2004 - 02 - 03

1. Prüfung aus Analysis 3, WS 2003/04

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (1) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Geben Sie die Definition des komplexen Logarithmus.

(b) Was ist $\mathrm{Log}(-1-\mathrm{i})$?

(2) (a) Definieren Sie die Begriffe *komplex differenzierbar* und *holomorph*. Was sind die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen?

(b) Überprüfen Sie die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen an $f(z) = \mathrm{e}^z$.

(3) (a) Wie lautet die Cauchy'sche Integralformel?

(b) Was ist $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z$?

(4) (a) Wie lautet das Maximumprinzip für beschränkte Gebiete?

(b) Bestimmen Sie $\max\limits_{|z|\le 1} |1+z^2|$!

(5) (a) Wie sind isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen charakterisiert?

(b) Hat $(\sin\frac{1}{z})^{-1}$ eine isolierte Singularität in 0? Wenn ja, welchen Typs?

(6) (a) Wie lautet der Stellensatz?

(b) Was ist $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{\sin z}\,\mathrm{d}z$?

(7) (a) Was sagt der Satz von Lebesgue über die Riemann-Integrierbarkeit?

(b) Ist $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^1$? Ist es eine Jordan-Nullmenge?

(8) (a) Wie lautet der Satz über die Substitution in Mehrfachintegralen?

(b) Berechnen Sie damit $\iiint\limits_{\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3;\,|\vec{x}|\leq 1\}} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$!

(9) (a) Wie wird $\int_K f(x)\,\mathrm{d}s$ für eine Kurve K in Koordinaten $y(t) = \psi\big(x(t)\big)$, $t \in [a,b]$, bzgl. einer Karte $\psi : x \longmapsto y$ ausgedrückt?

(b) Was ergibt sich, wenn $y = \psi(x) = \binom{r}{\varphi}$ Polarkoordinaten sind?

(10) (a) Was sagt das Poincarésche Lemma für 1-Formen?

(b) Ist $\omega = y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y \in \Omega^1_{C^1}(\mathbb{R}^2)$ geschlossen? Was ist $\int_{(K,o)} \omega$, wenn K von $A = (1,2)$ nach $B = (0,1)$ verläuft?

(11) (a) Wie ist $\int_{(M,o)} \omega$ definiert, wenn die $p-$dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ durch die Parametrisierung $H : \tilde{D} \longrightarrow M : t \longmapsto x(t)$ mit $H \in o$ gegeben ist?

(b) Berechnen Sie $\int_{(M,o)} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, wenn $M = \{(x,y,z)^T;\, 0 < x,y < 1,\, z = xy\}$ und o so, dass $N_3 < 0$.

(12) (a) Was sagt der Satz von Gauß?

(b) Bestimmen Sie $\int_{\partial K} F^T \cdot N\,\mathrm{d}s$ für $F = (y, -x, z^3)^T$ und $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3;\, |\vec{x}| \leq 1\}$ direkt und mit dem Satz von Gauß, vgl. Frage 8 b).