KAPITEL VII: INTEGRALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

§24: Mehrfache Integrale

24.1 DAS DOPPELINTEGRAL

Wiederholung von 10.1: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $Z = \{x_0, \cdots, x_k\}$ mit
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \text{UD}\,(Z) = \sum_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot (\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x_i}), \ \text{OD}\,(Z) = \sum_{i=1}^{k} \overline{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

mit
$$\underline{f}_i = \min\big\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\big\}$$
$$\overline{f}_i = \max\big\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\big\}.$$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \text{UD}\,(Z^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \text{OD}\,(Z^{(n)})$, wenn $\varphi(Z^{(n)}) \to 0$, und dieser Limes wird mit $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet.

Bsp. 1 $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$

$Z = \{\underbrace{0}_{x_0}, \underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{x_1}, \underbrace{2\pi}_{x_2}\}$, $k = 2$,

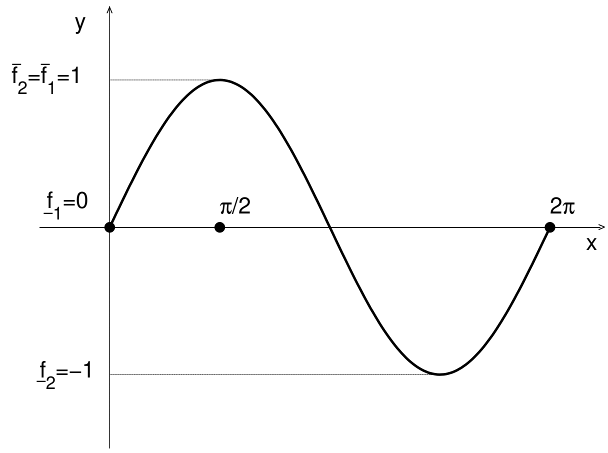
$\underline{f}_1 = 0$, $\overline{f}_1 = 1$,

$\underline{f}_2 = -1$, $\overline{f}_2 = 1$,

$\text{UD}\,(Z) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \cdot \frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$,

$\text{OD}\,(Z) = 1 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \frac{3\pi}{2} = 2\pi$,

$\text{UD}\,(Z) \leq \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \leq \text{OD}\,(Z)$.



Nun sei $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ stetig.

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ sei eine Zerlegung in Gebiete so, dass $D_i \cap D_j$ Fläche 0 hat,

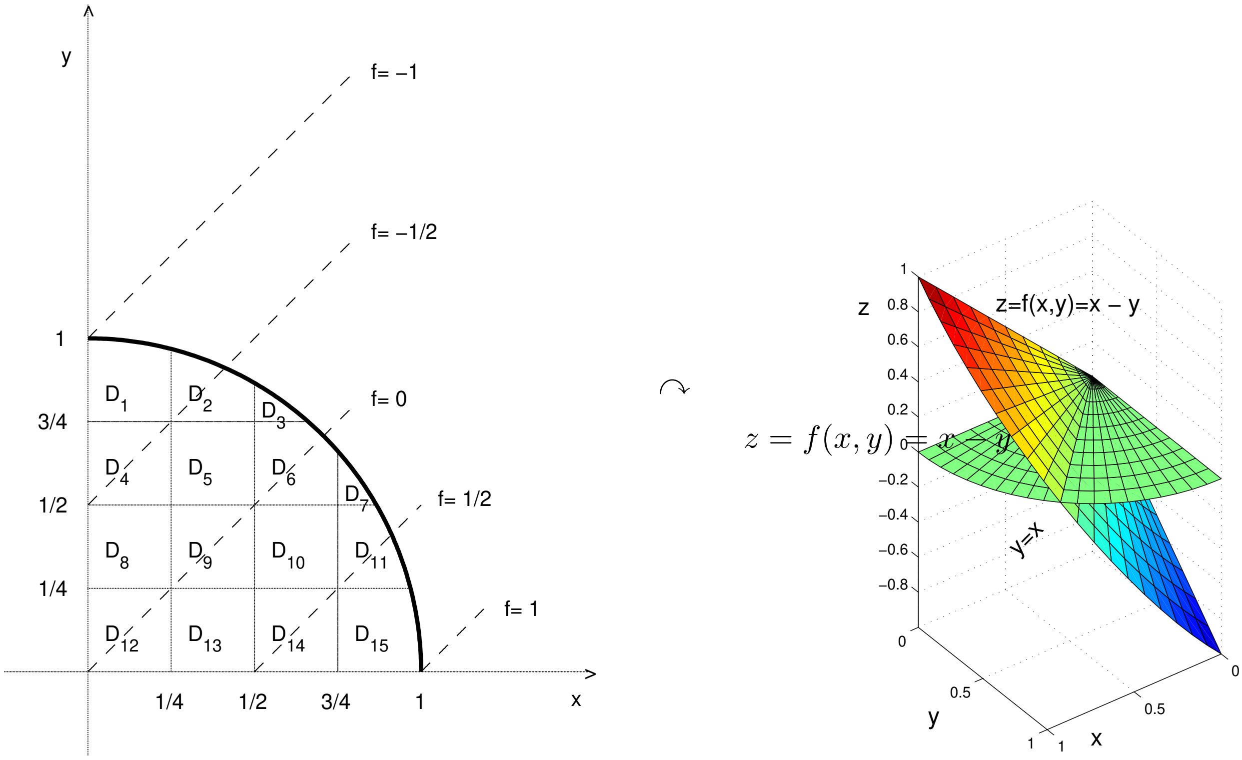
$\underline{f}_i = \min\big\{f(x,y) : (x,y) \in D_i\big\}$, $\overline{f}_i = \max\big\{f(x,y) : (x,y) \in D_i\big\}$

$\text{UD}\,(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot$ Fläche von D_i, $\text{OD}\,(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{f}_i \cdot$ Fläche von D_i und

$\varphi(Z) =$ größter Durchmesser der Gebiete $D_1, \ldots, D_k$.

Satz 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{UD}\,(Z^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{OD}\,(Z^{(n)})$ falls $\varphi(Z^{(n)}) \to 0$ (und D nicht zu irregulär ist) und dieser Limes wird mit $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ bezeichnet.

Bsp. 2 $f(x,y) = x - y$, $D =$ Gebiet im 1. Quadranten, das durch $x^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird, $Z =$ Zerlegung durch ein Raster mit Breite $\frac{1}{4}$.



(Die Nummerierung der D_i ist ganz willkürlich.)
Z.B. $\underline{f}_1 = f(0,1) = -1$ und $\overline{f}_1 = f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ etc.

Wie in 10.2 hat $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 5 Eigenschaften. Speziell gilt 1)

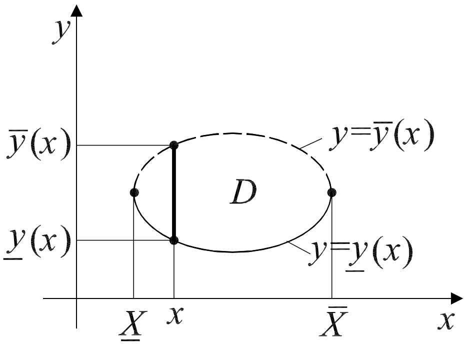
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{array}{r} [\text{Volumen zwischen } xy-\text{Ebene und Fläche, wo } f(x,y) > 0] \\ -[\text{Volumen zwischen } xy-\text{Ebene und Fläche, wo } f(x,y) < 0] \end{array}$$

In Bsp. 2 ist daher aus Symmetriegründen

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x\ge 0,\, y\ge 0 \\ x^2+y^2\le 1}} (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

24.2 ITERIERTE INTEGRALE

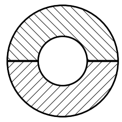
Wir führen nun Doppelintegrale auf einfache Integrale zurück. $D \subset \mathbb{R}^2$ sei beschränkt. $\underline{X}$ sei der kleinste x-Wert in D, $\overline{X}$ der größte; wir zerlegen das Volumen über/unter D in kleine Scheiben parallel zur yz-Ebene so, wie man einen Brotlaib in Schnitten schneidet:



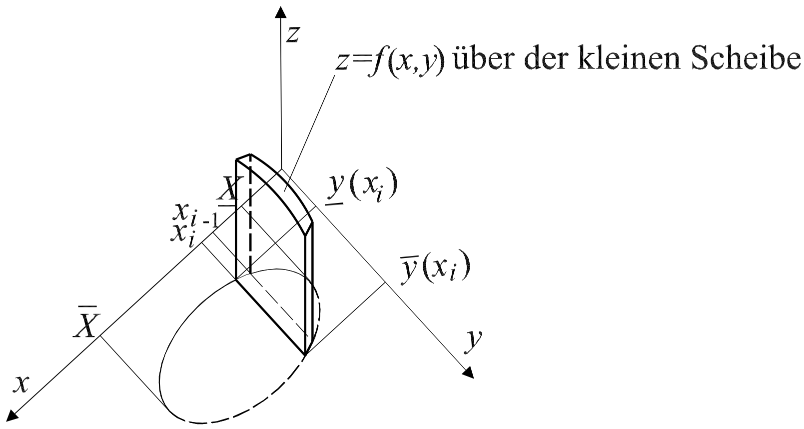
$$\left.\begin{matrix}\overline{y}(x)\\ \underline{y}(x)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{größter}\\ \text{kleinster}\end{matrix}\right\} y\text{-Wert}$$

in D für FESTES x.

Wir nehmen an, dass $D = \{(x,y) : \underline{X} \le x \le \overline{X},\ \underline{y}(x) \le y \le \overline{y}(x)\}$ und dass $\underline{y}, \overline{y}$ stetig sind. (Man nennt D dann <u>Normalbereich</u> bzgl. x.) Ein Kreisring ist z.B. kein Normalbereich, kann aber in zwei Normalbereiche zerlegt werden:



Der Einfachheit halber sei $f(x,y) \ge 0$.



Die i-te Scheibe trägt zum Integral V_i bei, $V_i \approx$ Breite $\cdot$ Querschnittfläche bei x_i

$$= \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i} \cdot \underbrace{\int\limits_{\underline{y}(x_i)}^{\overline{y}(x_i)} f(x_i, y)\,\mathrm{d}y}_{g(x_i)}$$

$\sum\limits_i V_i \approx \sum\limits_i (x_i - x_{i-1}) \cdot g(x_i)$ ist eine Riemannsumme des Integrals $\int\limits_{\underline{X}}^{\overline{X}} g(x)\,\mathrm{d}x$ und daher erhalten wir

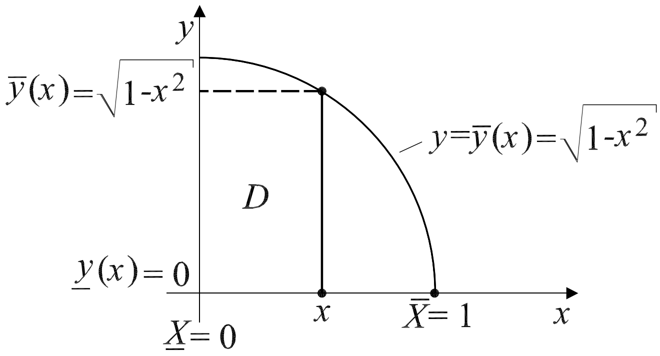
<u>Satz 2</u> (Fubini) $D \subset \mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{matrix} \overline{X} \\ \underline{X} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix}\right\}$ x-Wert in ganz D,

$\left\{\begin{matrix} \overline{y}(x) \\ \underline{y}(x) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix}\right\}$ y-Wert in D für FESTES x.

Es gelte $D = \{(x,y) : \underline{X} \le x \le \overline{X},\ \underline{y}(x) \le y \le \overline{y}(x)\}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=\underline{X}}^{\overline{X}} \Bigg(\int\limits_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Bigg)\,\mathrm{d}x$$

<u>Bsp. 2</u>



für FESTES x ist $\underline{y}(x) = 0$, $\overline{y}(x) = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\,\mathrm{d}y \Bigg)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{1} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x}_{\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}} =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3} \qquad \left\| \begin{array}{l} 1-x^2 = u \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x,\ x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}u}{2} \\ x = 0 \Longrightarrow u = 1 \\ x = 1 \Longrightarrow u = 0 \end{array} \right.$$

$$= \int\limits_{u=1}^{0} \underbrace{\sqrt{u}}_{u^{1/2}} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}u}{2} \right) - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{u=1}^{0} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(0^{3/2} - 1^{3/2}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

wie wir schon in 24.1 feststellten.

Bemerkungen: 1) In Satz 2 wird außen nach x, innen nach y integriert. Ebenso geht es umgekehrt:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x dy = \int\limits_{y=\underline{Y}}^{\overline{Y}} \left(\int\limits_{x=\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \text{ wenn}$$

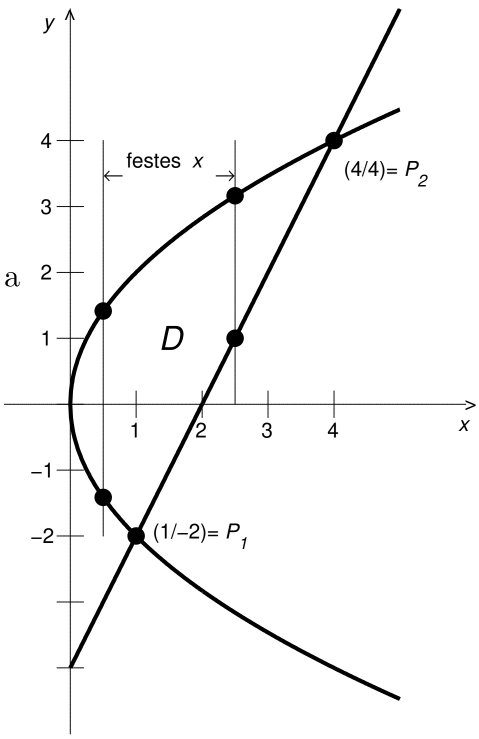
$$\left\{ \begin{matrix} \overline{Y} \\ \underline{Y} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix} \right\} y\text{-Wert in ganz } D, \quad \left\{ \begin{matrix} \overline{x}(y) \\ \underline{x}(y) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix} \right\} x\text{-Wert in } D$$

für FESTES y und $D = \{(x,y) : \underline{Y} \le y \le \overline{Y},\ \underline{x}(y) \le x \le \overline{x}(y)\}$.

2) Manchmal muss man D zerlegen:

Bsp. 3 Bestimme $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird (vgl. Üb. 77, Math. A 1996/97).

$y = 2x - 4$ bzw. $x = \frac{y}{2} + 2$



Zur Bestimmung der Schnittpunkte P_1, P_2 setzt man $4x = y^2 = (2x-4)^2$

$$\Longrightarrow \cdots x = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right.$$

$y^2 = 4x$ bzw. $y = \pm 2\sqrt{x}$ bzw. $x = \frac{y^2}{4}$

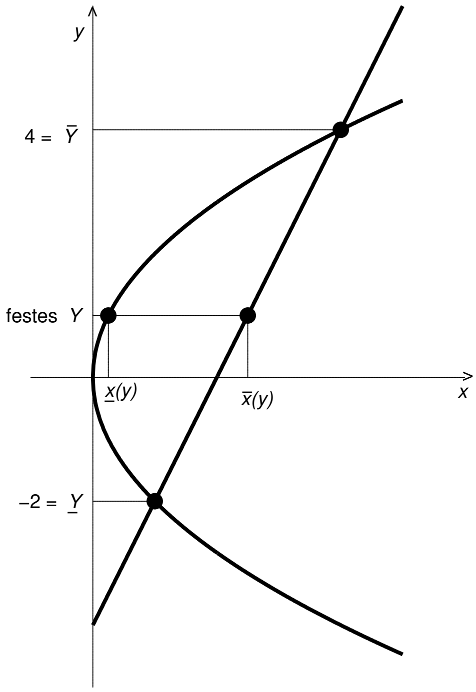
Somit ist $\underline{X} = 0$, $\overline{X} = 4$ und für $0 \le x \le 1$ ist $\underline{y}(x) = -2\sqrt{x}$, $\overline{y}(x) = 2\sqrt{x}$;
für $1 \le x \le 4$ ist hingegen $\underline{y}(x) = 2x - 4$, $\overline{y}(x) = 2\sqrt{x}$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=0}^{1} \underbrace{\left(\int\limits_{y=-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x\,\mathrm{d}y \right)}_{xy\big|_{y=-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}} \mathrm{d}x + \int\limits_{x=1}^{4} \underbrace{\left(\int\limits_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x\,\mathrm{d}y \right)}_{xy\big|_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} 4x^{3/2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=1}^{4} x\cdot\big(2\sqrt{x}-2x+4\big)\,\mathrm{d}x = 4\frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 + \left(2\frac{x^{5/2}}{5/2} - 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{4}{5}\underbrace{(\underbrace{4^{5/2}}_{2^5}-1)}_{31} - \frac{2}{3}(\underbrace{4^3-1}_{63}) + 2(\underbrace{4^2-1}_{15}) = \frac{8+4\cdot 31}{5} - 42 + 30 = \frac{72}{5} = 14.4$$

Wenn wir außen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung:



$$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{y=-2}^{4}\left(\int\limits_{x=y^2/4}^{\frac{y}{2}+2} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$\left\|\ \begin{aligned} u &= \frac{y}{2}+2 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{d}y &= 2\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right.$$

$$= \int\limits_{y=-2}^{4} \frac{x^2}{2}\Big|_{x=y^2/4}^{\frac{y}{2}+2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{y=-2}^{4}\left(\Big(\underbrace{\frac{y}{2}+2}_{u}\Big)^2 - \frac{y^4}{16}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{u=1}^{4} u^2\cdot 2\,\mathrm{d}u - \frac{1}{32}\frac{y^5}{5}\Big|_{y=-2}^{4} = \frac{u^3}{3}\Big|_{u=1}^{4} - \frac{1}{32}\frac{4^5-(-2)^5}{5} =$$

$$= \frac{64-1}{3} - \frac{1}{2^5\cdot 5}(4^5+2^5) = 21 - \frac{1}{5}\Big(\underbrace{2^5+1}_{33}\Big) = 14.4.$$

<u>Bemerkung:</u> Beachte, dass $\iint\limits_D 1\cdot\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ (Volumen über D unter der Höhe 1) $=$ (Fläche von D) $= A$.

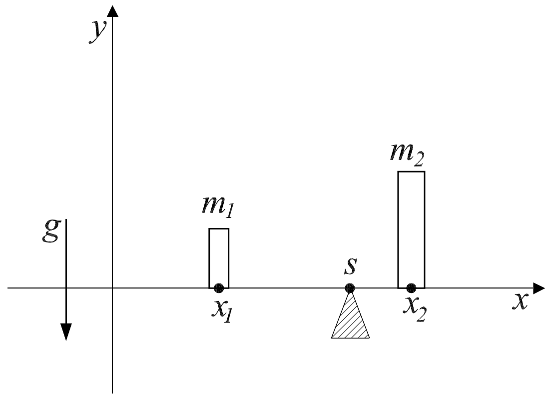
Satz 2 gibt $A = \int\limits_{\underline{X}}^{\overline{X}} \Big(\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} \mathrm{d}y \Big)\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\underline{X}}^{\overline{X}} \big(\overline{y}(x) - \underline{y}(x)\big)\, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x$ in der Notation von § $13, 13.1$.

In Bsp. 3 ergibt sich $A = 9$ (Übung 77, Math. A 96/97).

24.3 STATISCHE MOMENTE UND SCHWERPUNKT

1) Die x-Achse werde als gewichtslose Stange vorgestellt, auf der bei x_1 bzw. x_2 die Massen m_1 bzw. m_2 sitzen, die Schwerkraft gehe in Richtung der negativen y-Achse. Wenn man die x-Achse im Punkt s balancieren will, so muss die Summe der Momente um s 0 sein, d.h.

$$(x_1 - s)m_1 + (x_2 - s)m_2 = 0 \implies x_1 m_1 + x_2 m_2 = s m_1 + s m_2 = s(m_1 + m_2)$$
$$\implies s = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

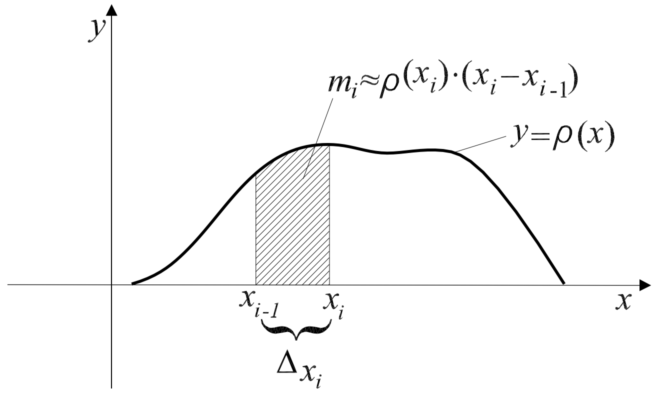


Wenn wir k Massen m_i bei x_i haben, so ist (mit derselben Rechnung)

$$s = \sum_{i=1}^{k} x_i m_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Wenn eine Massendichte $\varrho(x)$ [kg/m] gegeben ist, so ist $m_i \approx \varrho(x_i)\Delta x_i$ und der Grenzwert $\varphi(Z) \to 0$ liefert

$$s = \int x\varrho(x)\,\mathrm{d}x \Big/ \int \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \text{statisches Moment/Gesamtmasse.}$$

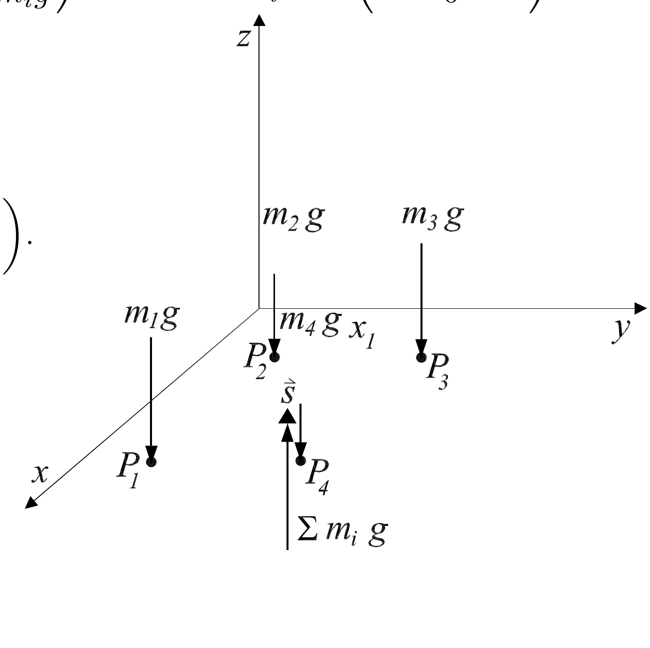


Def. $S = \sum x_i m_i$ bzw. $\int x\varrho(x)\,\mathrm{d}x$ heißt statisches Moment der Massenverteilung.

2) Nun werde die xy-Ebene als gewichtslose Platte vorgestellt, auf der in den Punkten $P_i = (x_i, y_i)$ die Massen m_i sitzen; die Schwerkraft gehe in Richtung der negativen z-Achse.
Der Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$ ist der Punkt, um den die Summe der Momente verschwindet, d.h.

$$\sum_i \begin{pmatrix} x_i - s_1 \\ y_i - s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i g \end{pmatrix} = \vec{0} \implies g\sum_i m_i \begin{pmatrix} -(y_i - s_2) \\ x_i - s_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\implies \sum m_i x_i = s_1 \cdot \sum m_i$$
$$\sum m_i y_i = s_2 \cdot \sum m_i$$
$$\implies \vec{s} = \left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \right).$$



Wenn das Gebiet D mit der Dichte $\varrho(x,y)$ [kg/m ^{2}] belegt ist, erhalten wir

Satz 3 Der Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$ ist durch

$$s_1 = \frac{S_1}{M} = \iint_D x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big/ \iint_D \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$s_2 = \frac{S_2}{M} = \iint_D y\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big/ \iint_D \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

gegeben. Um diesen Punkt verschwindet das Moment der Schwerkraft.

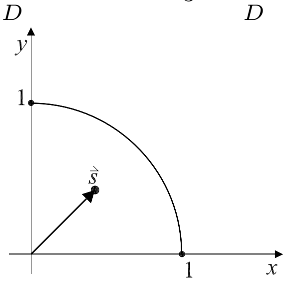
Bezeichnung: Man nennt

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 = \iint_D x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ S_2 = \iint_D y\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{array}\right\}$$ statische Momente bzgl. der $\left\{\begin{array}{c} y(!) \\ x(!) \end{array}\right\}$-Achse und schreibt

oft $\left\{\begin{array}{c} S_y(!) \\ S_x(!) \end{array}\right\}$ für $\left\{\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array}\right\}$.

Im Allgemeinen haben die statischen Momente die Dimension von $x \cdot \varrho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$, d.h. $\left[\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}\right] = [\mathrm{kg\,m}]$. Wenn $\varrho = 1$, so nennt man $\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ statische Momente des Gebietes D; sie haben Dimension $[\mathrm{m}^3]$.

Bsp. 2 D ist der Viertel-Einheitskreis und $\varrho = 1$. Nach 24.2 ist $\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3} = \iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; weiters ist $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ Fläche von $D = \frac{\pi}{4}$



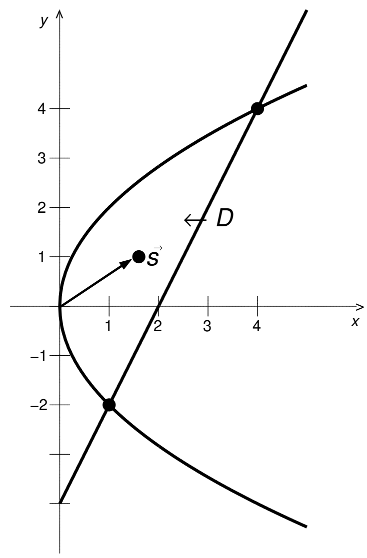
$$\Longrightarrow \vec{s} = \left(\frac{1/3}{\pi/4}, \frac{1/3}{\pi/4}\right) = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right) \approx (0.424, 0.424)$$

Bsp. 3 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 14.4 = \frac{72}{5} = \frac{8 \cdot 9}{5}$,

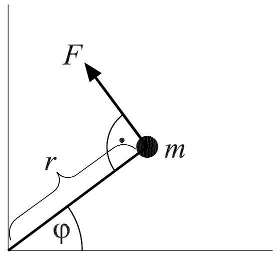
$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9 \Longrightarrow s_1 = \frac{\frac{8\cdot 9}{5}}{9} = \frac{8}{5} = 1.6$

$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9$ (Übung) $\Longrightarrow s_2 = \frac{9}{9} = 1$

$\Longrightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 1 \end{pmatrix}$



24.4 TRÄGHEITSMOMENTE



1) Eine Masse m drehe sich am Ende einer gewichtslosen Stange der Länge r.
Eine Kraft F am Ende der Stange bewirkt eine Beschleunigung a und nach Newton ist $F = m \cdot a$.

Wenn $\omega = \ddot{\varphi}$ die Winkelbeschleunigung ist, so gilt $v = r\dot{\varphi}$, $a = r\ddot{\varphi} \implies F = rm\ddot{\varphi}$.
Die Kraft F entspricht dem Drehmoment $N = rF \implies N = rF = r^2 m\ddot{\varphi}$.

Def. $r^2 m$ heißt Trägheitsmoment und wird mit I bezeichnet (Trägheit = inertia (lat.)).

Somit gilt

Drehmoment = Trägheitsmoment · Winkelbeschleunigung

(vgl.: Kraft = Masse · Beschleunigung)

2) $\varrho(x, y)$ sei eine Massendichte in der xy-Ebene.
Wenn wir um die Gerade $g : a_1x + a_2y = b$ drehen, so hat der Punkt (x/y) von g den Abstand $r = \dfrac{|a_1x + a_2y - b|}{\|\vec{a}\|}$ (s. LA, § 6,B) und daher ist das Trägheitsmoment bzgl. Drehung um g gleich

$$\begin{aligned} I_g &= \iint\limits_D r^2 \varrho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \frac{(a_1x + a_2y - b)^2}{\|\vec{a}\|^2} \varrho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Speziell die x-Achse ist durch $1 \cdot y = 0$, d.h. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = 0$ gegeben

$\implies I_x = I_{x\text{-Achse}} = \iint\limits_D y^2 \varrho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und ebenso

$I_y = I_{y\text{-Achse}} = \iint\limits_D x^2 \varrho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Weiters bezeichnet man $\iint\limits_D xy\varrho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ mit I_{xy}.

Dann gilt also (mit $M = \iint\limits_D \varrho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ = Gesamtmasse)

$$\begin{aligned} I_g &= \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \iint (a_1^2x^2 + a_2^2y^2 + b^2 + 2a_1a_2xy - 2a_1bx - 2a_2by)\varrho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(a_1^2 I_y + a_2^2 I_x + 2a_1a_2 I_{xy} + b^2 M - 2a_1 b S_1 - 2a_2 b S_2) \end{aligned}$$

Speziell, wenn die Koordinatenachsen durch den Schwerpunkt gehen, so ist $\vec{s} = \vec{0}$, d.h. $S_1 = S_2 = 0 \implies$

$$I_g = \underbrace{\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(a_1^2 I_y + a_2^2 I_x + 2a_1 a_2 I_{xy})}_{I_h} + \underbrace{\frac{b^2 M}{\|\vec{a}\|^2}}_{d^2 M}$$

wobei $h : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$ parallel zu g ist und durch $\vec{0} = \vec{s}$ geht und $\vec{s} = \vec{0}$ den Abstand $d = \dfrac{|b|}{\|\vec{a}\|}$ von g hat. Das ergibt:

Satz 4 (Steiner)

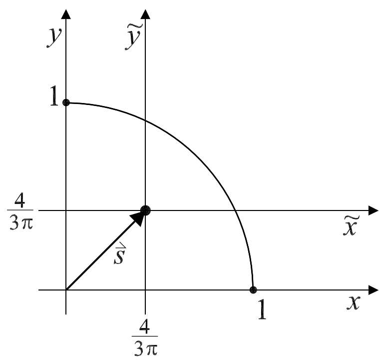
$I_g = I_h + d^2 M$, wenn $h \parallel g$, $\vec{s} \in h$,

M = Gesamtmasse, d = Abstand von $\vec{s}$ zu g

Bemerkung: Die Trägheitsmomente spielen auch bei der Balkenbiegung eine große Rolle, s. Hofstetter 4.4.

Bsp. 2 Viertelkreis. Wir bezeichnen mit $\tilde{x}, \tilde{y}$ verschobene Koordinaten durch den Schwerpunkt. (Vorsicht: Bei Hofstetter hingegen $x_{\text{hier}} = \overline{x}_{\text{Hofst.}}$, $y_{\text{hier}} = \overline{y}_{\text{Hofst.}}$; $\tilde{x}_{\text{hier}} = x_{\text{Hofst.}}$, $\tilde{y}_{\text{hier}} = y_{\text{Hofst.}}$)

Dann ist $\tilde{x} = x - \dfrac{4}{3\pi}$, $\tilde{y} = y - \dfrac{4}{3\pi}$;



$$I_x = \iint\limits_{\text{Viertelkreis}} y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{1} \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 (1 - x^2)^{3/2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{3/2} \cos t \, \mathrm{d}t$$

Substitution: $x = \sin t$

$\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$

$x = 0$ "$\implies$" $t = 0$

$x = 1$ "$\implies$" $t = \pi/2$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 t \, \mathrm{d}t = \text{(Math. A, S. 137)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$$

Aus Symmetriegründen ist $I_x = I_y$.

Nach Steiner ist $I_{\tilde{x}} = I_x - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} = I_{\tilde{y}}$. Weiters ist

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=0}^{1} x \underbrace{\left(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y \,\mathrm{d}y \right)}_{\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}} \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(x - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Allgemein gilt $\tilde{x} = x - s_1,\ \tilde{y} = y - s_2$ wenn (s_1, s_2) die Koordinaten von $\vec{s}$ im xy-System sind $\Longrightarrow$

$$I_{\tilde{x}\tilde{y}} = \iint\limits_D \varrho\cdot(x - s_1)(y - s_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \varrho\cdot(xy - s_1 y - s_2 x + s_1 s_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$= I_{xy} - s_1 \overbrace{S_x}^{s_2\cdot M} - s_2 \overbrace{S_y}^{s_1\cdot M} + s_1 s_2 M = I_{xy} - s_1 s_2 M$$

Somit ist beim Viertelkreis

$$I_{\tilde{x}\tilde{y}} = I_{xy} - s_1 s_2 M = \frac{1}{8} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}.$$

Für die Gerade $g: a_1\tilde{x} + a_2\tilde{y} = 0$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ durch den Schwerpunkt ist

$$I_g = a_1^2 I_{\tilde{y}} + a_2^2 I_{\tilde{x}} + 2a_1a_2 I_{\tilde{x}\tilde{y}} = \vec{a}^T \begin{pmatrix} I_{\tilde{y}} & I_{\tilde{x}\tilde{y}} \\ I_{\tilde{x}\tilde{y}} & I_{\tilde{x}} \end{pmatrix} \vec{a},$$

eine quadratische Form in $\vec{a}$.

Die Maximal-/Minimalwerte von I_g sind daher die Eigenwerte von $J = \begin{pmatrix} I_{\tilde{y}} & I_{\tilde{x}\tilde{y}} \\ I_{\tilde{x}\tilde{y}} & I_{\tilde{x}} \end{pmatrix}$.

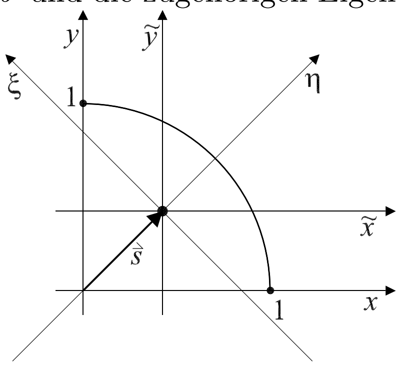
Def. Die Maximal-/Minimalwerte von I_g mit g durch $\vec{s}$ heißen Hauptträgheitsmomente, und die Achsen in Richtung der Eigenvektoren heißen Hauptachsen der Dichte ϱ auf D.

Bezeichnung: ξ, η seien die Koordinaten in Richtung der Hauptachsen, I_ξ, I_η die Hauptträgheitsmomente.

<u>Bsp. 2</u> $J = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} & \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \\ \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} & \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.055 & -0.016 \\ -0.016 & 0.055 \end{pmatrix}$

Allgemein: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = 0 \implies (a-\lambda)^2 - b^2 = 0 \implies (a-\lambda)^2 = b^2 \implies a - \lambda = \pm b \implies {}_1\lambda_2 = a \pm b$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Somit

$$I_\xi = a + b = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi} \approx 0.0384$$
$$I_\eta = a - b = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \approx 0.0713$$



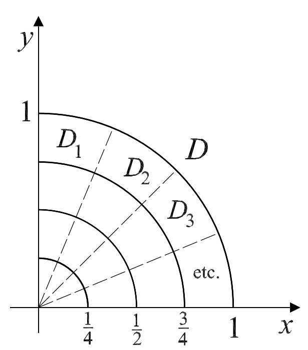
In den neuen Koordinaten ξ, η ist $\tilde{J} = \begin{pmatrix} I_\eta & 0 \\ 0 & I_\xi \end{pmatrix}$ diagonal und $I_{\xi\eta} = 0$. Bei Drehung um die ξ-Achse hat der Viertelkreis also Trägheitsmoment $I_\xi = 0.0384$, d.h. er verhält sich so, als ob seine gesamte Masse $A = \frac{\pi}{4}$ im Abstand i_ξ von der ξ-Achse entfernt ist, wobei $i_\xi^2 A = I_\xi$, d.h.

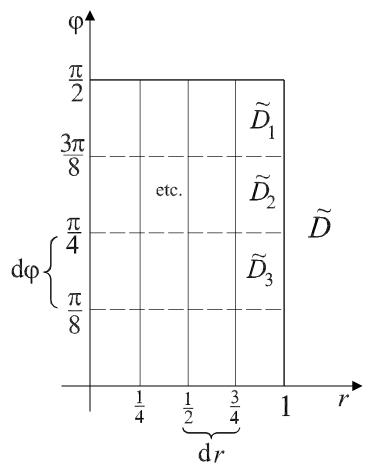
$$i_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} \approx 0.221. \quad \text{Ebenso } i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} \approx 0.301$$

<u>Def.</u> $i_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{M}}$, $i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{M}}$ heißen <u>Hauptradien</u> der Massenverteilung ϱ. Ihre Einheit ist Länge.

24.5 SUBSTITUTION (=KOORDINATENWECHSEL) BEI $\iint$

<u>Bsp. 2</u>





Ein rechteckiges Raster in r, φ entspricht einer Zerlegung in x, y. Nach § 21.5 ist die [Fläche von D_i] $\approx \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| \cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$. Es sei $f(x,y)$ gegeben,

$$g(r,\varphi) = f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| \implies \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_i \underline{f}_i \cdot \text{Fläche von } D_i \;=\; \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_i \underline{f}_i \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|}_{=r} \cdot \underbrace{\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}_{\substack{=\text{Fläche} \\ \text{von } \tilde{D}_i}} =$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} g(r,\varphi)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \;=\; \iint\limits_{\tilde{D}} \underbrace{f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big)}_{\substack{\tilde{f}(r,\varphi) \text{ meist kurz} \\ f(r,\varphi), \text{ s.§ 19.3}}} \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

Diese Überlegung funktioniert für beliebige Koordinaten und ergibt:

Satz 5 $v_1(x,y), v_2(x,y)$ seien Koordinaten. Dann ist

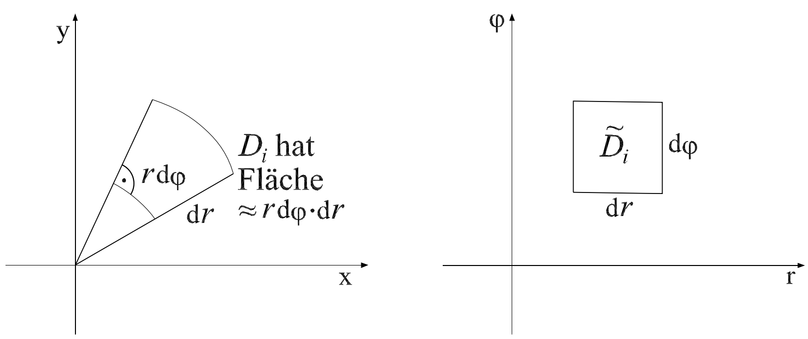
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} f\big(\big(x(v_1,v_2), y(v_1,v_2)\big) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(v_1,v_2)}\right| \mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2,$$

wobei $\tilde{D}$ dem Bereich D in der v_1, v_2-Ebene entspricht.

Speziell in Polarkoordinaten:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} \tilde{f}(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}$$

Bemerkungen: 1) $r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ entspricht der Fläche von D_i (s.o.) und lässt sich wie in § 21.5, S. 54 unten veranschaulichen:



2) Das analoge zu Satz 5 in einer Variablen ist die Substitution in § 11.4. Dort sind

die Buchstaben etwas anders gewählt:

$$\begin{array}{cccccccccc} \displaystyle\int\limits_a^b & h\big(g(x)\big) & \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} & \cdot\, \mathrm{d}x & = & \displaystyle\int\limits_{g(a)}^{g(b)} & h(t)\,\mathrm{d}t \\ & \vdots \;\; \vdots\, \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots \\ & f \;\; x \;\; v & \frac{\partial x}{\partial v} & \mathrm{d}v & & & f \;\; x \;\; \mathrm{d}x \end{array}$$

Weiters entspricht $[a,b]$ dem Bereich D und

$$\left.\begin{cases} \big[g(a),g(b)\big] & \text{falls } g(a) < g(b) \\ \big[g(b),g(a)\big] & \text{falls } g(b) < g(a) \end{cases}\right\} \text{ dem Bereich } \tilde{D}.$$

In einer Variablen fehlt der Betrag bei der "Funktionaldeterminante" $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$, weil man rechts nicht über $\tilde{D}$ integriert, sondern ein Kurvenintegral schreibt (siehe später).

<u>Bsp. 3</u> D = Viertelkreis, $f(x,y) = x$

$$\Longrightarrow S_1 = \iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\tilde{D}} \underbrace{r\cos\varphi}_{x} \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_{r=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} r^2 \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \Bigg) \mathrm{d}r = \int\limits_{r=0}^{1} (r^2 \sin\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} \mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_{r=0}^{1} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{1} = \frac{1}{3}\,\checkmark \qquad \text{(vgl. 24.3)}$$

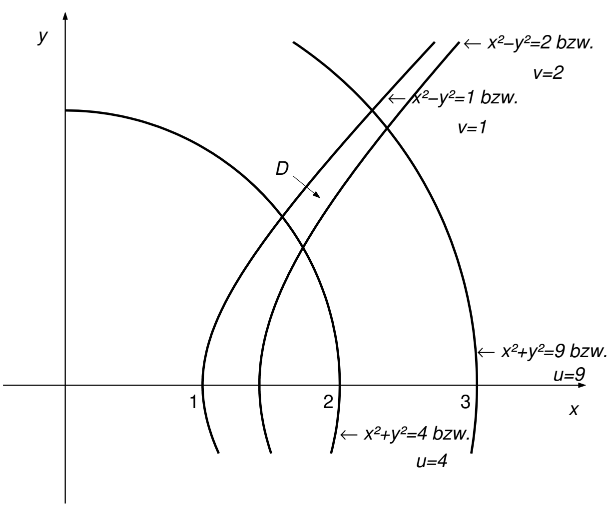
$$I_y = \iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} r^2\cos^2\varphi \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{r=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} r^3 \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \Bigg) \mathrm{d}r =$$

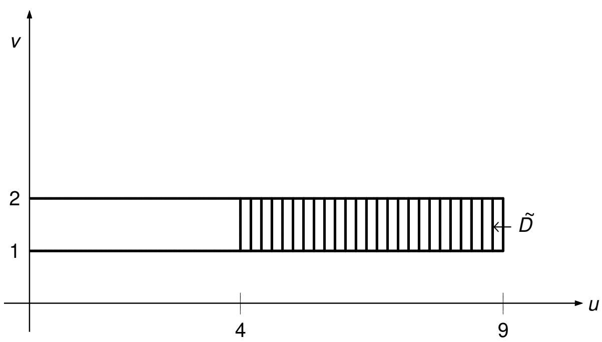
$$= \int\limits_{r=0}^{1} r^3 \cdot \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{\substack{\text{§ 11.8: halbe Inter-} \\ \text{valllänge } = \frac{\pi}{4}}} \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}, \qquad \text{s. 24.4.}$$

<u>Bsp. 4</u> Berechne $\iint\limits_D (x^4 - y^4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei D das Gebiet im ersten Quadranten ist, das durch die Kreise $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9$

und die Hyperbeln $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 2$ eingeschlossen wird.

Wir führen die neuen Koordinaten $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2$ ein.
Dem Gebiet D entspricht dann $\tilde{D} : 4 \le u \le 9,\ 1 \le v \le 2.$





$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = u \cdot v \overset{\text{Satz 5}}{\Longrightarrow} \iint\limits_D (x^4 - y^4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} u \cdot v \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Nach Math. B, § 21, Satz 4, S. 55 gilt für die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \underbrace{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}_{} = 1$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix} = -8xy$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{|-8xy|} = \frac{1}{8xy}, \text{ da in } D\ x > 0, y > 0.$$

Das müssen wir noch durch u, v ausdrücken:

$$u^2 - v^2 = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 4x^2y^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{u^2 - v^2} = 2|xy|$$

$$\Longrightarrow \text{ in } D \text{ gilt } \frac{1}{8xy} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D (x^4 - y^4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{uv}{4\sqrt{u^2 - v^2}}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9} u\Bigg(\int\limits_{v=1}^{2} \frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}\,\mathrm{d}v\Bigg)\mathrm{d}u =$$

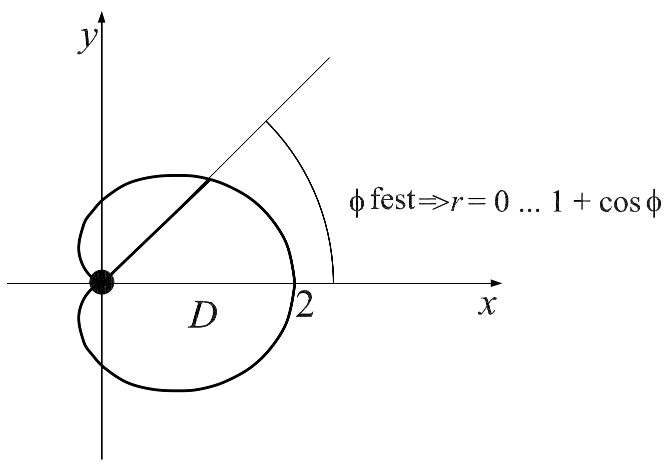
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9} u\Bigg(\int\limits_{t=u^2-1}^{u^2-4} \frac{-\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}\Bigg)\,\mathrm{d}u =$$

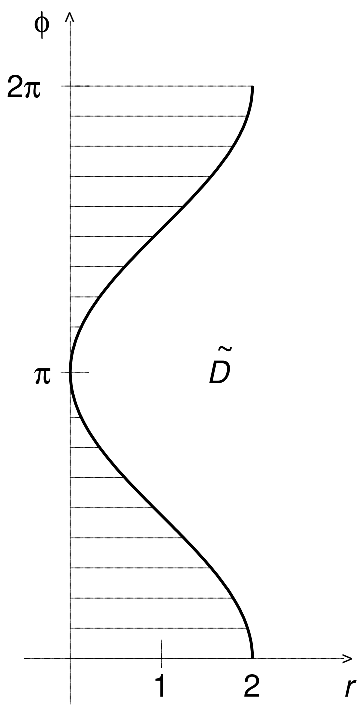
$$\left\|\begin{array}{l} t = u^2 - v^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = -2v \\ v\,\mathrm{d}v = -\dfrac{\mathrm{d}t}{2} \\ v = 1 \implies t = u^2 - 1 \\ v = 2 \implies t = u^2 - 4 \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9} u\Bigg(-\sqrt{t}\,\Bigg|_{t=u^2-1}^{u^2-4}\Bigg)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{4}\int\limits_{u=4}^{9}\Big(u\sqrt{\underbrace{u^2-4}_{s}} - u\sqrt{\underbrace{u^2-1}_{\tilde{s}}}\Big)\,\mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(u^2-4)^{3/2} - \frac{1}{3}(u^2-1)^{3/2}\right]\Bigg|_{u=4}^{9} = -\frac{1}{12}\big[77^{3/2} - 12^{3/2} - 80^{3/2} + 15^{3/2}\big] \approx 1.945$$

<u>Bsp. 5</u> Man bestimme die Fläche A der Kardioide $r = 1 + \cos\varphi$ (Math. B, Übung 31 vom 24. 3. 99).

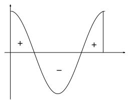




$$A = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{Satz 5}}{=} \iint\limits_{\tilde{D}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\Bigg(\int\limits_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\Bigg)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{r=0}^{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi =$$

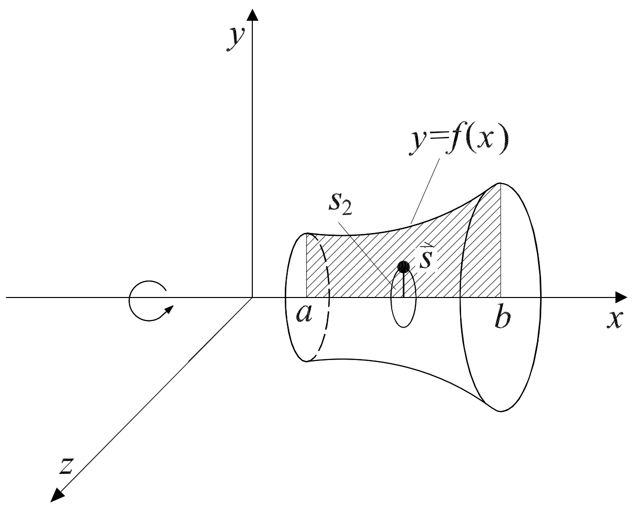
$$= \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi}_{2\pi} + 2\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{\substack{\text{halbe}\\ \text{Intervalllänge}\\ =\pi\\ \text{(s. Math. A,}\\ \text{11.8, S. 97)}}}\Bigg] = \frac{3\pi}{2} \approx 4.7 \text{ FE.}$$

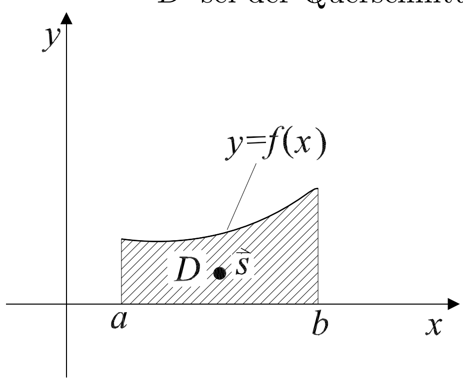


24.6 DIE 1. GULDIN'SCHE REGEL

Wenn die Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse rotiert, so hat nach Math. A, 13.2 der entstehende Körper Volumen $V = \pi \int\limits_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$.

D sei der Querschnitt





Dann ist S_2 = [statisches Moment bzgl. x-Achse] =

$$= \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b}\Bigg(\int_{y=0}^{f(x)} y\,\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \implies V = 2\pi S_2 = 2\pi\cdot A\cdot s_2 =$$

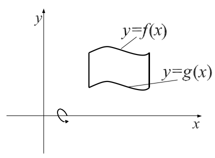
$= A\cdot 2\pi s_2$, wobei A = Fläche von D, $\vec{s} = (s_1, s_2)$ = Schwerpunkt von D.

Dann ist $2\pi s_2$ = Weglänge des Schwerpunkts bei der Drehung und daher gilt

Satz 6 (Guldin)

Drehvolumen = Querschnittfläche · Schwerpunktweg.

Bemerkung: Durch Subtraktion sehen wir, dass das auch für Gebiete der Form

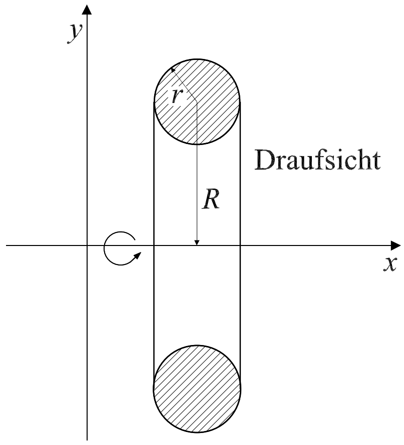


gilt.

Bsp. 6 Torus = Drehkörper bei Rotation eines Kreises:

V = Fläche $\cdot$ Weg

$r^2\pi \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$



24.7 DREIFACH-INTEGRALE

Analog zu 24.1 sei $D \subset \mathbb{R}^3$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ stetig und

$UD(Z) = \sum\limits_{j=1}^{k} \underline{f}_i \cdot$ Volumen von D_i und ähnlich $OD(Z)$.

Dann gilt wie in Satz 1 $\lim UD(Z^{(n)}) = \lim OD(Z^{(n)})$ und wird mit

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

bezeichnet.

Wenn z.B. ein Körper D mit Massendichte $\varrho\,[\mathrm{kg/\,m^3}]$ belegt ist, so ist

M = Gesamtmasse = $\iiint\limits_D \varrho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Analog zu 24.2, Satz 2 gilt

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{x=\underline{X}}^{\overline{X}} \left(\int\limits_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} \left(\int\limits_{z=\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

wobei $\underline{X}, \overline{X}, \underline{y}, \overline{y}$ wie dort sind und $\left\{ \begin{matrix} \overline{z}(x,y) \\ \underline{z}(x,y) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{matrix} \right\}$ z-Wert in D für feste x, y.

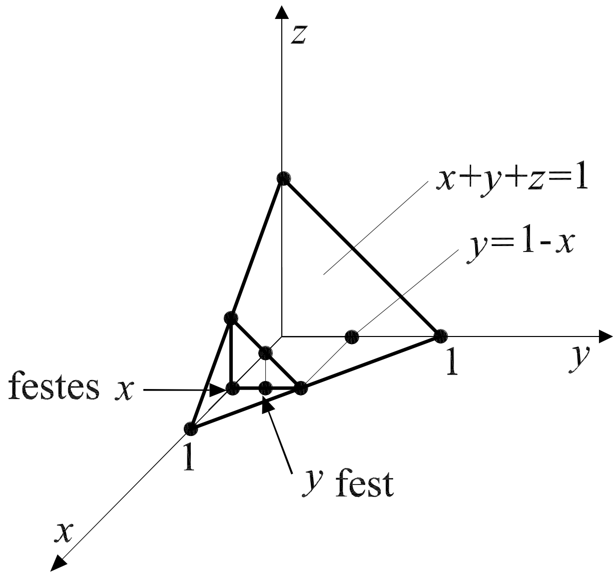
<u>Bsp. 7</u> Der Tetraeder, der durch die 3 Koordinatenebenen und durch die Ebene $x+y+z=1$ begrenzt wird, ist mit Massendichte $\varrho(x,y,z)=x$ belegt. Bestimme seine Masse!

Offenbar ist $\underline{X}=0,\ \overline{X}=1$;

für festes x ist

$\underline{y}(x)$ = kleinster y-Wert $=0$

$\overline{y}(x)$ = größter y-Wert $=\ 1-x$



für feste x,y ist $\underline{z}(x,y)=0,\ \overline{z}(x,y)=1-x-y$

Also $M=\displaystyle\int\limits_{x=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-x}\bigg(\int\limits_{z=0}^{1-x-y}x\,\mathrm{d}z\bigg)\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x=\int\limits_{x=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-x}x\cdot z\Big|_{z=0}^{1-x-y}\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x=$

$$=\int\limits_{x=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-x}x\cdot(1-x-y)\,\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x=\int\limits_{x=0}^{1}x\cdot\left[-\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]\Bigg|_{y=0}^{1-x}\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{x=0}^{1}x\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{1}(x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6-8+3}{12}=\frac{1}{24}$$

Ebenso gut könnte man in einer anderen Reihenfolge integrieren, z.B.

$$M=\int\limits_{z=0}^{1}\Bigg(\int\limits_{y=0}^{1-z}\bigg(\int\limits_{x=0}^{1-y-z}x\,\mathrm{d}x\bigg)\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}z.$$

24.8 SCHWERPUNKT UND TRÄGHEITSMOMENTE IM $\mathbb{R}^3$

1) Wir gehen nun zur Indexschreibweise über, d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Für $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ schreiben wir $\mathrm{d}V$.

Es sei eine Massenverteilung $\varrho(\vec{x})$ in D gegeben. Der Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ist **der** Punkt, um den die Summe der Drehmomente verschwindet, egal in welche Richtung $\vec{v}$ die Schwerkraft wirkt. Es sei z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\vec{N} = \text{Drehmoment um } \vec{s} = \sum \text{Kraftarm} \times \text{Kraftvektor}$$

$$= \iiint (\vec{x} - \vec{s}) \times \varrho(\vec{x}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \mathrm{d}V = -g \iiint \varrho(\vec{x}) \begin{pmatrix} x_2 - s_2 \\ -x_3 + s_3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}V \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\iiint \varrho(\vec{x}) x_2 \,\mathrm{d}V}_{S_2} = s_2 \iiint \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V = s_2 \cdot M$$

Allgemein gilt also

$$\boxed{s_i = \frac{S_i}{M} = \frac{1}{M} \iiint\limits_D x_i \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V},$$

wobei M = Gesamtmasse = $\iiint_D \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V$.

Bezeichnung: $S_1 = \iiint x_1 \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V$ heißt **statisches Moment** bzgl. der x_2x_3-Ebene und wird auch mit $S_{x_2x_3}$ bezeichnet. Analog $S_{x_1x_3}$, $S_{x_2x_3}$.

Also gilt $\vec{s} = \dfrac{1}{M}(S_{x_2x_3}, S_{x_1x_3}, S_{x_1x_2})$.

Bsp. 7 Der Tetraeder sei wie oben $\Longrightarrow$

$$S_1 = S_{x_2x_3} = \iiint_D x_1 \cdot \underbrace{\varrho(\vec{x})}_{=x_1} \,\mathrm{d}V = \cdots = \int_0^1 x_1^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - x_1)^2 \,\mathrm{d}x_1 =$$

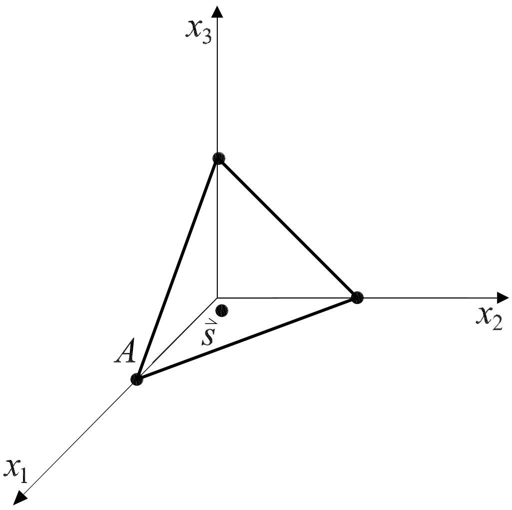
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60} \Longrightarrow s_1 = \frac{S_1}{M} = \frac{1/60}{1/24} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Analog ist $S_2 = \iiint x_2 \varrho(\vec{x}) \,\mathrm{d}V = \cdots = \dfrac{1}{120}$,

$$S_3 = \iiint x_3 \underbrace{\varrho(\vec{x})}_{x_1} \,\mathrm{d}V = \text{(hier aus Symmetrie)} =$$

$$= \iiint x_2 x_1 \, \mathrm{d}V = S_2 = \frac{1}{120}$$

und daher $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.



Beim homogen belegten Tetraeder (d.h. $\varrho(\vec{x}) = 1$) ist der Schwerpunkt in

$\frac{1}{4} \cdot \sum$ Eckvektoren $\underset{\text{hier}}{=} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

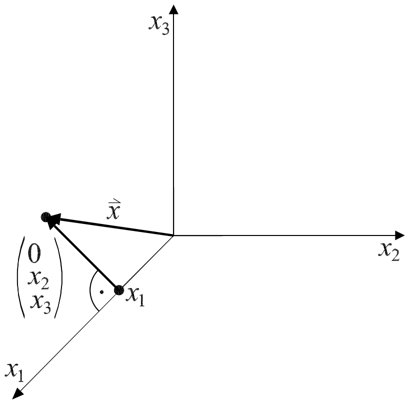
Bei unserer Dichte $\varrho(\vec{x}) = x_1$ hingegen ist wegen der größeren Dichte bei A der Schwerpunkt in Richtung A verschoben.

2) **Trägheitsmomente**

Der Punkt $\vec{x}$ hat Abstand $\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ von der x_1 -Achse

$\Longrightarrow$ I_1 =Trägheitsmoment bzgl. Drehung um die x_1 -Achse =

$$= \iiint_D (x_2^2 + x_3^2) \varrho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V.$$



Analog $I_2 = \iiint\limits_D (x_1^2 + x_3^2) \varrho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V, \quad I_3 = \iiint\limits_D (x_1^2 + x_2^2) \varrho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V.$

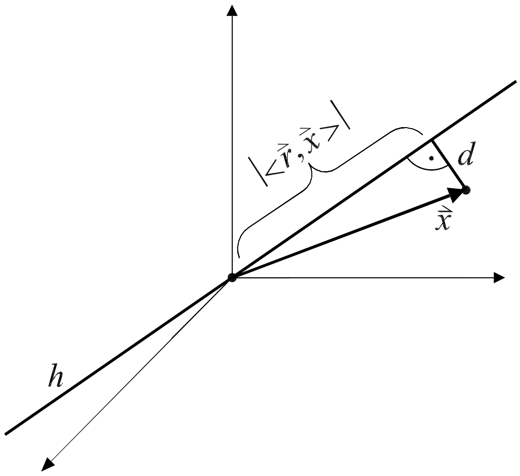
(Beachte: Statische Momente sind bzgl. Hyperebenen, Trägheitsmomente sind bzgl. Geraden)

Ebenso wie im $\mathbb{R}^2$ gilt und beweist man im $\mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) den Satz von Steiner:

$$I_g = I_h + d^2 M, \text{ wobei } h \parallel g; \ \vec{s} \in h, \ M = \text{ Gesamtmasse}, \ d = \text{ Abstand } (\vec{s}, g).$$

Wir wollen nun wieder die Trägheitsmomente verschiedener Geraden h durch den Schwerpunkt vergleichen. Die Koordinaten seien so verschoben, dass $\vec{s} = \vec{0}$. Der Einfachheit halber schreibe ich wieder $\vec{x}$ dafür (in 24.4 hingegen $\tilde{x}, \tilde{y}$).

Es sei $h : \vec{x} = \lambda\vec{r}$ eine Gerade durch $\vec{s} = \vec{0}$, $\|\vec{r}\| = 1$.
Dann hat ein beliebiger Punkt $\vec{x}$ von h den Abstand $d = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 - \langle\vec{r},\vec{x}\rangle^2}$:



$$\Longrightarrow\ I_h = \iiint_D d^2 \cdot \varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_D \left(\|\vec{x}\|^2 - \langle\vec{r},\vec{x}\rangle^2\right)\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_D \big[\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3)^2}\big]\,\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$$x_1^2(\underbrace{1 - r_1^2}_{r_2^2+r_3^2}) - 2r_1r_2x_1x_2 + x_2^2(\underbrace{1 - r_2^2}_{r_1^2+r_3^2}) + x_3^2\,(\underbrace{1 - r_3^2}_{r_1^2+r_2^2}) - 2r_1r_3x_1x_3 - 2r_2r_3x_2x_3$$

$$= \iiint\limits_D \big[r_1^2(x_2^2 + x_3^2) + r_2^2(x_1^2 + x_3^2) + r_3^2(x_1^2 + x_2^2) - 2r_1r_2x_1x_2 - 2r_1r_3x_1x_3 -$$

$$- 2r_2r_3x_2x_3\big]\,\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$= r_1^2I_1 + r_2^2I_2 + r_3^2I_3 - 2r_1r_2I_{12} - 2r_1r_3I_{13} - 2r_2r_3I_{23} = \vec{r}^{\,T}J\vec{r}$ mit

$J = \begin{pmatrix} I_1 & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_2 & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_3 \end{pmatrix}$ und $I_1 = \iiint\limits_D (x_2^2 + x_3^2)\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V$,

$I_{12} = \iiint\limits_D x_1x_2\,\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V$ etc.

Bemerkungen: 1) a_1, a_2 auf Seite 105 entspricht $-r_2, r_1$ hier.
Daher sind $I_{\tilde{y}} = I_2$, $I_{\tilde{x}} = I_1$ dort in anderer Position in der Matrix J und fehlt das $-$ bei $I_{\tilde{x}\tilde{y}} = I_{12}$.

2) In Matrixschreibweise ist

$$I_h = \iiint \left(\vec{x}^{\,T}\cdot\vec{x} - (\vec{r}^{\,T}\cdot\vec{x})^2\right)\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

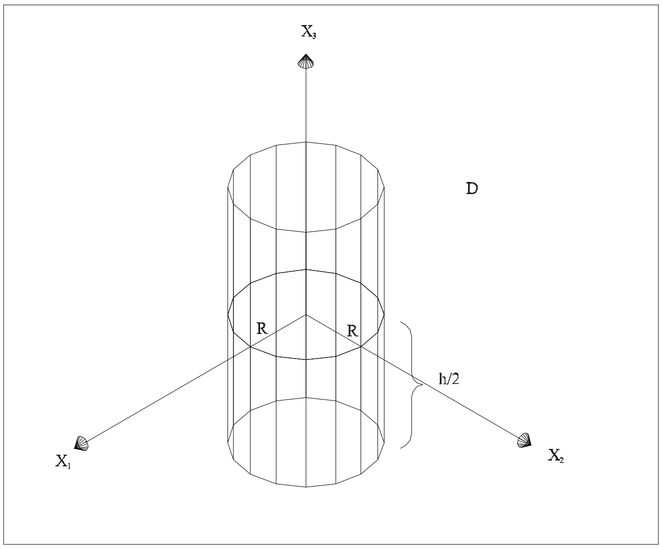
$$= \iiint (\underbrace{\vec{r}^{\,T}\cdot\vec{r}}_{=1}\cdot\vec{x}^{\,T}\cdot\vec{x} - \vec{r}^{\,T}\cdot\vec{x}\cdot\vec{x}^{\,T}\cdot\vec{r})\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V =$$

$$= \vec{r}^{\,T}\cdot\underbrace{\iiint (\vec{x}^{\,T}\cdot\vec{x}\cdot \overset{\substack{\text{hier } 3\times3 \text{ Einheitsmatrix}\\ \downarrow}}{I_3} - \vec{x}\cdot\vec{x}^{\,T})\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}V}_{J}\cdot\vec{r}$$

Diese Formel würde auch im $\mathbb{R}^n$ gelten (mit I_n statt I_3).

3) Nach Lineare Algebra § 7 F sind die Maximal-/Minimalwerte von I_h der größte bzw. kleinste Eigenwert von J. Die Eigenwerte von J heißen wieder **Hauptträgheitsmomente** und die Achsen in Richtung der Eigenvektoren **Hauptachsen**.

Bsp. 7 Bestimme J für einen homogenen Zylinder mit Radius R, Höhe h, $\varrho = 1$!
Wir wählen die Koordinaten durch den Schwerpunkt:



Aus Symmetriegründen ist $I_1 = I_2$ und $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

(Z.B. $I_{12} = \iiint\limits_D \underbrace{x_1 x_2}\,\mathrm{d}V = 0$

positiv für (x_1, x_2) im 1. und 3. Quadranten
negativ für (x_1, x_2) im 2. und 4. Quadranten)

$$I_3 = \iiint\limits_D (x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \underbrace{\left(\iint\limits_{x_1^2+x_2^2 \le R^2} \overbrace{(x_1^2 + x_2^2)}^{r^2}\, \overbrace{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}^{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi} \right)}_{\text{von } x_3 \text{ unabhängig}} \mathrm{d}x_3 =$$

$$= \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \mathrm{d}x_3 \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\left(\int\limits_{r=0}^{R} r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r \right)}_{\frac{R^4}{4}} \mathrm{d}\varphi = h \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{hR^4\pi}{2}$$

$$I_1 = I_2 = \iiint (x_1^2 + x_3^2)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (r^2 \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\substack{\uparrow\\ \text{halbe Intervalllänge}}} + x_3^2) r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \Bigg) \mathrm{d}x_3 =$$

$$\int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{R} (\pi r^3 + 2\pi x_3^2 r)\,\mathrm{d}r \Bigg) \mathrm{d}x_3 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \left(\pi \frac{R^4}{4} + \pi x_3^2 R^2 \right) \mathrm{d}x_3$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{hR^4\pi}{4} + \frac{h^3R^2\pi}{12} = \frac{hR^2\pi(3R^2+h^2)}{12},$$

$$J = \frac{hR^2\pi}{12} \begin{pmatrix} 3R^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2+h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}.$$

Es ist also leichter, den Zylinder um die x_3 -Achse als um die x_1 -Achse in Drehung zu versetzen, solange $6R^2 < 3R^2 + h^2$, d.h. $R < \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

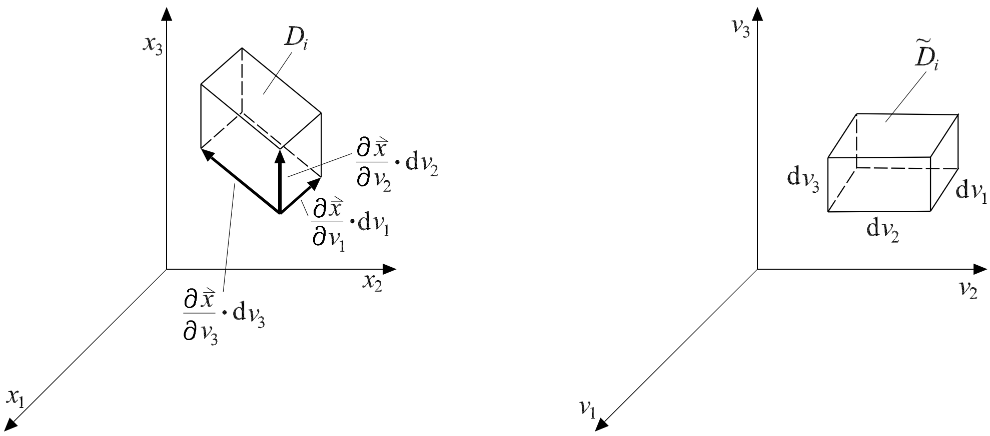
Bemerkung: Wenn man so wie oben bzgl. x_1, x_2 Polarkoordinaten einführt, nennt man das **Zylinderkoordinaten**, d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Dann gilt $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x_3$.

Wenn man über Kugelteile integriert, sind hingegen Kugelkoordinaten vorteilhaft, siehe 24.9.

24.9 Koordinatenwechsel in $\iiint$

Analog zu 24.5 betrachten wir neue Koordinaten v_1, v_2, v_3 und darin eine Zerlegung von $\tilde{D}$ in Quader $\tilde{D}_i$:



Dies entspricht einer krummlinigen Zerlegung D_i in den alten Koordinaten x_1, x_2, x_3 und es gilt (vgl. § 21.5):

$$\text{Volumen von } D_i \approx \left| \underbrace{\det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial v_1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v_2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v_3}\right)}_{=\det J = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(v_1,v_2,v_3)}} \right| dv_1 dv_2 dv_3$$

$$\Longrightarrow \iiint\limits_D f(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum \underline{f}_i \cdot \text{Volumen von } D_i =$$

$$= \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_i \underline{f}_i \cdot \left| \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(v_1,v_2,v_3)} \right| dv_1 dv_2 dv_3 = \iiint_{\tilde{D}} f\big(\vec{x}(\vec{v})\big) \left| \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(v_1,v_2,v_3)} \right| dv_1 dv_2 dv_3$$

Speziell für Kugelkoordinaten gilt (§ 21.4)

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \sin\vartheta \cos\varphi \\ x_2 &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ x_3 &= \varrho \cos\vartheta \end{aligned} \qquad \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)} \underset{\substack{(\text{Üb. } 76 \\ \text{v.2.6.99})}}{=} \varrho^2 \sin\vartheta.$$

Schreibweise: Man schreibt oft nur ein Integral statt der 2, 3, bzw. n Integrale im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, bzw. $\mathbb{R}^n$.

Die Überlegungen oben gelten analog auch im $\mathbb{R}^n$ und ergeben

<u>Satz 7</u> $\vec{v}(\vec{x})$ seien neue Koordinaten $\Longrightarrow$

$$\int\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int\limits_{\tilde{D}} \underbrace{f\big(\vec{x}(\vec{v})\big)}_{=\tilde{f}(\vec{v})} \left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(v_1,\cdots,v_n)}\right| \mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_n$$

Speziell in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{\int\limits_D f(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\tilde{D}} \tilde{f}(\varrho,\vartheta,\varphi)\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}$$

<u>Bemerkung:</u> $\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ ist das angenäherte Volumen von D_i und wird in Math. B, S. 56 anschaulich bestimmt.

<u>Bsp. 8</u> Die Trägheitsmomente einer homogenen Kugel sind für alle Achsen durch den Mittelpunkt gleich. Es sei R = Kugelradius und Dichte $\varrho = 1$.

a) $$I_3 = \iiint\limits_{\|\vec{x}\|<R} \underbrace{(x_1^2+x_2^2)}_{\varrho^2\sin^2\vartheta} \underbrace{\mathrm{d}V}_{\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi} = \underbrace{\int\limits_{\varrho=0}^{R} \varrho^4\,\mathrm{d}\varrho}_{R^5/5} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi}_{2\pi} =$$

$$= \frac{2R^5\pi}{5}\cdot\int\limits_0^\pi \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2R^5\pi}{5}\left[-\cos\vartheta+\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]\Bigg|_{\vartheta=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{2R^5\pi}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8R^5\pi}{15}.$$

<u>Bemerkung:</u> Ein dreifaches Integral $\iiint_{\tilde{D}} f(v_1,v_2,v_3)\,\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3$ lässt sich genau dann als PRODUKT schreiben, wenn

1. $f(v_1,v_2,v_3) = f_1(v_1)\cdot f_2(v_2)\cdot f_3(v_3)$
   $\big($oben: $f_1(v_1)=\varrho^4$, $f_2(v_2)=\sin^3\vartheta$, $f_3\underbrace{(v_3)}_{=\varphi}=1\big)$ UND
2. das Gebiet $\tilde{D}$ ein Quader ist, d.h.
   $\tilde{D} = \{\vec{v} : a_1\le v_1\le b_1,\ a_2\le v_2\le b_2,\ a_3\le v_3\le b_3\}$
   (oben $a_1=0$, $b_1=R$ etc.)

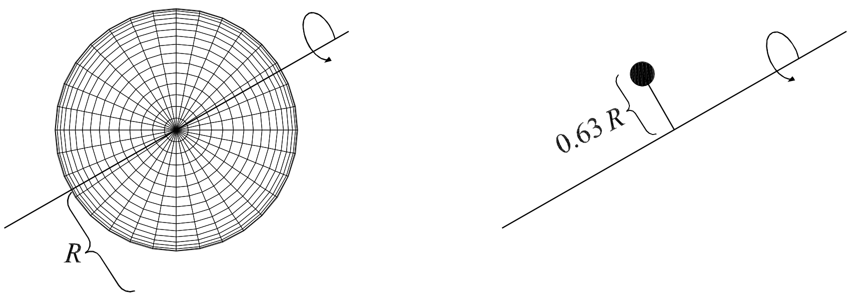
Beachte, dass $D = \big\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\|<R\big\}$ NICHT quaderförmig war.

b) Elegantere Berechnung mit Trick:

$$I_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{1}{3}\int\limits_D (\underbrace{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2}_{2\varrho^2}) \underbrace{\mathrm{d}V}_{\varrho^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi} =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^R \varrho^4 \,\mathrm{d}\varrho \int\limits_0^\pi \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{8R^5\pi}{15}.$$

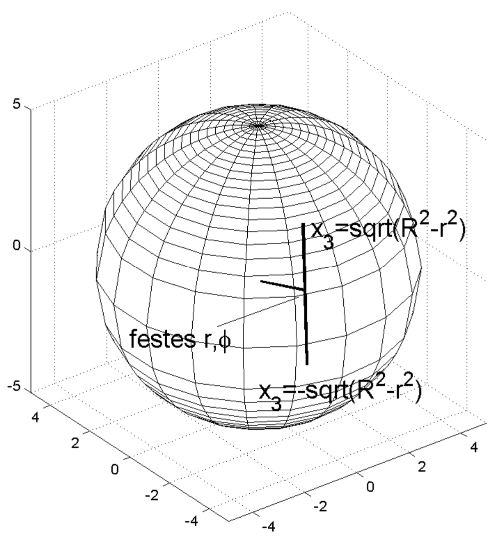
Weil M = Masse = Volumen = $\dfrac{4R^3\pi}{3} \implies I_3 = \dfrac{2}{5}MR^2$, d.h. es ist ebenso schwer die Kugel in Rotation zu versetzen, wie wenn ihre gesamte Masse konzentriert im Abstand $R \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0.63R$ von der Drehachse wäre.



c) Wenn man in Zylinderkoordinaten rechnet, so wird das Integral schwieriger:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \qquad\qquad \text{Kugel: } \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{r^2} + x_3^2 \le R^2 \iff |x_3| \le \sqrt{R^2 - r^2} \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Also: $\varphi = 0 \cdots 2\pi,\ r : 0 \cdots R,\ x_3 : -\sqrt{R^2 - r^2} \cdots \sqrt{R^2 - r^2}$



$$\Longrightarrow\ I_3 = \iiint \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{r^2}\ \underbrace{\mathrm{d}V}_{r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x_3} = \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}}_{2\pi}\ \int\limits_{r=0}^{R}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{x_3=-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}x_3}_{2\sqrt{R^2-r^2}}\Bigg) r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_{r=0}^{R} 2\sqrt{R^2-r^2}\cdot \underbrace{r^3\,\mathrm{d}r}_{r^2\cdot\ \underbrace{r\,\mathrm{d}r}_{=-\mathrm{d}t/2}} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{t=R^2}^{0} \sqrt{t}\cdot(R^2-t)\cdot(-\mathrm{d}t) =$$

$$\left\| \begin{array}{l} t = R^2 - r^2,\ r^2 = R^2 - t \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -2r \\ r = 0 \implies t = R^2, \\ r = R \implies t = 0 \end{array}\right.$$

$$= -2\pi\cdot\left(R^2\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_{t=R^2}^{0} = -2\pi\left(-\frac{2R^5}{3}+\frac{2R^5}{5}\right) = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

Man kann natürlich auch in einer anderen Integrationsreihenfolge rechnen, was hier vorteilhaft ist:

x_3 fest $\implies r \leq \sqrt{R^2 - x_3^2}$

$$\Longrightarrow\ I_3 = \int\limits_{x_3=-R}^{R}\ \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}}_{2\pi}\ \underbrace{\int\limits_{r=0}^{\sqrt{R^2-x_3^2}} r^3\,\mathrm{d}r}_{\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{R^2-x_3^2}}}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x_3 = 2\pi\int\limits_{x_3=-R}^{R}\frac{1}{4}(R^2-x_3^2)^2\,\mathrm{d}x_3 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 2\int\limits_{0}^{R}(R^4 - 2R^2x_3^2 + x_3^4)\,\mathrm{d}x_3 = \pi\left(R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5}\right) = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

24.10 DARSTELLUNGEN DURCH EINFACHE INTEGRALE

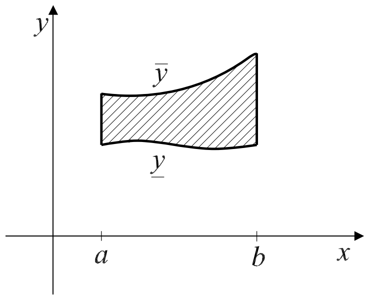
Wenn $\varrho = 1$ lassen sich viele Doppel-/Dreifachintegrale durch einfache Integrale ausdrücken.

A) Statische Momente von ebenen Flächen

Wenn D durch

$a \leq x \leq b,\ \underline{y}(x) \leq y \leq \overline{y}(x)$

gegeben ist,



so ist $$S_1 = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b x\big(\overline{y}(x) - \underline{y}(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

und $$S_2 = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} y \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{2}\big(\overline{y}(x)^2 - \underline{y}(x)^2\big)\,\mathrm{d}x$$

B) Trägheitsmomente von ebenen Flächen

Ebenso ist $$I_x = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\underline{y}}^{\overline{y}} y^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{3}(\overline{y}^3 - \underline{y}^3)\,\mathrm{d}x$$

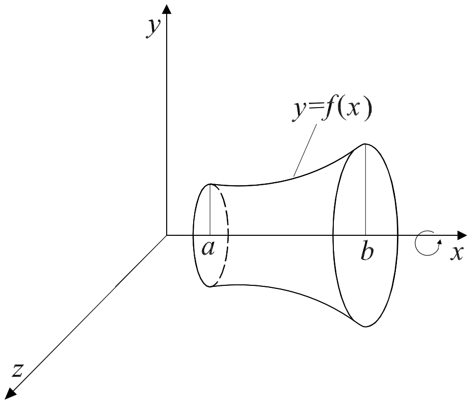
$$I_y = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\underline{y}}^{\overline{y}} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b x^2(\overline{y} - \underline{y})\,\mathrm{d}x$$

C) Statische Momente von Drehkörpern

Wenn der Drehkörper durch Drehung der Fläche $0 \leq y \leq f(x)$ um die x-Achse entsteht, so ist sein Schwerpunkt auf der x-Achse und in Zylinderkoordinaten folgt

$$S_{yz} = \int_{x=a}^{b} \iint_{y^2+z^2 \leq f(x)^2} x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=a}^{b} x \underbrace{\int_{r=0}^{f(x)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r}_{2\pi\frac{f(x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b x f(x)^2\,\mathrm{d}x$$



und somit $\vec{s} = \left(\int\limits_a^b xy^2\,\mathrm{d}x / \int\limits_a^b y^2\,\mathrm{d}x, 0, 0\right)$ (mit $y = f(x)$).

Auch ohne Dreifachintegrale erhält man S_{yz} mit einer Zerlegung in kleine Zylinder und einer Riemannsumme wie in 13.2. Ebenso wie in 13.5 geht das auch für Oberflächen von Drehkörpern. Dann ist

$$S_{yz} = 2\pi \int\limits_a^b xy\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

(In § 25 werden allgemeine Formeln angegeben für beliebige Flächen und $\varrho \neq 1$.)

D) Trägheitsmomente von Drehkörpern

Wieder folgt in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint (y^2+z^2)\,\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y^2+z^2\le f(x)^2} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int\limits_{x=a}^{b} 2\pi \int\limits_{r=0}^{f(x)} r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int\limits_a^b f(x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int\limits_a^b y^4\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Diese Formel entspricht der Rechnung bei der Kugel am Schluss von 24.9. Für die Oberfläche eines Drehkörpers erhalten wir (wie in C) $I_1 = 2\pi \int\limits_a^b y^3\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$.

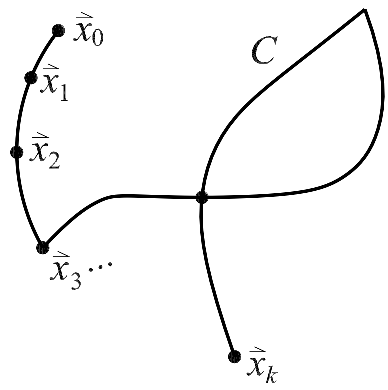
§25: Kurven- und Oberflächenintegrale

25.1 KURVENINTEGRALE 1. ART

C sei eine stückweise glatte Kurve im $\mathbb{R}^n$, d.h. mit höchstens endlich vielen Ecken und Überkreuzungen.

Problem:

Was ist ihre Masse M, wenn sie mit der Dichte $\varrho(\vec{x})$ belegt ist?



Lösung: Eine Zerlegung $Z = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k\}$ ist eine Folge von Punkten auf C, $\varphi(Z) = \max\big\{\|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\| : i = 1, \cdots, k\big\} \implies M = \lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} \varrho(\vec{x}_{i-1}) \cdot \|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\|$

Def. Wenn $f : C \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto f(\vec{x})$ stückweise stetig ist, so heißt $\lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} f(\vec{x}_{i-1}) \cdot \|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\|$ Kurvenintegral 1. Art und wird mit $\int\limits_C f(\vec{x})\,\mathrm{d}s$ bezeichnet.

Bemerkungen: 1) Wenn $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto \vec{x}(t)$ eine Parametrisierung von C ist, so ist $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$ und $\|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\| = \|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| \approx \|\dot{\vec{x}}(t_{i-1})\| \cdot (t_i - t_{i-1})$

$$\implies \boxed{\int\limits_C f(\vec{x})\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \underbrace{\|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s}}$$

2) Wie in § 24 werden wieder die statischen Momente und die Trägheitsmomente definiert. Z.B. im $\mathbb{R}^2$: $S_1 = S_y = \int\limits_C x\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}s$, $S_2 = \int\limits_C y\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}s$, $\vec{s} = \big(\frac{S_1}{M}, \frac{S_2}{M}\big)$, $I_x = \int\limits_C y^2\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}s$ etc.

Bsp. 1 Bestimme den Schwerpunkt einer homogenen Halbkreislinie!

Es sei $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0\big\}$

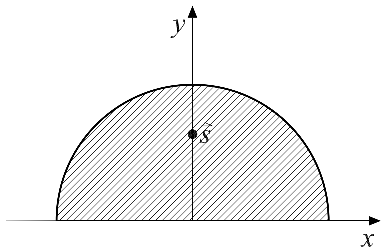
Parametrisierung: $\vec{x} = R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots \pi$,

$\mathrm{d}s = \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \left\|R \cdot \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right\| \mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}t$,

$\varrho(\vec{x}) = 1 \implies M = \int\limits_C \mathrm{d}s =$ Länge von $C = R\pi$,

$$S_2 = \int_C y \, \mathrm{d}s = \int_0^\pi R \sin t \cdot R \, \mathrm{d}t = 2R^2,$$

$$s_2 = \frac{S_2}{M} = \frac{2R^2}{R\pi} = \frac{2R}{\pi} \approx 0.64R.$$



Aus Symmetriegründen ist $S_1 = 0 = s_1$.

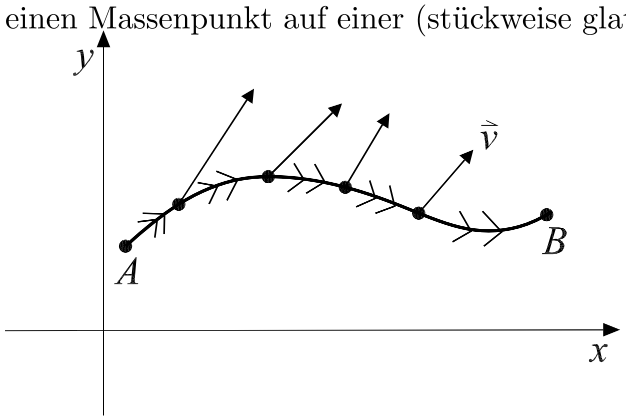
In $\vec{s}$ muss man stützen, wenn die Halbkreislinie auf einer gewichtslosen Halbkreisplatte aufgelegt wird.

Der Schwerpunkt liegt etwas höher als beim homogenen Halbkreis (für den $\vec{s} = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right) \approx (0, 0.42R)$), weil die Halbkreislinie im Vergleich zur Fläche im Schnitt höher liegt.

Bemerkung: In Polarkoordinaten ist $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, \mathrm{d}\varphi$ (vgl. 18.3) und daher gilt in Bsp. 1 $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}t$, da dort $r = R$ konstant, $t = \varphi$.

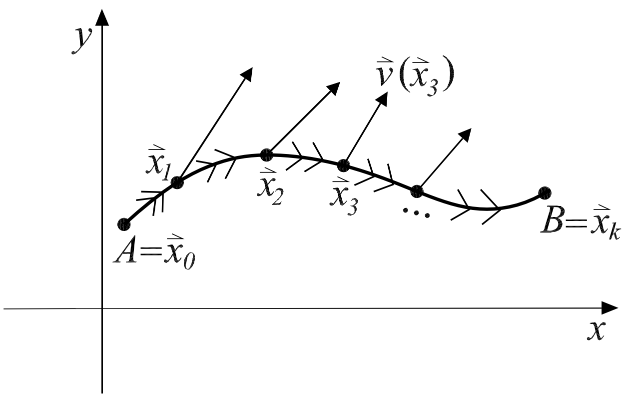
25.2 KURVENINTEGRALE 2. ART

Wir bewegen einen Massenpunkt auf einer (stückweise glatten) Kurve C im Kraftfeld $\vec{v}(\vec{x})$:



Problem: Welche Arbeit W wird geleistet?

Lösung: Wir zerlegen C in kleine, praktisch gerade Stücke.



$\varphi(Z) = \max\big\{\|\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}\| : \ i = 1, \cdots, k\big\}.$

Dann ist $W = \lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} \big\langle \underbrace{\vec{v}(x_{i-1})}_{\text{Kraft}}, \underbrace{\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}}_{\text{Weg}} \big\rangle$

<u>Def.</u> Dieser Grenzwert heißt <u>Kurvenintegral 2. Art</u> oder <u>Arbeitsintegral</u>.

<u>Schreibweisen:</u>

$$W = \int\limits_C \big\langle \vec{v}(\vec{x}), \mathrm{d}\vec{x} \big\rangle = \int\limits_C \big\langle \vec{v}(\vec{x}), \mathrm{d}\vec{s} \big\rangle = \int\limits_C v_1(\vec{x})\,\mathrm{d}x + v_2(\vec{x})\,\mathrm{d}y = \int\limits_C v_j(\vec{x})\,\mathrm{d}x_j \quad \text{(TSW)}$$

<u>Bemerkungen:</u> 1) Wenn die Kurve durch $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \vec{x}(t)$ parametrisiert ist, so ist $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$, $\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1} \approx \dot{\vec{x}}(t_{i-1}) \cdot (\underbrace{t_i - t_{i-1}}_{\mathrm{d}t})$ und daher

$$W = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t_{i-1})\big), \dot{\vec{x}}(t_{i-1}) \Big\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}) \ \text{ d.h.}$$

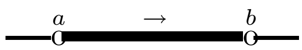
$$\boxed{\int\limits_C \big\langle \vec{v}(\vec{x}), \mathrm{d}\vec{x} \big\rangle = \int\limits_a^b \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t}$$

2) Alles gilt ebenso für Kurven im $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^n$.

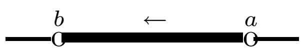
3) Beachte, dass W nicht von der Parametrisierung von C abhängt (d.h. davon wie schnell C durchlaufen wird). W hängt aber von der Durchlaufrichtung ab, d.h. C ist als <u>orientierte Kurve</u> gegeben, d.h. Anfangspunkt A und Endpunkt B sind bekannt. Bei umgekehrter Orientierung ergibt sich $-W$. Wenn die Kurve geschlossen ist, d.h. $A = B$, schreibt man oft $\oint \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$. Es ist dann zwar unerheblich, wo man $A = B$ auf C wählt, aber die Durchlaufrichtung muss bekannt sein.

4) Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist eigentlich ein Kurvenintegral 2. Art über

die Kurve {



falls $a < b$

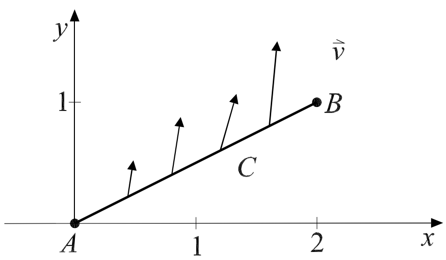
bzw. 

falls $a > b$ } im $\mathbb{R}^1$.

Daher entfällt bei Substitution in einer Variablen der Betrag, vgl. 24.5.

<u>Bsp. 2</u> $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$,

$C =$ gerade Strecke von $\vec{0}$ nach $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



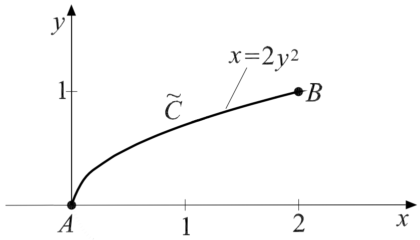
$$W = \int_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

<u>Berechnung:</u> Parametrisiere C z.B. durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t/2 \end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots 2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow W = \int_{t=0}^{2} \Big\langle \underbrace{\vec{v}(\vec{x}(t))}_{\binom{t^2/2}{3t/2}}, \underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{\binom{1}{1/2}} \Big\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{4} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8} \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = 2\frac{5}{6}.$$

Was ergibt sich, wenn wir auf einem anderen Weg von A nach B gehen, z.B. auf dem Parabelstück $x = 2y^2$?



<u>Berechnung:</u> Parametrisiere $\tilde{C}$ z.B. durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t \end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots 1$

$$\Longrightarrow \tilde{W} = \int_{t=0}^{1} \Big\langle \vec{v}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 2t^2 + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (8t^4 + 2t^2 + t)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 2\frac{23}{30}.$$

Auf dem Weg $\tilde{C}$ wird also ein bißchen weniger Arbeit geleistet. (In § 26 werden wir mit dem Satz von Green die Differenz $W - \tilde{W} = \dfrac{1}{15}$ kontrollieren.)

Wir untersuchen als nächstes, für welche Vektorfelder $\vec{v}$ die Arbeit W vom Weg unabhängig ist und nur von den Endpunkten A, B der Kurve C abhängt.

25.3 <u>DAS POTENTIAL</u>

<u>Erinnerung</u> (vgl. 21.2): Das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ heißt <u>konservativ</u> bzw. <u>hat ein Potential</u> $\Longleftrightarrow \exists f : \vec{v} = \nabla f$.

Es gilt immer $\vec{v} = \nabla f \Longrightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ (d.h. $\vec{v}$ <u>wirbelfrei</u>) und in konvexen Gebieten im $\mathbb{R}^3$ gilt auch $\Longleftarrow$. Im $\mathbb{R}^n$ ist statt $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ die Bedingung $\forall i, j : \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ zu nehmen.

<u>Satz</u> $\vec{v}(\vec{x})$ sei ein stetiges Vektorfeld für $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

1) $\vec{v}$ konservativ, d.h. $\exists f : \vec{v} = \nabla f$;

2) $\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von C ab und zwar ist (mit f in 1)

$$\boxed{\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = f(B) - f(A)}$$

Daher Schreibweise: $\int\limits_A^B \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$;

3) für geschlossene Kurven ist $\oint\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = 0$.

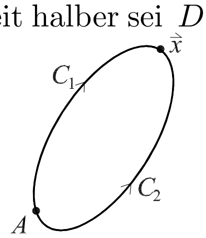
<u>Beweis:</u> 1) $\Longrightarrow$ 2): Wenn $\vec{v} = \nabla f$ und $\vec{x}(t)$, $t \in [a, b]$, eine Parametrisierung von C ist, so gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle &= \int\limits_a^b \underbrace{\Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad\quad = \left.\sum_{i=1}^n \underbrace{v_i\big(\vec{x}(t)\big)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\vec{x}(t)\right)} \cdot \dot{x}_i(t) \right\} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\vec{x}(t)\big) \\
&= \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\vec{x}(t)\big)\,\mathrm{d}t = f\big(\vec{x}(t)\big)\Big|_{t=a}^b = f(B) - f(A),
\end{aligned}$$

wobei $\left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{x}(a) \\ \vec{x}(b) \end{matrix}\right\}$ Anfangs- bzw. Endpunkt von C sind.

2) $\Longrightarrow$ 3): $A = B \Longrightarrow \oint\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = f(B) - f(A) = 0$,

3) $\Longrightarrow$ 1): $A \in D$ sei fixiert. Wir definieren $f(\vec{x}) := \int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$, wobei C irgendeine Kurve in D, von A nach $\vec{x}$ ist. (Der Einfachheit halber sei D zusammenhängend.) Es ist egal, welches C wir nehmen, denn wenn



so ist $\int\limits_{C_1} - \int\limits_{C_2} = \oint\limits_{C_1 \cup - C_2} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = 0$ nach 3).

Wenn wir die Gerade von $\vec{x}$ nach $\tilde{\vec{x}} = (x_1 + \epsilon, x_2, \cdots)$ durch $\vec{x}(t) = (x_1 + t, x_2, \cdots)$ parametrisieren, so folgt $f(\tilde{\vec{x}}) - f(\vec{x}) = \int\limits_0^\epsilon \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}} \Big\rangle \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^\epsilon v_1\big(\vec{x}(t)\big) \, \mathrm{d}t$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\tilde{\vec{x}}) - f(\vec{x})}{\epsilon} = \underbrace{\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\int\limits_0^\epsilon v_1\big(\vec{x}(t)\big) \, \mathrm{d}t}_{F(\epsilon)}}_{F'(0)} \overset{\substack{\text{Hauptsatz} \\ \int \text{rechnung}}}{=} v_1(\vec{x})$$

und daher $\nabla f = \vec{v}$. □

Ergebnis: Für ein konservatives Kraftfeld $\vec{v}$ ergibt sich also $f(\vec{x})$ als Arbeit, die geleistet wird, wenn von einem festen Punkt A aus auf irgendeiner Kurve C nach $\vec{x}$ gegangen wird. In der Physik wird $U = -f$ potentielle Energie genannt. Es gilt also $U(\vec{x}) = -\int\limits_A^{\vec{x}} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$, $\nabla U = -\vec{v}$. (Vgl. auch 21.2).

Z.B. im Gravitationsfeld einer festen Masse M in $\vec{0}$ ist $\vec{v}(\vec{x}) = -G \dfrac{mM\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ (mit $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\,\mathrm{sec}^2}\right]$) und $U(\vec{x}) = -G\dfrac{mM}{\|\vec{x}\|}$ bzw. in linearer Näherung auf der Erde $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$, $U(\vec{x}) = mgx_3$.

Beachte, dass U (im Gegensatz zur kinetischen Energie) nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Man kann also nur Differenzen der potentiellen Energie messen!

Bsp. 3 $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \end{pmatrix}$ hat ein Potential, da $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ (vgl. 21.2, p. 47).

Wir bestimmen f als Arbeitsintegral: $f(\vec{x}) = \int\limits_{\vec{0}}^{\vec{x}} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$.

Es sei C die gerade Strecke von $\vec{0}$ nach $\vec{x}$, d.h. $\vec{x}(t) = t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$.

(Vorsicht: $\vec{x}$ ist fix.)

$$\Longrightarrow\ f(\vec{x}) = \int\limits_{t=0}^{1} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle\, \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{t=0}^{1} \left\langle \begin{pmatrix} ty\cos(t^2xy) \\ ty + tx\cos(t^2xy) \\ \mathrm{e}^{tz} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{t=0}^{1} \big(2txy\cos(t^2xy) + ty^2 + z\mathrm{e}^{tz}\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left(\sin(t^2xy) + \frac{t^2y^2}{2} + \mathrm{e}^{tz}\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = \sin(xy) + \frac{y^2}{2} + \mathrm{e}^z - 1.$$

25.4 OBERFLÄCHENINTEGRALE 1. ART

Eine Fläche D im $\mathbb{R}^3$ ist meist durch eine Gleichung $F(x,y,z) = 0$ (und evtl. verschiedene Ungleichungen) gegeben. Eine Parameterdarstellung einer Fläche benötigt zwei Parameter und hat also die Form

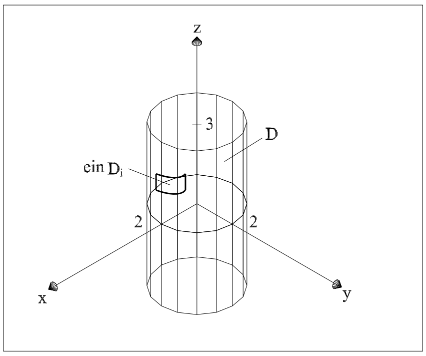
$$\underbrace{(u,v)}_{\in\tilde{D}} \longmapsto \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Bsp. 4 $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 3$ gibt im $\mathbb{R}^3$ einen Zylinder.

Wir können ihn parametrisieren durch

$$u = \varphi,\ v = z, \text{ d.h. } \vec{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\underbrace{0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 3}_{\tilde{D}}.$$



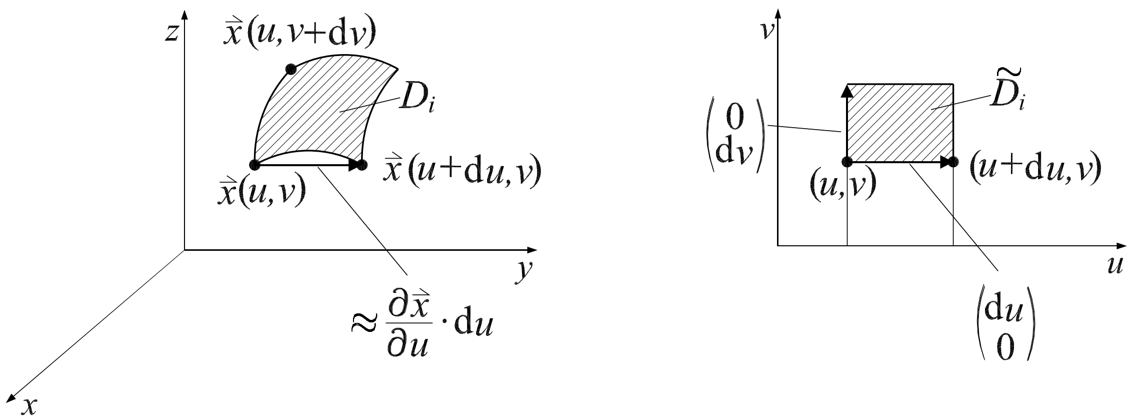
Es sei nun auf D eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ sei eine Zerlegung von D in viele kleine praktisch ebene Stücke und

$UD(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot$ Fläche von D_i, $OD(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{f}_i \cdot$ Fläche D_i wie in 24.1.

<u>Satz und Def.</u> Wenn D beschränkt und genügend glatt ist, und f stetig ist, so gilt $\lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} UD(Z) = \lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} OD(Z)$ und heißt <u>Oberflächenintegral 1. Art</u> und wird mit $\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma$ bezeichnet.

<u>Bemerkung:</u> Wenn D ein Gebiet in der xy-Ebene ist, so erhalten wir das gewöhnliche Doppelintegral (24.1), d.h. dann ist $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

<u>Berechnung:</u> D sei parametrisiert durch $\vec{x}(u,v)$



Einem kleinen Rechteck $\tilde{D}_i$ mit Fläche $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ entspricht ein krummes parallelogrammähnliches Flächenstück D_i und

$$\begin{aligned}
\vec{x}(u+\mathrm{d}u,v) &= \vec{x}\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ 0 \end{pmatrix}\right) \approx \vec{x}(u,v) + J \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \vec{x}(u,v) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \vec{x}(u,v) + \mathrm{d}u \cdot \begin{pmatrix} \partial x/\partial u \\ \partial y/\partial u \\ \partial z/\partial u \end{pmatrix} = \vec{x}(u,v) + \mathrm{d}u \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Die Kantenvektoren von D_i sind also in 1. Näherung $\mathrm{d}u \cdot \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $\mathrm{d}v \cdot \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial v}$.
Die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms ist
$\mathrm{d}u\mathrm{d}v \cdot \left\| \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| \approx$ Fläche von D_i. Daher folgt

$$\boxed{\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\tilde{D}} f\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}\sigma}}$$

Bsp. 4 Es sei D der Zylinder wie oben und $\varrho(\vec{x}) = z^2 \implies$ Masse $= M = \iint\limits_D z^2 \,\mathrm{d}\sigma$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathrm{d}\sigma = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} \right\| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \left\| \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$$

$$\implies M = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{3} z^2 \cdot 2\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = 2\pi \cdot 2 \cdot \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^3 = 36\pi$$

Das Moment bzgl. der xy-Ebene wäre

$$S_3 = S_{xy} = \iint\limits_D z^2 \cdot z \,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=6}^{3} z^3 \cdot 2\,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = 2\pi \cdot 2 \cdot \left. \frac{z^4}{4} \right|_0^3 = 81\pi$$

$\implies s_3 = \dfrac{S_3}{M} = \dfrac{81}{36} = \dfrac{9}{4} = 2.25$ und $\vec{s} = (0, 0, 2.25)$ liegt über der Mitte, da die Dichte mit z stark wächst.

Bemerkungen: 1) Speziell, wenn man x, y als Parameter verwendet (beim Zylinder oben nicht möglich), d.h. D durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ gegeben ist, so ist

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}, \ \mathrm{d}\sigma = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

(Vgl. $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$ bei Kurven.)

Auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ hingegen können ϑ, φ als Parameter verwendet werden

$$\implies \vec{x}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho \sin\vartheta \cos\varphi \\ \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ \varrho \cos\vartheta \end{pmatrix}, \ \varrho \text{ fest.}$$

Wegen der Orthogonalität der Kugelkoordinaten gilt

$$\left. \underbrace{\mathrm{d}V = \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\varrho}_{\varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi} \right\} \implies \mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi,$$

was man auch direkt nachrechnet: $\left\| \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta} \times \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right\| = \varrho^2 \sin\vartheta$

2) Im $\mathbb{R}^2$ spannen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ die Fläche $\left|\det(\vec{v}, \vec{w})\right|$ auf und das liefert die Substitutionsformel in 24.5. Im $\mathbb{R}^n$ spannen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ die Fläche $\sqrt{\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle^2}$ auf und daher gilt allgemein

$$\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\tilde{D}} f\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \sqrt{\left\|\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right\rangle^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

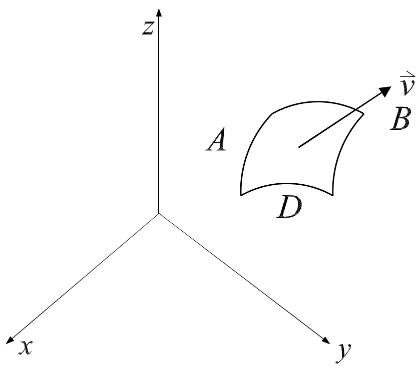
Noch allgemeiner, wenn D eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ ist, parametrisiert durch $\vec{x}(\vec{v}) = \vec{x}(v_1, \cdots, v_m)$, so ist

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\det\Bigg(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial v_j}\frac{\partial x_i}{\partial v_k}\right)_{j,k=1,\cdots,m}}_{m\times m\text{-Matrix}}\Bigg)}\,\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_m.$$

25.5 <u>OBERFLÄCHENINTEGRALE 2. ART</u>

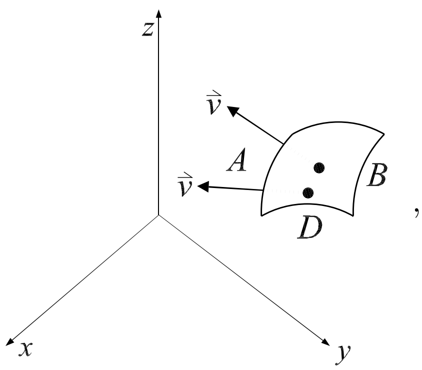
D sei eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ [m/sec] das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung.

<u>Problem:</u> Wieviel Volumen fließt pro sec durch D von einer Seite A zur anderen Seite B?



Hier ergibt sich etwas > 0.

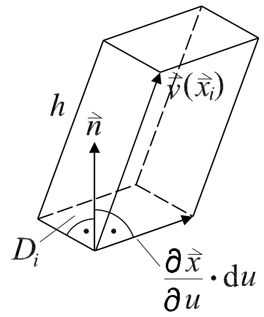
Wenn hingegen,



,

so rechnen wir den Durchfluss von A nach B negativ.

Ausschnitt:



Parallelepiped P

$\|\vec{n}\| = 1$

$\vec{n}$ stehe $\perp$ auf D_i in $\vec{x}_i$, $\|\vec{n}\| = 1$, $\vec{n}$ weise von A nach B. Pro Sekunde fließt dann von A nach B

$$\begin{aligned} \pm \text{ Volumen von } P = &\text{ Grundfläche } \cdot \pm \text{ Höhe} \\ \approx &\text{ Fläche von } D_i \cdot \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \end{aligned}$$

<u>Def.</u> D sei eine <u>orientierte Fläche</u> im $\mathbb{R}^3$, d.h. $\forall \vec{x} \in D$ ist ein Normaleneinheitsvektor (von den zwei möglichen) $\vec{n}(\vec{x})$ gewählt, sodass $\vec{n}(\vec{x})$ sich stetig ändert, $\vec{v}$ sei ein Vektorfeld auf D, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ Zerlegungen, $\vec{x}_i \in D_i$ beliebig.

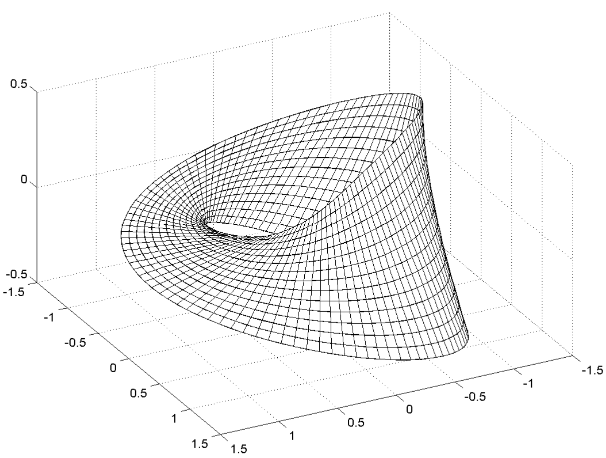
Dann heißt

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\langle \vec{v}(\vec{x}_i), \vec{n}(\vec{x}_i) \rangle}_{= f(\vec{x}_i)} \cdot \text{ Fläche von } D_i$$

<u>Oberflächenintegral 2. Art</u> bzw. <u>Durchflussintegral</u> von $\vec{v}$.

Nach 25.4 ist es $\displaystyle\iint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$.

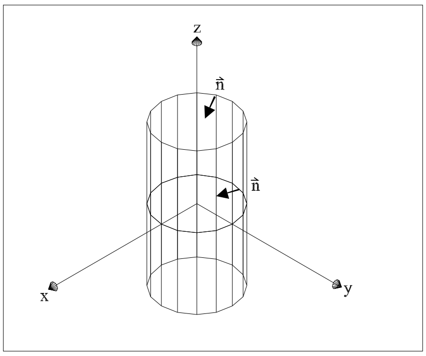
<u>Bemerkung:</u> Bei umgekehrter Orientierung ergibt sich das Negative. Vorsicht: Es gibt auch Flächen, die gar nicht orientierbar sind, z.B. ein Möbiusband.



Berechnung: $\vec{x}(u,v)$ parametrisiere D, wir schreiben kurz $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ statt $\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial u}, \dfrac{\partial\vec{x}}{\partial v}$. Offenbar sind $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ tangential an D. Im Allgemeinen sind sie linear unabhängig und daher ist $\vec{n} = \pm\dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}$, wobei $\pm$ je nach Wahl der Orientierung. Wegen $\mathrm{d}\sigma = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ folgt

$$\boxed{\iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\tilde{D}} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(u,v)\big), \pm\vec{x}_u \times \vec{x}_v \Big\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

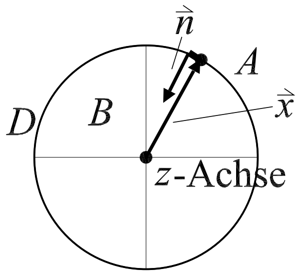
Bsp. 5 D sei der Zylinder aus Bsp. 4 und $\vec{n}$ weise zur z-Achse.



Nach Bsp. 4 ist $\vec{x}(\varphi,z) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\| = 2$, $\dfrac{\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z}{\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\|} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, hier ist also $\vec{n} = -\dfrac{\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z}{\|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_z\|} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das erhält man natürlich auch direkt:



Wenn z.B. $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ z^2 \\ \mathrm{e}^{-yz} \end{pmatrix} \implies \iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle \underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{=2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z}$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \left\langle \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ z^2 \\ \mathrm{e}^{-2z\sin\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot 2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{3} (4\cos^2\varphi - 2z^2\sin\varphi)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (12\cos^2\varphi - \underbrace{18\sin\varphi}_{\to 0})\,\mathrm{d}\varphi = 12\pi.$$

Die Strömung transportiert also pro sec 12π VE von A nach B, d.h. hinein.

Wenn hingegen $\vec{w} = \begin{pmatrix} +x \\ z^2 \\ \mathrm{e}^{-yz} \end{pmatrix}$, so ist $\iint\limits_D \langle \vec{w}, \vec{u}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = -12\pi$, d.h. die Strömung $\vec{w}$ transportiert pro sec -12π VE von A nach B, d.h. $+12\pi$ VE von B nach A.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Wenn D der Rand eines endlichen Körpers K ist, so schreibt man oft ∂K statt D und $\oiint\limits_{\partial K}$ statt $\iint\limits_D$. Meist wird ∂K so orientiert, dass $\vec{n}$ von K nach außen weist. Es sei z.B. $K = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| \leq R\}$ (Kugel) $\Longrightarrow D = \partial K = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| = R\}$ und $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{R}$. Wenn z.B. $\vec{v} = \vec{x}$, so folgt

$$\oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \oiint\limits_D \underbrace{\left\langle \vec{x}, \frac{\vec{x}}{R} \right\rangle}_{\frac{\|\vec{x}\|}{R} = R} \mathrm{d}\sigma = R \oiint\limits_D \mathrm{d}\sigma = R \cdot \text{Kugeloberfläche}$$

$= R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$ (Kontrolle: Satz von Gauß, § 26)

2) Tabelle:

	$\int$ 1. Art (nicht or.)	$\int$ 2. Art (orientierte Mfkt.)
Kurven im $\mathbb{R}^n$	$\int\limits_C f(\vec{x})\,\mathrm{d}s$	$\int\limits_C \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$
Flächen im $\mathbb{R}^3$	$\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma$	$\iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma$
Allgemein: m-dim. Mfkt. im $\mathbb{R}^n$	$\int\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma$ (s. S. 134)	$\int\limits_D \omega$

Rechts unten ist D eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit (d.h. die Reihenfolge der Parameter $v_1, \cdots, v_m$ ist geeignet) und in diesen $\omega = g(\vec{v})\,\mathrm{d}v_1 \cdots \mathrm{d}v_m$. In den ursprünglichen $x_1, \cdots, x_m$-Koordinaten ist ω eine "m-Form", d.h. $\omega = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_m}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}$. Die Umrechnung erfolgt mit den Regeln $\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial v_1}\,\mathrm{d}v_1 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial v_m}\,\mathrm{d}v_m$ und $\mathrm{d}v_i \wedge \mathrm{d}v_j = -\mathrm{d}v_j \wedge \mathrm{d}v_i$ (speziell $\mathrm{d}v_i \wedge \mathrm{d}v_i = 0$).

Die Einordnung von Durchflussintegralen in diesen Formalismus geht so: Bei richtiger Reihenfolge von u, v ist $\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} y_u z_v - y_v z_u \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$; andererseits ist $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = (y_u\,\mathrm{d}u + y_v\,\mathrm{d}v) \wedge (z_u\,\mathrm{d}u + z_v\,\mathrm{d}v) = (y_u z_v - y_v z_u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ etc. $\Longrightarrow \iint\limits_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D v_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - v_2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + v_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

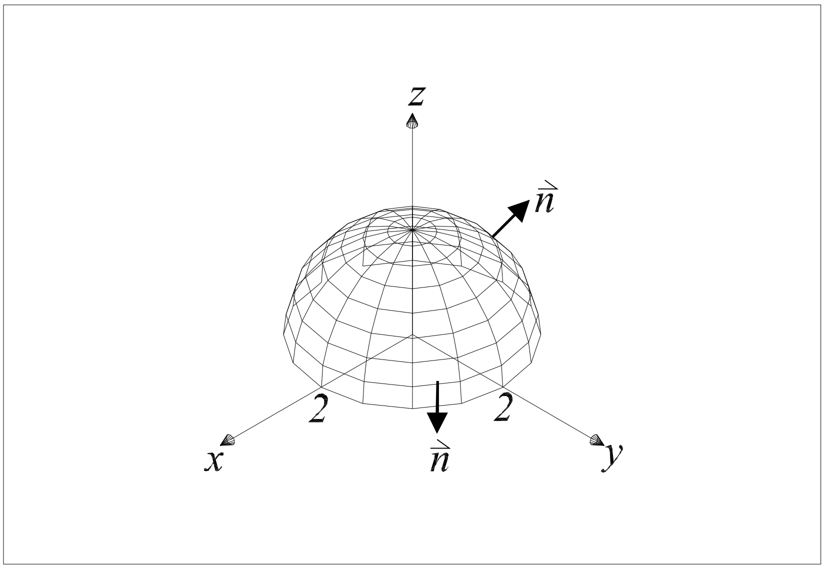
§26: Die Integralsätze

26.1 DER SATZ VON GAUSS

K sei ein endliches Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit stückweise glatter Randfläche ∂K. Dann ist ∂K orientierbar und wir wählen $\vec{n}$ so, dass $\vec{n}$ von K nach außen zeigt. Das Vektorfeld $\vec{v}$ sei in ganz K definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt der

Satz von Gauß
$$\boxed{\oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V}$$

Bsp. 1 a) $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ und $K =$ "obere Halbkugel mit Radius 2" d.h.
$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| \leq 2, z \geq 0 \right\}$.



Hier ist $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3 \Longrightarrow \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_{K} 3 \, \mathrm{d}V =$

$= 3 \cdot$ Volumen von $K = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4 \cdot 2^3 \pi}{3} = 16\pi$.

∂K besteht aus 2 Teilen:

$$\partial K = \begin{cases} D_1 = & \text{Halbkugelfläche } \|\vec{x}\| = 2,\ z \geq 0 \\ D_2 = & \text{Grundkreis } x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0 \end{cases}$$

In D_1 ist $\vec{n} = \dfrac{1}{2}\vec{x}$

$$\iint\limits_{D_1} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} \underbrace{\left\langle \vec{x}, \frac{\vec{x}}{2} \right\rangle}_{\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2 = 2} \mathrm{d}\sigma = 2 \cdot \text{ Oberfläche von } D_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2^2 \pi = 16\pi.$$

In D_2 ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \iint\limits_{D_2} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = 0$$

$$\Longrightarrow \oiint\limits_{K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = 16\pi = \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V$$

b) Wenn z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (konstantes Vektorfeld), so ist $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

$$\Longrightarrow \oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint\limits_{K} 0 \, \mathrm{d}V = 0.$$

Kontrolle: $\displaystyle \iint\limits_{D_1} \langle \underbrace{\vec{v}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overbrace{\vec{n}}^{\frac{1}{2}\vec{x}} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} \frac{x + 2y + 3z}{2} \, \mathrm{d}\sigma =$

(Kugelkoordinaten: $x = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi$, etc., $\mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \sin \vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$)

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} (2 \sin \vartheta \overset{0}{\cancel{\cos}\,\varphi} + 4 \sin \vartheta \overset{0}{\cancel{\sin}\,\varphi} + 6 \cos \vartheta) \cdot 2^2 \sin \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} 12 \sin \vartheta \cos \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \cdot 6 \sin^2 \vartheta \Big|_0^{\pi/2} = 12\pi$$

$$\iint\limits_{D_2} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = -3 \iint\limits_{D_2} \mathrm{d}\sigma \; = -3 \cdot \text{Fläche von } D_2$$

$= -3 \cdot 4\pi = -12\pi$ und daher $\displaystyle \oiint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = 0.$

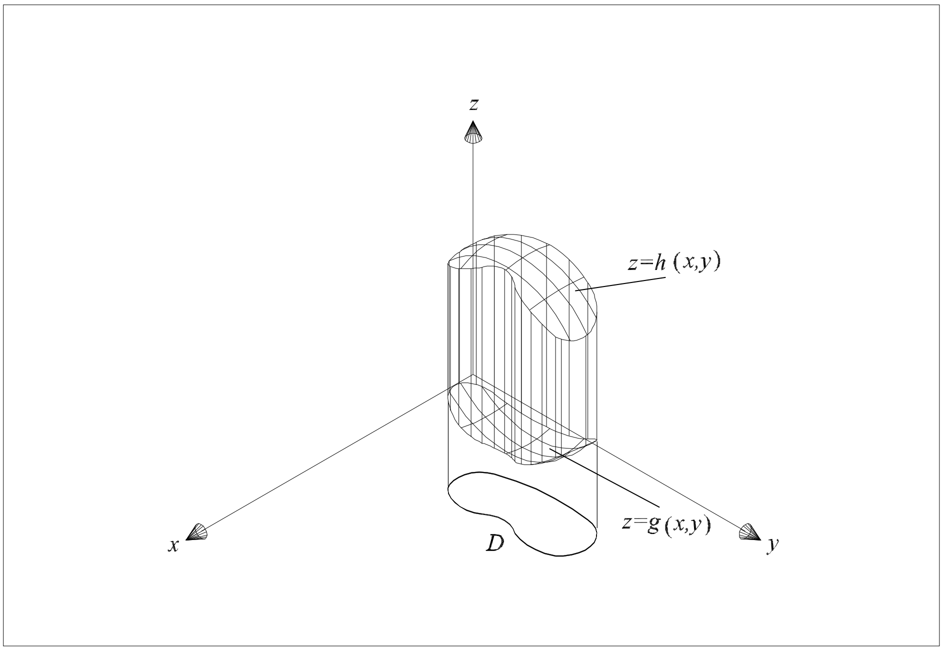
Beweis des Satzes von Gauß

Wir können $\vec{v}$ zerlegen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$; es genügt einen, z.B. den letzten Summanden zu betrachten und zu zeigen

$$\iiint\limits_{K} \frac{\partial v_3}{\partial z} \, \mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial K} v_3 \cdot n_3 \, \mathrm{d}\sigma$$

(Für die anderen 2 Summanden geht alles analog.) K sei zylindrisch, d.h. von der Form $(x,y) \in D,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)$

(Praktisch jeder Körper lässt sich in solche zylindrische Stücke zerlegen.)



Es gibt 3 Randflächen:

1) Deckel: $z = h(x,y),\ (x,y) \in D$

2) Mantel: $(x,y) \in C = \partial D,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)$

3) Boden: $z = g(x,y),\ (x,y) \in D$

Oben bzw. unten (in 1) bzw. 3)) ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \text{ bzw. } g \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma &= \pm \frac{\partial \vec{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x h \text{ bzw. } \partial_x g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y h \text{ bzw. } \partial_y g \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pm \begin{pmatrix} -\partial_x h \text{ bzw. } -\partial_x g \\ -\partial_y h \text{ bzw. } -\partial_y g \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ n_3\,\mathrm{d}\sigma = \pm \mathrm{d}x\mathrm{d}y \begin{cases} \text{oben, d.h. in 1)} \\ \text{unten, d.h. in 3)} \end{cases}$$

Am Mantel (d.h. in 2)) ist $n_3 = 0$.

Zusammen: $\displaystyle \oiint_{\partial K} v_3 n_3\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \Big[v_3\big(x,y,h(x,y)\big) - v_3\big(x,y,g(x,y)\big) \Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_D \Big(\int\limits_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_K \frac{\partial v_3}{\partial z}\,\mathrm{d}V. \qquad \square$$

26.2 DER SATZ VON GREEN

Der Satz von Gauß gilt (mit demselben Beweis) in allen Dimensionen, d.h.

$$\oint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_K \operatorname{div} \vec{v}\,\mathrm{d}V$$

wobei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}) \end{pmatrix},\ \operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n},$

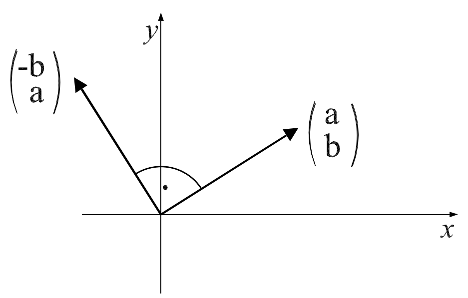
$\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm \vec{x}_{u_1} \times \cdots \times \vec{x}_{u_{n-1}} \cdot \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}$ (vgl. Lin. Alg., § 6C, p. 73) bzw. $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma = \pm\det(\vec{x}_{u_1}, \cdots, \vec{x}_{u_{n-1}}, \vec{v})\,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}$ für eine Parametrisierung $\vec{x}(u_1, \cdots, u_{n-1})$ von ∂K. (Im $\mathbb{R}^n$ schreibt man nur 1 Integral, s. S. 119).

Spezialfälle: 1) $n = 3$, s. 26.1

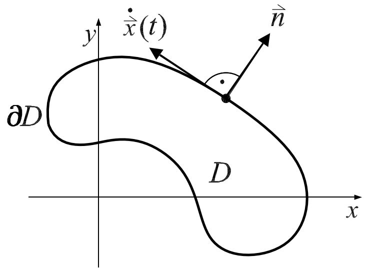
2) $n = 1 \implies \vec{v}(\vec{x}) = f(x),\ \operatorname{div}\vec{v} = f',\ K = [a,b],\ \partial K = \{a,b\},\ \oint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma = f(b) - f(a)$, d.h. der Satz von Gauß ist in 1 Dimension der Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

3) $n = 2$. Im $\mathbb{R}^2$ ist $\times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, vgl. Lin. Alg. S. 73, und $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} > 0$, d.h. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sind positiv orientiert:



Wir schreiben den Satz von Gauß für $w = \begin{pmatrix} w_1(x,y) \\ w_2(x,y) \end{pmatrix}$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$ an $\implies$



$\Longrightarrow \iint\limits_D \operatorname{div}\vec{w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{\partial D} \langle\vec{w},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$. Offenbar ist $\operatorname{div}\vec{w} = \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2}{\partial y}$. Wenn ∂D durch $\vec{x}(t)$ so parametrisiert ist, dass es im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, so ist $\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\times\dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix}\dot{y}(t)\\ -\dot{x}(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t$, weil $\dot{\vec{x}},\vec{n}$ negativ orientiert sind $\Longrightarrow$

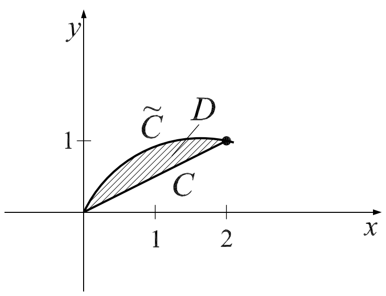
$$\int\limits_a^b \underbrace{\underbrace{\left\langle \vec{w}\big(\vec{x}(t)\big), \begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\end{pmatrix}\right\rangle}_{w_1\dot{y}-w_2\dot{x}}\mathrm{d}t}_{w_1\,\mathrm{d}y - w_2\,\mathrm{d}x} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Wir setzen $v_1 = -w_2$ und $v_2 = w_1 \Longrightarrow$

$$\boxed{\oint\limits_{\partial D}\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle = \oint\limits_{\partial D} v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Dies nennt man den Satz von Green. Beachte, dass ∂K im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden muss, was man manchmal mit $\circlearrowleft\!\!\!\!\int$ andeutet.

Bsp. 2 Es sei $D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ 2y^2\le x\le 2y\big\}$ und $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix}xy\\ x+y\end{pmatrix}$.



(vgl. S. 127)

$$\int\limits_C\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle - \int\limits_{\tilde{C}}\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle = \oint\limits_{\partial D}\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle \overset{\text{Green}}{=} \iint\limits_D\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (1-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{y=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{x=2y^2}^{2y} (1-x)\,\mathrm{d}x \Bigg)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{y=0}^{1} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=2y^2}^{2y} \mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(2y - \frac{(2y)^2}{2} - \left(2y^2 - \frac{(2y^2)^2}{2} \right) \right) \mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{1} (2y - 4y^2 + 2y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \quad \text{in Übereinstimmung mit S. 128.}$$

<ins>Bemerkung:</ins> Umgekehrt erlaubt es der Satz von Green Flächen, statische Momente sowie Trägheitsmomente von D durch Kurvenintegrale 2. Art über ∂D auszudrücken:

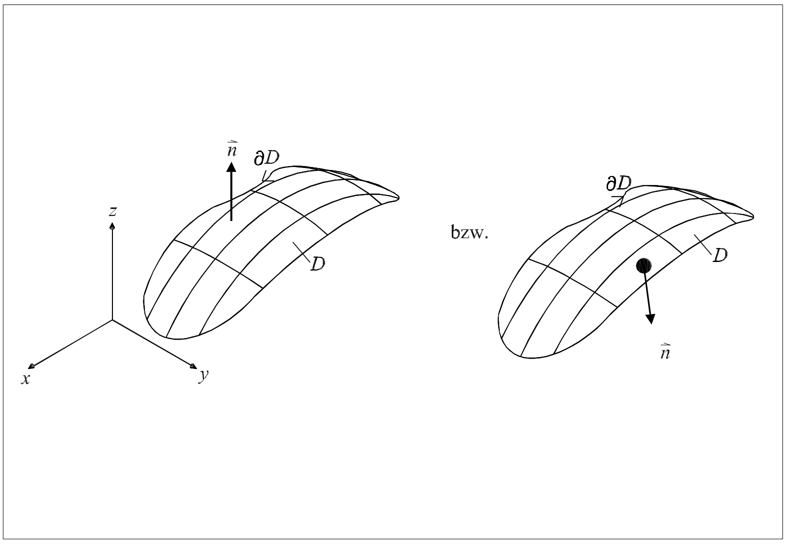
$$\begin{aligned}
F &= \iint\limits_{D} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} y\,\mathrm{d}x \\
S_1 &= \iint\limits_{D} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} xy\,\mathrm{d}x \\
S_2 &= \iint\limits_{D} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} xy\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x \\
I_x &= \iint\limits_{D} y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &&= \oint\limits_{\partial D} xy^2\,\mathrm{d}y = -\oint\limits_{\partial D} \frac{y^3}{3}\,\mathrm{d}x \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

26.3 <ins>DER SATZ VON STOKES</ins>

Der Satz von Gauß ist selber ein Spezialfall des allgemeinen Satzes von Stokes $\int\limits_{D} \mathrm{d}\omega = \oint\limits_{\partial D} \omega$ für eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit D mit Rand ∂D und eine $(m-1)$-Form ω. Wenn D eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist und $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ergibt sich daraus der <ins>(spezielle) Satz von Stokes</ins>

$$\boxed{\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \iint\limits_{D} \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma}$$

Dabei ist $D \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche, und die Randkurve ∂D wird nach der Korkenzieherregel orientiert:



<u>Bemerkungen:</u> 1) Aus dem speziellen Satz von Stokes erhalten wir den Satz von Green so als Spezialfall: $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$, $D \subset \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

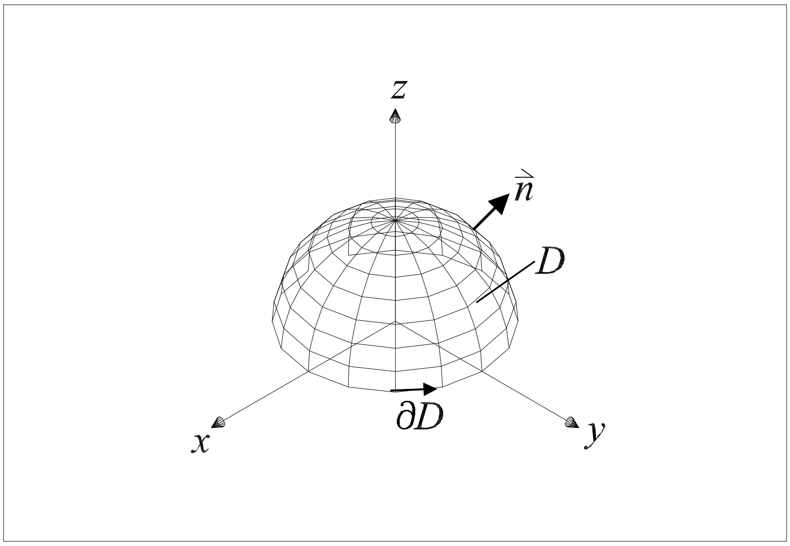
$\Longrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$, $\vec{n}\, \mathrm{d}\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und das liefert den Satz von Green. Somit:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{Gauß} \arrow[dr, "n=2"] & \\
\text{allg. Stokes} \arrow[ur, "m=n"] \arrow[dr, "m=2" ', "n=3" '] & & \text{Green} \\
 & \begin{array}{c}\text{spez.}\\ \text{Stokes}\end{array} \arrow[ur, "D\subset\mathbb{R}^2" ', "\vec{v}\text{ speziell}" '] &
\end{tikzcd}$$

2) <u>Zusammenstellung</u>

	Randintegral	Eine Integration mehr dafür $\vec{v}$ differenziert
Gauß	$\oint\limits_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \,\mathrm{d}\sigma \quad =$	$\int\limits_{K} \operatorname{div} \vec{v}\, \mathrm{d}V$
Green	$\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \quad =$	$\iint\limits_{D} \left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
Stokes	$\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \quad =$	$\iint\limits_{D} \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$

Bsp. 3 D sei die Halbkugel $\|\vec{x}\| = 1,\ z \geq 0$. Dann ist $\partial D =$ "Rand des Einheitskreises" $= \{\vec{x} : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$. Wenn wir ∂D im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, so muss $\vec{n}$ nach oben zeigen, d.h. $n_3 > 0$. Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ \cos z \end{pmatrix}$.



a) Berechnung von $\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$:

Parametrisierung: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t = 0 \cdots 2\pi$

$$\Longrightarrow \oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \int\limits_0^{2\pi} \Big\langle \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = -\pi$$

b) Berechnung von $\iint\limits_D \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ xz \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z - 1 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung durch Kugelkoordinaten:

$\varrho = 1 \Longrightarrow \vec{x}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$; auf der Kugel ist $\vec{n} = \dfrac{\vec{x}}{\varrho} = \vec{x}$ und

$\mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta$. (s. 133)

$$\Longrightarrow \iint_D \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \\ \cos\vartheta - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right\rangle}_{-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \cos^2\vartheta - \cos\vartheta} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} [-\pi \underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\cdot\sin\vartheta} + 2\pi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 2\pi\cos\vartheta\sin\vartheta]\,\mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} [-\pi\sin\vartheta + 3\pi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 2\pi\cos\vartheta\sin\vartheta]\,\mathrm{d}\vartheta$$

$$= (\pi\cos\vartheta - \pi\cos^3\vartheta + \pi\cos^2\vartheta)\Big|_{\vartheta=0}^{\pi/2} = -\pi + \pi - \pi = -\pi \,\surd$$

Bemerkung: Beachte, dass es viele Flächen mit demselben ∂D gibt, so wie es in 25.2 vielen Kurven von A nach B gibt. Für alle diese Flächen D stimmt $\iint_D \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma$ überein (und $= \oint_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle$) wie auch der Satz von Gauß zeigt:

$$= \iint_{D_1} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma - \iint_{D_2} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \oiint_{\partial K} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iiint_K \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})}_{=0} \,\mathrm{d}V = 0,$$

wenn K der zwischen D_1 und D_2 liegende Körper ist und $\vec{n}$ auf D_1 von K nach außen zeigt.

Etwa in Bsp. 3 könnten wir auch den Einheitskreis $D_1 = \{\vec{x} : z = 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$ nehmen:

$$\iint_{D_1} \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} \left\langle \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} (\underset{\substack{\| \\ 0 \\ \text{auf } D_1}}{z} - 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\text{ Fläche von } D_1 = -\pi \,\surd.$$

Beweis des (spez.) Satzes von Stokes:

D sei durch x, y parametrisiert, d.h. $u = x,\ v = y,\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$.

(Dies ist nicht immer möglich, vgl. S. 131. Aber D lässt sich immer in Teile zerlegen, wo entweder x, y oder x, z oder y, z als Parameter verwendet werden können. Und für x, z bzw. y, z geht alles analog.)

Dann ist $\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (vgl. 26.1),

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \iint_D \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \pm \iint\limits_{\tilde{D}\subset\mathbb{R}^2_{x,y}} \big[-\partial_x f \cdot (\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_y f \cdot (\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_x v_2 - \partial_y v_1\big] \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Auf ∂D gilt $\mathrm{d}\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \end{pmatrix}$ (wie man aus einer Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f\big(x(t), y(t)\big) \end{pmatrix}$ von ∂D sieht).

$$\Longrightarrow \oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle = \int\limits_{\partial\tilde{D}} \Bigg[\underbrace{v_1\big(x,y,f(x,y)\big) + v_3\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}}_{u_1}\Bigg]\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \Bigg[\underbrace{v_2\big(x,y,f(x,y)\big) + v_3\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}_{u_2}\Bigg]\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{(Green)}}{=} \pm \iint\limits_{\tilde{D}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{ (Kettenregel)}$$

$$= \pm \iint\limits_{\tilde{D}} \Big\{\partial_x v_2 + \partial_z v_2 \cdot \partial_x f + (\partial_x v_3 + \cancel{\partial_z v_3 \cdot \partial_x f}) \cdot \partial_y f + \cancel{v_3 \partial_{xy} f} -$$

$$- \big[\partial_y v_1 + \partial_z v_1 \cdot \partial_y f + (\partial_y v_3 + \cancel{\partial_z v_3 \cdot \partial_y f}) \cdot \partial_x f + \cancel{v_3 \partial_{yx} f}\big]\Big\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dabei ist $\pm$ zu wählen, wenn $\partial\tilde{D}$ $\left\{\begin{matrix}\text{gegen}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\}$ dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, d.h. wenn $n_3 \left\{\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right\}$. Daher erhalten wir dasselbe. $\square$

§27: Ergänzungen zu den Integralsätzen

27.1 DIE KONTINUITÄTSGLEICHUNG

Wie in 21.1 (Math. B, p. 43) sei $\vec{v}(t,\vec{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, $\varrho(t,\vec{x})$ die Dichte, $\vec{u}(t,\vec{x}) = \varrho \cdot \vec{v}$ die Impulsdichte. In einem Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ ist dann zur Zeit t die Masse $M(t) = \int\limits_V \varrho(t,\vec{x})\,\mathrm{d}V$ enthalten. (Ab hier wieder kurz $\int \cdots \mathrm{d}V$ statt $\iiint \cdots \mathrm{d}V$ etc.). Im Zeitintervall $[t_1,t_2]$ fließt aus V die Masse $M_{t_1,t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\oint\limits_{\partial V} \langle \vec{u},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}t$ hinaus.

Der Satz von Gauß ergibt $M_{t_1,t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_V \operatorname{div}\vec{u}\,\mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t$. Andererseits gilt die Massenbilanz $M(t_2) = M(t_1) - M_{t_1,t_2}$ bzw. $M(t_2) - M(t_1) + M_{t_1,t_2} = 0$, d.h.

$$\int\limits_V \Big[\underbrace{\varrho(t_2,\vec{x}) - \varrho(t_1,\vec{x})}_{=\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}t} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \operatorname{div}\vec{u}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}t \Big]\,\mathrm{d}V = 0$$

Also gilt $\forall t_1, t_2, V$

$$\int\limits_V \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,\vec{x}) + \operatorname{div}\vec{u}(t,\vec{x}) \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}V = 0 \qquad (*)$$

und das führt zur Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,\vec{x}) + \operatorname{div}\vec{u}(t,\vec{x}) = 0}$$

(Denn wäre z.B. $\dfrac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u} > 0$ in $(t_0,\vec{x}_0)$, so könnten wir V um $\vec{x}_0$ und $t_1 < t_0 < t_2$ so wählen, dass $\forall t \in [t_1,t_2], \forall \vec{x} \in V : \dfrac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u} > 0$ und erhielten einen Widerspruch zu $(*)$.)

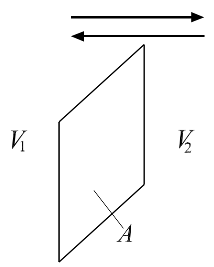
Bemerkungen: 1) Speziell für eine stationäre Strömung, wo $\varrho, \vec{v}, \vec{u}$ von t unabhängig sind, sowie für eine inkompressible Flüssigkeit, wo $\varrho =$ konst, gilt daher $\operatorname{div}\vec{u} = 0$.

2) $\operatorname{div}\vec{u} = \operatorname{div}(\varrho \cdot \vec{v}) = \varrho \cdot \operatorname{div}\vec{v} + \langle \nabla\varrho, \vec{v} \rangle$.

27.2 EULER und STOKES

Nun sei $\varrho = \varrho_0$ konstant (inkompressible Flüssigkeit) und es wirke der isotrope Druck $p(t, \vec{x})$ [Nm^{-2}], d.h. zwei kleine Volumina mit Grenzfläche A und Einheitsnormale $\vec{n}$ üben daran aufeinander die Kräfte $\pm\vec{n}Ap$ aus:

Außerdem sei z.B. die Graviation wirksam bzw. allgemeiner eine $\dfrac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}\ \vec{F}(t, \vec{x})$ [Nkg^{-1}].
Auf das Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ wirkt insgesamt die Kraft



$$\vec{K} = \int_V \varrho_0 \vec{F}\, \mathrm{d}V - \oint_{\partial V} \vec{n}\cdot p\, \mathrm{d}\sigma, \text{ d.h. } K_j = \int_V \varrho_0 F_j\, \mathrm{d}V - \oint_{\partial V} n_j p\, \mathrm{d}\sigma, \quad j = 1, 2, 3.$$

Der Satz von Gauß gibt

$$\oint_{\partial V} n_1 p\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial V} \left\langle \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial p}{\partial x}\, \mathrm{d}V \text{ etc.}$$

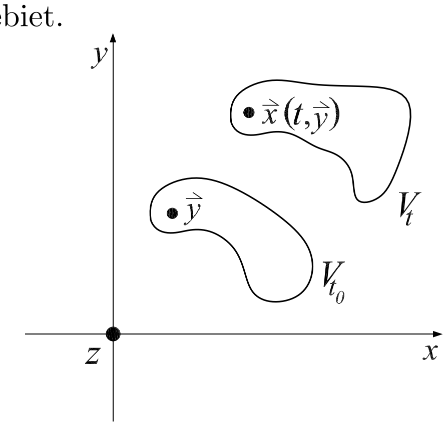
$$\implies \vec{K} = \int_V (\varrho_0 \vec{F} - \nabla p)\, \mathrm{d}V.$$

Aus $\vec{K} =$ Masse $\cdot$ Beschleunigung $= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ Impuls $= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_V \varrho_0 \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}V$ folgt dann die

<u>Eulersche Gleichung</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \vec{v}(t, \vec{x})\, \mathrm{d}V = \int_V \left(\vec{F} - \frac{1}{\varrho_0}\nabla p\right)(t, \vec{x})\, \mathrm{d}V.$$

<u>Vorsicht:</u> Das Volumen V bewegt sich mit der Zeit und wir können $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ und $\displaystyle\int_V$ nicht einfach vertauschen. Zur Zeit t_0 sei V_{t_0} gegeben und V_t das daraus bei der Strömung entstehende Gebiet.



Ein Partikel, das zur Zeit t_0 in $\vec{y}$ ist, ist zur Zeit t in $\vec{x}(t,\vec{y})$. Daher ist $V_t = \{\vec{x}(t,\vec{y}) : \vec{y} \in V_{t_0}\}$ und für eine beliebige Funktion $f(t,\vec{x})$ gilt

$$\int\limits_{V_t} f(t,\vec{x})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \overset{24.9}{=} \int\limits_{V_{t_0}} f\big(t,\vec{x}(t,\vec{y})\big)\cdot\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}\right|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3.$$

Imkompressibilität $\implies \left|\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}\right| =$ Volumsveränderungsfaktor $= 1$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_t} f(t,\vec{x})\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_{t_0}} f\big(t,\vec{x}(t,\vec{y})\big)\,\mathrm{d}V$$

$$\overset{\text{(Kettenregel)}}{=} \int\limits_{V_{t_0}}\Bigg(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{(\nabla f)_i}\cdot\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{v_i}\Bigg)\mathrm{d}V = \int\limits_{V_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle\nabla f,\vec{v}\rangle\right)\mathrm{d}V$$

Def. Man nennt $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \langle\nabla f,\vec{v}\rangle$ Stokessche Ableitung von f und schreibt dafür $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

Die Eulersche Gleichung ergibt also

$$\int\limits_V\left[\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{F} + \frac{1}{\varrho_0}\nabla p\right]\mathrm{d}V = 0 \text{ für jedes } V \overset{\text{(vgl. p. 148)}}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} - \frac{1}{\varrho_0}\nabla p$$

bzw. $\dfrac{\partial v_i}{\partial t} + \langle\nabla v_i,\vec{v}\rangle = F_i - \dfrac{1}{\varrho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x_i},\ i = 1,2,3.$

Nach 27.1 gilt außerdem $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

27.3 KELVIN und BERNOULLI

Def. Für eine orientierte geschlossene Kurve C heißt $Z = \oint\limits_C \langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle$ Zirkulation von $\vec{v}$ um C.

Nach dem Satz von Stokes ist $Z = \iint\limits_D \langle\operatorname{rot}\vec{v},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$ für eine beliebige Fläche D mit $\partial D = C$.

Der Satz von Kelvin sagt $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint\limits_C\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle = 0$ falls $\vec{F} = -\nabla U$, d.h. falls $\vec{F}$ ein Potential hat (z.B. Gravitation).

Vorsicht: Analog zu 27.2 wird $C = C_t$ als von der Strömung bewegt aufgefasst. Wenn C_{t_0} parametrisiert ist durch $\vec{y}(\varphi)$, $\varphi \in [a,b]$, so wird C_t parametrisiert durch $\vec{x}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)$, $\varphi \in [a,b]$, und wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint\limits_{C_t}\langle\vec{v},\mathrm{d}\vec{x}\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_a^b\left\langle\vec{v}\Big(t,\vec{x}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)\Big),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{x}\,(t,\vec{y}(\varphi))\right\rangle\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_a^b \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\vec{x}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)\right\rangle \mathrm{d}\varphi + \underbrace{\int_a^b \underbrace{\left\langle \vec{v}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\underbrace{\frac{\partial\vec{x}}{\partial t}\big(t,\vec{y}(\varphi)\big)}_{\vec{v}\left(t,\vec{x}\left(t,\vec{y}(\varphi)\right)\right)}\right\rangle}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2\right)} \mathrm{d}\varphi}_{\underbrace{\frac{1}{2}\left\|\vec{v}\left(t,\vec{x}\left(t,\vec{y}(\varphi)\right)\right)\right\|^2\Big|_{\varphi=a}^{b}}_{=0,\ \text{da}\ \vec{y}(a)=\vec{y}(b)}}$$

$$= \int_{C_t} \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\vec{x}\right\rangle \overset{27.2}{=} \int_{C_t} \langle \underbrace{\vec{F}}_{-\nabla U} - \frac{1}{\varrho_0}\nabla p, \mathrm{d}\vec{x}\rangle$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} -\iint_{D_t} \left\langle \underbrace{\text{rot}\,\text{grad}}_{=0}\left(U + \frac{1}{\varrho_0}p\right), \vec{n}\right\rangle \mathrm{d}\sigma = 0,$$

wobei D_t eine Fläche mit Randkurve $\partial D_t = C_t$ ist.

Schließlich sei $\vec{v}$ das Geschwindigkeitsfeld einer wirbelfreien Strömung (vgl. 27.4), d.h. $\forall t : \text{rot}\,\vec{v}(t,\vec{x}) = \vec{0}$.

Nach 21.2 ist $\vec{v} = \nabla\varphi$ und die Eulersche Gleichung ergibt

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{\left\langle \nabla \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}^{=v_i}, \overbrace{\nabla f}^{=\vec{v}}\right\rangle}_{\underbrace{\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\|\vec{v}\|^2}} = F_i - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\|\vec{v}\|^2 = \vec{F} - \frac{1}{\varrho_0}\nabla p.$$

Speziell im stationären Fall im Gravitationsfeld ist $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \nabla(-gz)$

$$\Longrightarrow \nabla\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + gz + \frac{1}{\varrho_0}p\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + gz + \frac{1}{\varrho_0}p = \text{konstant}.$$

Das nennt man die Bernoulli-Gleichung.

27.4 div, rot als Grenzwerte von Randintegralen

a) $\vec{v}(\vec{x})$ sei in der Nähe von $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ definiert, $f = \operatorname{div}\vec{v}$ und V ein kleines $\vec{x}_0$ enthaltendes Gebiet. In erster Näherung ist in V $f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0)$

$$\Longrightarrow \iiint\limits_V f(\vec{x})\,\mathrm{d}V \approx \iiint\limits_V f(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}V = f(\vec{x}_0)\cdot \text{Vol.}\,(V)$$

$$\Longrightarrow f(\vec{x}_0) \approx \frac{\iiint\limits_V f(\vec{x})\,\mathrm{d}V}{\text{Vol.}(V)} \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{\oiint\limits_{\partial V} \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma}{\text{Vol.}(V)}$$

Daher gilt

$$\boxed{(\operatorname{div}\vec{v})(\vec{x}_0) = \lim_{V\to\{\vec{x}_0\}} \frac{\oiint\limits_{\partial V} \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma}{\text{Vol.}(V)}}$$

$V \to \{\vec{x}_0\}$ soll dabei bedeuten, dass V Gebiete mit glattem Rand sind und $\max\big\{\|\vec{x}-\vec{x}_0\| : \vec{x}\in V\big\} \to 0$.

<u>In Worten:</u> $(\operatorname{div}\vec{v})(\vec{x}_0)$ ist die “Quellstärke von $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$”, d.h. der Grenzwert aus $\dfrac{\text{Durchflussintegral}}{\text{eingeschlossenes Volumen}}$ bei $\vec{x}_0$ (vgl. auch 21.1).

b) D sei eine kleine orientierte Fläche durch $\vec{x}_0$ und $f = \langle \operatorname{rot}\vec{v}, \vec{n}\rangle$. In erster Näherung ist in D $f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0)$

$$\Longrightarrow \iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma \approx \iint\limits_D f(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}\sigma = f(\vec{x}_0)\cdot \text{Fläche}(D)$$

$$\Longrightarrow f(\vec{x}_0) \approx \frac{\iint\limits_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma}{\text{Fläche}(D)} \overset{\text{Stokes}}{=} \frac{\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle}{\text{Fläche}(D)}$$

Daher gilt

$$\boxed{\big\langle(\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0), \vec{n}\big\rangle = \lim_{\substack{D\to\{\vec{x}_0\}\\ \vec{n}(\vec{x}_0)=\vec{n}}} \frac{\oint\limits_{\partial D} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x}\rangle}{\text{Fläche}(D)}}$$

∂D wird dabei bzgl. $\vec{n}$ nach der Rechtsschraubregel durchlaufen.

<u>In Worten:</u> $(\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0)$ ist die “Wirbelstärke von $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$”, d.h. $(\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0)$ zeigt senkrecht auf die Ebene, in der $\dfrac{\text{Arbeit}}{\text{umkreiste Fläche}}$ bei $\vec{x}_0$ maximal wird, und $\big\|(\operatorname{rot}\vec{v})(\vec{x}_0)\big\|$ ist dann der Grenzwert dieses Quotienten.

27.5 DAS GESCHWINDIGKEITSFELD $\vec{v}$ in der linearen Näherung

Bei $\vec{x}_0$ gilt $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o\big(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|\big)$, vgl. 21.3.

Es sei $A = \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Lemma 1 Jede $n \times n$-Matrix A lässt sich eindeutig als $A = B + C$ schreiben, wobei B symmetrisch ist $(B^T = B)$ und C schiefsymmetrisch $(C^T = -C)$.

Beweis In der Tat folgt aus $A = B + C$, dass $A^T = B^T + C^T = B - C \implies A + A^T = 2B,\ A - A^T = 2C \implies B = \frac{1}{2}(A + A^T),\ C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. $\square$

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^3$ ist also $A = B + C$ mit

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) & a_{33} \end{pmatrix}$$

und

$$C = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}-a_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(a_{23}-a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31}-a_{13}) & \frac{1}{2}(a_{32}-a_{23}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2 Wenn $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ schiefsymmetrisch ist, so gilt $C\vec{x} = \vec{c} \times \vec{x}$ mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{13} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. (Man nennt $\vec{c}$ manchmal Drehvektor.)

Beweis
$$\begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{13} \\ c_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{13}z - c_{21}y \\ c_{21}x - c_{32}z \\ c_{32}y - c_{13}x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix} \vec{x}}_{\begin{pmatrix} c_{12}y + c_{13}z \\ c_{21}x + c_{23}z \\ c_{31}x + c_{32}y \end{pmatrix}},$$

weil $c_{12} = -c_{21},\ c_{23} = -c_{32},\ c_{31} = -c_{13}$. $\square$

Es sei nun $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) = A = B + C,\ B = B^T,\ C = -C^T,\ C\vec{x} = \vec{c} \times \vec{x}$ mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_{32} \\ c_{13} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. Dann ist also

$$\vec{v}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{v}(\vec{x}_0)}_{\vec{v}^{(1)}} + \underbrace{B \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\vec{v}^{(2)}} + \underbrace{\vec{c} \times (\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\vec{v}^{(3)}} + o\big(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|\big)$$

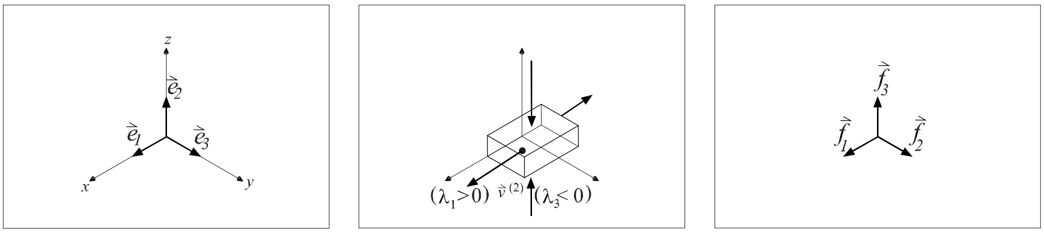
$\vec{v}$ setzt sich also in der linearen Näherung aus folgenden 3 Anteilen zusammen:

1) $\vec{v}^{(1)}$ ist ein konstantes Geschwindigkeitsfeld;

2) $B = B^T \implies$ (Lin.Alg., § 7) bzgl. einer neuen ONB $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ist

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}^{(2)} \text{ bedeutet } \left\{ \begin{matrix} \text{Expansion} \\ \text{Kontraktion} \end{matrix} \right\} \text{ in den Richtungen}$$

$$\vec{f}_j \text{ wenn } \left\{ \begin{matrix} \lambda_j > 0 \\ \lambda_j < 0 \end{matrix} \right\} :$$

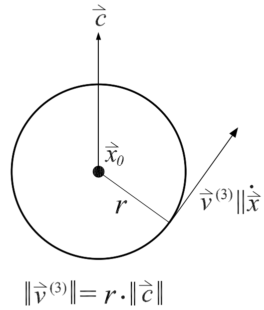


Schließlich gilt $\sum\limits_{j=1}^{3} \lambda_j = \operatorname{sp} B \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{weil } \operatorname{sp} C = 0)}}{=} \operatorname{sp} \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) = \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0)$

(3) $$(\operatorname{rot} \vec{v})(\vec{x}_0) = (\nabla \times \vec{v})(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} (\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} = 2\vec{c},$$

d.h. $\vec{v}^{(3)}$ ist das Geschwindigkeitsvektorfeld einer Drehung um die Achse durch $(\operatorname{rot} \vec{v})(\vec{x}_0)$ mit Winkelgeschwindigkeit $\|\vec{c}\| = \frac{1}{2} \big\| \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0) \big\|$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt davon, dass für einen Kreis K mit Mittelpunkt $\vec{x}_0$ senkrecht zu $\vec{c}$ gilt:

$$\begin{aligned} \oint_K \langle \vec{v}^{(3)}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle &\overset{\text{Bild}}{=} \oint_K \underbrace{\|\vec{v}^{(3)}\|}_{r \cdot \|\vec{c}\|} \cdot \|\dot{\vec{x}}\| \, \mathrm{d}t \\ &= r\|\vec{c}\| \cdot \text{ Kreislänge} \\ &= r\|\vec{c}\| \cdot 2\pi r \\ &= \underline{\underline{2}}\|\vec{c}\| \cdot \text{Kreisfläche} \end{aligned}$$



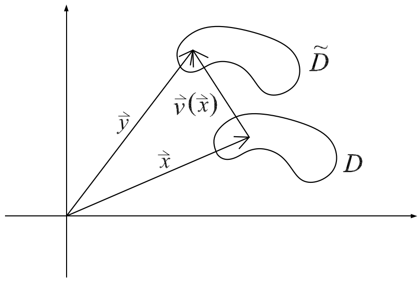
$$\implies \|\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0)\| \overset{(27.4)}{=} \lim_{K \to \{\vec{x}_0\}} \frac{\oint_K \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle}{\text{Kreisfläche}} = 2\|\vec{c}\|$$

(weil $\oint_K \langle \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \overset{\text{Stokes}}{=} \iint \langle \underbrace{\operatorname{rot} (\vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)})}_{\vec{0}}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = 0$)

27.6 DER VERZERRUNGSTENSOR

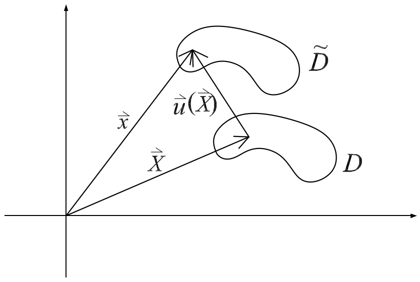
Nun bedeutet $\vec{v}$ NICHT Geschwindigkeit $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right]$, sondern die Verschiebung [m] des Ortspunktes $\vec{x}$ zu einem neuen Punkt $\vec{y}$, d.h.

$\vec{y}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}(\vec{x})$.



Wir verwenden ab nun die Bezeichnungen von Hofstetter, d.h.

oben	$\vec{x}$	$\vec{v}$	$\vec{y}$	$\mathrm{J}\vec{v}$
ab jetzt	$\vec{X}$	$\vec{u}$	$\vec{x}$	$\operatorname{grad}\vec{u}$



Somit $\vec{x}(\vec{X}) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X})$ und

$\vec{x}(\vec{X}) = \vec{x}(\vec{X}_0) + \mathrm{J}\vec{x}(\vec{X}_0)\cdot(\vec{X}-\vec{X}_0) + o\big(\|\vec{X}-\vec{X}_0\|\big)$ und

$\mathrm{J}\vec{x}(\vec{X}_0) = I + \mathrm{J}\vec{u}(\vec{X}_0) = I + A$ mit $a_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}(\vec{X}_0)$.

Wir betrachten zunächst kleine Verschiebungsableitungen, d.h. $|a_{ij}| << 1$.

Wieder sei $A = B + C$ mit $B = B^T$, $C = -C^T$.

Dann ist $\mathrm{J}\vec{x}(\vec{X}_0) = I + A = I + B + C \approx (I+C)\cdot(I+B)$, weil $C\cdot B$ klein von 2. Ordnung ist.

$\Longrightarrow \vec{x}(\vec{X}) \approx \vec{x}(\vec{X}_0) + (I+C)(I+B)\cdot(\vec{X}-\vec{X}_0)$

1) $\vec{x}(\vec{X}_0)$ bedeutet eine konstante Verschiebung;

2) $B = B^T$ ist nach HA-Transformation $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ mit $|\lambda_j| << 1$.

Somit bewirkt $I+B$ eine Verzerrung und zwar $\left\{\begin{matrix}\text{Streckung}\\ \text{Stauchung}\end{matrix}\right\}$ in den Richtungen $\vec{f}_j$ mit Faktor $1+\lambda_j$ wenn $\left\{\begin{matrix}\lambda_j > 0\\ \lambda_j < 0\end{matrix}\right\}$.

$B = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = (\epsilon_{ij})$ heißt linearisierter Verzerrungstensor.

Die Volumsänderung ist $\det(I+A) \approx$

$$\det\big((I+B)(I+C)\big) = \underbrace{\det(I+B)}_{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} \cdot \underbrace{\det(I+C)}_{\approx 1}$$

$$\approx \quad 1 + \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}_{\mathrm{sp}\,B = \mathrm{sp}\,A} = 1 + \mathrm{sp}\,A$$

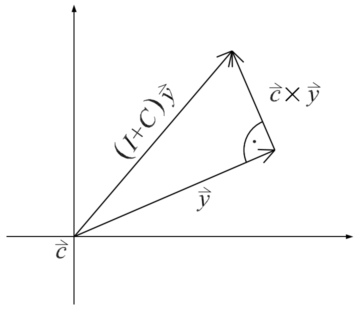
$$= 1 + \mathrm{div}\,\vec{u}(\vec{X}_0)$$

Der Volumsänderungsfaktor ist also in 1. Näherung $1 + \mathrm{div}\,\vec{u}(\vec{X}_0)$.

3) Die lineare Abbildung $\vec{y} \longmapsto (I+C)\vec{y}$ ist in 1. Näherung eine Drehung mit Drehvektor $\vec{c} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{u}(\vec{X}_0)$, denn $C\vec{y} = \vec{c} \times \vec{y}$ (vgl. p. 153)

$\Longrightarrow (I+C)\vec{y} = \vec{y} + \vec{c} \times \vec{y}$.

Draufsicht:



Vergleich lineare/nichtlineare Theorie

Für kleine $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$ ist also die Verzerrung in 1. Näherung durch

$\epsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = b_{ij}$ bestimmt. Exakt ist hingegen

$\vec{x}(\vec{X}) = \vec{x}(\vec{X}_0) + (I+A)\cdot(\vec{X} - \vec{X}_0) + o\big(\|\vec{X} - \vec{X}_0\|\big)$; $T = I + A$ erhält Längen (und Winkel) $\Longleftrightarrow$ T orthogonal $\Longleftrightarrow$ $T^T \cdot T = I \Longleftrightarrow \underbrace{(I+A)^T \cdot (I+A)}_{I+A+A^T+A^TA} = I \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow A + A^T + A^TA = 0$

Def. $E = \dfrac{1}{2}(A + A^T + A^TA)$ heißt Greenscher Verzerrungstensor.

In Koordinaten ist

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji} + a_{ki}a_{kj}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right).$$

Allgemein gilt dann

$$\begin{aligned}\big\|(I+A)\vec{y}\big\|^2 - \|\vec{y}\|^2 &= \big((I+A)\vec{y}\big)^T \cdot (I+A)\vec{y} - \vec{y}^T \cdot \vec{y} \\ &= \vec{y}^T \cdot \big[(I+A)^T \cdot (I+A) - I\big] \cdot \vec{y} = \vec{y}^T \cdot 2E \cdot \vec{y},\end{aligned}$$

d.h. $2E$ beschreibt die Längenänderung.