was ist das 95%-Fraktil der Exponentialverteilung $\text{Expo}(\mu)$?

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme zweier Würfel größer als 7 ist, wenn kein Würfel 6 zeigt?

(5) (a) Drücken Sie die Varianz einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Dichtefunktion f aus!

(b) Was ergibt sich für die Gleichverteilung am Intervall $[-1, 1]$?

(6) (a) Was wird bei der Regressionsgeraden $y = kx + d$ von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert? Was ist die Formel für k?

(b) Bestimmen Sie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$, wenn $\underline{y}$ die Augenzahl eines Würfels ist und $\underline{x} = \begin{cases} 0 : \underline{y} \leq 3, \\ 1 : \underline{y} \geq 4. \end{cases}$

(7) (a) Was ist eine Stichprobe und was ist das standardisierte Stichprobenmittel?

(b) Zeigen Sie $\mathcal{E}(\overline{\underline{x}}) = \mu$ und $\mathcal{V}(\overline{\underline{x}}) = \frac{\sigma^2}{n}$ für das Stichprobenmittel!

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -1$ für $\alpha = 5\,\%$?

(9) (a) Was entspricht beim $t-$Test einem Fehler 1. Art und wie wahrscheinlich ist er?

(b) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ beim $t-$Test, welche Formel gibt $\underline{\hat{s}}_k^2$ und wie wird u festgelegt?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) 300-maliges Würfeln ergab 80 mal 1 oder 2 und 220 mal 3,4,5, oder 6. Ist nach dem χ^2-Test beim Signifikanzniveau $1\,\%$ der Würfel in Ordnung?

2004 - 05 - 10

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2003/04

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (4), (5), (6), (7), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ an!

(b) Mit wieviel % Wahrscheinlichkeit erhält man genau 3 mal Zahl bei zehnmaligem Münzwurf? Verwenden Sie $2^{-10} \approx 10^{-3}$.

(2) (a) Wie erhält man $P(]t_1,t_2])$ für die Exponentialverteilung aus der Poissonverteilung?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der 1. Anruf erst nach einer halben Stunde eintrifft, wenn im Schnitt $\mu = 5$ Anrufe/Stunde sind?

(3) (a) Was gilt für $\mathrm{Bin}(n,p)$, wenn $n \to \infty$, p fest?

(b) Wie ist σ einzustellen, dass 99% von normalverteilten Zuckerpaketen mit $\mu = 1\,\mathrm{kg}$ mehr als $99\,\mathrm{dag}$ wiegen?

(4) (a) Was sagt der Satz von Bayes?

(b) Sind $A =$ "kein Würfel zeigt 6" und $B =$ "Augensumme $= 6$" beim Würfeln mit 2 Würfeln unabhängig?

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße definiert?

(b) Was ergibt sich für die Exponentialverteilung $\mathrm{Expo}(\mu)$?

(6) (a) Welche Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient?

(b) Berechnen Sie $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$, wenn $\underline{y}$ die Augenzahl eines Würfels ist und $\underline{x} = 0$ für $\underline{y} \leq 3$, $\underline{x} = 1$ für $\underline{y} \geq 4$. (Ergebnis: $3\sqrt{3}/\sqrt{35} \approx 0.878$)

(7) (a) Welche Formel gibt das einseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \infty[$ zum Signifikanzniveau α für μ bei unbekanntem σ? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Bestimmen Sie $[a, \infty[$ für 16 Betonproben mit $\overline{x} = 1.6$, $\hat{s} = 0.4$ und $\alpha = 1\%$.

(8) (a) Was bedeutet es, dass eine Punktschätzung erwartungstreu ist? Ist $\underline{\hat{s}}$ erwartungstreu?

(b) Bestimmen Sie $\hat{s}^2$ zu $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 8$.

(9) (a) Was ist ein Fehler 1. Art? Wie wahrscheinlich ist er?

(b) Zwei Stichproben der Größen 13 bzw. 7 ergaben jeweils $\hat{s}^2 = 20$ bzw. $\hat{s}'^2 = 80$. Was liefert der $F-$Test bei $\alpha = 5\%$ bzgl. $H_0 : \sigma = \sigma'$?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße ist $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 100 ergab $\overline{x} = 2$ und jeweils 30, 20, bzw. 50 Werte in den Intervallen $]-\infty, 1.56[$, $]1.56, 2[$, $]2, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 5\%$?

2005 - 02 - 02

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2004/05

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (4), (5), (6), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ an!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, genau fünfmal 1 oder 2 zu werfen, wenn man 12 mal würfelt?

(2) (a) Wie erhält man $P(]t_1,t_2])$ für die Exponentialverteilung aus der Poissonverteilung?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der 1. Anruf in den zweiten halben Stunde eintrifft, wenn im Schnitt $\mu = 3$ Anrufe/Stunde sind?

(3) (a) P sei absolutstetig mit Dichtefunktion f und $0 \leq n \leq 100$. Wie ist das $n\%-$Fraktil α definiert?

(b) Wie ist σ in $N(25,\sigma)$ festzulegen, damit 23 das $1\%-$Fraktil ist? (Verwenden Sie $\nu = \infty$ in der $t-$Verteilung!)

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) In Tirol sind im Schnitt 4 Hagelschläge pro Jahr. Wie wahrscheinlich ist es, dass es in einem Jahr weniger als 3 mal hagelte unter der Hypothese, dass es mindestens einmal gehagelt hat? ($\mathrm{e}^4 \approx 55$)

(5) (a) Wie ist die Varianz definiert und welche weitere Formel gilt dafür?

(b) Was ist $\mathcal{V}(\underline{x})$, wenn $\underline{x}$ gleichverteilt ist mit Dichte $f_{\underline{x}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & : 0 \leq t \leq a \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$?

(6) (a) Welche Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$?

(b) Berechnen Sie $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$, wenn $\underline{x}$ die Werte $x_i = 1, 3, 4$ mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $p_i = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ hat und $\underline{y} = \begin{cases} 1 : \underline{x} = 1, \\ 2 : \underline{x} = 3 \text{ oder } 4. \end{cases}$ (Ergebnis: $3/\sqrt{10} \approx 0.95$)

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) Durch welche Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ lässt sich die Verteilung der Augensumme von n Würfeln approximieren?

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4$ für $\alpha = 10\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = 4, 1, 1$ und $x'_j = 7, 2, 3, 4$. Testen Sie $\mu_1 = \mu_2$ zum Signifikanzniveau $10\,\%$. Hinweis: $\sqrt{\dfrac{12}{7}} \approx 1.31$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2- Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße ist $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 100 ergab $\overline{x} = 2$ und jeweils 30, 20, bzw. 50 Werte in den Intervallen $]-\infty, 1.56[$, $]1.56, 2[$, $]2, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2- Test mit $\alpha = 5\%$?

2005 - 06 - 01

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2004/05

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (2), (5), (6), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie entsteht die Binomialverteilung als Grenzwert hypergeometrischer Verteilungen?

(b) Aus einem Topf mit 10 roten und 30 blauen Kugeln werden 3 gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau 1 rote Kugel zu ziehen, α) ohne, β) mit Zurücklegen?

(2) (a) Wie entsteht die Poissonverteilung als Grenzwert von Binomialverteilungen?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass mehr als 1 Lawine pro Woche abgeht, wenn im Schnitt 2.3 Lawinen pro Woche abgehen? (Hinweis $\mathrm{e}^{2.3} \approx 10$)

(3) (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt eine normalverteilte Zufallsgröße zwischen den Wendepunkten der Dichtefunktion?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 16 Würfen mit einer Münze höchstens 6 mal Zahl zu erhalten, mit der Normalverteilung!

(4) (a) Wann heißen 2 Ereignisse A, B unabhängig? Was gilt dann für $P(A|B)$?

(b) Sind $A =$ "Augensumme = 7" und $B =$ "1. Würfel zeigt 3" beim Würfeln mit 2 Würfeln unabhängig?

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße definiert?

(b) Was ergibt sich für die Exponentialverteilung Expo(μ)?

(6) (a) Wie ist die Ausgleichsgerade (von y nach x) zu den Daten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ definiert?

(b) Berechnen Sie die Ausgleichsgerade zu $(0,1)$, $(2,0)$, $(4,2)$.

(7) (a) Wie ist $c_1\underline{x}_1 + \cdots + c_n\underline{x}_n$ verteilt, wenn $\underline{x}_i$ $N(\mu_i, \sigma_i)-$verteilt und unabhängig sind?

(b) Wie ist μ zu setzen, damit $P(\{\overline{\underline{x}} < 999\}) = 1\,\%$ für $\overline{\underline{x}} = \frac{1}{25}(\underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_{25})$, $\underline{x}_i$ $N(\mu, 3)-$verteilt und unabhängig?

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für μ bei unbekanntem σ zum Signifikanzniveau α?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 2$ für $\alpha = 10\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, wenn σ_1, σ_2 gleich und bekannt sind?

(b) Testen Sie H_0, wenn $\alpha = 5\%$, x_i wie in (8b), $x'_1 = 2$, $x'_2 = 6$, und $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ bekannt ist. ($\sqrt{3} \approx 1.73$)

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) $40-$maliges Münzewerfen ergab 14 mal Zahl und 26 mal Kopf. Ist nach dem χ^2-Test beim Signifikanzniveau 10% die Münze in Ordnung, d.h. $p = q = \frac{1}{2}$?

2006 - 02 - 02

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2005/06

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (3), (5), (6), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie entsteht die Binomialverteilung als Grenzwert hypergeometrischer Verteilungen?

(b) Aus einer Box mit 20 blauen und 20 roten Kugeln werden 3 Kugeln gezogen. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten keine blaue Kugel zu erhalten, wenn mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen wird. ($\frac{1}{26} \approx 0.038$)

(2) (a) Wie erhält man $P(]t_1, t_2])$ für die Exponentialverteilung aus der Poissonverteilung?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der erste Brand eines Jahres im März, wenn im Schnitt 15 Brände im Jahr sind?

(3) (a) Was ist die Dichtefunktion von $N(\mu, \sigma)$ und wo sind ihre Wendepunkte?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 36 Würfen mit einer Münze höchstens 16 mal Zahl zu erhalten, mit der Normalverteilung.

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) In einem Gebiet sind durchschnittlich 2 Erdbeben pro Jahr. Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Jahr höchstens 2 Erdbeben sind unter der Hypothese, dass mindestens eines stattfand? ($e^2 \approx 7$)

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße definiert?

(b) Was ergibt sich für die Exponentialverteilung?

(6) (a) Welche Größe wird bei der Regressionsgeraden von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert?

(b) Bestimmen Sie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$, wenn $\underline{y}$ die Augenzahl eines Würfels ist und $\underline{x} = 1$ für $\underline{y} = 4$ oder 6 ist und $\underline{x} = 2$ sonst.

(7) (a) Was ist eine Stichprobe und was ist das *standardisierte* Stichprobenmittel?

(b) Zeigen Sie $\mathcal{E}(\overline{\underline{x}}) = \mu$ und $\mathcal{V}(\overline{\underline{x}}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ für das Stichprobenmittel $\overline{\underline{x}}$!

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -1$ für $\alpha = 5\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = 4, 1, 1$ und $x'_j = 7, 2, 3, 4$. Testen Sie $\mu_1 = \mu_2$ zum Signifikanzniveau $10\,\%$. Hinweis: $\sqrt{\dfrac{12}{7}} \approx 1.31$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße sind $\mu = 2$ und ist $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 50 ergab jeweils 7, 18, 16, bzw. 9 Werte in den Intervallen $]-\infty, 0.7[$, $[0.7, 2[$, $[2, 3.3[$ bzw. $[3.3, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 10\%$? (Verwenden Sie $\Phi(1.3) \approx 0.4$)

2006 - 03 - 24

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2005/06

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (4), (5), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie entsteht die Poissonverteilung als Grenzwert von Binomialverteilungen?

(b) Aus einer Box mit 10 farbigen und 90 weißen Kugeln wird 3 mal mit Zurücklegen eine Kugel gezogen. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten, genau einmal eine farbige Kugel zu ziehen, nach der Binomialverteilung (exakt) bzw. nach der Poissonverteilung (Näherung)! ($\mathrm{e}^{-0.3} \approx 0.74$)

(2) (a) Was sagt das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 36 Würfen mit einer Münze mindestens 14 mal Zahl zu erhalten, mit der Normalverteilung.

(3) (a) P sei absolutstetig mit Dichtefunktion f und $0 \leq n \leq 100$. Wie ist das $n\,\%-$Fraktil u definiert?

(b) Was ist das $50.4\,\%-$Fraktil u, wenn $f(t) = \frac{3}{2}t^2$ für $|t| < 1$ und $f(t) = 0$ sonst?

(4) (a) Was sagt der *Satz* von Bayes?

(b) Zwei Maschinen A_1 bzw. A_2 produzieren gleichviel, wobei $10\,\%$ bzw. $30\,\%$ defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein defektes Produkt von A_1?

(5) (a) Drücken Sie die Varianz einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Dichtefunktion f aus!

(b) Was ergibt sich, wenn $f(t) = \frac{3}{2}t^2$ für $|t| < 1$ und $f(t) = 0$ sonst?

(6) (a) Wie ist $c_1\underline{x}_1 + \cdots + c_n\underline{x}_n$ verteilt für $\underline{x}_i \quad N(\mu_i, \sigma_i)-$verteilt und unabhängig?

(b) Wie ist $\underline{z} = 2\underline{x} - \underline{y}$ verteilt, wenn $\underline{x}, \underline{y}$ unabhängig und $\underline{x} \quad N(0,1)$, $\underline{y} \quad N(3,1)$ verteilt sind? Skizzieren Sie die Dichtefunktion von $\underline{z}$ mit ihren Wendepunkten!

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) Wie folgert man daraus das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ zum Signifikanzniveau α für μ bei unbekanntem σ? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 2$ für $\alpha = 5\,\%$?

(9) (a) Was ist ein Fehler 1. Art? Wie wahrscheinlich ist er?

(b) Zwei Stichproben der Größen 9 bzw. 16 ergaben jeweils $\hat{s}^2 = 34$ bzw. $\hat{s}'^2 = 10$. Was liefert der $F-$Test bei $\alpha = 5\%$ bzgl. $H_0 : \sigma = \sigma'$?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) 300-maliges Würfeln ergab 80 mal 1 oder 2, 110 mal 3 oder 4, und 110 mal 5 oder 6. Ist nach dem χ^2-Test beim Signifikanzniveau $5\,\%$ der Würfel in Ordnung?

2006 - 06 - 02

3. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2005/06

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (3), (4), (5), (6), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist ein symmetrischer Wahrscheinlichkeitsraum und welche Formel gilt darin für $P(A)$?

(b) Wie wahrscheinlich ist die Augensumme 12 bei einem Wurf mit 3 Würfeln?

(2) (a) Welche drei Axiome muss $P(A)$ in jedem Wahrscheinlichkeitsraum erfüllen?

(b) Wie wahrscheinlich ist das Ereignis $A =$ "weniger als eine Stunde oder zwischen 2 und 3 Stunden auf den ersten Telefonanruf warten", wenn im Mittel alle 2 Stunden ein Anruf eintrifft?

(3) (a) Was ist die Dichtefunktion f von $N(\mu, \sigma)$? Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$?

(b) Für welches μ ist 23 das 1%− Fraktil von $N(\mu, 1)$?

(4) (a) Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{\underline{x}}$ einer Zufallsgröße $\underline{x}$ definiert?

(b) Bestimmen Sie $P_{\underline{z}}([0, 10])$ für $\underline{z} = \underline{x}^2 + \underline{y}^2$, wenn $\underline{x}, \underline{y}$ die Augenzahlen zweier Würfel sind!

(5) (a) Drücken Sie die Varianz der diskreten Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Werte x_i und ihre Wahrscheinlichkeiten $p_i = P_{\underline{x}}(\{x_i\})$ aus!

(b) Berechnen Sie die Varianz der Poissonverteilung!

(6) (a) Welche drei Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient?

(b) Bestimmen Sie $\varrho(\underline{x},\underline{y})$, wenn $\underline{x}$ die Anzahl von Zahl bei zweimaligem Münzwurf ist und $\underline{y} = \underline{x}^2$! $(\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94)$

(7) (a) Was ist eine Stichprobe und was ist das *standardisierte* Stichprobenmittel?

(b) Zeigen Sie $\mathcal{E}(\overline{\underline{x}}) = \mu$ und $\mathcal{V}(\overline{\underline{x}}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ für das Stichprobenmittel $\overline{\underline{x}}$!

(8) (a) Was bedeutet es, dass eine Punktschätzung erwartungstreu ist?

(b) Ist $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\underline{x}_j - \mu)^2$ eine erwartungstreue Schätzgröße für σ^2?

(9) (a) Was ist die Formel für die kombinierte Varianzschätzung?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = -2, 0$ und $x'_j = -1, 3, 2, 4$. Testen Sie $\mu_1 = \mu_2$ zum Signifikanzniveau $20\,\%$. Hinweis: $\sqrt{3} \approx 1.73$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße ist $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 100 ergab $\overline{x} = 2$ und jeweils 30, 20, bzw. 50 Werte in den Intervallen $]-\infty, 1.56[$, $]1.56, 2[$, $]2, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 10\%$?

2009 - 02 - 06

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2008/09

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (2), (4), (6), (7), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ an!

(b) Überprüfen Sie $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i = 1$ für $n=3, \quad p=\frac{1}{3}$.

(2) (a) Was gilt für $\mathrm{Bin}(n,p)$, wenn $n \to \infty$ und $np \to \lambda$?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Dorf mit 1000 Einwohnern wenigstens einer am 24. Dezember Geburtstag hat? $(\mathrm{e}^{-1000/365} \approx 0.065)$

(3) (a) Welche drei Axiome muss $P(A)$ in jedem Wahrscheinlichkeitsraum erfüllen?

(b) Bestimmen Sie $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cup B)$ bzgl. der Normalverteilung $N(4,2)$ für $A=[2,4], \quad B=[3,6]$.

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Augensumme zweier Würfel ≥ 10, wenn mindestens ein Würfel 6 zeigt?

(5) (a) Drücken Sie den Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Dichtefunktion f aus!

(b) Es sei $f(t) = \cos t$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ und 0 sonst. Warum ist das eine Dichtefunktion? Was ist $\mathcal{E}(\underline{x})$, wenn $\underline{x}$ diese Dichte hat? Skizze!

(6) (a) Welche Größe wird bei der Regressionsgeraden von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert? Was ist die Formel für k?

(b) Bestimmen Sie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$, wenn $\underline{y}$ die Augenzahl eines Würfels ist, und $\underline{x} = 1$ falls $\underline{y} \in \{1, 3, 4\}$ und $\underline{x} = 2$ falls $\underline{y} \in \{2, 5, 6\}$.

(7) (a) Wie ist $c_1\underline{x}_1 + \cdots + c_n\underline{x}_n$ verteilt für $\underline{x}_i$ $N(\mu_i, \sigma_i)-$ verteilt und unabhängig?

(b) Es seien $\underline{x}, \underline{y}$ unabhängig und $\underline{x}$ $N(0, 1)$, $\underline{y}$ $N(3, \sqrt{5})-$ verteilt. Wo hat die Dichtefunktion von $\underline{z} = 2\underline{x} - \underline{y}$ ihre Wendepunkte und was ist $P_{\underline{z}}([-6, 0])$?

(8) (a) Welche Formel gibt das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ zum Signifikanzniveau α für μ bei unbekanntem σ? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Dichtemessungen bei Koks ergaben (in $[\mathrm{g/cm^3}]$) : $1.46, 1.40, 1.43, 1.39$. Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für μ zu $\alpha = 5\,\%$! Hinweis: $\sqrt{10^{-3}} \approx 0.03$

(9) (a) Was ist die Formel für die kombinierte Varianzschätzung?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = 2, -2, 2, 2$ und $x'_j = 2, 6, 4$. Testen Sie $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ zum Signifikanzniveau $5\,\%$. Hinweis: $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \approx 1.96$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2- Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) In den 4 Quartalen eines Jahres ergaben sich in Deutschland folgende Geburtenzahlen (gerundet): 244 000, 241 000, 233 000, 226 000. Testen Sie mit $\alpha = 1\,\%$, ob diese Abweichungen von der Gleichverteilung zufallsbedingt oder signifikant sind!

2009 - 03 - 27

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2008/09

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (2), (3), (5), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{Hyp}(n, N, F)$ an!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, genau 2 rote Kugeln zu ziehen, wenn man 3 mal ohne Zurücklegen aus einem Topf mit 4 roten und 6 blauen Kugeln zieht? Berechnen Sie das Ergebnis!

(2) (a) Was ist der Grenzwert von $\mathrm{Hyp}(n, N, F)$ für $N \to \infty$, $\frac{F}{N} \to p$?

(b) Was ergibt sich in (1) (b) bei Ziehen mit Zurücklegen?

(3) (a) Was ist die Dichtefunktion von $N(\mu, \sigma)$ und wo sind ihre Wendepunkte?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 16 Würfen mit einer Münze höchstens 6 mal Zahl zu erhalten, mit der Normalverteilung!

(4) (a) Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{\underline{z}}$ der Zufallsgröße $\underline{z}$ definiert?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien die Augenzahlen zweier Würfel, $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$. Bestimmen Sie $p_i = P_{\underline{z}}(\{i\})$ für $i = 2$ sowie $i = 7$!

(5) (a) Wie ist die Varianz $\mathcal{V}(\underline{x})$ definiert und welche weitere Formel gilt dafür?

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{V}(\underline{x})$ für $\underline{x}$ mit der Dichtefunktion $f_{\underline{x}}(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{t} : 0 \le t \le 1, \\ 0 \quad : \text{sonst.} \end{cases}$
Warum ist das eine Dichtefunktion? Skizze!

(6) (a) Welche drei Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$?

(b) Bei einem Wurf mit 2 verschiedenen Münzen sei $\underline{x} = 1$, wenn die 1. Münze Zahl zeigt, und 0 sonst, und $\underline{y} =$ Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen (0,1, oder 2). Berechnen Sie $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$! $(\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71)$

(7) (a) Wie lässt sich $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(\{a \le \frac{\overline{\underline{x}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le b\}\big)$ nach dem ZGS durch Φ ausdrücken?

(b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit $\underline{z}$ bis zum 25. Anruf zwischen 4 h und 6 h liegt, wenn pro h im Mittel 5 Anrufe kommen! (Hinweise: $\overline{\underline{x}} = \frac{1}{25}\,\underline{z}$, $P_{\underline{x}_j} = \text{Expo}(5)$, $\mu = \mathcal{E}(\underline{x}_j) = \frac{1}{5}$, $\sigma = \frac{1}{5}$)

(8) (a) Welche Formel gibt das 2seitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für die Varianz σ^2?

(b) Dichtemessungen bei Koks ergaben (in $[\text{g/cm}^3]$) : $1.46, 1.40, 1.43, 1.39$. Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für σ^2 zu $\alpha = 5\,\%$!

(9) (a) Was ist ein Fehler 1. Art? Wie wahrscheinlich ist er?

(b) Zwei Stichproben der Größen 13 bzw. 7 ergaben jeweils $\hat{s}^2 = 20$ bzw. $\hat{s}'^2 = 80$. Was liefert der $F-$Test bei $\alpha = 5\%$ bzgl. $H_0 : \sigma = \sigma'$?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße $\underline{x}$ sind $\mu = 2$ und $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 100 ergab jeweils 27, 23, bzw. 50 Werte in den Intervallen $]-\infty, 1.56[$, $]1.56, 2[$, $]2, \infty[$. Ist $\underline{x}$ normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 5\%$?

2009 - 06 - 05

3. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2008/09

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. **Es genügt, Dezimalzahlen formelmäßig anzugeben; Parameter und Fraktile sollten aber explizit hingeschrieben werden.** Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (4), (5), (6), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist ein symmetrischer Wahrscheinlichkeitsraum und welche Formel gilt darin für $P(A)$?

(b) Aus den 52 Karten eines Spiels werden 4 zufällig entnommen, $A =$ "Herz König und Herz Dame sind dabei". Berechnen Sie $\frac{1}{P(A)}$ explizit!

(2) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Poissonverteilung an!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Gebiet mit durchschnittlich 18 Bränden im Jahr in einem Monat genau 2 Brände sind?

(3) (a) Was sagt das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 180-maligem Würfeln mindestens 20 und höchstens 40 Sechser zu erhalten, mit der Normalverteilung!

(4) (a) Was sagt der *Satz* von Bayes?

(b) Zwei Maschinen A_1 bzw. A_2 produzieren gleichviel, wobei $10\,\%$ bzw. $30\,\%$ defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein defektes Produkt von A_1?

(5) (a) Drücken Sie die Varianz der diskreten Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Werte x_i und Wahrscheinlichkeiten $p_i = P_{\underline{x}}(\{x_i\})$ aus!

(b) Es sei $\underline{x} =$ Anzahl von Zahl bei zweimaligem Münzwurf (d.h. $P_{\underline{x}} = \mathrm{Bin}(2, \frac{1}{2})$). Berechnen Sie $\mathcal{V}(\underline{x})$ mit der Formel in (a)!

(6) (a) Wie ist die Kovarianz definiert und was gilt für $\mathcal{V}(\underline{x}+\underline{y})$?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien die Augenzahlen zweier Würfel und $\underline{s}$ die Anzahl der Sechser. Bestimmen Sie $\operatorname{cov}(\underline{x}, \underline{s})$!

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{10}$ sei eine Stichprobe und $\underline{y} = \dfrac{\overline{\underline{x}} - \mu}{\sigma/\sqrt{10}}$ das standardisierte Stichprobenmittel. Bestimmen Sie mit dem ZGS näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass $\underline{y}$ zwischen -1 und 2 liegt!

(8) (a) Welche Formel gibt das einseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \infty]$ zum Signifikanzniveau α für μ bei unbekanntem σ? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$ für $\alpha = 10\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$? Wie ist $\underline{z}$ verteilt, falls H_0 gilt?

(b) Testen Sie H_0 zum Signifikanzniveau 10 % für zwei Stichproben mit den Werten

j	1	2	3	4	5
x_j	7	14	8	6	15
x'_j	9	4	12	4	11.

Wird H_0 angenommen oder abgelehnt? Hinweis: $\sqrt{2.5} \approx 1.58$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) An einer Wahl nehmen die 3 Parteien A, B, C teil. Ein Meinungsforschungsinstitut stellte die Prognose $p_A = 45\,\%$, $p_B = 39\,\%$, $p_C = 16\,\%$. Eine unabhängige Befragung von 1000 Leuten ergab jeweils 420, 380, 200 Anhänger von A, B, C. Ist die Prognose beim Signifikanzniveau von 1 % in Ordnung?

2010 - 02 - 12

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2009/10

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (3), (4), (5), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\text{Bin}(n,p)$ an!

(b) Ein Schütze trifft mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von genau 3 Treffern bei 6 Schüssen? $(3^{-6} \approx 0.0014)$

(2) (a) Wie erhält man $P(]t_1, t_2])$ für die Exponentialverteilung aus der Poissonverteilung?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass an einem Wochenende (= Samstag + Sonntag) keine Lawine abgeht, wenn im Schnitt 2 Lawinen pro Tag kommen? $(\mathrm{e}^{-2} \approx 0.14)$

(3) (a) Wie wird $P_{N(\mu,\sigma)}([a,b])$ durch Φ ausgedrückt?

(b) Wie ist μ einzustellen, damit genau $1\,\%$ von $N(\mu,1)-$verteilten Butterpaketen leichter als 23 dag ist?

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme zweier Würfel größer oder gleich 8 ist, wenn kein Würfel 6 zeigt?

(5) (a) Drücken Sie den Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Dichtefunktion $f_{\underline{x}}$ aus!

(b) Warum ist $f_{\underline{x}}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3}\,t^2 & : -1 \le t \le 2, \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\}$ eine Dichtefunktion? Bestimmen Sie $P_{\underline{x}}([0,1])$ und $\mathcal{E}(\underline{x})$! Skizze!

(6) (a) Wie ist $\operatorname{cov}(\underline{x}, \underline{y})$ definiert und was gilt für $\mathcal{V}(\underline{x} + \underline{y})$?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien unabhängig mit $P_{\underline{x}} = N(1,1)$ und $P_{\underline{y}} = N(2,3)$. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilung von $\underline{z} = \underline{y} - 4\underline{x}$!

(7) (a) Wie lässt sich $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left\{a \leq \frac{\overline{\underline{x}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right\}\right)$ nach dem ZGS durch Φ ausdrücken?

(b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass in 100 h die Anzahl $\underline{z}$ der Anrufe zwischen 380 und 420 liegt, wenn im Schnitt 4 Anrufe pro Stunde kommen! (Hinweise: $\overline{\underline{x}} = \frac{1}{100}\,\underline{z}$, $P_{\underline{x}_j} = \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda = 4$, $\mu = \mathcal{E}(\underline{x}_j) = \lambda$, $\sigma^2 = \mathcal{V}(\underline{x}_j) = \lambda$)

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für μ bei unbekanntem σ zum Signifikanzniveau α?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 2$ für $\alpha = 10\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = -1, 2, -1$ und $x'_j = 7, 2, 3, 4$. Testen Sie $\mu_1 = \mu_2$ zum Signifikanzniveau $5\,\%$. Hinweis: $\sqrt{\dfrac{12}{7}} \approx 1.31$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Bei $120-$maligem Würfeln wurde 32 mal 6 gewürfelt. Ist das nach dem χ^2-Test mit Signifikanzniveau $1\,\%$ bei einem regulären Würfel möglich?

2010 - 04 - 16

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2009/10

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (3), (5), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{Hyp}(n, N, F)$ an!

(b) Aus einem Topf mit 3 roten und 2 weißen Kugeln werden 2 Kugeln zugleich entnommen. Wie wahrscheinlich ist es, 0, 1, bzw. 2 rote Kugeln zu ziehen? Überprüfen Sie, dass die Summe 1 ergibt!

(2) (a) Was ist die Dichtefunktion der Exponentialverteilung? Skizze!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der erste Anruf in der zweiten halben Stunde einlangt, wenn im Schnitt 2 Anrufe pro Stunde kommen? ($\mathrm{e}^{-1} \approx 0.4$)

(3) (a) Wie wird $P_{N(\mu,\sigma)}([a, b])$ durch Φ ausgedrückt?

(b) Approximieren Sie mit der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, bei 18 Würfen mit 2 Würfeln 1 bis 3 mal Augensumme 5 zu erhalten!

(4) (a) Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{\underline{x}}$ der Zufallsgröße $\underline{x}$ definiert?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien die Augenzahlen zweier Würfel, $\underline{z} = \underline{x}/\underline{y}$. Bestimmen Sie $P_{\underline{z}}(\{\frac{2}{3}\})$ sowie $P_{\underline{z}}([3, \infty[)$!

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße $\underline{x}$ durch die Werte x_i und die Wahrscheinlichkeiten p_i ausgedrückt?

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Poissonverteilung!

(6) (a) Welche Größe wird bei der Regressionsgeraden von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert? Was ist die Formel für k?

(b) $\underline{x}$ habe die Werte $x_i = 1, 3, 4$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ und $\underline{y} = \left\{ \begin{array}{l} 1 : \underline{x} = 1, \\ 2 : \underline{x} = 3 \text{ oder } 4 \end{array} \right\}$. Bestimmen Sie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$!

(7) (a) Wie lässt sich $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left\{a \leq \frac{\overline{\underline{x}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right\}\right)$ nach dem ZGS durch Φ ausdrücken?

(b) Es wird n mal gewürfelt. Ab welchem n unterscheidet sich $\overline{\underline{x}} = \frac{1}{n}(\underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_n)$ mit 99.74% Wahrscheinlichkeit um weniger als $\frac{1}{2}$ von 3.5? Hinweis: $\mathcal{V}(\underline{x}_j) = \frac{35}{12}$

(8) (a) Wie ist $\hat{\underline{s}}^2$ definiert? Was bedeutet es, dass die Punktschätzung $\hat{\underline{s}}^2$ erwartungstreu für σ^2 ist?

(b) 21 Messungen ergaben $\hat{\underline{s}}^2 = 0.743$ Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für σ^2 zum Signifikanzniveau $\alpha = 1\,\%$!

(9) (a) Was ist ein Fehler 1. Art? Wie wahrscheinlich ist er?

(b) 2 Stichproben der Größen 10 bzw. 8 ergaben jeweils $\hat{s}^2 = 10$ bzw. $\hat{s}'^2 = 45$. Was ergibt der $F-$Test bei $\alpha = 5\%$ für die Hypothese $H_0 : \sigma = \sigma'$?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße ist $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 100 ergab $\overline{x} = 3$ und jeweils 50, 36, bzw. 14 Werte in den Intervallen $]-\infty, 3[$, $]3, 3.841[$, bzw. $]3.841, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 10\%$?

2010 - 06 - 11

3. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2009/10

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (1), (3), (4), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie entsteht die Poissonverteilung als Grenzwert von Binomialverteilungen?

(b) Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 Bohrern mindestens 3 defekt sind, wenn im Schnitt jeder 50. Bohrer defekt ist! ($\mathrm{e}^{-2} \approx 0.14$)

(2) (a) Welche Eigenschaften muss eine Dichtefunktion $f(t)$ haben?

(b) Überprüfen Sie, dass die Dichtefunktion von $\mathrm{Expo}(\mu)$ eine Dichtefunktion ist! Bestimmen Sie $P([\frac{1}{\mu}, \frac{2}{\mu}])$! ($\mathrm{e}^{-1} \approx 0.4$)

(3) (a) Was ist die Dichtefunktion der Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$? Wo sind die Wendepunkte? Skizze!

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsgröße mehr als 2σ von ihrem Erwartungswert entfernt ist?

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit?

(b) 20 % der Bevölkerung sind Senioren, und 10 % aller Senioren sind bei einer Epidemie erkrankt. Wie hoch ist das generelle Krankheitsrisiko, wenn von den Erkrankten 40 % Senioren sind?

(5) (a) Drücken Sie die Varianz $\mathcal{V}(\underline{x})$ einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch die Dichtefunktion aus!

(b) Bestimmen Sie die Varianz der Gleichverteilung am Intervall $[0, 2]$!

(6) (a) Wann heißen zwei Zufallsgrößen $\underline{x}, \underline{y}$ unkorreliert? Wie ist der Zusammenhang mit der Unabhängigkeit?

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{s} =$ "Anzahl der Sechser" und $\underline{d} = \underline{x} - \underline{y} =$ "Differenz der Augenzahlen" beim Würfeln mit 2 Würfeln unkorreliert sind! Sind $\underline{d}, \underline{s}$ unabhängig?

(7) (a) Wie sind das Stichprobenmittel $\underline{\overline{x}}$ und das standardisierte Stichprobenmittel definiert?

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{E}(\underline{\overline{x}})$ und $\mathcal{V}(\underline{\overline{x}})$ für das Stichprobenmittel $\underline{\overline{x}}$!

(8) (a) Wie ist die erwartungstreue Stichprobenvarianz $\underline{\hat{s}}^2$ definiert? Was ist $\mathcal{E}(\underline{\hat{s}}^2)$?

(b) Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ^2 zu $\alpha = 2\,\%$ für eine Stichprobe der Größe 16 mit $\overline{x} = 1.3$ und $\hat{s}^2 = 0.16$.

(9) (a) Was ist die Testgröße für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, wenn σ_1, σ_2 gleich und bekannt sind?

(b) Testen Sie H_0 (zweiseitiger Test!), wenn $\alpha = 2\%$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ und $x'_1 = 3$, $x'_2 = 7$, $x'_3 = 2$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$.

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße ist $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 100 ergab $\overline{x} = 3$ und jeweils 50, 36, bzw. 14 Werte in den Intervallen $]-\infty, 3[$, $]3, 3.841[$, bzw. $]3.841, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 10\%$?

2011 - 02 - 09

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2010/11

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (2), (3), (5), (6), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ an!

(b) Aus einem Topf mit 5 roten und 10 blauen Kugeln wird fünfmal eine Kugel gezogen und danach wieder zurückgelegt. Wie wahrscheinlich ist es, genau dreimal eine rote Kugel zu ziehen? ($3^{-5} \approx 0.004$)

(2) (a) Was gilt für $\mathrm{Bin}(n,p)$ wenn $n \to \infty$, $p \to 0$ und $np \to \lambda$?

(b) Welche Approximation erhält man für die Wahrscheinlichkeit in (1) (b)?

(3) (a) Wie wird $P_{N(\mu,\sigma)}([a,b])$ durch Φ ausgedrückt?

(b) Was ist das $97.5\,\%-$Fraktil u von $N(7,2)$?

(4) (a) Was ist eine Zufallsgröße?

(b) Was ist $P_{\underline{z}}$ wenn $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$ die Augensumme zweier Würfel ist? Skizze!

(5) (a) Wie ist $\mathcal{V}(\underline{x})$ definiert und welche weitere Formel gilt dafür?

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{V}(\underline{x})$ wenn $P_{\underline{x}}$ die Dichte $f(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 : 0 \leq t \leq 1 \\ 0 : \text{sonst} \end{array} \right\}$ hat!

(6) (a) Wie ist $\operatorname{cov}(\underline{x},\underline{y})$ definiert und was gilt für $\mathcal{V}(\underline{x}+\underline{y})$?

(b) $\underline{x},\underline{y}$ seien unabhängig mit $P_{\underline{x}} = N(0,1)$, $P_{\underline{y}} = N(3,\sqrt{5})$. Skizzieren Sie die Dichtefunktion von $\underline{z} = 2\underline{x} - \underline{y}$ und bestimmen Sie $P_{\underline{z}}([-6,0])$!

(7) (a) Wie lässt sich $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(\{a \le \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le b\}\big)$ nach dem ZGS durch Φ ausdrücken?

(b) Es wird n mal gewürfelt. Ab welchem n unterscheidet sich $\overline{\underline{x}} = \frac{1}{n}(\underline{x}_1+\cdots+\underline{x}_n)$ mit 99.74% Wahrscheinlichkeit um weniger als $\frac{1}{2}$ von 3.5? Hinweis: $\mathcal{V}(\underline{x}_j) = \frac{35}{12}$

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a},\underline{b}]$ für μ bei unbekanntem σ zum Signifikanzniveau α?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$ für $\alpha = 5\,\%$? $(\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.6)$

(9) (a) Was ist die Testgröße für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, wenn σ_1, σ_2 gleich und bekannt sind?

(b) Testen Sie H_0, wenn $\alpha = 5\%$, $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 2$ und $x'_1 = 2, x'_2 = 6$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ bekannt ist. $(\sqrt{3} \approx 1.73)$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) 40−maliges Münzewerfen ergab 13 mal Zahl und 27 mal Kopf. Ist nach dem χ^2-Test beim Signifikanzniveau 5% die Münze in Ordnung, d.h. $p = q = \frac{1}{2}$?

2011 - 04 - 08

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2010/11

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (3), (6), (7), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist ein symmetrischer (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum und welche Formel gilt darin für $P(A)$?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, bei einem Wurf mit 3 Würfeln Augensumme 6 zu erhalten?

(2) (a) Wie erhält man $P(]t_1, t_2])$ für die Exponentialverteilung aus der Poissonverteilung?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der erste Anruf in den zweiten 10 Minuten eintrifft, wenn im Schnitt 5 Anrufe pro Stunde einlangen?

(3) (a) Was ist die Dichtefunktion der Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$? Wo sind ihre Wendepunkte? Skizze!

(b) Approximieren Sie mit der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, bei 45-maligem Würfeln mindestens 12 Sechser zu erhalten! $(\sqrt{45 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 5} = 3 \cdot 5)$

(4) (a) Wann nennt man zwei Ereignisse A, B unabhängig? Was gilt dann für $P(A|B)$?

(b) Beim Würfeln mit 2 Würfeln sei $A =$ "der erste Würfel zeigt 5 oder 6" und $B =$ "Augensumme = 7". Bestimmen Sie $P(A|B)$! Sind A, B unabhängig?

(5) (a) Drücken Sie den Erwartungswert einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Dichtefunktion f aus!

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{E}(\underline{x})$ wenn $P_{\underline{x}} = \text{Expo}(\mu)$!

(6) (a) Was wird bei der Regressionsgeraden $y = kx + d$ von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert? Was ist die Formel für k?

(b) Bestimmen Sie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$, wenn $\underline{y}$ die Augenzahl eines Würfels ist und $\underline{x} = \begin{cases} 0 : \underline{y} \leq 3, \\ 1 : \underline{y} \geq 4. \end{cases}$

(7) (a) Welche Formel gibt das einseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \infty]$ für μ bei unbekanntem σ (zum Signifikanzniveau α)? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$ für $\alpha = 5\,\%$?

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4$ für $\alpha = 10\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = -1, 2, -1$ und $x'_j = 7, 2, 3, 4$. Testen Sie $\mu_1 = \mu_2$ zum Signifikanzniveau $10\,\%$. Hinweis: $\sqrt{\dfrac{12}{7}} \approx 1.31$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Nach H_0 hat $\underline{x}$ die Dichtefunktion $f(t) = \begin{Bmatrix} 2t : 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \;\; : \text{sonst.} \end{Bmatrix}$. Bei 32 Messungen ergaben sich 5 Werte in $[0, \frac{1}{2}[$, 13 Werte in $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$, sowie 14 Werte in $[\frac{3}{4}, 1]$. Ist H_0 bei $\alpha = 5\,\%$ abzulehnen oder anzunehmen?

2011 - 06 - 24

3. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2010/11

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (2), (3), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die hypergeometrische Verteilung $\text{Hyp}(n, N, F)$ an!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, genau 1 rote Kugel zu ziehen, wenn man 3 mal ohne Zurücklegen aus einem Topf mit 20 roten und 20 blauen Kugeln zieht? Berechnen Sie das Ergebnis!

(2) (a) Was ist der Grenzwert von $\text{Hyp}(n, N, F)$ für $N \to \infty$, $\frac{F}{N} \to p$?

(b) Was ergibt sich in (1) (b) bei Ziehen mit Zurücklegen?

(3) (a) Welche Bedingungen muss eine Dichtefunktion erfüllen?

(b) Welche der folgenden Funktionen sind Dichtefunktionen?

(α) $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin t: & -\frac{\pi}{2} \le t \le \pi \\ 0: & \text{sonst} \end{array} \right\}$ (β) $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin t: & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0: & \text{sonst} \end{array} \right\}$

(γ) $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin t: & 0 \le t \le \pi \\ 0: & \text{sonst} \end{array} \right\}$ Begründen Sie Ihre Antwort!

(4) (a) Was ist die Bedeutung (nicht die Formel) der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$?

(b) Die Aufenthaltsdauer in einem McDonald ist exponentialverteilt mit $\mu = \frac{1}{30}\,\text{min}^{-1}$. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde höchstens 1 h bleibt unter der Annahme, dass er zwischen 30 min und 2 h bleibt?

(5) (a) Wie ist $\mathcal{V}(\underline{x})$ definiert, und welche weitere Formel gilt dafür?

(b) Berechnen Sie $\mathcal{V}(\underline{x})$ wenn $P_{\underline{x}} = N(\mu, \sigma)$!

(6) (a) Welche drei Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient?

(b) Bestimmen Sie $\rho(\underline{x}, \underline{y})$ wenn $\underline{x}$ = Augenzahl eines Würfels und $\underline{y} = \begin{cases} 2 : \underline{x} \leq 3, \\ 0 : \underline{x} \geq 4. \end{cases}$

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz?

(b) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{16}$ sei eine Stichprobe mit $\mathcal{E}(\underline{x}_j) = 1$, $\mathcal{V}(\underline{x}_j) = 4$. Bestimmen Sie mit dem ZGS näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{\underline{x}}$ zwischen 0 und 2 liegt!

(8) (a) Wie ist $\underline{\hat{s}}^2$ definiert? Was bedeutet es, dass die Punktschätzung $\underline{\hat{s}}^2$ erwartungstreu für σ^2 ist?

(b) Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für σ^2, wenn $n = 23$, $\hat{s}^2 = 18.4$, $\alpha = 5\,\%$!

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$? Wie ist $\underline{z}$ verteilt, falls H_0 gilt?

(b) Testen Sie H_0 zum Signifikanzniveau 10 % für zwei Stichproben mit Werten $x_j = 0, 6, 0$ und $x'_j = 3, 0, 7, 1, 4$. Wird H_0 angenommen oder abgelehnt? ($\sqrt{\frac{15}{8}} \approx 1.4$)

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) An einer Wahl nehmen die 3 Parteien A, B, C teil. Ein Meinungsforschungsinstitut stellte die Prognose $p_A = 45\,\%$, $p_B = 39\,\%$, $p_C = 16\,\%$. Eine unabhängige Befragung von 1000 Leuten ergab jeweils 420, 380, 200 Anhänger von A, B, C. Ist die Prognose beim Signifikanzniveau von 1 % in Ordnung?

2014 - 02 - 06

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2013/14

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (2), (5), (6), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist ein symmetrischer (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum und welche Formel gilt darin für $P(A)$?

(b) Aus den 52 Karten eines Spiels werden 5 zufällig entnommen. Wie wahrscheinlich ist es, dass sie alle dieselbe Farbe haben? ($\frac{11\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 17\cdot 49} \approx 0.00198$)

(2) (a) Wie entsteht die Poissonverteilung als Grenzwert von Binomialverteilungen?

(b) Ein Schütze, der mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ trifft, schießt dreimal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau einmal trifft, (α) exakt bzw. (β) nach der Poissonverteilung (Näherung)? ($\mathrm{e}^{-0.3} \approx 0.74$)

(3) (a) Was sagt das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 16 Würfen mit einer Münze 7, 8, oder 9 mal Zahl zu erhalten, mit der Normalverteilung!

(4) (a) Was ist die Bedeutung (nicht die Formel) der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$?

(b) 20 % der Bevölkerung sind Senioren, und 10 % aller Senioren sind bei einer Epidemie erkrankt. Wie hoch ist das generelle Krankheitsrisiko, wenn von den Erkrankten 40 % Senioren sind?

(5) (a) Drücken Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}(\underline{x})$ einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch die Dichtefunktion $f_{\underline{x}}(t)$ aus!

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{E}(\underline{x})$ wenn $f_{\underline{x}}(t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-t^2} & : 0 \le t \le 1, \\ 0 & : \text{sonst} \end{matrix} \right\}$! Skizze!

(6) (a) Welche Größe wird bei der Regressionsgeraden von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert? Was ist die Formel für k?

(b) Bestimmen Sie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$, wenn $\underline{x}$ die Anzahl von Zahl bei zweimaligem Münzwurf ist und $\underline{y} = \underline{x}^2$! Skizze!

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{10}$ sei eine Stichprobe und $\underline{y} = \dfrac{\overline{\underline{x}} - \mu}{\sigma/\sqrt{10}}$ das standardisierte Stichprobenmittel. Bestimmen Sie mit dem ZGS näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass $\underline{y}$ zwischen -1 und 2 liegt!

(8) (a) Welche Formel gibt das einseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \infty[$ für μ bei unbekanntem σ (zum Signifikanzniveau α)? (Legen Sie auch u fest!)

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$ für $\alpha = 20\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, wenn σ_1, σ_2 gleich und bekannt sind?

(b) Testen Sie H_0, wenn $\alpha = 5\,\%$, x_i wie in (8b), $x'_1 = 2$, $x'_2 = 6$, $x'_3 = 4$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{\frac{12}{7}}$ bekannt ist.

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Von 9853 Feuerwehrmännern auf "ground zero" waren nach 10 Jahren 263 an Krebs erkrankt. Nach der Erkrankungsrate in der Gesamtbevölkerung wären es 238 gewesen. Ist die Abweichung nach dem χ^2-Test zu $\alpha = 1\,\%$ signifikant oder nicht?

Ergebnis:

Note	1	2	3	4	5
#	4	12	11	5	34

2014 - 03 - 31

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2013/14

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer (10) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie entsteht die Binomialverteilung als Grenzwert hypergeometrischer Verteilungen?

(b) Aus einer Box mit 20 blauen und 20 roten Kugeln werden 3 Kugeln gezogen. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten keine blaue Kugel zu erhalten, wenn mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen wird. ($\frac{1}{26} \approx 0.038$)

(2) (a) Welche Bedingungen muss eine Dichtefunktion f erfüllen?

(b) Skizzieren Sie die Dichtefunktion von Expo(2) und bestimmen Sie dafür das $99\,\%-$Fraktil! ($\ln 100 \approx 4.6$)

(3) (a) Wie wird $P_{N(\mu,\sigma)}([a,b])$ durch Φ ausgedrückt?

(b) Wie ist μ einzustellen, damit genau $1\,\%$ von $N(\mu,1)-$verteilten Butterpaketen leichter als 23 dag ist?

(4) (a) Was ist die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme zweier Würfel gleich 7 ist, wenn sie höchstens 9 ist?

(5) (a) Wie wird der Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße $\underline{x}$ durch die Werte x_i und die Wahrscheinlichkeiten p_i ausgedrückt?

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Poissonverteilung!

(6) (a) Welche drei Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient?

(b) Bestimmen Sie $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$, wenn $\underline{x}$ die Anzahl von Zahl bei zweimaligem Münzwurf ist und $\underline{y} = \underline{x}^2$! $(\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94)$

(7) (a) Was bedeutet es, dass eine Punktschätzung erwartungstreu ist?

(b) Ist $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\underline{x}_j - \mu)^2$ eine erwartungstreue Schätzgröße für σ^2?

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4$ für $\alpha = 10\,\%$?

(9) (a) Was ist die Formel für die kombinierte Varianzschätzung?

(b) Zwei Stichproben ergaben die Werte $x_j = -2, 0$ und $x'_j = -1, 3, 2, 4$. Testen Sie $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ zum Signifikanzniveau $20\,\%$. Hinweis: $\sqrt{3} \approx 1.73$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Für eine Zufallsgröße ist $\sigma = 1$ bekannt. Eine Stichprobe der Größe 100 ergab $\overline{x} = 2$ und jeweils 30, 20, bzw. 50 Werte in den Intervallen $]-\infty, 1.56[$, $]1.56, 2[$, $]2, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 10\%$?

Ergebnis:

Note	1	2	3	4	5
#	2	5	9	18	30

2016 - 02 - 11

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2015/16

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Verwenden Sie zur Berechnung die angegebenen Näherungswerte. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (2), (3), (5), (6), (7), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ an!
(b) Überprüfen Sie $\mathcal{E}(\underline{x}) = np$ wenn $P_{\underline{x}} = \mathrm{Bin}(3, \frac{1}{4})$!

(2) (a) Geben Sie $f(t)$ und $P([a,b])$ für die Exponentialverteilung $\mathrm{Expo}(\mu)$ an!

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der erste Anruf innerhalb von 10 Minuten eintrifft, wenn im Schnitt 6 Anrufe pro Stunde erfolgen?

(3) (a) Schreiben Sie die Dichtefunktion f von $N(\mu,\sigma)$ an! Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$?

(b) Für welches σ ist 8.8 das $0.1\,\%-$ Fraktil von $N(15,\sigma)$?

(4) (a) Was ist die Bedeutung (nicht die Formel) der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$?

(b) Die Anzahl der Supernovaexplosionen in einer fernen Galaxie ist poissonverteilt mit einem Mittelwert von 6 pro Jahr. Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Jahr, in dem mindestens eine Explosion stattfand, weniger als vier erfolgten? ($\mathrm{e}^6 \approx 401$)

(5) (a) Drücken Sie die Varianz einer absolutstetigen Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Dichtefunktion f aus!

(b) Berechnen Sie die Streuung $\sigma(\underline{x})$, wenn $f(t) = \frac{3}{4}(1-t^2)$ für $|t| \leq 1$ und $f(t) = 0$ sonst! Machen Sie eine Skizze! ($\sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0.45$)

(6) (a) Schreiben Sie die Formeln für die Steigungen k bzw. k' der Regressionsgeraden von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ bzw. von $\underline{x}$ nach $\underline{y}$ an!

(b) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$ sowie die zwei Regressionsgeraden, wenn $\underline{x}$ $N(1, 2)-$verteilt ist, $\underline{y}$ $N(3, 4)-$verteilt, und $\mathcal{E}(\underline{x} \cdot \underline{y}) = 7$. (Vorsicht: Unterscheiden Sie Streuungen und Varianzen!)

(7) (a) Wie sind das Stichprobenmittel $\underline{\overline{x}}$ und die erwartungstreue Stichprobenvarianz $\underline{\hat{s}}^2$ definiert?

(b) Zeigen Sie $\mathcal{E}(\underline{\overline{x}}) = \mu$ und $\mathcal{V}(\underline{\overline{x}}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ für das Stichprobenmittel $\underline{\overline{x}}$!

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Bestimmen Sie $[a, b]$ zu den Werten $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = -1$ für $\alpha = 5\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$? Wie ist $\underline{z}$ verteilt, falls H_0 gilt?

(b) Testen Sie H_0 zum Signifikanzniveau 20 % für zwei Stichproben mit Werten $x_j = 1, 4, 7$ und $x'_j = 9, 6, 6$. Wird H_0 angenommen oder abgelehnt?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Eine Stichprobe der Größe 32 ergab in den Intervallen $]-\infty, -\frac{1}{2}[$, $[-\frac{1}{2}, 0[$, $[0, \frac{1}{2}[$ bzw. $[\frac{1}{2}, \infty[$ jeweils 6, 8, 10 bzw. 8 Werte. Testen Sie mit $\alpha = 10\,\%$ die Hypothese, dass die Zufallsgröße wie in Aufgabe (5) (b) verteilt ist! Hinweis: Brüche kürzen!

Ergebnis:

Note	1	2	3	4	5
#	7	3	14	17	52

2016 - 03 - 17

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2015/16

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (1), (2), (5), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie entsteht die Binomialverteilung als Grenzwert hypergeometrischer Verteilungen?

(b) Aus einer Box mit 20 blauen und 10 roten Kugeln werden 3 Kugeln zugleich gezogen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit, genau 1 rote Kugel zu erhalten, als Bruch an! Welche Näherung liefert (a)?

(2) (a) Welche Bedingungen muss eine Dichtefunktion f erfüllen?

(b) Es sei $f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$ für $t \in \mathbb{R}$. Warum ist f eine Dichtefunktion? Bestimmen Sie $P([0,1])$! Machen Sie eine Skizze!

(3) (a) Was sagt das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(b) Approximieren Sie damit die Wahrscheinlichkeit, bei 18-maligem Würfeln mindestens 6 mal eine durch 3 teilbare Zahl zu erhalten!

(4) (a) Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{\underline{x}}$ der Zufallsgröße $\underline{x}$ definiert?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien die Augenzahlen zweier Würfel und $\underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{y}$. Bestimmen Sie $P_{\underline{z}}([0,4])$ und $\mathcal{E}(\underline{z})$! (Hinweis: $\underline{x}, \underline{y}$ sind unabhängig!)

(5) (a) Drücken Sie die Varianz der diskreten Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Werte x_i und Wahrscheinlichkeiten $p_i = P_{\underline{x}}(\{x_i\})$ aus!

(b) Berechnen Sie die Varianz der Poissonverteilung!

(6) (a) $y = kx + d$ sei die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$. Was muss $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$ erfüllen, damit $\underline{y} = k\underline{x} + d$ gilt?

(b) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{2}$, $\underline{x}(i) = i - 2$, $\underline{y} = \underline{x}^2$. Gilt hier $\underline{y} = k\underline{x} + d$? (Machen Sie eine Skizze!)

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) Durch welche Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ lässt sich die Verteilung der Augensumme von n Würfeln approximieren?

(8) (a) Wie ist die erwartungstreue Stichprobenvarianz $\hat{\underline{s}}^2$ definiert?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = 5\,\%$ zu den Werten $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 2$ das zweiseitige Konfidenzintervall für μ, (α) wenn $\sigma = 2$ bekannt ist, (β) wenn σ unbekannt ist!

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bei unbekanntem $\sigma_1 = \sigma_2$? Wie ist $\underline{z}$ verteilt, falls H_0 gilt?

(b) Testen Sie H_0 zum Signifikanzniveau 20 % für zwei Stichproben mit Werten $x_j = 1, 4, 7$ und $x'_j = 9, 6, 6$. Wird H_0 angenommen oder abgelehnt?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2- Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) 120− maliges Würfeln ergab 30 Sechser und 90 mal Augenzahlen von 1 bis 5. Ist der Würfel nach dem χ^2- Test beim Signifikanzniveau 5 % in Ordnung?

Ergebnis:

Note	1	2	3	4	5
#	0	2	9	16	61

Kommentar: Fast niemand von den Studenten konnte integrieren, vgl. Aufgabe (2).

2017 - 02 - 09

1. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2016/17

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (2), (3), (5), (6), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie Ω und p_i für die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{Hyp}(n, N, F)$ an!

(b) Aus einer Schale mit drei roten und zwei blauen Kugeln werden zwei Kugeln zugleich entnommen, $\underline{x}$ = Anzahl der roten Kugeln darunter. Bestimmen Sie $\mathcal{E}(\underline{x})$!

(2) (a) Wie entsteht die Poissonverteilung als Grenzwert von Binomialverteilungen?

(b) Im Schnitt treffen pro Stunde vier Telefonanrufe ein. Was ist wahrscheinlicher: (α) dass in einer halben Stunde genau 3 Anrufe kommen, oder (β) dass der erste Anruf erst nach einer halben Stunde eintrifft?

(3) (a) Was ist die Dichtefunktion der Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$? Wo sind die Wendepunkte? Skizze!

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsgröße mehr als 3σ von ihrem Erwartungswert entfernt ist?

(4) (a) Was ist die Bedeutung (nicht die Formel) der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$?

(b) Die Brenndauer einer Glühbirne ist exponentialverteilt mit $\mu = \frac{1}{200}\,[\mathrm{h}^{-1}]$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne länger als 100 h brennt, unter der Voraussetzung, dass Sie nach 200 h defekt ist. $(\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1.6)$

(5) (a) Wie ist die Varianz definiert und welche weitere Formel gilt dafür?

(b) Bestimmen Sie $\sigma(\underline{x})$ für die absolutstetige Zufallsvariable $\underline{x}$ mit der Dichtefunktion $f(t) = \sin t$ für $0 < t < \frac{\pi}{2}$ und $f(t) = 0$ sonst! Machen Sie eine Skizze! $(\sqrt{\pi - 3} \approx 0.38)$

(6) (a) Welche drei Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient?

(b) $\underline{x}, \underline{y}$ seien unabhängig und $P_{\underline{x}} = N(1, 3)$, $P_{\underline{y}} = N(2, 4)$. Zeichnen Sie die Dichtefunktion von $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y}$ und bestimmen Sie $\varrho(\underline{x}, \underline{z})$!

(7) (a) Was sagt der zentrale Grenzwertsatz aus?

(b) Wie folgert man daraus das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(8) (a) Welche Formel liefert das zweiseitige Konfidenzintervall $[\underline{a}, \underline{b}]$ für σ^2 zum Signifikanzniveau α? Was sind darin u_1, u_2?

(b) Was ergibt sich zu den Werten $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ für $\alpha = 5\,\%$?

(9) (a) Was ist die Testgröße $\underline{z}$ für die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ wenn $\sigma_1 = \sigma_2$ unbekannt ist? Wie wird das Fraktil u bestimmt?

(b) Testen Sie H_0 zu $\alpha = 10\,\%$ für 2 Stichproben $x_1 = -2, x_2 = 0$ sowie $x'_1 = 3$, $x'_2 = -1$, $x'_3 = 2$, $x'_4 = 4$. Wird H_0 angenommen oder abgelehnt? $(\sqrt{3} \approx 1.73)$

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2- Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Die $100-$ malige Durchführung des Experiments in (1) (b) ergab $n_0 = 13$, $n_1 = 66$, $n_2 = 21$ für die Häufigkeiten n_i von i roten Kugeln. Testen Sie mit dem χ^2- Test zu $\alpha = 10\,\%$, ob das Experiment korrekt durchgeführt wurde!

Ergebnis:

Note	1	2	3	4	5
#	4	15	22	18	75

Kommentar: Fast niemand von den Studenten konnte integrieren, vgl. Aufgabe (5).

2017 - 03 - 16

2. Prüfung aus W.-Theorie & Statistik, WS 2016/17

Zum Bestehen der Prüfung müssen 5 der folgenden 10 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (1), (4), (5), (6), (8) möglich. (Der Zusatzpunkt in Aufgabe (4) würde für die Formulierung und den Beweis des *Satzes* von Bayes vergeben.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Menge von k Dingen aus n verschiedenen Dingen auszuwählen? Welche 2 Formeln gibt es dafür?

(b) Berechnen Sie auf 2 Stellen die Wahrscheinlichkeit, bei 6 maligem Würfeln genau 4 mal eine Zahl ≥ 5 zu erhalten! $(3^{-5} \approx 0.0041)$

(2) (a) Was sagt das Goldene Theorem von Jacob Bernoulli?

(b) Approximieren Sie damit $\sum_{i=i_1}^{i_2} p_i$ für $\mathrm{Bin}(n,p)$ durch Φ! Erläutern Sie die Näherung mittels einer Skizze!

(3) (a) Wie ist das $n\%$-Fraktil u definiert?

(b) Zeigen Sie, dass $f(t) = \begin{Bmatrix} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2} & : t \geq 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{Bmatrix}$ eine Dichtefunktion ist, und berechnen Sie das 98%-Fraktil! $(\ln(50) \approx 4)$

(4) (a) Was bedeutet $P(D|A_i)$ und was $P(A_i|D)$?

(b) A_1 produziert doppelt soviel wie A_2 und 9% bzw. 12% der Produkte von A_1 bzw. A_2 sind defekt. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten kommt ein defektes Produkt von A_1 bzw. von A_2?

(5) (a) Drücken Sie die Varianz der diskreten Zufallsgröße $\underline{x}$ durch ihre Werte x_i und ihre Wahrscheinlichkeiten $p_i = P_{\underline{x}}(\{x_i\})$ aus!

(b) Berechnen Sie damit $\sigma(\underline{x})$ wenn $P_{\underline{x}} = \mathrm{Hyp}(2, 5, 3)$!

(6) (a) Welche Größe wird bei der Regressionsgeraden von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$ minimiert? Was ist die Formel für k?

(b) Bestimmen Sie $\varrho(\underline{x}, \underline{y})$ sowie die Regressionsgerade von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$, wenn $P_{\underline{x}} = \mathrm{Bin}(100, \frac{1}{10})$, $P_{\underline{y}} = N(2, 5)$ und $\mathcal{E}(\underline{x} \cdot \underline{y}) = 11$.

(7) (a) Wie ist $c_1\underline{x}_1 + \cdots + c_n\underline{x}_n$ verteilt für $\underline{x}_i$ $N(\mu_i, \sigma_i)-$verteilt und unabhängig?

(b) Geben Sie die Dichtefunktion $f(t)$ von $\underline{z} = 2\underline{x} - \underline{y}$ an, wenn $P_{\underline{x}} = N(0, 2)$, $P_{\underline{y}} = N(1, 3)$ und $\underline{x}, \underline{y}$ unabhängig sind!

(8) (a) Wie ist die erwartungstreue Stichprobenvarianz $\hat{\underline{s}}^2$ definiert? Was ist $\mathcal{E}(\hat{\underline{s}}^2)$?

(b) Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ^2 zu $\alpha = 2\,\%$ für eine Stichprobe der Größe 16 mit $\overline{x} = 1.3$ und $\hat{s}^2 = 0.16$.

(9) (a) Was ist ein Fehler 1. Art? Wie wahrscheinlich ist er?

(b) Zwei Stichproben der Größen 13 bzw. 7 ergaben jeweils $\hat{s}^2 = 20$ bzw. $\hat{s}'^2 = 80$. Was liefert der $F-$Test bei $\alpha = 5\,\%$ bzgl. $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$?

(10) (a) Was ist die Testgröße des χ^2-Tests? Definieren Sie auch p_i und $\underline{n}_i$!

(b) Eine Stichprobe der Größe 100 ergab $\overline{x} = 0.7$, $\hat{s}^2 = 16$ und jeweils 20, 30, 20 bzw. 30 Werte in den Intervallen $]-\infty, -2[$, $[-2, 0.7[$, $[0.7, 3.4[$ bzw. $[3.4, \infty[$. Ist die Zufallsgröße normalverteilt nach dem χ^2-Test mit $\alpha = 5\,\%$? Verwenden Sie $\Phi(0.675) \approx 0.25$!