2005 - 02 - 02

1. Prüfung aus Funktionalanalysis, WS 2004/05

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Du im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung gibst, indem Du einen diesbezüglichen Satz beweist, so erhältst Du einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet wurde). Dies ist bei allen Fragen möglich. Im folgenden bezeichnet H einen Hilbertraum.

Verwende für Deine Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Die Fragen brauchen nicht in der gegebenen Reihenfolge beantwortet werden. Gib bei Deinen Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was sagt der Satz über die Vervollständigung eines normierten Raumes?

(b) Was sind die Vervollständigungen von $(C([-1,1]), \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$? Betrachte den Fall $p = \infty$ separat!

(2) (a) Was sagt der Satz von Arzelà-Ascoli?

(b) Untersuche mit und ohne Satz von Arzelà-Ascoli, ob $\{\sqrt[2k+1]{x};\ k \in \mathbb{N}\}$ in $C([-1,1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ präkompakt ist.

(3) (a) Wie ist $W^{p,k}(\Omega)$ definiert und wie $\partial^\alpha T$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen?

(b) Berechne $(\mathrm{e}^{-|x|})''$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$! Liegt $\mathrm{e}^{-|x|}$ in $W^{2,1}(\mathbb{R}^1)$ bzw. in $W^{2,2}(\mathbb{R}^1)$?

(4) (a) Was ist die Neumannsche Reihe und welche Aussage über das Spektrum gibt sie?

(b) Löse $\mathcal{F}f - 3f = \mathrm{e}^{-|x|}$ in $L^2(\mathbb{R}^1)$ mit der Neumannschen Reihe!

(5) (a) Was sagt der Struktursatz für Hilberträume?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es $f \in L^2((0,2\pi))$ mit $(f, e_k) = \begin{cases} 0 & : k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ k^\alpha & : k \in \mathbb{N} \end{cases}$, wenn $e_k(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}$? Was ist dann $\|f\|_2$?

(6) (a) Welche Inklusionen gelten für $L(H), \mathrm{Com}(H), \mathrm{Fr}(H)$ und ihre Abschlüsse in $L(H)$?

(b) Sei $H = L^2((0,1))$, $Af = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x \sin y} f(y)\,\mathrm{d}y$, $Bf = \int_0^1 \sin(x+y) f(y)\,\mathrm{d}y$, $Cf = 2f$, $Df = f'$. In welchen der obigen Räume liegen A, B, C, D, in welchen nicht?

(7) (a) Was sagt die Theorie von Riesz und Schauder über $\sigma(A)$, wenn $A \in \mathrm{Com}(H)$?

(b) H, A seien wie in Aufgabe 6 (b) und $\lambda \in \mathbb{C}^*$ sei ein einfacher Eigenwert von A. Unter welcher Bedingung an $g \in H$ ist die Fredholmsche Integralgleichung $\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x \sin y} f(y)\,\mathrm{d}y - \lambda f = g$ mit $f \in H$ lösbar?

(8) (a) Unter welchen Bedingungen an $A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ist $A \in \mathrm{Ls}(H)$ selbstadjungiert?

(b) Zeige damit, dass $A : \{f \in L^2(\mathbb{R});\, xf \in L^2(\mathbb{R})\} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) : f \longmapsto xf$ selbstadjungiert ist.

(9) (a) Wie ist $\int\limits_{\{a,b\}} \phi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x$ definiert für $x \in H$ und E Spektralschar?

(b) Was ergeben $\int\limits_{[a,b)} \mathrm{d}E_\lambda x$ bzw. $\int\limits_{[a,b]} \mathrm{d}E_\lambda x$?

(10) (a) Wie ist das essentielle Spektrum definiert und wie hängt es mit E_λ zusammen, wenn $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$?

(b) Was ist E_λ und was ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ für A in Aufgabe 8 (b)? Begründung?

(11) (a) Was sagt die "Funktionalkalkülform" des Spektralsatzes für $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$?

(b) Wie findet man damit ein $B \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ mit $B^2 - 2cB - A = 0$, wenn $c \in \mathbb{R}$, $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda \in L_+(H)$?

(12) (a) Was sagt die Heisenbergsche Unschärferelation?

(b) Überprüfe sie für ein freies Teilchen auf $\mathbb{R}^1$ im Zustand $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \in L^2(\mathbb{R}^1)$, wenn $\hbar = 1$!

Hinweis: $(\mu_{\mathrm{Ort}}, \mu_{\mathrm{Imp}}) = \|f\|^{-2}(|f(x)|^2\,\mathrm{d}x, \frac{1}{2\pi\hbar}\,|\mathcal{F}f(\frac{p}{\hbar})|^2\,\mathrm{d}p)$

2005 - 03 - 07

2. Prüfung aus Funktionalanalysis, WS 2004/05

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Du im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung gibst, indem Du einen diesbezüglichen Satz beweist, so erhältst Du einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet wurde). Dies ist bei allen Fragen außer (3) möglich. Im folgenden bezeichnet H einen Hilbertraum und ist $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Verwende für Deine Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Die Fragen brauchen nicht in der gegebenen Reihenfolge beantwortet werden. Gib bei Deinen Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was sagt das Rieszsche Lemma?

(b) Überprüfe es für $X = l^\infty$ mit $|\cdot|_\infty$, wenn $Y = c_0$.

(2) (a) Wie ist für $f \in L^p(\Omega)$ und $h > 0$ die Regularisierung f_h definiert und was gilt dafür?

(b) Wie zeigt man, dass $f_h \to f$ gleichmäßig für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $h \searrow 0$?

(3) (a) Wie ist $\lim_{k\to\infty} T_k$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ definiert?

(b) Berechne $\lim_{k\to\infty} k\,\mathrm{e}^{-k|x|^2}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. (Beachte: in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathbf{zwei}})$!)

(4) (a) X, Y seien normierte Räume. Wie ist die Operatornorm auf $L(X,Y)$ definiert? Unter welcher Bedingung ist $L(X,Y)$ damit vollständig?

(b) Bestimme $\|A\|$, wenn $X = \mathbb{R}^2$ mit $|\cdot|_1$, $Y = \mathbb{R}^2$ mit $|\cdot|_\infty$, und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$!

(5) (a) Welcher Satz gilt für Volterrasche Integralgleichungen 2. Art?

(b) Berechne den Kern $K^{(2)}$ von $K \circ K$, wenn K den Kern $K(x,y) = \begin{Bmatrix} \mathrm{e}^{xy} & : y \leq x \\ 0 & : y > x \end{Bmatrix}$ hat auf $\Omega = (0,1)$.

(6) (a) Was gilt für $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\leq N} (f, e_k) e_k(t_0)$, $e_k = \frac{\mathrm{e}^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$, wenn $f = [\tilde{f}] \in L^1_{\mathrm{loc,per}}(\mathbb{R})$ und $\tilde{f}$ die Dirichlet-Bedingung in t_0 erfüllt?

(b) Überprüfe das in $t_0 = 0$ für $\tilde{f}(t) = t, \quad 0 \leq t < 2\pi$.

(7) (a) Wie ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert?

(b) Berechne damit $\mathcal{F}\delta_{x_0}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, wobei $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest.

(8) (a) Was sagt der Graphensatz?

(b) Zeige damit $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ A - \lambda I : X \longrightarrow X \text{ bijektiv}\}$ für $A \in L(X)$, ${}_{\mathbb{K}}X$ ein Banachraum.

(9) (a) Wie lautet der Spektralsatz für $A \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$? (Satz 18.4/5)

(b) Was ist $E_{1/2}$, wenn $A : l^2 \longrightarrow l^2 : x \longmapsto (\frac{x_n}{n}) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ und E die Spektralschar zu A ist?

(10) (a) Welche Formel gilt für $\left| \int\limits_{\{a,b\}} \phi(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda x \right|^2$?

(b) Zeige damit $\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda \right\| \leq \|\phi\|_\infty$, wenn E eine Spektralschar und $\phi \in \mathrm{BC}(\mathbb{R})$, d.h. stetig und beschränkt ist!

(11) (a) Wie wird die Spektralschar E_λ zu $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ aus $|A - \lambda I|$ und $A - \lambda I$ gebildet? Wie ist $|A|$ definiert?

(b) Was ergibt sich für $H = L^2((0,1))$ und $A : H \longrightarrow H : f \longmapsto x \cdot f$?

(12) (a) Was sagt die Heisenbergsche Unschärferelation?

(b) Überprüfe sie für ein freies Teilchen auf $\mathbb{R}^1$ im Zustand $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \in L^2(\mathbb{R}^1)$, wenn $\hbar = 1$!

Hinweis: $(\mu_{\text{Ort}}, \mu_{\text{Imp}}) = \|f\|^{-2}(|f(x)|^2\, \mathrm{d}x, \frac{1}{2\pi\hbar}\, |\mathcal{F}f(\frac{p}{\hbar})|^2\, \mathrm{d}p)$

2005 - 05 - 09

3. Prüfung aus Funktionalanalysis, WS 2004/05

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Du im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung gibst, indem Du einen diesbezüglichen Satz beweist, so erhältst Du einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet wurde). Dies ist bei allen Fragen außer (12) möglich. Im folgenden bezeichnet H einen Hilbertraum und ist $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Verwende für Deine Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Die Fragen brauchen nicht in der gegebenen Reihenfolge beantwortet werden. Gib bei Deinen Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wann heißt $M \subset X$ im normierten Raum $(X, |\cdot|)$ präkompakt, und wie lässt sich das durch $\epsilon-$Netze charakterisieren?

(b) Es sei $X = l^2$ mit $|\cdot|_2$ und $M = \{e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}};\ i \in \mathbb{N}\}$. Gibt es endliche $\epsilon-$Netze für $\epsilon = 2$ bzw. $\epsilon = \frac{1}{2}$?

(2) (a) Wie ist für $f \in L^p(\Omega)$ und $h > 0$ die Regularisierung f_h definiert und was gilt dafür?

(b) Wie zeigt man, dass $f_h \to f$ gleichmäßig für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $h \searrow 0$?

(3) (a) Welche Darstellung hat $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wenn $\operatorname{supp} T = \{a\}$, $a \in \Omega$?

(b) Was folgt daraus für $\Delta_2 \log |x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$?

(4) (a) Was ist der Dualraum X' eines Banachraumes X? Was ist $(l^p)'$, $1 \le p < \infty$?

(b) Was ist $\|F\|_{(l^3)'}$, wenn $F : l^3 \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto x_1 - x_2$?

(5) (a) Welcher Satz gilt für einen Integraloperator K mit Kern $K(x,y) \in L^2(\Omega\times\Omega)$?

(b) Für welche $\alpha \in [0,1)$ ist das auf $K_\alpha : L^2((0,1)) \longrightarrow L^2((0,1)) : f \longmapsto \int_0^x \frac{f(y)\,\mathrm{d}y}{(x-y)^\alpha}$ anwendbar?

(6) (a) Wie ist A^* für $A \in L(H)$ definiert?

(b) Was ist A^*, wenn $A : l^2 \longrightarrow l^2 : (x_1, x_2, \dots) \longmapsto (x_2, x_3, \dots)$?

(7) (a) Was ist die Fredholmsche Alternative?

(b) Berechne K^*h, wenn $H = L^2((1,\infty))$, $K(x,y) = (y+1)\mathrm{e}^{-xy}$, $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$ und beurteile, ob $(K - \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot I)f = g$ lösbar ist, wenn $g(x) = \frac{1}{x}$.

(8) (a) Was sagt der Satz von Hellinger-Töplitz?

(b) Ist er auf $H = L^2((0,1))$, $Af = \mathrm{i}f'$ anwendbar?

(9) (a) Wie ist das Riemann-Stieltjes-Integral $\int\limits_{\{a,b\}} \phi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)$ definiert? Was müssen ϕ bzw. h erfüllen?

(b) Was ist $\int\limits_{\{-1,1\}} \phi(\lambda)\,\mathrm{d}Y(\lambda)$ für $Y(t) = \begin{Bmatrix} 1 : t > 0 \\ 0 : t \leq 0 \end{Bmatrix}$?

(10) (a) Wie wird $\mu \in \sigma(A)$ bzw. $\mu \in \sigma_p(A)$ durch E_λ charakterisiert, wenn $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$, E Spektralschar?

(b) Zeige damit $\sigma(A) = \mathbb{R}$, $\sigma_p(A) = \emptyset$, wenn $H = L^2(\mathbb{R})$, $A : \{f \in H; x \cdot f \in H\} \longrightarrow H : f \longmapsto x \cdot f$.

(11) (a) Was sagt der Satz von Weierstraß?

(b) Wie sieht man damit, dass es für $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ nur einen stetigen Algebrahomomorphismus $F : \big(C([-\|A\|, \|A\|]), \|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(L(H), \|\cdot\|\big)$ mit $F(1) = I$, $F(\mathrm{id}) = A$ geben kann?

(12) (a) Was ist der Mittelwert der $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ entsprechenden Messapparatur im Zustand $z = \mathbb{C}x$, $x \in H$?

(b) Welchen durchschnittlichen Impuls hat ein Teilchen auf $\mathbb{R}^1$ im Zustand $\mathbb{C}x$, $x \in L^2(\mathbb{R}^1_t)$, $x(t) = \frac{1}{1+it}$ für $\hbar = 1$?