Vorlesung Mathematik B, Kapitel VI, Dr. Peter Wagner

Erstellungsdatum: 16. September 1999

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL VI: DIE TAYLORREIHE

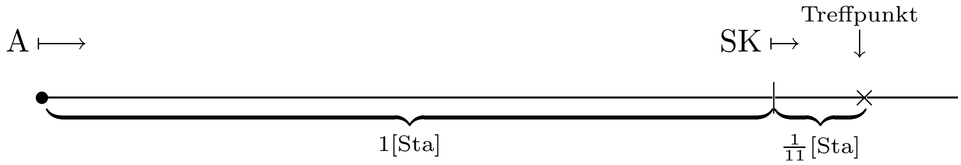
§22: Konvergenzkriterien

22.1 KONVERGENZ VON REIHEN

Bsp. 1 (Geometrische Reihe) Der griechische Sophist Zenon (5. Jhdt. v. Chr.) behauptete, einen Widerspruch im mathematischen Denken gefunden zu haben. Er konstruierte folgendes Parádoxon:

Kann Achilles, der 12mal so schnell läuft wie eine Schildkröte, diese einholen, wenn sie einen Vorsprung von 1 Stadion $\big(1\,[\mathrm{Sta}] = 184.97\,[\mathrm{m}]\big)$ hat?

Die Vernunft sagt ja. Genauer: Wenn die Schildkröte $\dfrac{1}{11}$ [Sta] gekrochen ist, so hat Achilles das 12-fache, d.h. $\dfrac{12}{11} = 1 + \dfrac{1}{11}$ [Sta] zurückgelegt und hat sie eingeholt.



Die Zenon'sche Mathematik sagt nein:

Zuerst läuft A $\quad 1$ [Sta], SK inzwischen $\dfrac{1}{12}$ [Sta];

dann läuft A $\quad \dfrac{1}{12}$ [Sta], SK inzwischen $\dfrac{1}{12^2}$ [Sta];

dann läuft A $\quad \dfrac{1}{12^2}$ [Sta], SK inzwischen $\dfrac{1}{12^3}$ [Sta] etc.

Um sie einzuholen, muß Achilles also $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \cdots$ [Sta] laufen und eine Summe von ∞ vielen Termen gibt - nach Zenon - ∞. Also kann Achilles - nach Zenon - die Schildkröte nicht einholen. In Wahrheit ist die Summe der Grenzwert einer konvergenten Folge:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{\substack{a_1 \\ \parallel \\ s_1}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{a_2}}_{s_2} + \underbrace{\frac{1}{12^2}}_{a_3}}_{s_3} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{12^{n-1}}}_{a_n}}_{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = S = 1\frac{1}{11}$$

Numerisch: $s_1 = 1$, $s_2 = 1\frac{1}{12} = 1.08\dot{3}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144} = 1.0902\dot{7}, \ldots,$
$S = 1\frac{1}{11} = 1.090909\ldots$ [Sta] ≈ 201.79 [m]

Def: Ein Ausdruck der Form $a_1 + a_2 + \cdots$ (mit $a_i \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt (unendliche) Reihe (engl. series). a_n heißt n-tes Reihenglied. $s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ heißt n-te Partialsumme.

Die Reihe $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvergiert} \\ \text{divergiert} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$ die Folge s_n der Partialsummen $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvergiert} \\ \text{divergiert} \end{array} \right\}$.

Falls die Reihe konvergiert, nennt man $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ihre Summe und schreibt $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Also: $\boxed{\begin{array}{l} \text{Summe einer konvergenten Reihe} \\ \qquad = \text{Grenzwert der Folge der Partialsummen} \end{array}}$

Schreibweise: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ steht für $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ und es gibt 4 Möglichkeiten:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S \Longleftrightarrow s_n$ konvergiert gegen S

(b/c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty \Longleftrightarrow s_n$ divergiert gegen $\pm\infty$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ existiert nicht $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existiert nicht.

Bemerkungen: Der Laufindex kann 1. umbenannt und 2. substituiert werden, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{1.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{2.}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \qquad \left\Vert \begin{array}{l} n = i+1 \\ n = 1 \Rightarrow i = 0 \\ n = \infty \Rightarrow i = \infty \end{array} \right.$$

Manchmal ist es bequem, eine Reihe ab 0 oder allgemeiner ab $n = N$ zu numerieren, d.h. man betrachtet $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ und setzt $s_n = \sum\limits_{k=N}^{n} a_k$. Beachte, daß der Laufindex in s_n nicht n sein kann, sondern anders heißen muß!

Bsp. 2 $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$,

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Longrightarrow$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \overset{(k=1)}{\frac{1}{1\cdot 2}} + \overset{(k=2)}{\frac{1}{2\cdot 3}} + \overset{(k=3)}{\frac{1}{3\cdot 4}} + \cdots + \overset{(k=n)}{\frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \text{ d.h.}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}s_n=1$$

<u>Zurück zu Bsp. 1</u> Es sei $p\in\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Die Reihe $1+p+p^2+p^3+\cdots$ heißt <u>geometrische Reihe</u>. (Sie enthält noch den "Parameter" p.)

Es ist also $a_k=p^{k-1},\ k=1,2,\ldots.$ $\quad\big($Zenon: $p=\frac{1}{12}\big)$

$$1+p+p^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}p^n \qquad \left\| \begin{array}{l} k=n+1\\ k=1\Rightarrow n=0\\ k=\infty\Rightarrow n=\infty \end{array}\right.$$

<u>Berechnung von $s_n=\sum_{k=1}^{n}p^{k-1}$:</u>

$$s_n=1+p+p^2+\cdots+p^{n-1} \qquad \Big|\cdot(1-p)$$

$$\Longrightarrow (1-p)s_n=1-\cancel{p}+\cancel{p}-\cancel{p^2}+\cancel{p^2}-p^3+\cdots+p^{n-1}-p^n$$

$$=1-p^n\Longrightarrow \underline{\underline{s_n=\frac{1-p^n}{1-p}}} \text{ falls } p\neq 1;$$

(für $p=1$ ist $s_n=\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}=n$)

<u>1. Fall</u> $|p|<1\Longrightarrow 1+p+p^2+\cdots=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overset{\nearrow 0}{p^n}}{1-p}=\frac{1}{1-p}=S$

<u>2. Fall</u> $|p|\geq 1$ a) $p=1\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$

b) $p\neq 1\Longrightarrow s_n=\dfrac{1-p^n}{1-p}$ divergiert,

da p^n divergiert, vgl. 3.1, Bsp. 4 und 6, p. 25.

<u>Ergebnis:</u> $\sum_{n=0}^{\infty}p^n=\dfrac{1}{1-p}$ konvergiert $\Longleftrightarrow |p|<1$

<u>Spezielle Beispiele:</u>

a) $1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{p}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$\Big($hier ist $s_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1-2^{-n}}{\frac{1}{2}}=2(1-2^{-n})=2-2^{1-n}$,

z.B. $s_3=2-2^{-2}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}\surd\Big)$

b) (Zenon) $1+\underbrace{\frac{1}{12}}_{p}+\frac{1}{12^2}+\cdots=\dfrac{1}{1-\frac{1}{12}}=\dfrac{1}{\frac{11}{12}}=\dfrac{12}{11}=1\dfrac{1}{11}$

c) $1 + \underbrace{1}_{p} + 1 + \cdots$ divergiert, da $|1| \geq 1 \quad (s_n = n)$

d) $1 \underbrace{-1}_{p} + 1 - 1 + \cdots$ divergiert, da $|-1| \geq 1$

$$\left(s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ s_3 = 1, \cdots, s_n = \begin{Bmatrix} 0 : n \text{ gerade} \\ 1 : n \text{ ungerade} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\big(1 - (-1)^n\big)\right.$$

e) $1 \underbrace{-3}_{p} + 9 - 27 + - \cdots$ divergiert, da $|-3| \geq 1$

$$\left(s_n = \frac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)} = \frac{1}{4}\big(1 - (-3)^n\big),\ \text{z.B. } s_3 = \frac{1}{4}\big(1 - (-27)\big) = \frac{28}{4} = 7\checkmark\right)$$

22.2 DAS NOTWENDIGE KRITERIUM $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Schreibweise: In Konvergenzbetrachtungen steht oft $\sum a_n$ für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$.

Für die Konvergenz ist es egal, mit welchem n begonnen wird.

Satz 1 $\underbrace{\sum a_n \text{ konvergiert}}_{A} \Longrightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}_{B}$

Beweis: $\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$;

$$\left.\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_n &= s_n \\ a_1 + \cdots + a_{n-1} &= s_{n-1} \end{aligned}\right\} - \Longrightarrow a_n = \underset{\substack{\downarrow \\ S}}{s_n} - \underset{\substack{\downarrow \\ S}}{s_{n-1}} \overset{\text{GWS}}{\to} 0,\ \text{d.h. } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \square$$

Bemerkung: Weil $A \Longrightarrow B$, gilt auch $\not B \Longrightarrow \not A$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum a_n$ divergiert.

Bsp. 3

a) $\arctan 1 + \arctan 2 + \cdots, a_n = \arctan n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2} \neq 0 \Longrightarrow \sum \arctan n$ divergiert;

b) $1 - 1 + \underbrace{1}_{a_3 = (-1)^2} - 1 + \cdots, a_n = (-1)^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ divergiert (vgl. auch Bsp. 1, d).

Vorsicht: I.a. gilt nicht $B \Longrightarrow A$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist ein "notwendiges", aber kein "hinreichendes" Kriterium für die Konvergenz von $\sum a_n$.

Bsp. 4 (Harmonische Reihe)

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots, a_n = \frac{1}{n},\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ABER: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

<u>Beweis:</u> $s_{16} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}$

Also: $s_1 = 1,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2},\ s_4 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},\ s_8 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$

$s_{\underbrace{16}_{=2^4}} > 1 + 4\cdot\frac{1}{2},\ s_{2^k} > 1 + k\cdot\frac{1}{2},$

$s_n > \underbrace{1 + \frac{k}{2}}_{=M}$ für $n \geq \underbrace{2^k}_{=2^{2(M-1)}} \implies$

$\implies s_n \geq M$ für $n \geq 2^{2(M-1)} = N \implies \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ $\square$

<u>Ergebnis von Satz 1</u> Damit $\sum a_n$ konvergiert, muß jedenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten (Bsp. 3). Wenn das gilt, gibt es 2 Möglichkeiten: a) $\sum a_n$ konvergiert (Bsp. 2)
b) $\sum a_n$ divergiert (Bsp. 4)

22.3 <u>REIHEN OHNE NEGATIVE GLIEDER</u>

Wenn alle <u>$a_n \geq 0$</u> sind, so ist <u>s_n schwach monoton steigend</u> :

$$a_1 \leq \underbrace{a_1 + a_2}_{} \leq \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{} \leq \cdots$$

$$\implies \quad \overset{\|}{s_1} \leq \overset{\|}{s_2} \leq \overset{\|}{s_3} \leq \cdots$$

Dann gibt es 2 Möglichkeiten: Entweder wächst s_n unbeschränkt, d.h. $\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ (s. Bsp. 4) oder s_n ist beschränkt, d.h. $\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$. Nach §3, Satz 4, S. 30 (Vorsicht: dort steht S für M) ist s_n dann konvergent, d.h. $\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S < \infty$. In diesem Fall schreibt man einfach $\sum a_n < \infty$. Also:

<u>Satz 2</u> Es seien alle $a_n \geq 0$. Dann gilt: $\sum a_n$ konvergiert $\iff$ die Folge s_n ist beschränkt. $\square$

<u>Vorsicht:</u> Wenn manche $a_n < 0$, so kann " $\Longleftarrow$ " falsch sein.

Z.B. ist $1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$ divergent, obwohl $s_n = \left\{\begin{matrix} 0 : n \text{ gerade} \\ 1 : n \text{ ungerade} \end{matrix}\right\}$ beschränkt ist.

<u>Bemerkung:</u> Wenn alle $a_n \geq 0$, läßt sich über Konvergenz/Divergenz oft durch Vergleich entscheiden:

I) Wenn $\boxed{\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum b_n \text{ konvergiert}} \implies$

$\implies s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = M$, d.h. die Summe von b_k ist eine Schranke zu $s_n \implies s_n$ beschränkt $\overset{\text{Satz 2}}{\implies} \boxed{\sum a_n \text{ konvergiert}}$

Es genügt auch, $\forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq c \cdot b_n$ mit einem positiven c zu verlangen, weil es für die Konvergenz auf die ersten a_n nicht ankommt und weil mit $\sum b_n$ auch $\sum cb_n$ konvergent ist.

II) Ebenso, wenn $\boxed{\forall n : 0 \leq b_n \leq a_n \wedge \sum b_n \text{ divergiert}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \to \infty \Longrightarrow s_n \to \infty \Longrightarrow \boxed{\sum a_n \text{ divergiert}}$ Also:

Folgerung 1 (Vergleichskriterium) $c > 0$, $N \in \mathbb{N}$.

(I) $\forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq c \cdot b_n \wedge \sum b_n$ konvergiert $\Longrightarrow \sum a_n$ konvergiert

(II) $\forall n \geq N : 0 \leq c \cdot b_n \leq a_n \wedge \sum b_n$ divergiert $\Longrightarrow \sum a_n$ divergiert □

Bezeichnung:

$\sum cb_n$ ist $\left\{\begin{array}{l} \geq \sum a_n \text{ in I} \\ \leq \sum a_n \text{ in II} \end{array}\right\}$ und wird daher $\left\{\begin{array}{rcl} \text{in I} & : & \text{konvergente } \underline{\text{Majorante}} \\ \text{in II} & : & \text{divergente } \underline{\text{Minorante}} \end{array}\right\}$

genannt. (major=größer, minor=kleiner in lat.)

Bsp. 5 a) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Idee: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist größer als $\frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n} = \infty$ (Bsp. 4); also ist vermutlich auch $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$.

Exakt: $\sqrt{n} \leq n \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{a_n} \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$ (hier ist $N = 1$, $c = 1$)

$\sum b_n$ div. $\underset{\text{Vkrit.II}}{\Longrightarrow} \sum a_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div.

$\sum \frac{1}{n}$ ist also eine divergente Minorante.

b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$, $a_n = \frac{1}{n^2}$

(nicht verwechseln mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, s. Bsp. 1a)

Idee: $\frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Bsp.2)

also ist vermutlich auch $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$

Exakt: Wir wollen $\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n} \leq c \cdot \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{b_n}$ $\quad \Big| \cdot n^2 \cdot (n+1)$

$\Longleftrightarrow n + 1 \leq c \cdot n$; das stimmt für $c = 2$

Also $a_n \leq 2 \cdot b_n$; $\sum b_n$ konvergiert $\underset{\text{Vkrit.I}}{\Longrightarrow} \sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert

Genauer: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Bsp. 2}}}{=} 2.$

Aus der Fourieranalysis ergibt sich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934.$

Beachte: Die Konvergenz einer Reihe ist oft viel leichter zu zeigen, als die Summe zu berechnen.

Bemerkung: Oft ist $a_n = f(n)$, f eine Funktion. In Bsp. 5 etwa in a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, in b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Die Konvergenz von $\sum a_n = \sum f(n)$ hängt dann mit der Konvergenz von $\int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ zusammen.

Folgerung 2 (Integralkriterium)

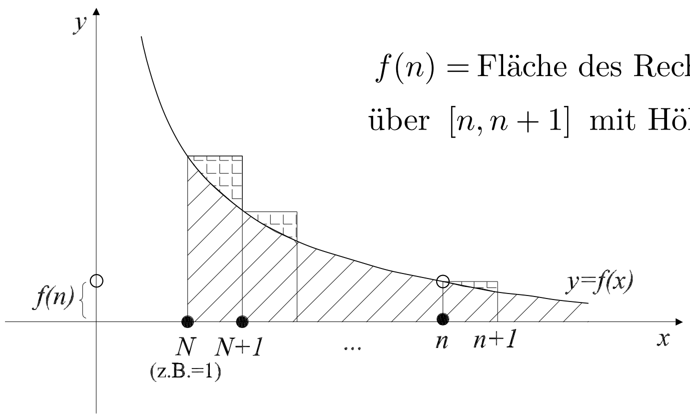
$f(x)$ sei positiv und monoton fallend für $x > N-1$. Dann gilt:

(a) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n) \geq \int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n) \leq \int\limits_{N-1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ konvergiert $\Longleftrightarrow \int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert

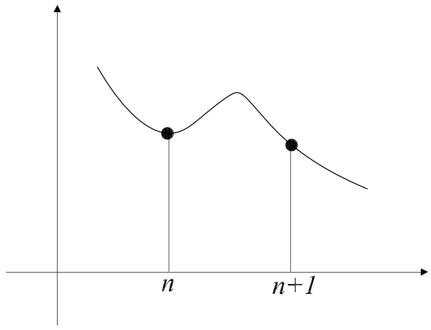
Beweis: (a)



$\Longrightarrow \sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n) =$ Fläche aller Rechtecke $\geq$ Fläche unter der Kurve über $[N, \infty[=$

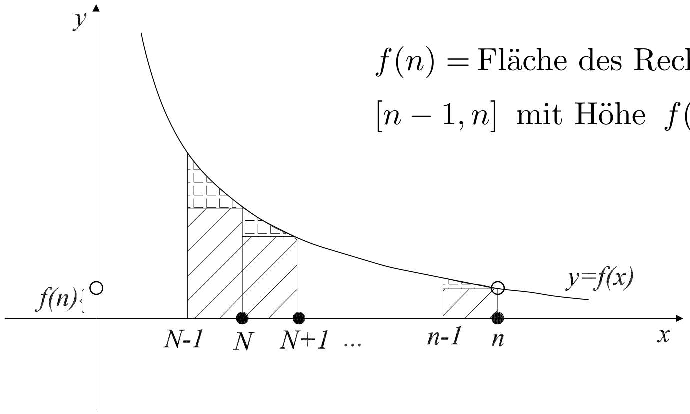
$= \int\limits_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

[Weil f monoton fallend ist, kann so etwas:



nicht passieren, und gilt $\geq$]

b) Nun tragen wir die Rechtecke nach <u>links</u> auf:



$f(n) =$ Fläche des Rechtecks über $[n-1, n]$ mit Höhe $f(n)$

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n) =$ Fläche aller Rechtecke $\leq$ Fläche unter der Kurve über $[N-1, \infty[=$
$= \int\limits_{N-1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

c) Bisher wurde vorausgesetzt, daß $\sum$ und $\int$ konvergieren.

$\alpha)$ " $\Longrightarrow$ " $S = \sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ sei konv. $\overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow} \forall b \in \mathbb{N} : \int\limits_{N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S$

$\Longrightarrow \int\limits_{N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ monoton steigend und nach oben beschränkt

$\Longrightarrow \int\limits_{N}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

$\beta)$ " $\Longleftarrow$ " $M = \int\limits_{N}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sei konv. $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=N}^{n} f(k) = f(N) + \sum_{k=N+1}^{n} f(k) \overset{\text{(b)}}{\leq} f(N) + \int\limits_{N}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = f(N) + M$$

$\Longrightarrow s_n$ monoton steigend und nach oben beschränkt $\overset{\text{vgl. Satz 2}}{\Longrightarrow}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=N}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} s_n \;\text{ konv.} \qquad \square$$

Bsp. 5 $\sum \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 0.$

Nach Vkrit. I ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konv. $\Longleftrightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konv. $\overset{§14.1}{\Longleftrightarrow} \alpha > 1$

Def.: $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 1,$ heißt Riemann'sche Zetafunktion.

Genauer für $\alpha = 2:\ \zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$ Abschätzung mit dem Integralkriterium:

z.B. $\underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}}_{1.36\dot{1}} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \underbrace{\sum\limits_{n=4=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}}_{1.69\dot{4}}$

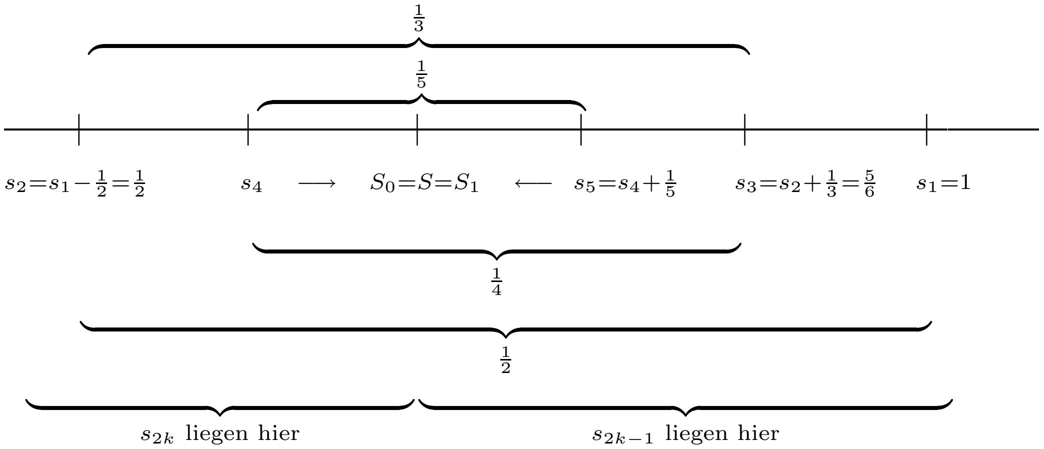
$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \overset{(b)}{\leq} \int\limits_{N-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{N-1}^{\infty} = \frac{1}{N-1} \Longrightarrow \quad \leq \frac{1}{4-1}$$

Oft gibt es keine Formel für die Summe S $\left(\text{hier } \frac{\pi^2}{6}\right)$, und man ist auf solche Abschätzungen angewiesen $\big($z.B. für $\zeta(3)\big)$.

22.4 REIHEN MIT NEGATIVEN GLIEDERN

Bsp. 6: $\underbrace{\underbrace{\underset{\overset{\shortparallel}{s_1}}{1} - \frac{1}{2}}_{s_2} + \frac{1}{3}}_{s_3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{=a_n}$

Was passiert mit den s_n?



s_{2k} ist monoton steigend und nach oben beschränkt $(\leq s_1) \overset{§3,\ \text{Satz } 4}{\Longrightarrow} s_{2k} \to S_0$

s_{2k-1} ist monoton fallend und nach unten beschränkt $(\geq s_2) = s_{2k-1} \to S_1$

$$S_0 - S_1 = \lim_{k\to\infty} (\underbrace{s_{2k} - s_{2k-1}}_{a_{2k}}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} = 0$$

$\Longrightarrow S_0 = S_1 = S$ und $s_n \to S$

Also folgt: Diese Reihe konvergiert.

Allgemein:

Satz 3 (Leibnizkriterium) Die Reihe $\sum a_n$ erfülle

1) Die Reihe ist "alternierend", d.h. das Vorzeichen der Reihenglieder wechselt (d.h. $\forall n : \operatorname{sign} a_n = -\operatorname{sign} a_{n+1}$);
2) die Beträge der Reihenglieder sind monoton fallend $\big($d.h. $\forall n : |a_n| \geq |a_{n+1}|\big)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (nach Satz 1 für Konvergenz notwendig)

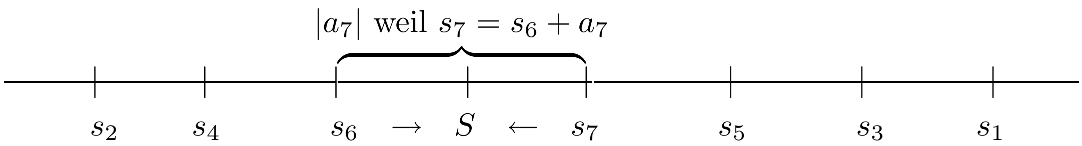
Dann konvergiert $S = \sum a_n$ und es gilt

$$|S - s_n| \leq |a_{n+1}|. \qquad (*)$$

$(*)$ in Worten: Der Abstand der n-ten Partialsumme von der Reihensumme (= der "Fehler") ist $\leq$ dem Betrag des ersten weggelassenen Reihengliedes.

Genauer: $S = \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n,\ s_n = \sum\limits_{k=N}^{n} a_k,\ (*)$ für $n \geq N$; meistens ist $N = 1$.

Beweis: Wie oben sei z.B. $a_1 > 0 \Longrightarrow a_2 < 0,\ a_3 > 0, \cdots$. Dann gilt genauso



$\Longrightarrow S$ zwischen s_6 und s_7

$\Longrightarrow |S - s_6| \leq |a_7|$ und allgemein $(*)$. $\square$

Zurück zu Bsp. 6 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

1) alternierend $\surd$ 2) $|a_n| = \frac{1}{n} \geq |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \surd$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0 \surd$

Also konvergiert S und z.B. $|S - s_6| \leq |a_7| = \frac{1}{7} \approx 0.1428$.

$s_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 0.61\dot{6}$ Später $S = \ln 2 \approx 0.693$.

Beachte: Die Reihe der Beträge $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ divergiert (Bsp. 4, harmonische Reihe). Man sagt: $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ist "bedingt konvergent".

Def.: 1) Die Reihe $\sum a_n$ heißt bedingt konvergent $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ (i) $\sum a_n$ ist konvergent

$\wedge$ (ii) $\sum |a_n|$ ist divergent.

2) Die Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent $\Longleftrightarrow \sum |a_n|$ ist konvergent.

Satz 4 $\sum a_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum a_n$ konvergent. [In Worten: Wenn die Reihe der Beträge konvergiert, so konvergiert auch die Reihe selbst.]

Beweis: Es seien $s_n = a_1 + \cdots + a_n$,

$$s_n^{(1)} = [\text{Summe aller positiven } a_k,\ k = 1, \ldots, n] = \sum_{\substack{k=1 \\ a_k \geq 0}}^{n} a_k$$

$$s_n^{(2)} = [\text{Summe aller negativen } a_k,\ k = 1, \ldots, n] = \sum_{\substack{k=1 \\ a_k < 0}}^{n} a_k$$

$$\sum a_n \text{ absolut konvergent } \Longrightarrow T = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

$\Longrightarrow 0 \leq s_n^{(1)}$ ist schwach monoton steigend und nach oben beschränkt durch T

$0 \geq s_n^{(2)}$ ist schwach monoton fallend und nach unten beschränkt durch $-T$

$\overset{\S 3, \text{Satz } 4}{\Longrightarrow} s_n^{(1)},\ s_n^{(2)}$ sind konvergent

$$\underset{\text{GWS}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n = s_n^{(1)} + s_n^{(2)} \text{ ist konvergent.}$$

(Für $a_n \in \mathbb{C}$ setzt man $s_n^{(1)} = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Re} a_k \geq 0}}^{n} \operatorname{Re} a_k, \ldots, s_n^{(4)} = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im} a_k < 0}}^{n} \operatorname{Im} a_k$

$s_n = s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \mathrm{i}(s_n^{(3)} + s_n^{(4)})$ und verfährt analog.) $\square$

Ergebnis von Satz 4:

$$\text{alle Reihen} \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \text{absolut konvergent} \\ \hdashline \text{bedingt konvergent} \\ \hline \text{divergent} \\ \hline \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{konvergente Reihen} \\ \\ \end{array}$$

Bemerkung: Konvergente Reihen lassen sich addieren/subtrahieren und mit Zahlen multiplizieren: $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konv. $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) =$
$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \right) \overset{\text{GWS}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ und ebenso: $\lambda \sum a_n = \sum \lambda a_n$.

Vorsicht: Nur absolut konvergente Reihen lassen sich umordnen (s. Übung 90) und multiplizieren. Letzteres heißt

$\sum a_n, \ \sum b_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{a_1 b_1}_{k=2} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{k=3} + \underbrace{(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1)}_{k=4} + \cdots =$$

jedes a_m
mit jedem b_n
multiplizieren

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{m+n=k} a_m \cdot b_n \right)$$

22.5 DAS QUOTIENTENKRITERIUM

Idee: Es sei z.B. $a_2 \approx \frac{1}{3} a_1, \ a_3 \approx \frac{1}{3} a_2, \ldots, a_{n+1} \approx \frac{1}{3} a_n$ bzw. $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{1}{3}}$. Dann ist $a_{n+1} \approx \frac{1}{3} a_n \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} a_{n-1} \approx \cdots \approx \left(\frac{1}{3}\right)^n a_1$ und $\sum a_n \approx \sum a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = a_1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{konv.}}$

sollte auch konvergent sein.

Exakt:

Satz 5 (Quotientenkriterium) Es sei $\sum a_n$ gegeben.

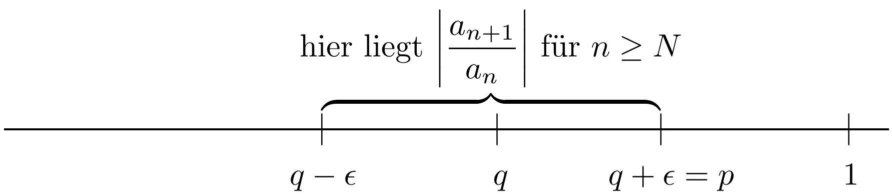
(I) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1 \Longrightarrow \sum a_n$ absolut konvergent

(II) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1 \Longrightarrow \sum a_n$ divergent

(Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ oder nicht existiert, ist alles möglich.)

Beweis: (I) $0 < \epsilon$ sei so (klein), daß $\underbrace{q + \epsilon}_{p} < 1$;

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \Longrightarrow \exists N : \forall n \geq N : \left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q \right| < \epsilon, \text{ d.h.}$$



$$\Longrightarrow 0 \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q + \epsilon = p \qquad \text{für } n \geq N$$

$$\Longrightarrow |a_{n+1}| \leq p \cdot |a_n| \text{ für } n \geq N$$

$$\Longrightarrow |a_{N+1}| \underset{\Downarrow}{\leq} p \cdot |a_N|$$

$$\Longrightarrow |a_{N+2}| \leq p \cdot |a_{N+1}| \leq p^2 |a_N| \Longrightarrow |a_{N+2}| \underset{\Downarrow}{\leq} p^2 |a_N|$$

$$\Longrightarrow |a_{N+3}| \leq p \cdot |a_{N+2}| \leq p^3 |a_N| \Longrightarrow |a_{N+3}| \leq p^3 |a_N|$$

$$\ddots \qquad \ddots \qquad \ddots$$

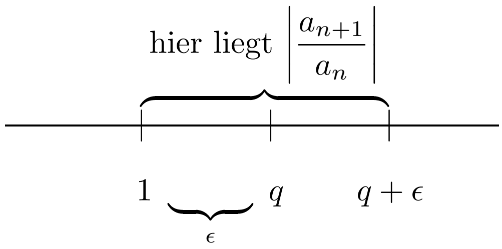
$$|a_{\underbrace{N+k}_{n}}| \leq p^k |a_N| = p^{N+k} \cdot \underbrace{\frac{|a_N|}{p^N}}_{c}$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq N : |a_n| \leq c \underbrace{p^n}_{b_n} \wedge \sum p^n \text{ konvergiert } (p < 1)$$

$$\Longrightarrow \text{ nach Vkrit. I: } \sum |a_n| \text{ konvergiert } \Longrightarrow \sum a_n \text{ absolut konvergent.}$$

(II) $q = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,\ \epsilon = q - 1$

$$\Longrightarrow \exists N : \forall n \geq N : \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q\right| < \epsilon$$



$$\Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \text{ für } n \geq N$$

$$\Longrightarrow |a_{n+1}| > |a_n| \text{ für } n \geq N$$

$$\Longrightarrow |a_{N+1}| > |a_N|,\ |a_{N+2}| > |a_{N+1}| > |a_N| \text{ etc.}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \underset{\text{(Satz 1)}}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ divergiert} \qquad \square$$

<u>Bsp. 7</u> a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \qquad (0! = 1);$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = q < 1 \Longrightarrow$ (Q.krit.) $\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert

§23: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} = 2.71828\ldots$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Longleftrightarrow \alpha > 1 \qquad$ (vgl. Bsp. 5)

Qkrit.: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Bigl(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\atop 0}\Bigr)^\alpha} = 1 = q \quad (\text{für beliebige } \alpha)$$

Das Quotientenkriterium gibt hier also keine Entscheidung. Man sieht, daß für $q = 1$ die Reihe sowohl konvergieren $(\alpha > 1)$ als auch divergieren $(\alpha \leq 1)$ kann.

§23: Potenzreihen

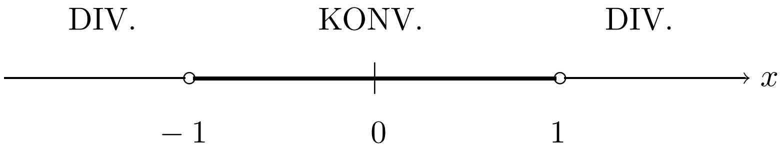
23.1 DER KONVERGENZRADIUS

Bemerkung: Ein Polynom vom Grad n hat die Form $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$.
Eine Potenzreihe ist ein "Polynom vom Grad ∞".

Def.: Es seien $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Die (von x abhängige) Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ heißt Potenzreihe. Die Zahlen $c_0, c_1, \dots$ heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

Bsp. 1 (Geometrische Reihe) $c_0 = c_1 = \cdots = 1$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert $\left(\text{und } = \dfrac{1}{1-x}\right)$ für $|x| < 1$, d.h. $-1 < x < 1$, und divergiert für $|x| \geq 1$.

Bild:

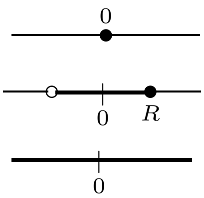


Bemerkung: Der nächste Satz besagt, daß die Menge der x, wo $\sum c_nx^n$ konvergiert, immer ein symmetrisches Intervall um 0 ist (bis auf die Randpunkte).

Satz 1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ sei eine Potenzreihe, $x_0 \in \mathbb{R}$

(A) $\sum c_nx_0^n$ konvergiert $\wedge\ |x| < |x_0| \Longrightarrow \sum c_nx^n$ konvergiert absolut

(B) Die Menge $M = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum c_nx^n \text{ konvergiert}\right\}$ hat eine der Formen

z.B. 

a) $\{0\} = [0,0]$

$\vee$ b) $]-R, R[$; $[-R, R[$; $]-R, R]$; $[-R, R]$ mit $R > 0$

$\vee$ c) $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

Def. Die Menge M heißt Konvergenzintervall und R $\big(= 0$ in a), $= \infty$ in c)$\big)$ heißt Konvergenzradius von $\sum c_nx^n$.

Beweis von Satz 1 (A) $p = \dfrac{|x|}{|x_0|} < 1$;

$$|c_nx^n| = \left|c_nx_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |c_nx_0^n| \cdot p^n$$

$$\sum c_nx_0^n \text{ konvergiert} \underset{(\S 22,\ \text{Satz } 1)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} c_nx_0^n = 0$$

$$\Longrightarrow \exists N : \forall n \geq N : |c_nx_0^n| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \forall n \geq N : |c_n x^n| = |c_n x_0^n| \cdot p^n \leq \underbrace{p^n}_{b_n}$$

$\sum p^n$ konvergiert $\overset{\text{Vkrit.I}}{\Longrightarrow} \sum |c_n x^n|$ konvergiert

(B) Nach (A) ist mit $x_0 \in M$ auch $]-|x_0|, |x_0|[\, \subset M$.

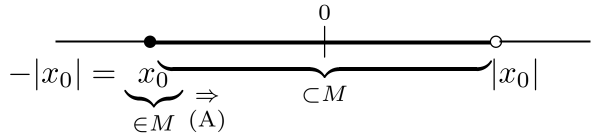
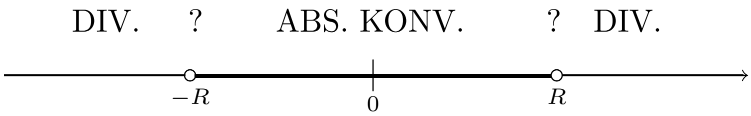


Bild für $x_0 < 0$

Daher hat M eine der Formen in (B). $\square$

<u>Ergebnis von Satz 1</u>



Die Punkte $x = \pm R$ sind separat zu untersuchen. In Bsp. 1 etwa wäre $R = 1$;

$\sum x^n$ ist in $x = \pm 1$ div. ($x = \ 1 \Longrightarrow 1 + 1 + \cdots$ divergiert

$x = -1 \Longrightarrow 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$ divergiert)

$\Longrightarrow M =]-1, 1[$.

<u>Bsp. 2</u> (ln) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n x^n}{n}}_{a_n} = \frac{2x}{1} + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} + \cdots$

a) Quotientenkriterium: $\displaystyle q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} x^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{|x^{n+1}|}^{|x^n|\cdot|x|} 2^{n+1} \cdot n}{|x^n| 2^n (n+1)} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2|x|n}{n+1} = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}} = 2|x|$$

Daher ist $\sum a_n$ absolut konvergent für $q = 2|x| < 1$, d.h. $|x| < \dfrac{1}{2}$

divergent für $q = 2|x| > 1$, d.h. $|x| > \dfrac{1}{2}$

? für $q = 2|x| = 1$, d.h. $x = \pm\dfrac{1}{2}$

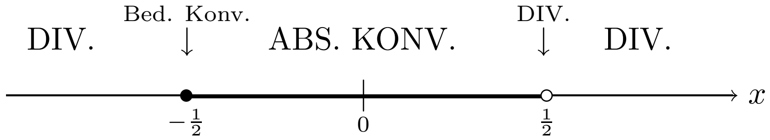
Also $R = \dfrac{1}{2}$.

b) Untersuchung der Punkte $x = \pm\dfrac{1}{2}$:

α) $x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \sum a_n = \sum \dfrac{1}{n}$ divergiert (§22, Bsp. 4)

β) $x = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \sum a_n = \sum \dfrac{(-2)^n}{2^n \cdot n} = \sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (§22, Bsp. 6)

Ergebnis: $M = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$



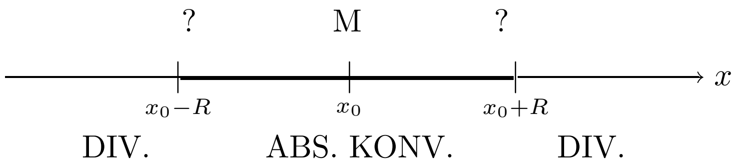
Vorgangsweise allgemein: $\sum \underbrace{c_n x^n}_{a_n}$ gegeben.

a) $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{x^{n+1} c_{n+1}}{x^n c_n} \right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |x| \cdot l;$

$q < 1 \Longleftrightarrow |x| < \dfrac{1}{l} = R \; (l = 0 \Longrightarrow R = \infty; \; l = \infty \Longrightarrow R = 0)$

b) Betrachte $x = \pm R$ separat.

Bemerkung: Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, d.h. "Potenzreihe um x_0" ist analog M ein symmetrisches Intervall um x_0 :



23.2 GLIEDWEISES DIFFERENZIEREN UND INTEGRIEREN

Idee: Wir versuchen $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ zu berechnen. (Dann ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n} = f(2x)$ erledigt.) Wenn wir die einzelnen Terme nach x differenzieren, erhalten wir $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n x^{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, eine geometrische Reihe.

Satz 2 (ohne Beweis) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$ (auch $R = \infty$ ist erlaubt.) Für $|x| < R$ ist 1) $f(x)$ unendlich oft differenzierbar,
2) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ und $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ und diese Reihen haben wieder Konvergenzradius R.

In Worten: Potenzreihen kann man für $|x| < R$ gliedweise differenzieren und integrieren.

Zurück zu Bsp. 2 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ hat Konvergenzradius $R = 1$
(zeigt man wie in 23.1)

$|x| < 1 \underset{\text{Satz 2}}{\Longrightarrow} f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$

$$\Longrightarrow f(x) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(eigentl. } \in \text{)}}}{=} \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|1-x| + C = -\ln(1-x) + C$$

(weil $|x| < 1 \Longleftrightarrow -1 < x < 1 \Longrightarrow 1 - x > 0$)

$f(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0 \Longrightarrow -\ln(1-0) + C = 0 \Longrightarrow C = 0$

Ergebnis: $\boxed{\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \text{ für } |x| < 1 = R}$

Das gilt auch noch für $x = -1$ (hier ist $M = [-1, 1[$) nach dem "Satz von Abel"

$$\Longrightarrow \underbrace{\ln\bigl(1-(-1)\bigr)}_{\ln 2 \approx 0.693} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

Bsp. 3 Wir wollen $f(x) = \arctan x$ in eine Potenzreihe entwickeln.
Es sei $|x| < 1 \Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{setze } p=-x^2}}{=} \frac{1}{1-p} \underset{\substack{\uparrow \\ |p|<1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots$$

$$\Longrightarrow \arctan x = f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots)\,\mathrm{d}x \overset{\text{(Satz 2)}}{=}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots + C$$

$\arctan 0 = 0 \Longrightarrow C = 0$

Rechnung mit dem Summensymbol:

$$\arctan x = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Satz 2} \\ \downarrow}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underbrace{C}_{=0}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \text{ für } |x| < 1 = R}$$

Vorsicht: $\arctan x$ ist definiert in ganz $\mathbb{R}$, aber der Konvergenzradius der Reihe ist $R = 1$ und $M = [-1, 1]$. Wieder gilt die Gleichung auch für $x = \pm 1 \in M$ (Satz von Abel), d.h. $x = 1 \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$.

23.3 DER SATZ VON TAYLOR IM $\mathbb{R}^1$

Wiederholung: f differenzierbar in x_0, $x = x_0 + h \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \varrho(h)$ mit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho(h)}{h} = 0$ bzw. in x geschrieben

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\substack{g(x)=s_1(x)= \\ \text{lin. Näherung an } f \text{ bei } x_0}} + \varrho(x-x_0)$$

Tangente in x_0 : $y = g(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{Polynom vom Grad 1}}$

Frage: Wie läßt sich f genauer, d.h. durch ein Polynom höheren Grades, annähern?

Satz 3 (Satz von Taylor im $\mathbb{R}^1$)

1) f n-mal differenzierbar in $x_0 \Longrightarrow$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n + \varrho_n(h)$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_n(h)}{h^n} = 0$, bzw. in $x = x_0 + h$ geschrieben:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}_{s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k} + \varrho_n(x-x_0)$$

2) Wenn f im abgeschlossenen Intervall von x_0 bis x $(n+1)$-mal differenzierbar ist, so gilt die "Lagrange'sche Restgliedformel":

$$\varrho_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi_n \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x.$$

Def.: s_n heißt Taylorpolynom n-ten Grades an f in x_0, ϱ_n heißt n-tes Restglied.

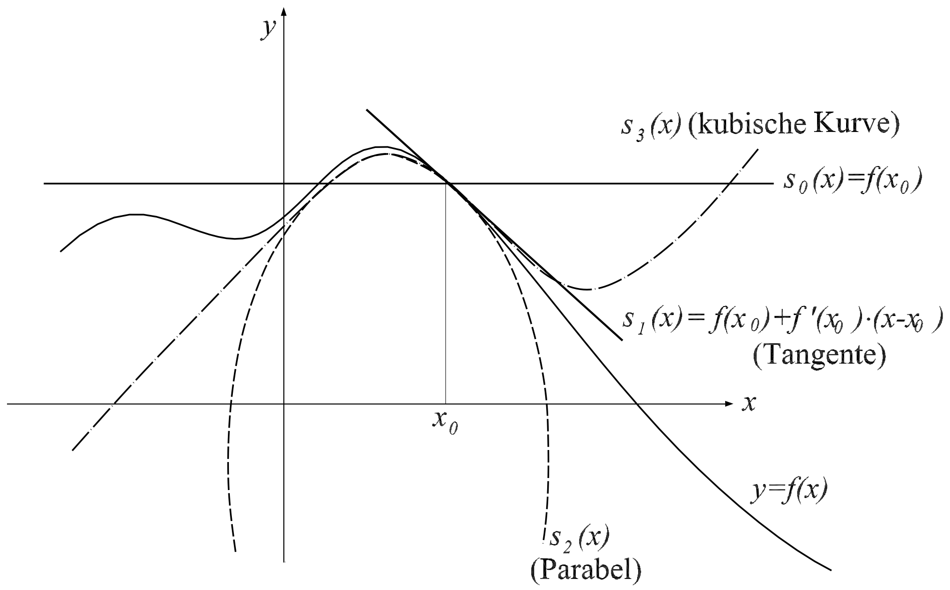


Bild:

Je größer n ist, umso besser nähert s_n die Kurve bei x_0 an.

Folgerung: Wenn f ∞ oft differenzierbar in x_0 und wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(h) = 0$, so folgt $f(x_0+h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n$ bzw. in x geschrieben:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n}$$

Def.: Diese Potenzreihe in $(x-x_0)$-Potenzen heißt Taylorreihe von f um x_0. Speziell für $x_0 = 0$ heißt

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Mac-Laurin-Reihe von f (oder Taylorreihe um 0).

Bsp. 4 $f(x) = \mathrm{e}^x,\ f'(x) = \mathrm{e}^x, \dots, f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \Longrightarrow \forall n : f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

MacLaurin: $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ falls $\varrho_n(x) \to 0$

Hier ist also $x_0 = 0$ und nach Lagrange $\varrho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$

$= \frac{\mathrm{e}^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{?} 0$ mit ξ_n zwischen 0 und x.

Es sei $|x| \le k \in \mathbb{N}$ fest und $n > k$; $\xi_n \le |x| \Longrightarrow \mathrm{e}^{\xi_n} \le \mathrm{e}^{|x|} \le e^k$ und

$$\left|\varrho_n(x)\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\xi_n}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{\mathrm{e}^k|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{\mathrm{e}^k k^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^k\cdot k\cdot k\cdot\dots\cdot k\cdot k\cdot\dots\cdot k}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k\cdot(k+1)\cdot\dots\cdot(n+1)} = \frac{\mathrm{e}^k\cdot k^k}{k!}\cdot\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\le 1}\cdot\dots\cdot\underbrace{\frac{k}{n}}_{\le 1}\cdot\frac{k}{n+1}$$

$$\le \underbrace{\frac{\mathrm{e}^k\cdot k^k}{k!}}_{\text{fest}}\cdot\underbrace{\frac{k}{n+1}}_{\to 0} \longrightarrow 0 \text{ für } n\to\infty. \text{ Also}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \text{ für } x\in\mathbb{R}\ (R=\infty)}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe muß also $R=\infty$ sein (wie man auch mit dem Quotientenkriterium sieht, s. Übung 95b).

<u>Noch einmal Bsp. 2</u>

$$f(x) = \ln(1-x), \qquad f(0)=0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\underbrace{(-1)}_{\text{innere Abl.}} = -(1-x)^{-1}, \qquad f'(0) = -1$$

$$f''(x) = -(-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1) = -(1-x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -(-2)(1-x)^{-3}\cdot(-1) = -2(1-x)^{-3}, \qquad f'''(0) = -2$$

$$f^{(4)}(x) = -2\cdot(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1) = -6(1-x)^{-4},\ f^{(4)}(0) = -3!$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1-x)^{-n}, \qquad f^{(n)}(0) = -(n-1)!$$

Satz 3 gibt also mit $x_0 = 0$:

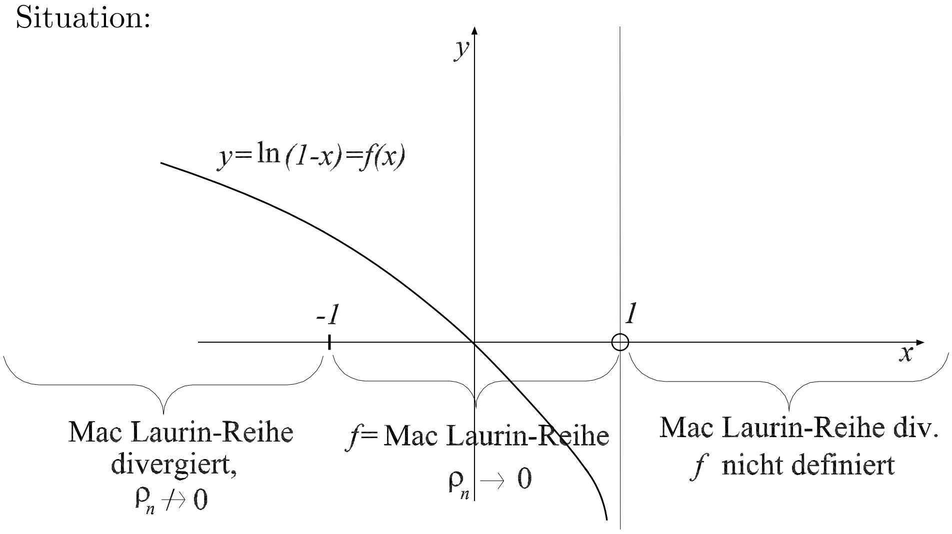
$$\ln(1-x) = f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k}_{s_n(x)} + \varrho_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{-(k-1)!}{k!}x^k + \varrho_n(x) \qquad \Big|\, k! = k\cdot(k-1)!$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + \varrho_n(x)$$

Nach 23.1/2 hat die Potenzreihe $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ den Konvergenzradius $R=1$ und ist $\ln(1-x)$ für $-1\le x<1$. Daher ist $\varrho_n(x)\to 0$ für $-1\le x<1$ und $\varrho_n(x)\not\to 0$ für $x<-1$. Für $x\ge 1$ ist $f(x)$ nicht definiert.

Situation:



Ähnlich ist es bei $f(x) = \arctan x$, wo auch $R = 1$.

<u>Bsp. 5</u>

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x &&\Longrightarrow f(0) = 0 \\ f' &= \cos &&\Longrightarrow f'(0) = 1 \\ f'' &= -\sin &&\Longrightarrow f''(0) = 0 \\ f''' &= -\cos &&\Longrightarrow f'''(0) = -1 \\ f^{(4)} &= \sin, && \qquad \text{alles beginnt von vorn} \end{aligned}$$

$$\varrho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \left|f^{(n+1)}(\xi_n)\right| = \left\{ \begin{array}{c} |\sin(\xi_n)| \\ |\cos(\xi_n)| \end{array} \right\} \le 1$$

$$\Longrightarrow \left|\varrho_n(x)\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty \text{ und } x \text{ fest (s. Bsp. 3)}$$

Also gilt nach MacLaurin:

$$\sin x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

bzw. $$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R} \ (R = \infty)}$$

Weil sin ungerade ist, treten nur ungerade x-Potenzen in der Mac-Laurin-Reihe auf (s. Satz 4) und diese stellt man durch x^{2k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dar.

Ebenso: $$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - + \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R} \ (R = \infty)}$$

Bsp. 6 (Hyperbelfunktionen) $f = \mathrm{sh},\ f(0) = 0$

$f' = \mathrm{ch} \Longrightarrow f'(0) = 1$

$f'' = \mathrm{sh} \Longrightarrow f''(0) = 0$

$f''' = \mathrm{ch} \Longrightarrow f'''(0) = 1$ etc.

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\mathrm{sh}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R}\ (R = \infty)}$$

$$\text{Ebenso} \qquad \boxed{\mathrm{ch}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots \text{ für } x \in \mathbb{R}\ (R = \infty)}$$

Beweis von Satz 3 1) Zu zeigen ist

f n-mal differenzierbar in $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_n(h)}{h^n} = 0$

für $\varrho_n(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \dfrac{f'(x_0)}{1!} h - \dfrac{f''(x_0)}{2!} h^2 - \cdots - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$;

ϱ_n hängt natürlich auch von f ab, wir bezeichnen es im Beweis genauer mit $\varrho_{n,f}$.

$n = 1:$ $\varrho_{1,f} = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h = \varrho$ von §6 $\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_{1,f}(h)}{h} = 0$

(siehe §6)

$n > 1:$ $\varrho_{n,f}(0) = 0 \Longrightarrow$ l'Hôpital gibt $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_{n,f}(h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} \varrho_{n,f}(h)}{n h^{n-1}}$;

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} \varrho_{n,f}(h) &= f'(x_0 + h) - 0 - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2h - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n h^n \\
&= f'(x_0 + h) - f'(x_0) - \frac{(f')'(x_0)}{1!} h - \cdots - \frac{(f')^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} \\
&= \varrho_{n-1,f'}(h)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_{n,f}(h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_{n-1,f'}(h)}{n h^{n-1}} = \cdots = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varrho_{1,f^{(n-1)}}(h)}{n! h} = 0$ nach Fall $n = 1$

1.5) Der MWS der $\int$-rechnung f_1, f_2 stetig auf $[a, b]$, $f_1(t) \geq 0\ \forall t \in [a, b]$

$\Longrightarrow \exists t_0 \in [a, b] : \int\limits_a^b f_1(t) f_2(t)\, \mathrm{d}t = f_2(t_0) \int\limits_a^b f_1(t)\, \mathrm{d}t$

Denn $\left.\begin{matrix} m \\ M \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix}\right\}$ von $f_2(t),\ t \in [a, b]$ (existiert nach §4, Satz 6, p. 44) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall t \in [a, b] : m \leq f_2(t) \leq M \ \big|\cdot f_1(t) \geq 0$

$\Longrightarrow \forall t \in [a, b] : f_1(t) m \leq f_1(t) f_2(t) \leq f_1(t) M$; $\qquad \int$ monoton, §10,3), p. 83

$$\Longrightarrow \int_a^b f_1(t) m \,\mathrm{d}t \leq \underbrace{\int_a^b f_1(t) f_2(t) \,\mathrm{d}t}_{I} \leq \int_a^b f_1(t) M \,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow m \int_a^b f_1(t) \,\mathrm{d}t \leq I \leq M \underbrace{\int_a^b f_1(t) \,\mathrm{d}t}_{\geq 0}$$

$$\Longrightarrow I = c \int_a^b f_1(t) \,\mathrm{d}t \;\text{ mit }\; m \leq c \leq M$$

ZWS (§4, p. 43) $\Longrightarrow c = f_2(t_0)$

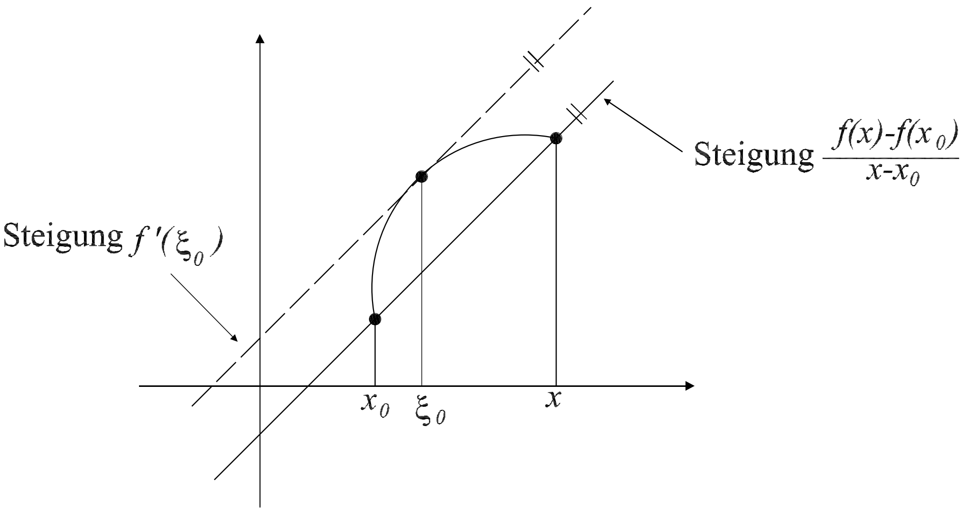
2) Zu zeigen ist: $\exists \xi_n \in [x_0, x] : \varrho_n(x - x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$

wobei $\varrho_n(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \cdots - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

(Der Einfachheit halber sei $x \geq x_0$).

Für $\underline{n = 0}$ ist das gerade der MWS der Differentialrechnung (§8, Satz 3, p. 66), denn

$\varrho_0(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \underset{\text{MWS}}{=} f'(\xi_0)(x - x_0)$



<u>Allgemeines n</u> a) Darstellung von ϱ_n durch ein $\int$:

$$\int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u_1} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v_1{}'} \,\mathrm{d}t \overset{\text{partiell}}{=} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u_1} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v_1} \Bigg|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1} \cdot \overbrace{(-1)}^{\substack{\text{innere}\\ \text{Abl.}}}}{(n-1)!}}_{u_1{}'} \cdot \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v_1} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{untere} \\ \text{Grenze}}}{-} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{u_2} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v_2{}'} \,\mathrm{d}t = \cdots = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$-\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \dots - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\,\mathrm{d}t}_{f(x)-f(x_0)} =$$

$$= f(x) - s_n(x) = \varrho_n(x-x_0)$$

b) MWS $\int$-rechnung $\Longrightarrow \varrho_n(x-x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{0\le f_1} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f_2}\,\mathrm{d}t =$

$$= f^{(n+1)}(\xi_n)\cdot \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi_n)\cdot \int_{x-x_0}^{0} \frac{u^n}{n!}\,(-\mathrm{d}u) \qquad \left\| \begin{array}{l} u = x-t \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -1 \\ t = x_0 \Rightarrow u = x-x_0 \\ t = x \Rightarrow u = 0 \end{array} \right.$$

$$= f^{(n+1)}(\xi_n)\cdot \left.\frac{-u^{n+1}}{(n+1)!}\right|_{x-x_0}^{0} = f^{(n+1)}(\xi_n)\cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \square$$

<u>Satz 4</u> $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ für $|x| < R,\ R > 0.$

Dann: $f \left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$ nur $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ x-Potenzen treten in der Mac-Laurin-Reihe auf.

<u>Beweis:</u> Z.B. f gerade, d.h. $\forall x : f(-x) = f(x) \qquad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\Longrightarrow \forall x : -f'(-x) = f'(x)$, d.h. f' ungerade $\qquad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\Longrightarrow \forall x : +f''(-x) = f''(x)$, d.h. f'' gerade

$\Longrightarrow \dots \Longrightarrow f^{(2k+1)}$ ungerade;

g ungerade $\Longrightarrow g\overbrace{(0)}^{=-0} = g(-0) = -g(0) \qquad \big| + g(0)$

$\Longrightarrow 2g(0) = 0 \Longrightarrow g(0) = 0$

Also gilt $\forall k : f^{(2k+1)}(0) = 0$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ungerade } n \\ \text{geben } 0}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} \text{ für } |x| < R.$$

Umgekehrt, wenn $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k}$, so ist $f(-x) = f(x)$ für $|x| < R$, d.h. f gerade. $\square$

<u>Bsp.:</u> Siehe Bsp. 3 (arctan), Bsp. 5 (sin, cos), Bsp. 6 (sh, ch).

23.4 DIE BINOMIALKOEFFIZIENTEN

Idee:

$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$$

$$\underbrace{(a+b)}_{\text{Binom}}{}^3 = \underbrace{1}_{=\binom{3}{3}}\cdot a^3b^0 + \underbrace{3}_{=\binom{3}{2}}\cdot a^2b^1 + \underbrace{3}_{=\binom{3}{1}}\cdot a^1b^2 + \underbrace{1}_{=\binom{3}{0}}\cdot a^0b^3$$

„Binomialkoeffizienten"

Allgemein:

Satz 5 $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $n \in \{0,1,2,\dots\} \Longrightarrow$

$$(*) \qquad \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}, \qquad \text{wobei } \binom{n}{0} = 1 \text{ und für } k \in \mathbb{N}:$$

$\binom{n}{k} \overset{1)}{=}$ Anzahl der Möglichkeiten, k Dinge aus n Dingen auszuwählen

$$\overset{2)}{=} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\ \cdots\ \cdots\ 1} \overset{3)}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\overset{4)}{=}$ k-te Zahl in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks (bei Zählung ab 0):

$$\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & 1 & & & & & & \text{0. Zeile} \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \text{1. Zeile} \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \text{2. Zeile} \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \text{3. Zeile} \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \text{4. Zeile} \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \text{5. Zeile}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| \\
\text{0. Zahl} & \text{1. Zahl} & \text{2. Zahl} & \text{3. Zahl} & \text{4. Zahl} & \text{5. Zahl} \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Außerdem gilt: 5) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

6) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Def.: Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen Binomialkoeffizienten, $(*)$ heißt binomische Formel.

Bsp. 7 $n = 5$, $k = 2$; $\binom{5}{2}$ tritt bei a^2b^3 in der binomischen Formel auf:

$$(a+b)^5 = \cdots + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \cdots$$

1) Wähle aus den 5 Karten As, K, D, B, 10 zwei aus

$\Longrightarrow \exists 10$ Möglichkeiten:

$$10 \begin{cases} \text{As,K; As,D; As,B; As,10} \\ \text{K,D; K,B; K,10} \\ \text{D,B; D,10} \\ \text{B,10} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \binom{5}{2} = 10$$

2) $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \dfrac{20}{2} = 10\surd$

3) $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{120}{2 \cdot 6} = 10\surd$

4) siehe oben 5) $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ 6) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 20 = \binom{6}{3}$

<u>Beweis von Satz 5</u>

1) $(a+b)^2 = \underbrace{(a+b)}_{\text{1. Klammer}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{2. Klammer}}$

$$= \underbrace{a}_{\substack{\text{aus}\\ \text{1. Kl.}}} \cdot \underbrace{a}_{\substack{\text{aus}\\ \text{2. Kl.}}} + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$= \sum \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{1. Kl.}}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{2. Kl.}}}$$

über alle Möglichkeiten $\hookleftarrow$

Analog

$$(a+b)^n = (\underbrace{a+b}_{\text{1. Kl.}}) \cdot (\underbrace{a+b}_{\text{2. Kl.}}) \cdot \dots \cdot (\underbrace{a+b}_{n.\ \text{Kl.}})$$

$$= \sum \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{1. Kl.}}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ \text{2. Kl.}}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{aus}\\ n.\ \text{Kl.}}}$$

In der $\sum$ tritt $a^k b^{n-k}$ auf, wenn in k Klammern a und in den restlichen b gewählt wird $\Longrightarrow (a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, wobei

$\binom{n}{k}$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n Dingen (hier: Klammern)

k auszuwählen (diejenigen, wo a genommen wird).

2) Speziell $f(x) = (\underset{\substack{\| \\ a}}{x} + \underset{\substack{\| \\ b}}{1})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Andererseits nach MacLaurin:

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, da $f^{(n+1)} = 0$ und daher nach Lagrange auch

$$\varrho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0;$$

$$f' = n(x+1)^{n-1},\ f'' = n(n-1)(x+1)^{n-2}, \cdots,$$

$$f^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+1)^{n-k}, \quad f^{(k)}(0) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}x^k$$

$$\Longrightarrow \tbinom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

3) $$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)}(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!\qquad\cancel{(n-k)}(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

5) $$\binom{n}{\underbrace{n-k}_{\text{statt } k}} \overset{3)}{=} \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \overset{3)}{=} \binom{n}{k}$$

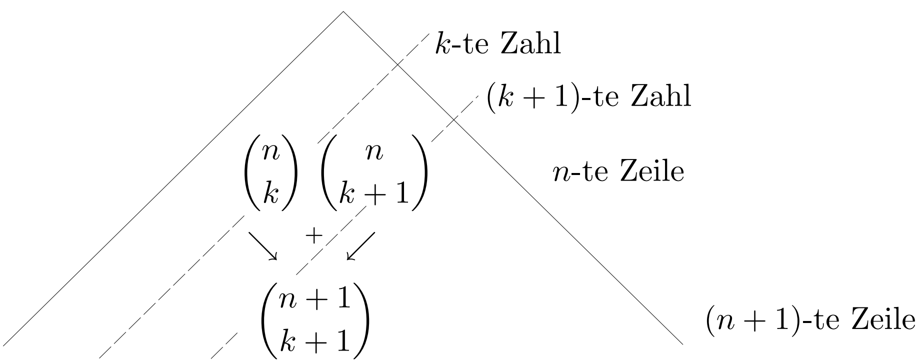
(Direkt aus $(*)$: $(a+b)^n = \cdots + \tbinom{n}{k}a^k b^{n-k} + \cdots + \tbinom{n}{n-k}a^{n-k}b^k + \cdots$)
$\qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad$ (Symmetrie in a, b)

6) Entweder (wie 5) rechnerisch aus 2 oder (besser) aus $(*)$

$$(a+b)^n = \cdots + \tbinom{n}{k}a^k \overbrace{b^{n-k} + \tbinom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1} + \cdots \quad \Big| \cdot (a}^{A} + b)$$
$$\underbrace{\tbinom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1} + \cdots \quad \Big| \cdot (a+b)}_{B}$$

$$\Longrightarrow (a+b)^{n+1} = \cdots + \underbrace{\overbrace{\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}}^{A} + \overbrace{\binom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k}}^{B}} + \cdots$$
$$= \binom{n+1}{k+1}a^{k+1}b^{n-k}$$

4) folgt aus 6), denn die 1. Zeile stimmt und die $(n+1)$ -te Zeile von Binomialkoeffizienten erhält man aus der n -ten Zeile nach 6) durch Addition



□

Bsp. 8 Wie wahrscheinlich sind

a) ein Lotto 6-er, b) ein Lotto 5-er?

a) Wir müssen 6 Zahlen aus 45 auswählen und haben nach Satz 5, 1) dafür $\binom{45}{6}$ Möglichkeiten; $\binom{45}{6} \overset{2)}{=} \dfrac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8\,145\,060$;
nur 1 Kombination gibt den 6-er $\Longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit für 6-er $=$
$= \dfrac{\text{Anzahl der "günstigen Möglichkeiten"}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}} = \dfrac{1}{8\,145\,060} \approx 1$ zu 8 Millionen $\approx$
$\approx 0.0000001228 = 0.00001228\,\%$

b) Einen 5-er erhält man, wenn man 5 aus den 6 richtigen wählt und 1 Zahl aus den 39 falschen. Die "günstigen" Möglichkeiten (für den 5-er) sind daher $\binom{6}{5} \cdot \binom{39}{1} =$ $6 \cdot 39 \Longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit für den 5-er $= \dfrac{6 \cdot 39}{8\,145\,060} \approx 0.0000287 = 0.00287\,\% \approx$ $\dfrac{1}{34808} \approx 1$ zu 35 Tausend.

Idee: $f(x) = (1+x)^\nu$ läßt sich auch für $\nu \in \mathbb{R}$ differenzieren. Die Rechnung in 2) des Beweises ergibt $f^{(k)}(0) = \nu \cdot (\nu-1) \cdots (\nu-k+1)$. Wir erhalten als MacLaurinreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} x^k$.

Def.: Für $\nu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ setzt man $\binom{\nu}{0} = 1$ und $\binom{\nu}{k} = \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k(k-1)\ \cdots\ \cdots\ 1}$

Satz 6 Für $\nu \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ gilt

$$\boxed{(1+x)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} x^k \text{ für } |x| < 1 = R} \qquad (*)$$

Bemerkung: Für $\nu = n \in \mathbb{N}$ ist $\binom{n}{k} = 0$ wenn $k > n$ und $(*)$ ist die binomische Formel. Für $\nu \in \mathbb{R}$ nimmt man $(*)$.

Beweisskizze: Wir müßten $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$ für festes x mit $|x| < 1$ zeigen.

Fall 1 $0 \le x < 1$; Lagrange gibt

$$\varrho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n)(\xi_n+1)^{\nu-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$0 = x_0 \le \xi_n \le x < 1 \Longrightarrow \xi_n + 1 \ge 1 \Longrightarrow (\xi_n+1)^{\underbrace{\nu-n-1}_{\downarrow}}$ ist beschränkt;
negative Potenz für großes n

wenn $|\nu| \le k \in \mathbb{N}$, k fest, so ist $|\nu - 1| \le k+1$ etc. $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left| \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n)}{(n+1)!} \right| \le \frac{k(k+1)\cdots(k+n)}{(n+1)!} \overset{\text{Satz 5, 2)}}{=} \binom{k+n}{n+1} =$$

$$\overset{\text{Satz 5, 5)}}{=} \binom{k+n}{k+n-(n+1)} = \binom{k+n}{k-1} = \frac{(k+n)\cdots(k+n-(k-1)+1)}{(k-1)!} \le$$

$\leq (k+n)\cdots(k+n) = (k+n)^{k-1}$.

Weil $x^{n+1}\cdot(k+n)^{k-1} \to 0$ für $n\to\infty$ und $0\leq x<1$, $k\in\mathbb{N}$ fest (vgl. Math. A, p. 73, Bsp. 1, x dort entspricht n hier), folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$

Fall 2 $-1 < x < 0$ geht nicht wie im Fall 1, da $\xi_n + 1 \leq 1$. Man verwendet ein allgemeines Prinzip:

$f(x)$ = MacLaurinreihe für $0 \leq x < R \wedge f$ "analytisch" $\implies$ = gilt auch für $-R < x < 0$. $\square$

Bsp. 8 a) $(1+x)^{-1/2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k$

$$\binom{-1/2}{0} = 1,\ \binom{-1/2}{1} = \frac{-1/2}{1},\ \binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2\cdot 1} = +\frac{3}{8},$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdots$$

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(\overbrace{-1/2-k+1}^{-(2k-1)/2})}{k!} = \frac{(-1)^k 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k\cdot k!}$$

Also

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^k = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - + \cdots \quad \text{für } |x|<1}$$

b) $f(x) = \arcsin x$, $|x|<1 \implies$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1\underbrace{-x^2}_{t})^{-1/2} = (1+t)^{-1/2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\cancel{-}1)^k 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} \underbrace{t^k}_{(-x^2)^k = (\cancel{-}1)^k x^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^{2k}$$

$$\implies \arcsin x = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + C$$

$x = 0 \implies 0 = C$

Ergebnis:

$$\boxed{\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \quad \text{für } |x|<1}$$

23.5 DIE TAYLORREIHE IM $\mathbb{R}^n$

Wiederholung: $f(x,y)$ sei differenzierbar in $\vec{x}_0 = \binom{x_0}{y_0}$. Nach §19, Def. und Satz 1, p. 15, gilt:

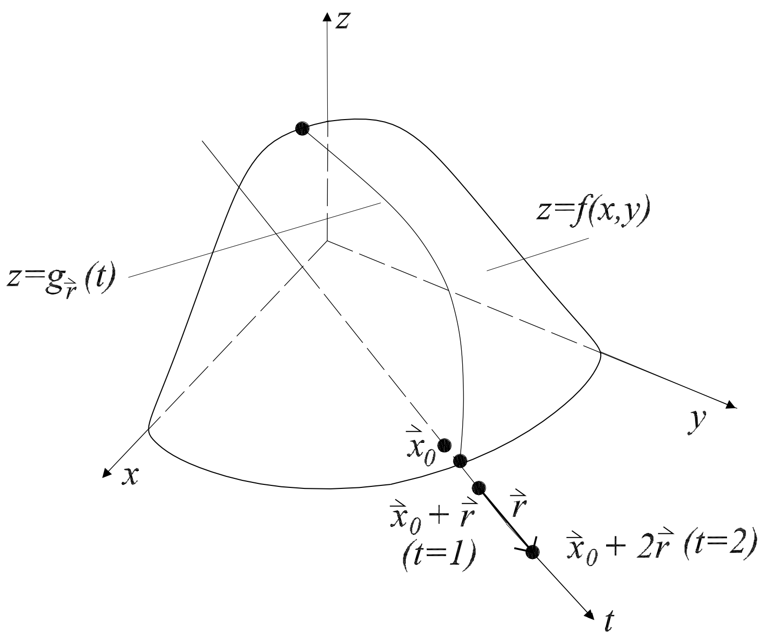
$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)}_{s_1(\vec{x}) \text{ lineare Näherung an } f \text{ bei } \vec{x}_0} + \varrho_1(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

mit $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \dfrac{\varrho_1(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^1} = 0$ $\quad\big($Tangentialebene: $z = s_1(x,y)\big)$

Problem: Nähere f genauer an!

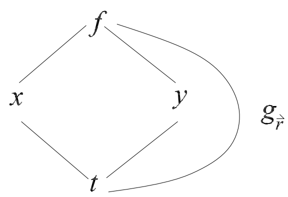
Lösung: Betrachte $g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ fest mit $\|\vec{r}\| = 1$;

$g_{\vec{r}}$ ist eine Funktion einer Variablen:



Satz 3 gibt $g_{\vec{r}}(t) = \sum\limits_{k=0}^{l} \dfrac{g_{\vec{r}}^{(k)}(0)}{k!} t^k + \varrho_l(t)$; was ist $g_{\vec{r}}^{(k)}(0)$?

$$g_{\vec{r}}(t) = f(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2)$$
$$g_{\vec{r}}(0) = f(\vec{x}_0)$$



$$\dot{g}_{\vec{r}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots)\cdot r_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdots)\cdot r_2 = \left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x} + r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right](\vec{x}_0 + t\vec{r})$$

$$\dot g_{\vec r}(0)=\left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x}+r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right](\vec x_0)\big(=\mathrm{RA}(f,\vec x_0,\vec r)\big)$$

Iteration: $\ddot g_{\vec r}(t)=(\dot g_{\vec r})^{\boldsymbol{\cdot}}(t)=\left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x}+r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right](\vec x_0+t\vec r)$

$$\ddot g_{\vec r}(0)=\left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x}+r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right](\vec x_0)$$

$$\left(=r_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec x_0)+2r_1r_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec x_0)+r_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec x_0),\qquad \text{vgl. 20.5, p. 36}\right)$$

Allgemein: $g_{\vec r}^{(k)}(0)=\left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x}+r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec x_0)$

$$\left(\overset{\text{Satz 5}}{=}\sum_{i=0}^{k}\underbrace{\binom{k}{i}}_{\frac{k!}{i!(k-i)!}}\frac{\partial^k f}{(\partial x)^i(\partial y)^{\underbrace{k-i}_{=j}}}(\vec x_0)r_1^i r_2^{k-i}\right)$$

und daher $g_{\vec r}(t)=\sum\limits_{k=0}^{l}\frac{\left[\left(r_1\frac{\partial}{\partial x}+r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec x_0)}{k!}t^k+\varrho_l(t)$

$$=\sum_{k=0}^{l}\frac{\left[\left(tr_1\frac{\partial}{\partial x}+tr_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec x_0)}{k!}+\varrho_l(t)$$

Wir setzen $\vec r=\dfrac{\vec x-\vec x_0}{\|\vec x-\vec x_0\|}$, $t=\|\vec x-\vec x_0\|$ und zur Abkürzung $\vec h=\vec x-\vec x_0=t\vec r\Longrightarrow$

$f(\vec x)=f(\vec x_0+\vec x-\vec x_0)=f(\vec x_0+t\cdot\vec r)=g_{\vec r}(t)\Longrightarrow$

<u>Satz 7</u> 1) $f(x,y)$ sei l-mal differenzierbar in $x_0\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\boxed{f(x,y)=\sum_{k=0}^{l}\frac{\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right](\vec x_0)}{k!}+\varrho_l(\vec x-\vec x_0)}$$

wobei <u>nach dem Differenzieren</u> $h_1=x-x_0,\ h_2=y-y_0$ gesetzt wird und $\lim\limits_{\vec x\to\vec x_0}\dfrac{\varrho_l(\vec x-\vec x_0)}{\|\vec x-\vec x_0\|^l}=0$. Daraus folgt mit der binomischen Formel:

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{\substack{i=0\\ i+j\le l}}^{l}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{i+j}f}{(\partial x)^i(\partial y)^j}(\vec x_0)\cdot(x-x_0)^i(y-y_0)^j+\varrho_l(\vec x-\vec x_0)}$$

2) Allgemein in n Variablen: $f(x_1, \ldots, x_n)$ sei l-mal differenzierbar in $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{l} \frac{\left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right](\vec{x}_0)}{k!} + \varrho_l(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

wobei nach dem Differenzieren $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ eingesetzt wird.

Bemerkungen: 1) Falls $\varrho_l \to 0$, gilt wieder $f(\vec{x}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \cdots$.

2) Die ersten 4 Terme in Satz 7, 1) (d.h. $n = 2$) sind:

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)}_{s_1(\vec{x}):\ \text{Tangentialebene}} +$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)^2\right]}_{s_2(\vec{x}):\ \text{“ Schmiegeparaboloid”}} +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0)^2 \cdot (y - y_0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)^3\right] + \varrho_3(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

3) Die ersten 3 Terme in Satz 7, 2) (d.h. beliebiges n) sind:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{(x_1 - x_{0,1})\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + \cdots + (x_n - x_{0,n})\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)}_{=(\vec{x}-\vec{x}_0)^T \cdot \nabla f(\vec{x}_0)} +$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2!}\left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f\right](\vec{x}_0)} + \varrho_2(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j})\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(\vec{x} - \vec{x}_0)^T}_{1\times n} \cdot \underbrace{\mathrm{H}f(\vec{x}_0)}_{n\times n} \cdot \underbrace{(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{n\times 1}$$

Somit: $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \mathrm{H}f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \varrho_2(\vec{x} - \vec{x}_0)$

Bsp. 9 Berechne die Taylorreihe von $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$ um $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ bis

ϱ_2 (vgl. §19, Bsp. 3).

$$z = f(x,y) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}, \quad f(\vec{x}_0) = \frac{2}{3}$$

$$z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x/4}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4}$$

$$z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = -1$$

$$z_{xx} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{z-x\cdot z_x}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{15}{32}$$

$$z_{xy} = +\frac{1}{4}\cdot\frac{x\cdot z_y}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{2}{3}\cdot(-1)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{3}{8}$$

$$z_{yy} = -\frac{z-y\cdot z_y}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) = -\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-1)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -3$$

Also: $\nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{H}f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{32} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -3 \end{pmatrix}$,

$$f(x,y) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)^2 + \varrho_2\right.$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)-1\left(y-\frac{2}{3}\right)}_{z=s_1(x,y):\text{ Tangentialebene}}+\frac{1}{2}\left[-\frac{15}{32}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-2\frac{3}{8}\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right)-3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\right]}_{z=s_2(x,y):\text{ Schmiegeparaboloid}}+$$

$$+\varrho_2$$

<u>Bemerkung:</u> Aus Satz 7 (der oben auch nicht bis ins Letzte bewiesen wurde, da ϱ_l von der Richtung $\dfrac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$ abhängt und daher $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\dfrac{\varrho_l(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^l} = 0$ noch genauer zu begründen wäre) folgt $(*)$ in S. 39, 20.5, denn: Es seien $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$ und $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Longrightarrow 0 < c = \min\{\vec{r}^T\cdot\mathrm{H}f(\vec{x}_0)\cdot\vec{r} : \|\vec{r}\| = 1\} \Longrightarrow$ mit $\vec{r} = \dfrac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$ gilt

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2\left(\underbrace{\vec{r}^T\cdot\mathrm{H}f(\vec{x}_0)\cdot\vec{r}}_{\geq c} + \underbrace{\frac{\varrho_2(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2}}_{\to 0}\right)$$

$$\geq f(\vec{x}_0) + \frac{c}{2}\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2 \text{ für } \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta, \text{ d.h. } \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{r} \text{ mit } |t| < \delta,\ \|\vec{r}\| = 1.$$

23.6 DIE TAYLORREIHE IN $\mathbb{C}$

Die Theorie entfällt aus Zeitmangel.

Bsp. 10 $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{C} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[1 + \frac{\mathrm{i}x}{1} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \cdots - \left(1 - \frac{\mathrm{i}x}{1} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} - \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + - \cdots\right)\right] \\
&= \frac{2}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{i}x}{1} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}x)^5}{5!} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\mathrm{i}x - \frac{\mathrm{i}x^3}{3!} + \frac{\mathrm{i}x^5}{5!} - + \cdots\right] = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{in Übereinstimmung mit Bsp. 5.}
\end{aligned}$$