1. Übungsblatt zu Partielle Differentialgleichungen, SoSe 2005

(1) Eine elastische Saite der Länge l wird aus der Ruhelage mit der Anfangsgeschwindigkeit $h_1(x) = \alpha x(l-x), \quad 0 \le x \le l, \quad \alpha > 0,$ losgelassen.

(a) Was ist ihre Durchbiegung $u(t,x)$ nach d'Alembert? Skizziere $\tilde{H}_{1g}$!

(b) Skizziere $u(t, \frac{l}{2})$ für $0 \le t \le \frac{2l}{c}$! Was ist die maximale Auslenkung der Saite?

(2) Es seien $g_i \in C^2(\mathbb{R})$ und $g_1(x) = g_2(x) = 0$ für $x < 0$. Kontrolliere, dass

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \big[g_1(ct-x-2jl) - g_1(ct+x-2(j+1)l) - g_2(ct-x-(2j+1)l) + g_2(ct+x-(2j+1)l) \big]$$

die Bedingungen $\alpha)$ $\forall t,x : (\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = 0$ $\beta)$ $\forall t : u(t,0) = g_1(ct),\ u(t,l) = g_2(ct)$ $\gamma)$ $\forall x \in [0,l] : u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$ erfüllt!

(3) Es sei $g \in C^2(\mathbb{R})$ mit $g(x) = 0$ für $x \le 0$ und $g(x+2l) = g(x)$ für $x \ge 0$. Eine Saite der Länge l wird am linken Ende entsprechend $g(ct)$ bewegt, d.h. $u(t,0) = g(ct)$. Was ist $u(t,x)$, wenn $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = 0$, $u(t,l) = 0$, $u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$? Ist u beschränkt?

(4) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ und erfülle die Dirichletbedingung in x_0, d.h. $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a_-$, $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = a_+$, $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x)-a_-}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x)-a_+}{x-x_0}$ existieren in $\mathbb{C}$. Es sei weiters $f'_{\mathrm{k}} = f'_{\mathrm{klassisch}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \begin{cases} f'(x) : x \ne x_0, \\ 0 \qquad : x = x_0. \end{cases}$

(a) Zeige $f' = f'_{\mathrm{k}} + (a_+ - a_-)\delta_{x_0}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ (d.h. $(T_f)' = T_{f'_{\mathrm{k}}} + (a_+ - a_-)\delta_{x_0}$).

(b) Berechne so $(\mathrm{e}^{-|x|})''$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$! Liegt $\mathrm{e}^{-|x|}$ in $W^{p,1}(\mathbb{R}^1)$ bzw. in $W^{p,2}(\mathbb{R}^1)$, $1 \le p < \infty$?

(5) Wie in FA, p. 65, sei $W^{2,r}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}^{-1}(L^2_{(1+|x|)^r})$ für $r \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche r ist $\delta \in W^{2,r}(\mathbb{R}^n)$? (b) Für welche r ist $\mathrm{e}^{-|x|} \in W^{2,r}(\mathbb{R}^1)$?

(6) Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ und $f(x) := \log|x|$ für $x \ne 0$. Zeige:

(a) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$; (b) $f = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \log\sqrt{|x|^2 + \epsilon^2}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$;

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \dfrac{x_j}{|x|^2} \in L^1(\Omega)$.

(d) Für welche $p \in [1,\infty)$ ist $f \in W^{p,1}(\Omega)$ bzw. $f \in \mathring{W}^1_p(\Omega)$?

<u>Zusatzfrage:</u> Ist $f \in W^{p,2}(\Omega)$? (Vgl. Aufgabe 6 der 1. Klausur FA)

(7) Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ mit $\varphi(x) = 1$ für x bei 0, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $f(x) := \varphi(x) \cdot |x|^\lambda$.

(a) Für welche λ ist $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$? (b) Für welche λ ist $f \in W^{2,1}(\mathbb{R}^3)$?

(c) Zeige mit dem Sobolevschen Einbettungssatz $f \notin W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ wenn $\lambda < 0$.

(8) Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| < 1\}$, $H = L^2(\Omega)$, und $K(x,y) = |x-y|^{-\alpha}$ für $x \neq y$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. (a) Für welche α ist $K(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$? (b) Für welche α ist $K(x,y)$ schwach singulär? (c) Warum ist dann $K \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$?

(9) K sei wie in Aufgabe 8 zu $\alpha < n$ und $K^{(k)}$ sei der Kern von K^k, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Für welche α ist $K^{(2)}$ in $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ bzw. in $L^2(\Omega \times \Omega)$?

(b) Für welche α ist $K^{(k)}$ in $L^\infty(\Omega \times \Omega)$?

(10) Es sei $\Omega = (0,a)$, $a > 0$, $H = L^2(\Omega)$, und $K(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} (x-y)^{-\alpha} & : x > y \\ 0 & : y \geq x \end{array} \right\}$, $\alpha < 1$ fest. (Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist das der Kern der *Abelschen Integralgleichung*.)

(a) Ist $K \in \mathrm{Ls}(H)$? Ist $K \in \mathrm{Com}(H)$? (b) Für welche α ist Satz 7.6 über Volterrasche Integralgleichungen (vgl. FA, p. 42) anwendbar?

(c) Berechne $K^{(2)}(x,z)$ mit der Substitution $y = z + t(x-z)$ (vgl. auch Analysis 3, Üb. 31). Was ergibt sich für $\alpha = \frac{1}{2}$? Zusatzfrage: Was ist $K^{(k)}(x,y)$?

(11) Es sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $H = L^2(\Omega)$ und K ein schwach singulärer Integraloperator mit Volterrakern, d.h. $K(x,y) = 0$ für $y > x$.

(a) Ab welchem $k \in \mathbb{N}$ ist Satz 7.6 auf K^k anwendbar?

(b) Verwende die Methode am Schluss des Beweises von Satz 12.6 (PD, p. 9), um zu zeigen, dass $\sigma(K) = \{0\}$ gilt. Was heißt das in Worten?

(12) Wenn die Fallzeit T auf einer Kurve $x = f(y)$ unter dem Einfluss der Schwerkraft (in Richtung $-y$) nur vom Endpunkt (auf $y = 0$) abhängt (*Tautochrone*), so ist

$$T = \int_0^y \frac{\mathrm{d\ Weg}}{\mathrm{Geschwindigkeit}} = \int_0^y \frac{\sqrt{1+f'(\eta)^2}}{\sqrt{2g(y-\eta)}}\,\mathrm{d}\eta$$

konstant, d.h. $c := \sqrt{2g}\,T = Kh$, K wie in Aufgabe 10, $\alpha = \frac{1}{2}$, und $h := \sqrt{1+f'^2}$.

(a) Zeige: $Kc = K^2 h = \pi \int_0^y h(\eta)\,\mathrm{d}\eta$, $h(y) = (\frac{1}{\pi} Kc)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(\frac{2c}{\pi}\sqrt{y}\big) = \frac{c}{\pi\sqrt{y}}$.

(b) Setze $f' = -\tan\varphi$ und folgere $y(\varphi) = \frac{c^2}{\pi^2 h^2} = \frac{c^2}{2\pi^2}(1+\cos 2\varphi)$,
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \tan\varphi = \frac{c^2}{\pi^2}(1-\cos 2\varphi)$, $x(\varphi) = \frac{c^2}{2\pi^2}(2\varphi - \sin 2\varphi)$, $f =$ Zykloide.

(13) Berechne $\mathrm{e}^{-|x|} * \mathrm{e}^{-|x|}$ in $L^1(\mathbb{R}^1)$.

(Z2) Es sei $U = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$, $B = \{x \in U; x_1 < 0\}$, $1 \leq p < \infty$, $\phi \in \mathcal{D}(U)$, $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ mit $\chi(x) = 1$ für $x \leq -2$ und $\chi(x) = 0$ für $x \geq -1$, $f \in W^{p,1}(B)$, $\hat{f} : U \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} f(x) : x_1 < 0 \\ f(\hat{x}) : x_1 > 0 \end{array} \right\}$, $\hat{x} := (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Zeige: (a) $\hat{f} \in L^p(U)$ (b) $(\partial_j \hat{f})(\phi) = -\int_B f(x)\partial_j\big(\phi(x) + \phi(\hat{x})\big)\mathrm{d}x$, $j = 2, \ldots, n$ (c) $(\partial_1 \hat{f})(\phi) = -\int_B f(x)\partial_1\big(\phi(x) - \phi(\hat{x})\big)\mathrm{d}x$ (d) $(\partial_j \hat{f})(\phi) = -\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \int_B f(x)\chi(\frac{x_1}{\epsilon})\partial_j\big(\phi(x) \pm \phi(\hat{x})\big)\mathrm{d}x = -\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \int_B f(x)\partial_j\big(\chi(\frac{x_1}{\epsilon})\big(\phi(x) \pm \phi(\hat{x})\big)\big)\mathrm{d}x = \int_B (\partial_j f)(x)\big(\phi(x) \pm \phi(\hat{x})\big)\mathrm{d}x$ (e) $\hat{f} \in W^{p,1}(U)$ (f) $\Omega \in C^1 \Longrightarrow W^{p,1}(\Omega) = W^1_p(\Omega)$ (vgl. den Beweis von Satz 5.4).

1. Klausur zu 'Partielle Differentialgleichungen', SoSe 2005

Du kannst alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Dir angerechnet. Beachte bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) (a) Entwickle $h(x) = x, \quad 0 < x < 1 = q,$ in eine Fouriercosinusreihe!

(Ergebnis: $h = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{\cos(k\pi x)}{k^2}$ in $L^2((0,1))$)

(b) Warum und wogegen konvergiert diese Reihe für festes $x \in \mathbb{R}$? Was ergibt sich für $x = 0$ bzw. für $x = 1$?

(2) (a) Entwickle $f(x) = \begin{cases} \cos x : |x| \le \pi, \\ 0 \quad\; : |x| > \pi \end{cases}$ in ein Fourierintegral!

(b) Warum konvergiert dieses Fourierintegral (bedingt) für alle x? Was ergibt sich für $x = \pi$?

Hinweis: $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

(3) (a) Welche Lösungen ergibt der Separationsansatz für die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ auf einem Stab entlang $0 \le x \le 1$, dessen Enden isoliert sind, d.h. $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$?

(b) Was ergibt sich für u, wenn $u(0,x) = x, \quad 0 < x < 1$? (Verwende Aufgabe 1!)

(4) (a) Für $h \in C^2([0,l])$ mit $h(0) = h(l) = h''(0) = h''(l) = 0$ ist $\tilde{h}_u$ die zuerst ungerade, dann periodisch fortgesetzte Funktion. Überprüfe, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(\tilde{h}_u(x - ct) + \tilde{h}_u(x + ct)\big)$$

die Wellengleichung und $u(0,x) = h(x), \quad \partial_t u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = u(t,l) = 0,$ $0 \le x \le l, \quad t \in \mathbb{R},$ erfüllt!

(b) Was ist $u(t, \frac{\pi}{2})$ für $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$, wenn $c = 1, \quad l = \pi,$ und $h(x) = x \sin^3 x$?

(5) Es sei $1 \le p < \infty, \quad \Omega = (0,1),$ und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x \ln x$. Untersuche, ob

(a) $f \in \bar{C}^1(\Omega)$ (b) $f \in W^{p,1}(\Omega)$ (c) $f \in W^{p,2}(\Omega)$ (d) $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$?

(6) Es sei $\Omega = (0,1), \quad H = L^2(\Omega),$ und $K(x,y) = \begin{cases} (x-y)^{-2/3} : x > y, \\ 0 \qquad\qquad\; : y \ge x. \end{cases}$

(a) Warum ist $K \in \mathrm{Com}(H)$? (b) Zeige, dass $K(x,y) \notin L^2(\Omega \times \Omega)$.

(c) Bestimme $K^{(2)}(x,z)$! (Subst.: $y = z + t(x-z)$) (d) Berechne $\|K^{(2)}\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$!

3. Übungsblatt zu Partielle Differentialgleichungen, SoSe 2005

(14) (a) Warum ist $E_1 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$ eine Fundamentallösung (FL) von $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 1$? (Vgl. Üb. 4 b) (b) Warum ist E_1 die einzige FL in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$?

(c) Wie müssen $a, b \in \mathbb{C}$ gewählt werden, damit auch $E_2 = aY(x)\mathrm{e}^{x} + bY(x)\mathrm{e}^{-x}$ eine FL von $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 1$ ist? (Vgl. Üb. 4 a)

(15) (Verallgemeinerung) Es sei $P(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-\lambda_j)$ ein Polynom in einer Variablen mit paarweise verschiedenen Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})f = \delta$, wenn $f \in C^{m-2}(\mathbb{R}) \cap C^m(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})f = 0$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, und 0 ein Dirichletpunkt von $(f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})^{(m-1)}$ ist mit Sprunghöhe 1.

(b) Welches lineare Gleichungssystem müssen $a_1, \ldots, a_m$ erfüllen, damit $E = \sum_{j=1}^{m} a_j Y(x)\mathrm{e}^{\lambda_j x} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ eine FL von $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ ist?

(c) Warum sind $a_1, \ldots, a_m$ eindeutig bestimmt?

<u>Zusatzfrage:</u> Wie folgt aus Satz 14.1 b), dass $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ keine weitere FL mit Träger in $[0,\infty)$ haben kann?

(16) Zeige wie in PD, p. 25, dass $E = \frac{1}{2\pi}\log|x| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ eine FL von Δ_2 ist!

(17) (a) Warum sind $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ mit $\operatorname{supp} S, \operatorname{supp} T \subset [0,\infty)$ trägerfaltbar? (Skizze!)

(b) Berechne $E = Y(x)\mathrm{e}^{\lambda x} * Y(x)\mathrm{e}^{\mu x}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$!

(18) (Fortsetzung) (a) Warum ist E eine FL von $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu)$?

(b) Bestimme E in Übung 15 durch $E = Y(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} * \cdots * Y(x)\mathrm{e}^{\lambda_m x}$.

(19) Eine Linienladung auf $\{x \in \mathbb{R}^3;\ |x_1| < N,\ x_2 = x_3 = 0\}$ entspricht der Distribution T mit $T(\phi) = \int_{-N}^{N} \phi(t,0,0)\,\mathrm{d}t$ und ihr Potential ist $U = \frac{1}{4\pi|x|} * T$.

(a) Zeige, dass $U(z) = \int\limits_{-N}^{N} \dfrac{\mathrm{d}t}{4\pi\sqrt{(t-z_1)^2 + |z'|^2}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $\quad z' = (z_2, z_3)$.

(b) Berechne U mit den Substitutionen $s = t - z_1$ und $s = |z'|\operatorname{sh} w$ und verwende $\operatorname{arsinh} a = \ln(a + \sqrt{1+a^2}\,)$, $\quad a \in \mathbb{R}$.

<u>Zusatzfrage:</u> Was ist $V := \lim_{N\to\infty}(U_N - \frac{1}{2\pi}\log(2N))$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$? Warum ist W eine FL von $-\Delta_2$, wenn $V = 1_{x_1} \otimes W$? (“Abstiegsmethode”)

(20) Es sei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ mit $\chi(t) = 1$ für t bei 0. (a) Warum ist $f_k(x) := \dfrac{1-\chi(k|x|)}{|x|} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $\dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$? (b) Berechne $\Delta_3 f_k$!

(c) Berechne $\lim_{k\to\infty}\Delta_3 f_k$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ und folgere $\Delta_3 \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta$.

(21) Zeige wie in Aufgabe 20, dass $-\dfrac{\mathrm{e}^{a|x|}}{4\pi|x|} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine FL des “Helmholtzoperators” $\Delta_3 - a^2$ ist für $a \in \mathbb{C}$!

(Z3) Beweise, dass die Zahlen a_j in Übung 15 durch $a_j = \frac{1}{P'(\lambda_j)}$ gegeben sind durch Anwendung des Residuensatzes auf $\oint\limits_{|z|=N} \frac{z^k}{P(z)}\,\mathrm{d}z$, $\quad k = 0, \ldots, m-1$, mit $N \to \infty$.

2005 - 05 - 04

4. Übungsblatt zu Partielle Differentialgleichungen, SoSe 2005

(22) Es sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n;\, v^T \cdot x \geq 0\}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \subset \overset{\circ}{H} \cup \{0\}$, K Kegel (d.h. $\forall x \in K : \forall \lambda \geq 0 : \lambda x \in K$). Zeige:

(a) $\epsilon := \inf\{v^T \cdot x;\, x \in K \cap \mathbb{S}^{n-1}\} > 0$ (b) $\forall x \in K : |x| \leq \frac{1}{\epsilon}\, v^T \cdot x$.

(23) (a) Zeige $\operatorname{supp}(S \otimes T) = \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T$ für $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) Zeige $\operatorname{supp}(S * T) \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$ für $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ trägerfaltbar.

(24) Für $\tau_0 \geq 0$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^3$, $E = \frac{\delta(t-|x|)}{4\pi t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ ist $U = \delta_{(\tau_0,\xi_0)} * E$ die Lösung von $(\partial_t^2 - \Delta_3)U = \delta_{(\tau_0,\xi_0)}$ (mit Träger in $t \geq 0$).

(a) Zeige, dass $U = \dfrac{\delta(t - \tau_0 - |x - \xi_0|)}{4\pi(t - \tau_0)}$, d.h. $U(\phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\phi(\tau_0 + |x - \xi_0|, x)}{4\pi|x - \xi_0|}\, dx$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$.

(b) Skizziere $\operatorname{supp} U = \{(t, x) \in \mathbb{R}^4;\, t = \tau_0 + |x - \xi_0|\}$ und vergleiche die Situation mit $\partial_t^2 - \Delta_2$!

(25) Bestimme die FL (mit Träger in $t \geq 0$) der *Klein-Gordon-Gleichung* $\partial_t^2 - \Delta_2 - a^2$, $a \in \mathbb{C}$, mit der Abstiegsmethode! Berechne dazu $U = F * T$ für $F = \frac{\delta(t-|x|)}{4\pi t}$, $T = \delta_{t,x_1,x_2} \otimes e^{ax_3}$.

(26) Löse mit der Formel von d'Alembert folgende Cauchyprobleme in $[0, \infty) \times \mathbb{R}$:

(a) $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 6$, $u(0, x) = x^2$, $\partial_t u(0, x) = 4x$;

(b) $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = \sin x$, $u(0, x) = 0$, $\partial_t u(0, x) = x + \cos x$.

(27) Löse durch geeignete Ansätze folgende Cauchyprobleme in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$:

(a) $(\partial_t^2 - \Delta_2)u = t$, $u(0, x, y) = x$, $\partial_t u(0, x, y) = y$;

(b) $(\partial_t^2 - \Delta_2)u = e^{-3t} \sin y$, $u(0, x, y) = x^2$, $\partial_t u(0, x, y) = 0$.

(28) (a) Zeige, dass die "ebenen Wellen" $u(t, x) = f(v^T \cdot x \pm |v|t)$ die Wellengleichung $(\partial_t^2 - \Delta_n)u = 0$ lösen, wenn $f \in C^2$, $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Löse das Cauchyproblem $(\partial_t^2 - \Delta_2)u = 0$, $u(0, x, y) = h_0(ax + by)$, $\partial_t u(0, x, y) = h_1(cx + dy)$ mit ebenen Wellen. (Vgl. d'Alembert!)

(29) (a) Was ergibt die Kirchhoffsche Formel in PD, p. 40, wenn $(\partial_t^2 - \Delta_3)u = 0$, $u(0, x) = h_0(|x|)$, $\partial_t u(0, x) = h_1(|x|)$, d.h. wenn die Anfangswerte durch radialsymmetrische Funktionen gegeben sind? Setze $H_1(r) := \int_0^r \varrho h_1(\varrho)\, d\varrho$!

(b) Was ergibt sich speziell für $h_0 = h_1 = \cos$?

5. Übungsblatt zu Partielle Differentialgleichungen, SoSe 2005

(30) (a) Warum erfüllt für festes $v \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $u(t,x) = \sinh(|v|t)e^{vx}$ die Wellengleichung in $\mathbb{R}^3_{t,x}$? (b) Setze $t = R$ und $x = 0$ in der Poissonschen Formel in PD, p. 40, und bestimme damit $\displaystyle\iint_{|\xi|<R} \frac{e^{v\xi}\, d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{R^2 - |\xi|^2}}$.

Zusatzfrage: Welcher Zusammenhang besteht mit der Formel $\mathcal{F}_x E = Y(t)\,\frac{\sin(t|x|)}{|x|}$?

(31) (a) Welches dreifache Integral liefert die Temperaturverteilung $u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, zur Anfangstemperatur $u_0(x) = Y(1 - |x|)$ (ohne Wärmezufuhr, d.h. wenn $F = 0$)?

(b) Warum ist $\forall t > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^3 : u(t,x) > 0$? Was hat das mit der Parabolizität der Wärmeleitungsgleichung zu tun?

(32) (Fortsetzung) (a) Setze aufgrund der Rotationssymmetrie $x = (0,0,|x|)^T$ und stelle $u(t,x)$ durch ein einfaches Integral dar.

(b) Zeichne (mit dem Computer) u für festes $t = 0.01, 0.1, 0.5, 1$ in Abhängigkeit von $r = |x|$!

(33) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen nennt man $G : \Omega \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : \xi \longmapsto G_\xi$ *Greensche Funktion des Dirichletproblems für* Δ_n falls $\forall \xi \in \Omega : \Delta G_\xi = \delta_\xi$ und $G_\xi(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$. (G_ξ soll sich stetig auf $\partial\Omega$ fortsetzen lassen.)

(a) Zeige, dass für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\, x_1 > 0\}$, $G_\xi(x) = E(x - \xi) - E(x - \hat{\xi})$ mit $\hat{\xi} = (-\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ und E wie in Satz 14.2 das obige erfüllt! ("Spiegelpunktmethode")
(b) Was ergibt sich für $n = 2$ bzw. $n = 3$?

(34) Für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\, |x| < 1\}$ wird der Ansatz $G_\xi(x) = E(x - \xi) - \alpha E(x - \frac{\xi}{|\xi|^2})$ gemacht ("reziproke Radien").

(a) Zeige, dass $\alpha = \frac{1}{|\xi|}$ für $n = 3$ funktioniert. Was ist dann G? Was ist G_0?

(b) Zeige $G_\xi(x) = G_x(\xi)$ für $x \neq \xi$.

(c) Wie folgt aus Satz 16.2, dass G eindeutig ist? (Wenn $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\Delta_n U = 0$ erfüllt, so ist $U \in C^\infty(\Omega)$ nach dem "Weylschen Lemma".)

(35) (Fortsetzung) Wenn eine Ladungsverteilung ρ in der leitenden Hohlkugel $|x| = 1$ gegeben ist, so erfüllt das Potential u dazu $-\Delta u = \rho$ in Ω und $u|_{\mathbb{S}^2} = 0$.

(a) Folgere $u(x) = -\int_\Omega \rho(\xi) G_\xi(x)\, d\xi$.

(b) Berechne das Potential einer konstanten Linienladung auf $|x_1| < 1$, $x_2 = x_3 = 0$ in der leitenden Hohlkugel $|x| = 1$! (Verwende Üb. 19 b)!).

(36) Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a < |x| < b\}, \quad 0 < a < b < \infty, \quad n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass ANP zu $g \equiv 0$ unendlich viele Lösungen hat. Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 16.2?

(b) Wiederhole den Beweis von Satz 16.2 und folgere, dass IDP und ADP höchstens eine Lösung haben.

(37) Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2;\ a < |x| < b\}, \quad 0 < a < b < \infty$.

(a) Löse IDP für radialsymmetrische Randwerte, d.h. $g(x) = \alpha$ bzw. β wenn $|x| = a$ bzw. b.

(b) Löse das *inhomogene* IDP im radialsymmetrischen Fall, d.h. $\Delta_2 u = p(|x|)$ für $x \in \Omega$ und $u(x) = g(x) = \alpha$ bzw. β wenn $|x| = a$ bzw. b.

(c) Wo ist der tiefste Durchhang einer eben eingespannten Membran über Ω unter Gleichlast $p =$ konstant?

(38) Es sei $R > 0, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| < R\}$, und $h \equiv 1$.

(a) Schreibe $P_1(h)$ als Integral an! Was ergibt sich nach PD, p. 19, 20?

(b) Überprüfe die Stetigkeit von $P_1(h)$ sowie $\partial_n^a P_1(h) - \partial_n^i P_1(h) = h = 1$ auf $\partial\Omega$ (vgl. L. 16.2, 16.4).

(39) Es sei $R > 0, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < R\}$, und $h \equiv 1$.

(a) Schreibe $P_2(h)$ als Integral an! Setze $x = \binom{0}{|x|}$!

(b) Überprüfe, dass $P_2(h)(x_0) = \frac{1}{2}$ für $x_0 \in \partial\Omega$ in Übereinstimmung mit PD, p. 50.

(c) Kontrolliere mittels Üb. 8 zu Analysis 2 (6. 3. 2003), dass $P_2(h)(x) = \begin{cases} 1 : x \in \Omega \\ 0 : x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$ in Übereinstimmung mit PD, p. 50.

Zusatzfrage: Warum ist hier $2P_2 : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ der Projektor auf $\mathbb{C} \cdot 1$?

(40) Es sei $R > 0, \quad n \geq 3, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < R\}, \quad h \equiv 1$, und $u = P_1(h)$. Bestimme u aus den Bedingungen u radialsymmetrisch, $\Delta_n u = 0$ für $|x| \neq R$, $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0, \quad u$ stetig, $(\partial_n^a u - \partial_n^i u)(x) = 1$ für $|x| = R$ (L. 16.2 und 16.4).

(41) Es sei $R > 0, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| < R,\ x_3 > 0\}$ und $h \equiv 1$.

(a) Bestimme $u(x) = P_1(h)(x)$ für $x = (0, 0, x_3)^T, \quad x_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Kontrolliere in diesem Fall die Aussagen in L. 16.2 und 16.4.

(c) Warum ist u in Ω nicht konstant? Was ist der Unterschied zum Faradayschen Käfig?

(Z6) Betrachte den Kern $K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|$ von $K = P_1$ auf $L^2(\mathbb{S}^1) \simeq L^2((0, 2\pi))$.

(a) Zeige, dass K auf $L^2((0, 2\pi))$ der Faltungsoperator mit $\frac{1}{2\pi} \ln(2 \sin \frac{t}{2}), \quad t \in (0, 2\pi)$ ist.

(b) Berechne das Spektrum von K (vgl. FA, Üb. 50).

2005 - 06 - 01

2. Klausur zu 'Partielle Differentialgleichungen', SoSe 2005

Du kannst alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Dir angerechnet. Beachte bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) (a) Warum ist $Y(x)\sin x$ eine FL von $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+1$?

(b) Bestimme eine FL E von $\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+1\right)^2$ durch Faltung!

Hinweis: $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$

(c) Kontrolliere, dass sich E bei 0 richtig verhält!

(2) Es sei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ mit $\chi(t)=1$ bei 0.

(a) Warum ist $f_k(x)=\frac{1-\chi(k|x|)}{|x|^2}\in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ und $|x|^{-2}=\lim_{k\to\infty} f_k$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$?

(b) Berechne $\Delta_4 f_k$!

(c) Berechne $\lim_{k\to\infty}\Delta_4 f_k$ und folgere $\Delta_4\frac{1}{|x|^2}=-4\pi^2\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$!

(3) Bestimme mit der Formel von d'Alembert die distributionelle Lösung des CPW $(\partial_t^2-\partial_x^2)u=tx,\quad u(0,x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}},\quad (\partial_t u)(0,x)=\ln|x|$ in $[0,\infty)\times\mathbb{R}$.

(4) Leite aus der FL $E=\frac{\delta(t-|x|)}{4\pi t}$ von $\partial_t^2-\Delta_3$ durch Faltung die Lösung des Cauchyproblems $(\partial_t^2-\Delta_3)u=0,\quad u(0,-)=0,\quad (\partial_t u)(0,-)=u_1$ her!

(5) (a) Löse das inhomogene IDP in der Kugelschale $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^3;\ 0<a<|x|<b\}$ im radialsymmetrischen Fall!

(b) Löse speziell $\Delta_3 u=1$ in $\Omega,\quad u|_{\partial\Omega}=0$.

(6) Ω sei der Zylinder $\{x\in\mathbb{R}^3;\ |x_3|<1,\ x_1^2+x_2^2<1\}$ und $h\equiv 1$.

(a) Bestimme $u(x)=P_1(h)(x)$ für $x=(0,0,x_3)^T,\quad x_3\in\mathbb{R}$.

(b) Kontrolliere die Sprungrelationen in $x_0=(0,0,1)^T$.

7. Übungsblatt zu Partielle Differentialgleichungen, SoSe 2005

(42) Zeige wie in (PD 76), dass $u(x) = \dfrac{|x|^2-\rho^2}{c\rho} \displaystyle\int\limits_{\rho\,\mathbb{S}^{n-1}} \dfrac{g(y)}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}s(y), \quad |x|>\rho,$ ADP löst für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|<\rho\}$.

(43) Zeige wie in (PD 76), dass $u(x) = -2P_1(g) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|y|=\rho} g(y)\log|x-y|\,\mathrm{d}s(y), \quad |x|<\rho,$ INP löst für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x|<\rho\}$ (wenn $g \in C(\rho\,\mathbb{S}^1)$ mit $\int_{\rho\,\mathbb{S}^1} g(y)\,\mathrm{d}s(y) = 0$).

(44) Es seien $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x|<1\}$, $g \in C(\mathbb{S}^1) \simeq \{f \in C([0,2\pi]);\ f(0)=f(2\pi)\}$ mit Fourierreihe $g(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}$, und u die Lösung von IDP.

(a) Warum ist $\Delta_2(r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$, (r,φ) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$?

(b) Warum konvergiert $v(r,\varphi) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}$ gleichmäßig für $0 \le r < a < 1$ und ist $\lim_{r\nearrow 1} v(r,-) = g$ in $L^2(\mathbb{S}^1)$?

(c) Stelle v als Integral über g dar und folgere $u=v$ aus Satz 16.5.

(d) Was ist v, wenn $g(x) = x_1^3$ für $|x|=1$?

(45) (Fortsetzung) Zur Lösung von INP setzt man $w(r,\varphi) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{r^{|k|}}{|k|}\lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}$. (Beachte, dass hier $\lambda_0 = 0$ wegen $\int_{\mathbb{S}^1} g(y)\,\mathrm{d}s(y) = 0$.)

(a) Warum? (b) Was ist w, wenn $g(x) = x_1^3$ für $|x|=1$?

(c) Überprüfe, dass $w = -2P_1(g)$, vgl. Üb. 43!

(46) Im $\mathbb{R}^2$ sei die homogene quasilineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung $c_1(t,x,u)\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + c_2(t,x,u)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ gegeben. Betrachte entsprechend (PD3-5) das Vektorfeld $\tilde{X} = c_1\frac{\partial}{\partial t} + c_2\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial u}$ in $\mathbb{R}^3_{t,x,u}$.

(a) Warum sind die Charakteristiken von $\tilde{X}$ durch $u = C = \text{const.}$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c_2(t,x,C)}{c_1(t,x,C)}$ gegeben?

(b) Was sind die Charakteristiken der *Burgers-Gleichung* $\partial_t u + u\partial_x u = 0$?

(c) Warum ist in (b) $A = \{(0,x);\ x \in \mathbb{R}\}$ für jedes u_0 nicht-charakteristisch?

(d) Folgere, dass in (b) gilt $u(t,x) = u_0(x_0)$ wenn $x = u_0(x_0)t + x_0$.

(47) (Fortsetzung) Betrachte die Burgers-Gleichung zu den Anfangswerten (a) $u_0(x_0) = x_0$ sowie (b) $u_0(x_0) = -x_0$. Zeichne die Charakteristiken! Gib die Lösung $u(t,x)$ an! Bis zu welchem t existieren jeweils diese klassischen Lösungen?

(Z7) Um INP in $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x|<\rho\}$ zu lösen, setze

$$u(x) = -2P_1(g) - \frac{1}{4\pi\rho} \iint\limits_{|y|=\rho} g(y)\log\big(\rho|x-y| - y^T(x-y)\big)\,\mathrm{d}s(y)$$

und überprüfe (a) $\Delta_3 u = 0$ in Ω (b) $\partial_n^i u(x) = g(x)$ für $x \in \partial\Omega$.

3. Klausur zu 'Partielle Differentialgleichungen', SoSe 2005

Du kannst alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Dir angerechnet. Beachte bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) Zeige, dass $u = 2P_2(g) - \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\rho\mathbb{S}^1} g(y)\,\mathrm{d}s(y)$ IDP löst für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < \rho\}$.

(2) (a) Bestimme und skizziere die Charakteristiken von $X = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$.

(b) In welchen Punkten ist die Gerade $A : y = x$ charakteristisch?

(c) Löse $Xu = 0$ zum Anfangswert $u(x,x) = u_0(x), \quad |x| < 1$.

(3) Löse die quasilineare Differentialgleichung $y \tan x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y^2 u}{\cos x}\frac{\partial u}{\partial y} = yu$ zum Anfangswert $u(x,1) = x \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(4) Bringe die hyperbolische Differentialgleichung $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} - \frac{y^2}{x}\,u_x + \frac{x^2}{y}\,u_y = 0$ in die kanonische Form $u_{\xi\eta} + \cdots = 0$ und bestimme die allgemeine Lösung.

(5) Betrachte das Cauchyproblem für die Wellengleichung $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0$ mit Anfangswerten auf $A : t = x^2$, d.h. $u(x^2, x) = g_0(x), \quad (\partial_t u)(x^2, x) = g_1(x)$.

(a) Ist A nicht-charakteristisch?

(b) Folgere $2f_1'(x - x^2) = g_0'(x) - (1+2x)g_1(x)$ aus $u(t,x) = f_1(x-t) + f_2(x+t)$.

(c) Warum ist dieses Cauchyproblem lokal bei $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ i.a. nicht lösbar?

(6) Es sei $\langle \phi, x_+^{-3/2} \rangle = \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

(a) Zeige, dass $x_+^{-3/2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

(b) Zeige $x_+^{-3/2} = \lim_{\epsilon \searrow 0}\left[\frac{Y(x-\epsilon)}{x^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\,\delta\right]$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

(c) Ist $x_+^{-3/2}$ homogen?

1. Prüfung zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen", SoSe 2005

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wer im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung gibt, indem er/sie einen diesbezüglichen Satz beweist, erhält einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet wurde). Dies ist bei allen Fragen außer (1), (9) und (11) möglich.

Verwende für Deine Antworten bitte nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Die Fragen brauchen nicht in der gegebenen Reihenfolge beantwortet werden.

(1) (a) Welche Lösungen liefert der Separationsansatz für $\Delta u(x,y) = 0, \quad u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b$?

(b) Was ist der Durchhang in der Mitte einer Membran über $[0,a]^2$, für die $u(0,y) = u(a,y) = 0, \quad u(x,0) = u(x,a) = \sin\frac{\pi x}{a}$? $((\cosh\frac{\pi}{2})^{-1} \approx 0.4)$

(2) (a) Was ist die d'Alembertsche Lösung zu $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = 0, \quad u(0,x) = h_0(x), \partial_t u(0,x) = h_1(x), \quad u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0$?

(b) Was ist $u(t,\frac{\pi}{2})$, wenn $c = 1, \quad l = \pi, \quad h_0 = 0, \quad h_1(\xi) = \sin^3\xi$?

(3) (a) Was sagt der Sobolevsche Einbettungssatz?

(b) Folgere daraus, dass $\mathrm{e}^{-|x|} \notin W^{2,2}(\mathbb{R}^1)$! Wie sieht man das direkt?

(4) (a) Wann nennt man den Kern $K(x,y)$ (mit $x,y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt) schwach singulär, und was gilt dann für $K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt daraus $K \in \mathrm{Com}(L^2(\partial\Omega))$, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \Omega \in C^1$, $Kf(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}s(y)$? Für welche α gilt das wegen $K(x,y) \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$?

(5) (a) Wie erhält man eine Lösung von $P(\partial)U = T$ aus einer FL E? Welche Bedingung macht U eindeutig?

(b) Warum hat $(\partial_t^2 - \partial_x^2)U = T$ genau eine Lösung $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} U \subset \{(t,x);\, t \ge 0\}$, wenn $\operatorname{supp} T \subset \{(t,x);\, t \ge 0\}$?

(6) (a) Wie lässt sich die Lösung des CPW $(\partial_t^2 - \Delta_n)u = f, \quad \partial_t^j u(0,-) = g_j, \quad j = 0,1,$ durch Faltung mit der FL E darstellen?

(b) Was ergibt sich explizit für $n = 3, \quad g_j = 0, \quad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4)$?

(7) (a) Durch welche Schichtpotentiale werden jeweils die Lösungen u von IDP bzw. $\tilde{u}$ von ANP dargestellt?

(b) Welche Integralgleichungen ergeben sich jeweils daraus? Was sind die Kerne?

(8) (a) Wie werden lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung $\big(c^j(x)\partial_j u = 0,$ $u|_A = u_0\big)$ auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt?

(b) Löse $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (\cos x)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0,\eta) = \eta^3, \quad \eta \in \mathbb{R} \setminus 0.$

(9) (a) Rechne $P(\partial)u = c^{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ in die neuen Koordinaten $y^1, \ldots, y^n$ um!

(b) Bringe die hyperbolische Tricomi-Gleichung $(y\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0, \quad y < 0,$ in die Standardform $(\partial_\xi \partial_\eta + \ldots)u = 0.$

(10) (a) Was besagt der Satz von Cauchy-Kowalewski?

(b) Es seien $P(x,y,\partial) = \mathrm{e}^x\,\partial_{xxx} - 2\cos(xy)\,\partial_{xyy} + 5\,\partial_{xx}$ und $A = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 :$ $N_1 x + N_2 y = 0\}$. Für welche $N \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ ist der Satz von Cauchy-Kowalewski bei $0 \in \mathbb{R}^2$ anwendbar?

(11) (a) Wann nennt man $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ homogen vom Grad λ? $\quad (\lambda \in \mathbb{C})$

(b) Zeige damit, dass $\Delta_4 \frac{1}{|x|^2} = c\delta$ in $\mathbb{R}^4$!

(12) (a) Wie ist $T \circ f$ definiert für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen?

(b) Bestimme $\delta \circ f$ für $f : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : \binom{t}{x} \longmapsto t^2 - |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^3.$

2. Prüfung zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen", SoSe 2005

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wer im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung gibt, indem er/sie einen diesbezüglichen Satz beweist, erhält einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet wurde). Dies ist bei allen Fragen außer (2) möglich.

(1) (a) Was sagt der Satz über die punktweise Konvergenz von Fourierreihen?

(b) Entwickle $h(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 = q,$ in eine Fouriersinusreihe.

(2) (a) Welche Lösungen liefert der Separationsansatz für die Wärmeleitungsgleichung $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ auf einem Stab entlang $0 \leq x \leq 1$, dessen Enden auf Temperatur 0 gehalten werden, d.h. $u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$?

(b) Was ergibt sich für u, wenn $u(0,x) = 1, \quad 0 < x < 1$?

(3) (a) Welche Abschätzung erlaubt den Spuroperator $S : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ für $\Omega \in C^1$ zu definieren?

(b) Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| < 1\}$. Für welche p liegt $\frac{1}{|x|}$ in $W^{p,1}(\Omega)$ bzw. in $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$?

(4) (a) Wie ist das Tensorprodukt von Distributionen definiert?

(b) Was ist $S \otimes T$, wenn $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ mit $S(\phi) = \phi'(1), \quad T(\phi) = \phi''(2)$?

(5) (a) Gib eine Fundamentallösung E von $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ an! Welche Bedingung macht E eindeutig?

(b) Löse damit $\Big(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)u = Y(t) \otimes \delta(x), \quad \operatorname{supp} u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ t \geq 0\}.$

(6) (a) Wie lässt sich die Lösung des CPW $(\partial_t^2 - \Delta_n)u = f, \quad \partial_t^j u(0,-) = u_j, \quad j = 0,1,$ durch Faltung mit der FL E darstellen?

(b) Was ergibt sich explizit für $n = 2, \quad f = 0, \quad u_1 = 0$?

(7) (a) Was besagen das Maximumprinzip und der Satz von Hopf?

(b) Wie folgt daraus die Eindeutigkeit der Lösung des ANP?

(8) (a) Wie führt man das inhomogene IDP $\Delta u = f$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = g$ auf das homogene IDP zurück?

(b) Was ergibt sich speziell für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3;\, |x| < \rho\}$ und $f(x) = \mathrm{e}^{x_1}$ mit dem Poissonschen Integral?

(9) (a) Wie führt man die quasilineare Differentialgleichung $c^j(x,u)\partial_j u = g(x,u)$, $u|_A = u_0$ auf eine lineare zurück?

(b) Löse $y\partial_x u + u\partial_y u = yu$, $u(0,y) = y^2$ lokal bei $\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

(10) (a) Wann nennt man die reelle lineare Differentialgleichung $c^{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \cdots = 0$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ elliptisch bzw. hyperbolisch?

(b) Zeige, dass $u_{xx} + 2yu_{xy} + (y^2 - x^2)u_{yy} = 0$ für $x \neq 0$ hyperbolisch ist und bestimme ξ, η, sodass diese Differentialgleichung die Form $(\partial_\xi \partial_\eta + \ldots)u = 0$ annimmt!

(11) (a) Was sagt der Satz von Cauchy–Kowalewski?

(b) Warum ist das Cauchy-Problem für Δ_2 nicht korrekt gestellt?

(12) (a) Was sagt der Satz von Malgrange–Ehrenpreis?

(b) Bestimme eine Fundamentallösung von $(\partial_1 - a_1)^2 + b(\partial_2 - a_2)^2$ für $a_i \in \mathbb{C}$ und $b > 0$.