Vorlesung Mathematik B, Kapitel V, Dr. Peter Wagner

Datum der letzten Veränderung: 26. April 2006

INHALTSVERZEICHNIS

Kap. V: Differentialrechnung in mehreren Variablen

KAPITEL V: DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

§18: Parametrisierte Kurven

18.1 TANGENTIALVEKTOR, BOGENLÄNGE

Beispiel 1 (Kreis) Nach 2.1, Bsp. 3, p. 10, besteht der Einheitskreis aus zwei Funktionen: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$. In $x = \pm 1$ sind f und g nicht differenzierbar. (Die Tangente ist senkrecht.) Dennoch ist die Kreiskurve in den Äquatorpunkten (1,0), (-1,0) nicht "schlechter" als anderswo. Wenn wir den Kreis durch $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, beschreiben, so sind sowohl x als auch y **abhängige** Variable einer neuen unabhängigen Variablen t (genannt "Parameter") und alle Kreispunkte werden gleich behandelt.

Def.:

1) Eine parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion

$$\vec{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist und "stetig" bedeutet, daß $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ stetig sind.

2) Falls alle x_i in t_0 (bzw. schlechthin) differenzierbar sind, so heißt $\vec{x}$ differenzierbar in t_0 (bzw. schlechthin).

$\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t_0) \end{pmatrix}$ heißt Tangentialvektor zum Parameter t_0.

Bemerkungen:

1) Falls t die Zeit bedeutet, heißt $\dot{\vec{x}}(t_0)$ Geschwindigkeitsvektor (und analog $\ddot{\vec{x}}(t_0)$ Beschleunigungsvektor) zur Zeit t_0.

2) $\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{x_1(t)-x_1(t_0)}{t-t_0} \\ \vdots \end{pmatrix} = \lim\limits_{t\to t_0} \begin{pmatrix} \dfrac{x_1(t)-x_1(t_0)}{t-t_0} \\ \vdots \end{pmatrix} =$

$\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\vec{x}(t)-\vec{x}(t_0)}{t-t_0} = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\text{Sekantenvektor}}{t-t_0}$ ist tangential an die Kurve.

(Die letzten Limites sind dabei wie in 16.2, p. 134 definiert.)

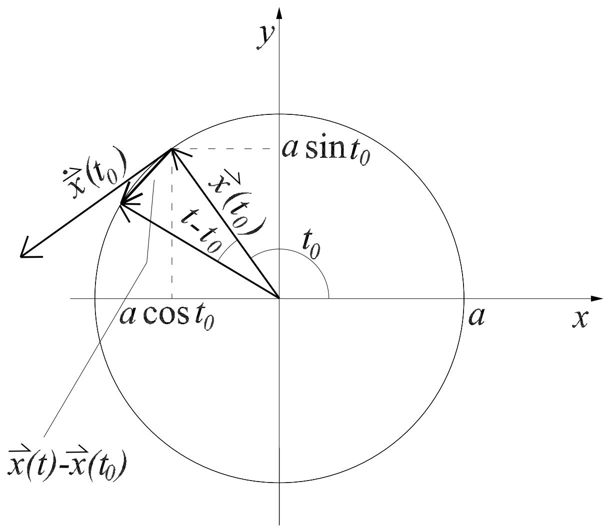
3) Bei 2 bzw. 3 Variablen schreibt man gewöhnlich $x, y, (z)$ statt $x_1, x_2, (x_3)$.

<u>Bsp. 1</u> (Kreis) $\vec{x} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix}$ liefert eine “Parametrisierung” des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$. Der Parameter $t \in [0, 2\pi]$ ist hier gleich dem Winkel zur x-Achse. Wenn t als Zeit aufgefaßt wird, läuft der “Ortsvektor” $\vec{x}(t)$ in ≈ 6.28 sec um den Kreis.

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix} = -\vec{x}(t),$

$m\ddot{\vec{x}} =$ Kraft, mit der man den Massenpunkt beim Umlauf halten muß $=$

$=$ “Zentripetalkraft” $= -m\vec{x}$



Beachte: Für die graphische Darstellung eines Vektors kann der Anfangspunkt beliebig gewählt werden. $\vec{x}(t)$ wird i.a. von $\vec{0}$ aus gezeichnet, $\dot{\vec{x}}(t)$ von $\vec{x}(t)$ aus.

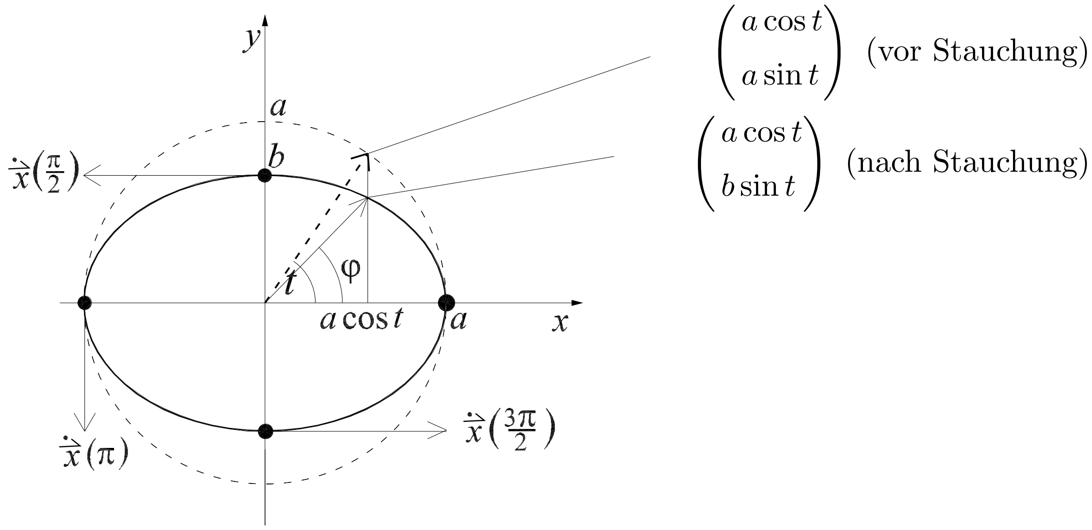
<u>Bsp. 2</u> (Ellipse) Wenn wir in y-Richtung um den Faktor $\frac{b}{a}$ verzerren $\big(\frac{b}{a} < 1 :$ stauchen, $\frac{b}{a} > 1 :$ strecken$\big)$, so wird der Kreis zu einer Ellipse:

$$\vec{x} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}.$$

Gleichung der Ellipse:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Nun ist $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$ für verschiedene t verschieden lang. Beachte auch, daß t nun <u>nicht</u> mehr der Winkel zwischen x-Achse und Ortsvektor auf der Ellipse ist. Für $0 < t < \frac{\pi}{2}$ wäre dieser Winkel $\varphi = \arctan\left(\dfrac{b\sin t}{a\cos t}\right) \neq t$.



Wir vergleichen nun die parametrisierte Darstellung $x(t)$, $y(t)$ einer ebenen Kurve mit der Funktionsdarstellung $y(x)$.

Beachte, daß y hier 3 verschiedene Dinge bezeichnet:

a) die abhängige Variable

b) die Funktion $t \longmapsto y(t)$

c) die Funktion $x \longmapsto y(x)$

(Beim Kreis wäre b): $y(t) = a \sin t$

c): $y(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$)

Eine korrekte, aber mühsame Bezeichnungsweise wäre:

$x = f(t),\ y = g(t),\ t = f^{-1}(x) \Longrightarrow y = g\big(f^{-1}(x)\big) = (\underbrace{g \circ f^{-1}}_{h})(x)$, also $y = h(x)$.

<u>Satz 1</u>

1) Wenn $\vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ in t_0 differenzierbar und $\underline{\dot{x}(t_0) \neq 0}$, so läßt sich y bei $x(t_0)$ als Funktion von x ausdrücken und es gilt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}} \quad \text{bzw. kurz} \quad \boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

2) Wenn $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto \vec{x}(t)$ eine differenzierbare Kurve ist, so ist ihre Bogenlänge

$$\boxed{L = \int\limits_a^b \big\|\dot{\vec{x}}(t)\big\| \,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \cdots + \dot{x}_n(t)^2}\,\mathrm{d}t}$$

<u>Bezeichnung</u> $\mathrm{d}s = \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t$ wird als <u>Bogenelement</u> bezeichnet. $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s(t, \mathrm{d}t)$ ist eine Funktion der 2 Variablen t und $\mathrm{d}t$, vgl. 11.3, p. 91.

<u>1. Beweis</u> (rechnerisch)

1) $\dot{x}(t_0) \neq 0 \Longrightarrow$ (8.2, Satz 4, p. 76) x ist bei t_0 monoton steigend oder fallend $\Longrightarrow$ (p. 18) $x(t)$ ist umkehrbar $\Longrightarrow y = y\big(t(x)\big)$ läßt sich als Funktion von x schreiben $\Longrightarrow$ mit $x_0 = x(t_0)$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\big(\underbrace{t(x_0)}_{=t_0}\big)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(x_0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{§7, Satz 3, p. 59}}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}(t_0)$$

2) Für $n = 2 : \vec{x}(t), \alpha < t < \beta$, sei ein Kurvenstück mit Länge L_1, wo z.B. $\dot{x}(t) > 0 \Longrightarrow x(\alpha) < x(\beta)$ und nach 13.3, p. 109:

$$L_1 = \int\limits_{x(\alpha)}^{x(\beta)} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \qquad \left\|\;\begin{aligned} x &= x(t)\\ \mathrm{d}x &= \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\\ x &= x(\alpha) \Longrightarrow t = \alpha\\ x &= x(\beta) \Longrightarrow t = \beta \end{aligned}\right.$$

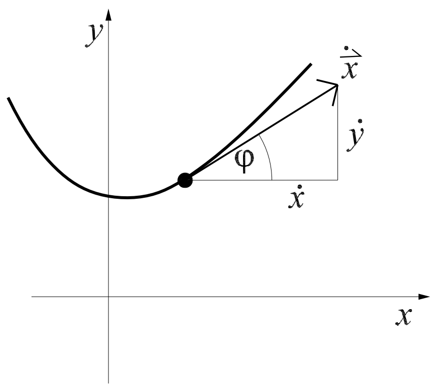
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}}\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Analog wenn $\dot{x}(t) < 0$ oder wenn $\dot{y}(t) \neq 0$ (dann wird x als Funktion von y ausgedrückt). Wenn auf einem Teilintervall $\alpha < t < \beta$ sowohl $\dot{x} = \dot{y} = 0$, so bleibt der Kurvenpunkt stehen und es kommt keine Länge dazu.

<u>2. Beweis</u> (geometrisch)

1) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Tangente $\Longrightarrow y' = \tan\varphi =$

$$= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$



(Analog für $\dot{x} < 0 \vee \dot{y} < 0$)

2) Im $\mathbb{R}^n : Z = \{t_0, \cdots, t_k\}$ sei eine Zerlegung von $[a, b]$;

$$L = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \left\| \vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1}) \right\|;$$

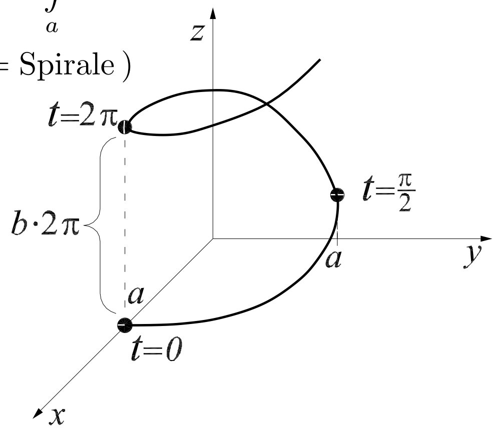
$$\vec{x}(t_i) = \begin{pmatrix} x_1(t_i) \\ \vdots \\ x_n(t_i) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_1(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\dot{x}_1(t_{i-1}) \\ \vdots \\ x_n(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\dot{x}_n(t_{i-1}) \end{pmatrix} = \vec{x}(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\dot{\vec{x}}(t_{i-1})$$

$$L = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \left\| \dot{\vec{x}}(t_{i-1}) \right\| = \int_a^b \left\| \dot{\vec{x}}(t) \right\| \mathrm{d}t \qquad \square$$

<ins>Bsp. 3</ins> (Schraubenlinie, Helix, ἕλιξ = Spirale)

$$\vec{x} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}$$



Die Länge s des Kurvenstückes, das für $\tau = 0 \cdots t$ entsteht, ist

$$s = \int_0^t \left\| \dot{\vec{x}}(\tau) \right\| \mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \tau + a^2 \cos^2 \tau + b^2}\, \mathrm{d}\tau = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wenn wir s als neuen Parameter einführen, so ist also

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und } \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} a \cos\left(s/\sqrt{a^2 + b^2}\right) \\ a \sin\left(s/\sqrt{a^2 + b^2}\right) \\ bs/\sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}.$$

Die Helix wird nun mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen, denn

<ins>Satz 2 + Def.</ins> $[\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n : s \longmapsto \vec{x}(s)$ sei eine parametrisierte Kurve. Dann sind äquivalent:

(A) $\forall s : \left\| \dot{\vec{x}}(s) \right\| = 1$, d.h. der Tangentialvektor hat Länge 1;

(B) die Bogenlänge des Kurvenstückes, das für $\sigma = \alpha \cdots s$ entsteht, ist $s - \alpha$.

Wenn (A) und (B) gelten, so heißt die Kurve <ins>nach der Bogenlänge parametrisiert</ins> (und man bezeichnet den Parameter, so wie hier, gewöhnlich mit s).

<ins>Beweis:</ins> „$A \Longrightarrow B$":

$$A \Longrightarrow \forall \sigma : \left\| \dot{\vec{x}}(\sigma) \right\| = 1 \Longrightarrow \int_\alpha^s \left\| \dot{\vec{x}}(\sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^s 1 \, \mathrm{d}\sigma = s - \alpha \Longrightarrow B;$$

„$B \Longrightarrow A$": $B \Longrightarrow \forall s : \displaystyle\int_\alpha^s \left\| \dot{\vec{x}}(\sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma = s - \alpha \qquad \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \right. \Longrightarrow$

$$1 = \frac{\mathrm{d}(s-\alpha)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int\limits_{\alpha}^{s} \big\|\dot{\vec{x}}(\sigma)\big\|\,\mathrm{d}\sigma\right) \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \big\|\dot{\vec{x}}(s)\big\| \Longrightarrow A \qquad \square$$

Zurück zu Bsp. 3 B gilt nach Konstruktion;

Kontrolle von A :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\big(s/\sqrt{a^2+b^2}\big) \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\big(s/\sqrt{a^2+b^2}\big) \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\right\| = \sqrt{\tfrac{a^2}{a^2+b^2}(\sin^2+\cos^2)+\tfrac{b^2}{a^2+b^2}} = 1\checkmark$$

In der neuen Parametrisierung $s \longmapsto \vec{x}(s)$ wird die Helix also mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen (A) und in der Zeit $\sigma = 0\cdots s$ wird die Länge s zurückgelegt (B).

Bemerkung: In der Theorie läßt sich auf einer differenzierbaren Kurve immer die Bogenlänge als Parameter einführen und zur Herleitung schwieriger Sätze wird das auch oft getan. In der Praxis kann man oft $s = \int\limits_a^t \big\|\dot{\vec{x}}(\tau)\big\|\,\mathrm{d}\tau$ nicht explizit bestimmen (z.B. schon bei der Ellipse, Bsp. 2).

18.2 KRÜMMUNG EBENER PARAMETRISIERTER KURVEN

Satz 3 $\vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine 2-mal differenzierbare Kurve. Dann gilt für die Krümmung κ und den Krümmungsmittelpunkt M :

$$\kappa = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} \quad\text{und}\quad M = \vec{x} + \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}\begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

(falls die Nenner $\neq 0$ sind. Beachte, daß $\|M - \vec{x}\| = \varrho = \frac{1}{\kappa}$.)

Beweis: $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ nach Satz 1 $\Longrightarrow$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}_{1/\dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \Longrightarrow$$

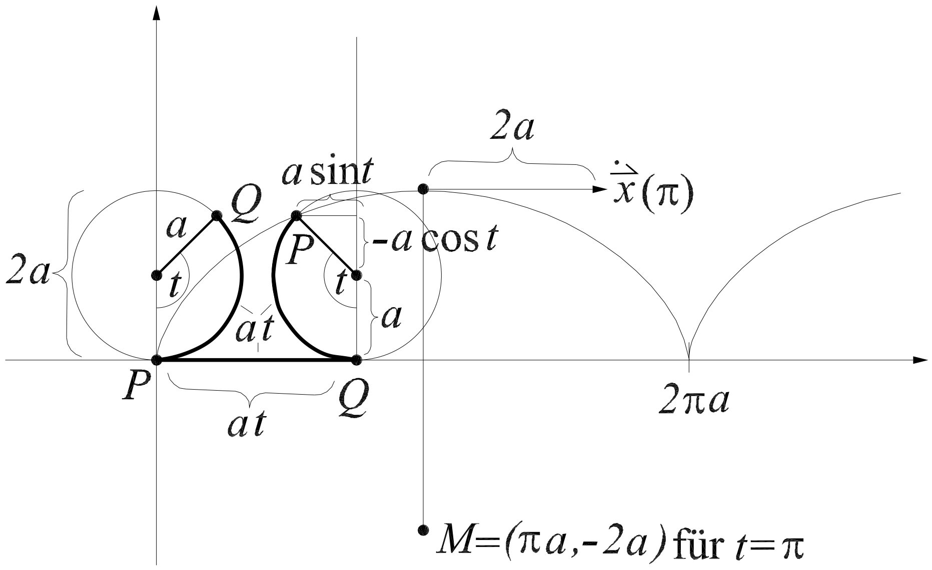
$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{x}|^3\cdot\big(1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\big)^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Ebenso für M. $\square$

Bemerkung: Vektoriell geschrieben ist $\kappa = \dfrac{|\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} = \dfrac{\|\ddot{\vec{x}}\|\sin\angle(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})}{\|\dot{\vec{x}}\|^2} =$

$= \dfrac{\text{Normalbeschleunigung}}{\text{Geschwindigkeit}^2}\,[\mathrm{m}^{-1}]$ und das letzte gilt auch für $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Bsp. 4 (Zykloide, $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma$ = Kreis) Ein Rad mit Radius a rollt auf der x-Achse (mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 1, d.h. 1 rad/sec). Welche Bahn beschreibt dabei der ursprünglich im Nullpunkt liegende Punkt P des Rades (wenn er z.B. farbig markiert ist und man filmt)?



Zur Zeit t ist P im Punkt $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

(Mechanisch: $\vec{x} = \vec{x}_{(1)} + \vec{x}_{(2)}$, wobei $\vec{x}_{(1)} = a\binom{t}{1}$ = Bahn des Mittelpunktes, $\vec{x}_{(2)} = -a\binom{\sin t}{\cos t}$ = im Uhrzeigersinn parametrisierter Kreis mit $\vec{x}_{(2)}(0) = -a\binom{0}{1}$.)

$$\dot{\vec{x}} = a\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\ \|\dot{\vec{x}}\| = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}} =$$

$$= a\sqrt{\underbrace{2(1-\cos t)}_{4\sin^2\frac{t}{2}}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

$$4\sin^2\frac{t}{2} \Longleftarrow \left\| \begin{aligned} 1 &= \cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2} \\ \cos t &= \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} \end{aligned} \right.$$

Die Maximalgeschwindigkeit wird also für $t = \pi$ erreicht: $\|\dot{\vec{x}}(\pi)\| = 2a$.

$$s = \int_0^t \|\dot{\vec{x}}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = 2a\int_0^t \left|\sin\frac{\tau}{2}\right| \mathrm{d}\tau \overset{\text{für } t\le 2\pi}{=}$$

$$= 2a\int_0^t \sin\frac{\tau}{2}\,\mathrm{d}\tau = 2a\left(-\frac{\cos\frac{\tau}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{t} = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

Speziell: Zykloidenlänge nach einem Umlauf $= (s$ für $t = 2\pi) = 4a(1-\cos\pi) = 8a$;

$$\kappa = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} = \frac{|a\cos t \cdot a(1-\cos t) - a\sin t \cdot a \sin t|}{8a^3|\sin(t/2)|^3} =$$

$$= \frac{a^2|\overbrace{\cos t - 1}^{-2\sin^2(t/2)}|}{8a^3|\sin(t/2)|^3} = \frac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|}$$

Speziell: Krümmung $= \infty$ bei $t = 0, 2\pi, \ldots$; dort hat die Zykloide Spitzen. Krümmung minimal bei $t = \pi, 3\pi, \ldots$; dort ist $\varrho = 4a$, $M = (ta, -2a)$.

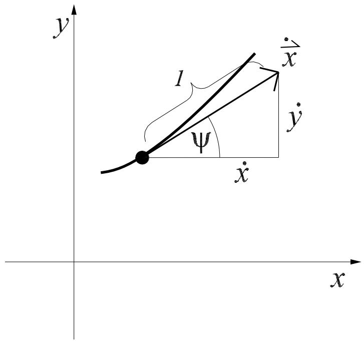
Für den Winkel zwischen Tangente und x-Achse (vgl. 13.4, p. 110) schreiben wir ab nun ψ, da φ für Polarkoordinaten reserviert wird. Dann gilt also $\arg\vec{x} = \varphi + 2k\pi$ **und** $\arg\dot{\vec{x}} = \psi + 2k\pi$.

Bsp. 5 (Klothoide, $\kappa\lambda\acute{\omega}\theta\omega$ = ich spinne) Diese Kurve ist dadurch charakterisiert, daß die Krümmung linear mit der Bogenlänge zunimmt (z.B. Autobahnausfahrt). Somit:

$$\kappa \overset{(13.4,\ \text{p. } 110)}{=} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = as \Longrightarrow \psi = \frac{as^2}{2} + C;$$

es sei $C = 0$, d.h. $\psi = 0$ für $s = 0$, d.h. die Tangente waagrecht für $s = 0$. Wenn die Klothoide nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so ist $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ und $y' = \tan\psi = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} \Longrightarrow \dot{x} = \cos\psi,\ \dot{y} = \sin\psi$. Also:

$$\dot{\vec{x}}(s) = \begin{pmatrix} \cos\frac{as^2}{2} \\ \sin\frac{as^2}{2} \end{pmatrix}.$$



Wenn $\vec{x}(0) = \vec{0}$ (d.h. die Kurve startet im Ursprung), so folgt $x(s) = \int\limits_0^s \dot{x}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^s \cos\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$ und $y(s) = \int\limits_0^s \sin\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$.

Leider lassen sich diese Integrale nicht durch elementar transzendente Funktionen ausdrücken.

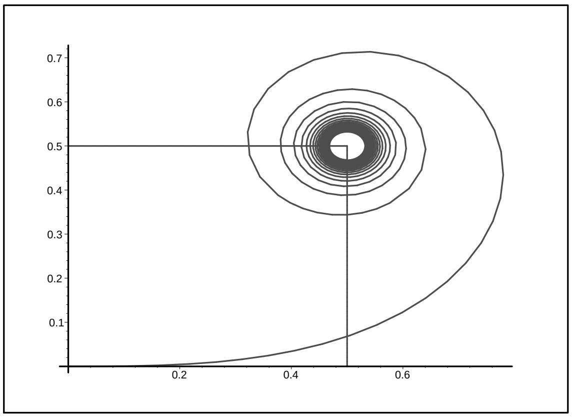
Man definiert die "Fresnel'schen Integrale" durch

$$\begin{Bmatrix} C(t) \\ S(t) \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\tau^2)\,\mathrm{d}\tau.$$

Mit der Substitution $\sigma = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\tau$ folgt dann $\vec{x}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \begin{pmatrix} C\big(\sqrt{\frac{a}{2}}s\big) \\ S\big(\sqrt{\frac{a}{2}}s\big) \end{pmatrix}$.

Bild:

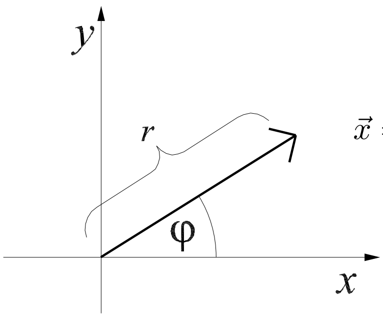
$$S(\infty) = \frac{1}{2}$$



$$C(\infty) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(\tau^2)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}$$

18.3 <u>EBENE KURVEN IN POLARKOORDINATEN</u>

Wiederhole 16.2:



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \hat{=} z = x + \mathrm{i}y$$

$$r, \varphi \text{ gegeben } \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$x, y \text{ gegeben } \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \arctan \dfrac{y}{x} & : \text{I,IV} \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & : \text{II,III} \end{array} \right\} + 2k\pi \end{array} \right.$$

<u>Def.</u> 1) (r, φ) heißen <u>Polarkoordinaten</u> von (x, y). (Dabei ist φ durch x, y nur auf Vielfache von 2π bestimmt und für $r = 0$ unbestimmt.)

2) Eine <u>in Polarkoordinaten dargestellte Kurve</u> ist eine stetige Funktion $r = f(\varphi)$. (Wieder schlampig: $r = r(\varphi)$.)

<u>Bemerkung:</u>

Das liefert in x, y eine parametrisierte Kurve:

$$x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi;$$

φ spielt hier die Rolle des Parameters t.

Satz 4 Für eine Kurve in Polarkoordinaten gilt:

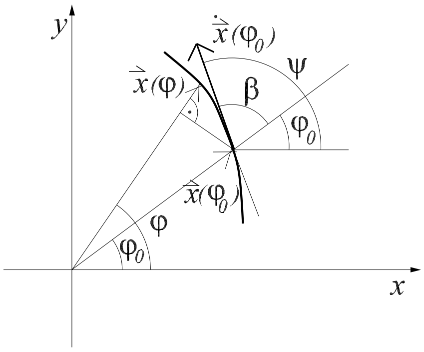
1) Der Winkel β zwischen $\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ erfüllt $\tan\beta = \dfrac{r}{\dot{r}}$.

2) Die Bogenlänge s von φ_0 bis φ_1 erfüllt $s = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$.

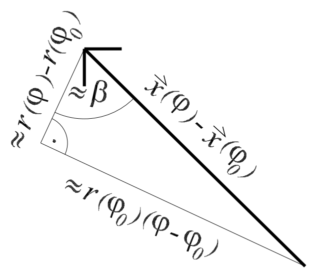
3) Die Krümmung κ erfüllt $\kappa = \dfrac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - \ddot{r}r|}{(r^2+\dot{r}^2)^{3/2}}$.

Beweis: Es sei $\dot{r} > 0$. Der Fall $\dot{r} < 0$ ist ähnlich.

Bild:



Ausschnitt:



(Beachte: Den Winkel $\beta \in [0,\pi]$ zwischen $\vec{x}(\varphi_0)$, $\dot{\vec{x}}(\varphi_0)$ erhält man, indem man beide Vektoren im selben Punkt ansetzt.)

1) $\tan\beta = \lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \tan\angle\big(\vec{x}(\varphi) - \vec{x}(\varphi_0), \vec{x}(\varphi_0)\big) = \lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \dfrac{r(\varphi_0)(\varphi-\varphi_0)}{r(\varphi)-r(\varphi_0)} = \dfrac{r}{\dot{r}}(\varphi_0)$

2) $$\big\|\dot{\vec{x}}(\varphi_0)\big\| = \lim_{\varphi\to\varphi_0} \left\| \frac{\vec{x}(\varphi)-\vec{x}(\varphi_0)}{\varphi-\varphi_0} \right\| = \lim_{\varphi\to\varphi_0} \frac{\sqrt{\big(r(\varphi)-r(\varphi_0)\big)^2 + r(\varphi_0)^2(\varphi-\varphi_0)^2}}{|\varphi-\varphi_0|} =$$
$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} \sqrt{\left(\frac{r(\varphi)-r(\varphi_0)}{\varphi-\varphi_0}\right)^2 + r(\varphi_0)^2} = \sqrt{\dot{r}(\varphi_0)^2 + r(\varphi_0)^2} \qquad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \big\|\dot{\vec{x}}(\varphi)\big\|\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

3) $$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}(\varphi+\beta)}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\arctan(r/\dot{r})}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| =$$
$$= \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| \cdot \left|1 + \frac{1}{1+(r/\dot{r})^2}\cdot\frac{\dot{r}\dot{r}-\ddot{r}r}{\dot{r}^2}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right|}\cdot\left|1 + \frac{\dot{r}^2-\ddot{r}r}{r^2+\dot{r}^2}\right| \overset{2)}{=}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{r^2+\dot{r}^2}} \cdot \frac{|r^2+2\dot{r}^2-\ddot{r}r|}{r^2+\dot{r}^2} = \frac{|r^2+2\dot{r}^2-\ddot{r}r|}{(r^2+\dot{r}^2)^{3/2}}$$

$\square$

<u>Bsp. 6</u> (Archimedische Spirale)

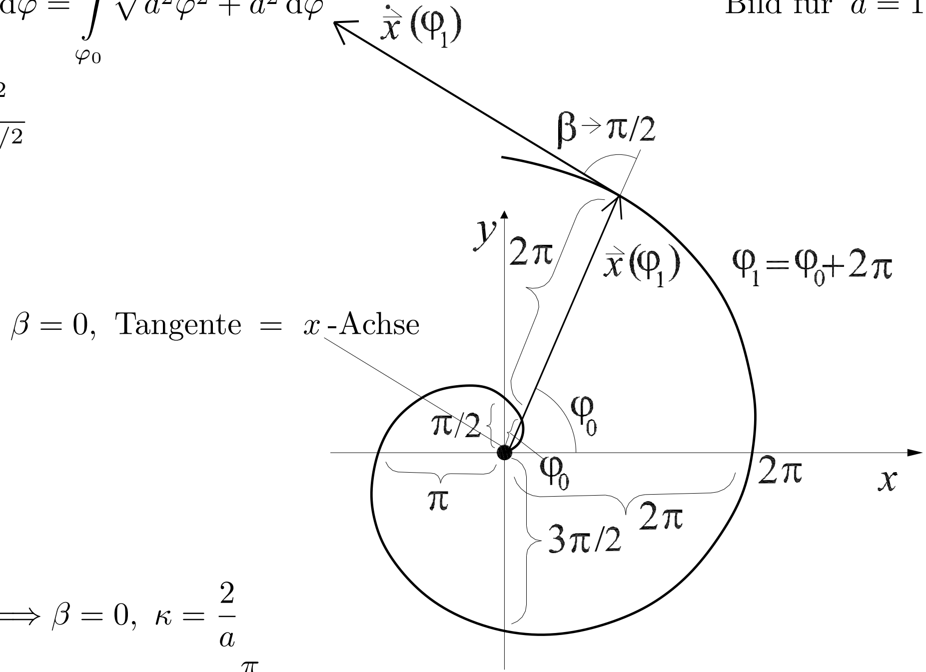
$r(\varphi) = a \cdot \varphi, \quad \varphi \in [0, \infty[\quad (a > 0)$

$\tan\beta = \dfrac{r}{\dot r} = \dfrac{a\varphi}{a} = \varphi$

$s = \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \dot r^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,\mathrm{d}\varphi$

Bild für $a = 1$

$\kappa = \dfrac{a^2\varphi^2 + 2a^2}{a^3(\varphi^2+1)^{3/2}}$



Speziell: $\varphi = 0 \Longrightarrow \beta = 0,\ \kappa = \dfrac{2}{a}$

$\varphi \to \infty \Longrightarrow \tan\beta \to \infty \Longrightarrow \beta \to \dfrac{\pi}{2}, \qquad \kappa \to 0$

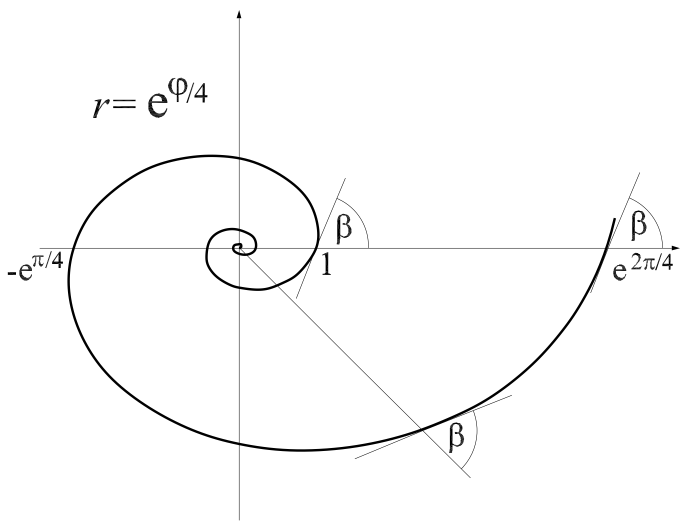
<u>Bsp. 7</u> (Logarithmische Spirale)

$r(\varphi) = a \cdot \mathrm{e}^{b\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R} \qquad (a > 0,\ b > 0)$

$\tan\beta = \dfrac{r}{\dot r} = \dfrac{a\mathrm{e}^{b\varphi}}{ab\mathrm{e}^{b\varphi}} = \dfrac{1}{b} =$ konstant

$\kappa = \dfrac{|r^2 + 2\dot r^2 - r\ddot r|}{(r^2+\dot r^2)^{3/2}} = \dfrac{|a^2 + 2a^2b^2 - a^2b^2|\mathrm{e}^{2b\varphi}}{(a^2+a^2b^2)^{3/2}\,\mathrm{e}^{3b\varphi}} = \dfrac{1}{a\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b\varphi}}$

Bild für $a = 1,\ b = \dfrac{1}{4}$, d.h. $r = \mathrm{e}^{\varphi/4},\ \tan\beta = 4,\ \beta \approx 1.3258 \approx 76°$



§19: Funktionen von mehreren Variablen

19.1 PARTIELLE ABLEITUNGEN

Def.: 1) Eine (reellwertige) Funktion f von n Variablen ist eine Vorschrift, die jedem Element $\vec{x}$ einer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl $f(\vec{x})$ zuordnet.

Schreibweise: $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = u$

2) Die Menge $\big\{(\vec{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : u = f(\vec{x})\big\}$ heißt Graph von f.

Bsp. 1 Die Kugel $x^2+y^2+z^2 = a^2$, d.h. genauer $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ besteht aus den Graphen zweier Funktionen:

$$z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{und} \quad z = g(x,y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

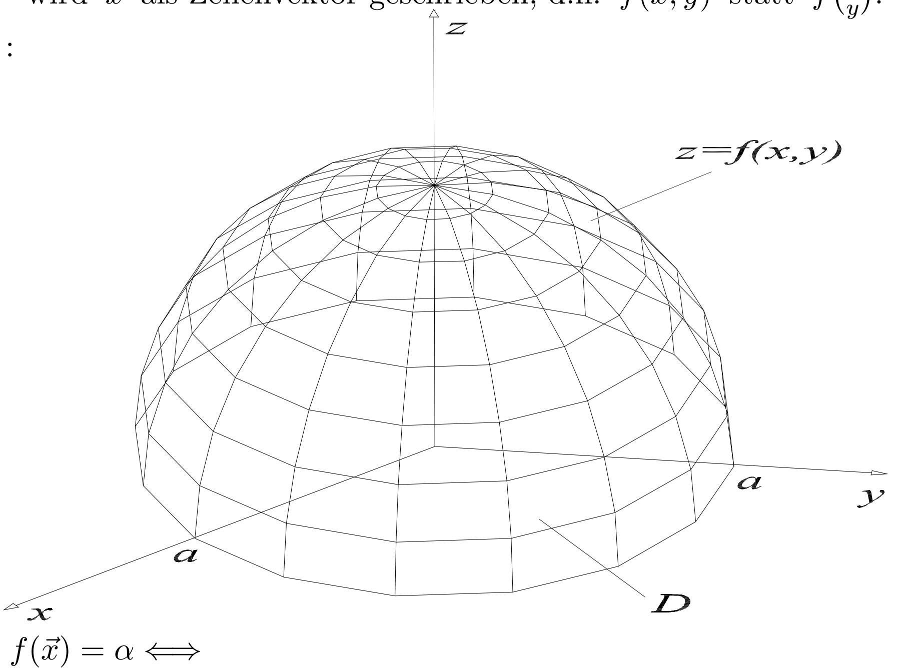
(In 19.4 fassen wir K als "Niveaufläche" der Funktion $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ von drei Variablen auf. f, g hier sind Funktionen von zwei Variablen. Nicht verwechseln!)

Hier ist also $n = 2,\ x_1 = x, x_2 = y, u = z,\ \vec{x} = \binom{x}{y}$, und

$D = \Big\{\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\Big\}$

Beachte: In f wird $\vec{x}$ als Zeilenvektor geschrieben, d.h. $f(x,y)$ statt $f\binom{x}{y}$.

Graph von f :



Def. 1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \alpha \Longleftrightarrow$

$$\boxed{\forall \epsilon > 0} : \boxed{\boxed{\exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta}} : \boxed{\big|f(\vec{x}) - \alpha\big| < \epsilon}$$

d.h. $\boxed{f(\vec{x}) \text{ kommt } \alpha \text{ beliebig nahe}}$

$$\boxed{\boxed{\text{wenn der Abstand von } \vec{x} \text{ und } \vec{x}_0 \text{ genügend klein ist}}}$$

Analog für $\alpha = \pm\infty$. ($\lim\limits_{\vec{x} \searrow \vec{x}_0}$ hat aber keinen Sinn!)

2) f heißt in $\vec{x}_0$ <u>stetig</u> $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

3) $f(x,y)$ heißt in $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ <u>partiell differenzierbar</u>

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & \text{(a)} \quad x \longmapsto f(x, y_0) \text{ ist in } x_0 \text{ differenzierbar} \\ \wedge \quad & \text{(b)} \quad y \longmapsto f(x_0, y) \text{ ist in } y_0 \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

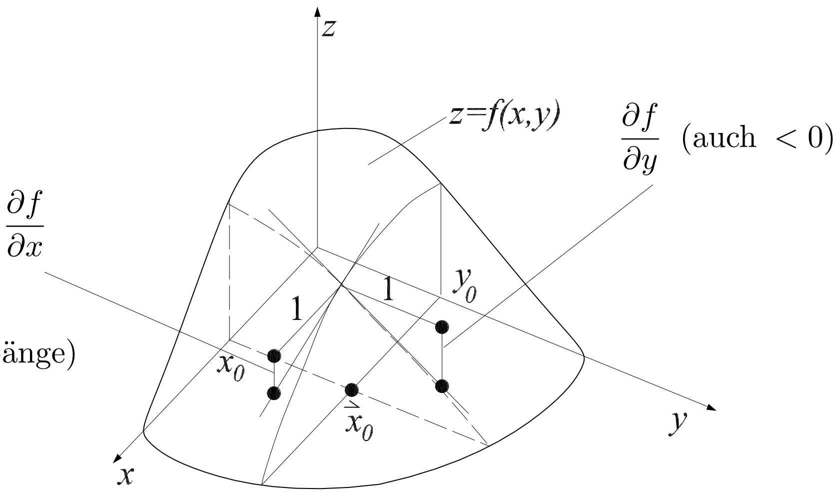
Analog für $f(x,y,z)$ und allgemein $f(\vec{x})$.

<u>Bezeichnung:</u> Die Ableitungen in (a), (b) nennt man <u>partielle Ableitungen</u> und man schreibt dafür $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (oder $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$).

$$\begin{aligned} \text{Somit: } \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x, y \text{ als konstant betrachtet})\big] \\ &= \text{Steigung der Funktion } x \mapsto f(x,y) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big[f(x \text{ als konstant betrachtet}, y)\big] \\ &= \text{Steigung der Funktion } y \longmapsto f(x,y) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{aligned}$$

Bild:

(hier < 0, d.h. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -$ gezeichnete Länge)



<u>Bsp. 1</u> $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (obere Halbkugel)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

konstant

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

konstant

Am Rand von D werden beide partiellen Ableitungen ∞. Dort ist f nicht partiell differenzierbar.

Bsp. 2 $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} : \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 \qquad : \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0,$$

da $f(x,0) = \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(0,y)$.

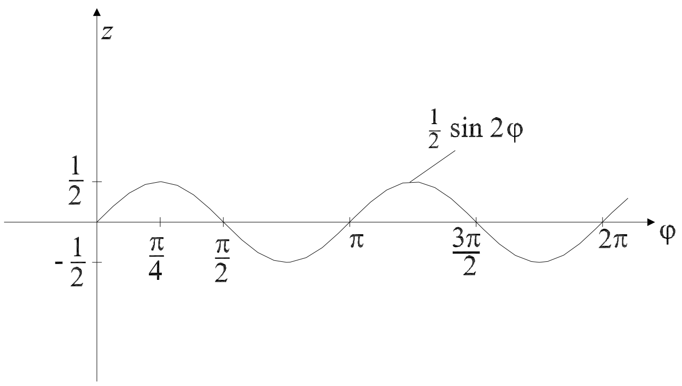
Also: f ist in $\vec{0}$ partiell differenzierbar.

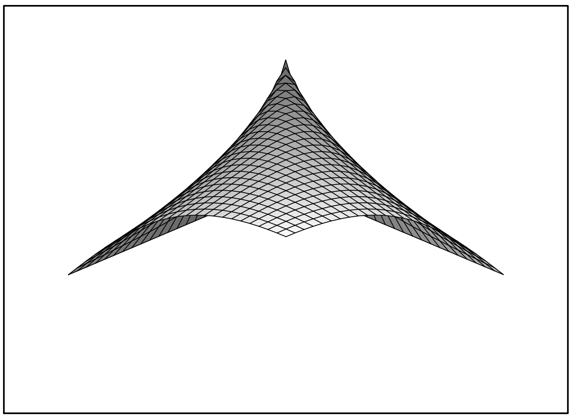
ABER: f ist in $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unstetig, denn für $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, ist

$f(\vec{x}) = \dfrac{a\cdot a}{a^2+a^2} = \dfrac{1}{2}$ und $\|\vec{x}-\vec{0}\| < \delta$, d.h. $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}|a| < \delta$ liefert nicht

$\left|f(\vec{x}) - f(\vec{0})\right| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| < \epsilon$ falls $\epsilon = \frac{1}{4}$.

Bild: In Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ist $z = \dfrac{r^2 \sin\varphi\cos\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} =$ $\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$. z ist also für festes φ konstant.





19.2 DIFFERENZIERBARKEIT, TANGENTIALEBENE

Eine differenzierbare Funktion sollte eigentlich stetig sein, vgl. §6, Satz 1, p. 54. Wir müssen also für die Differenzierbarkeit mehr als in 19.1 verlangen.

Beachte: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \dfrac{f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)}{\vec{x}-\vec{x}_0}$ ist sinnlos, da man durch den Vektor $\vec{x}-\vec{x}_0$ nicht dividieren kann (außer wenn $n=2$ und $\vec{x}-\vec{x}_0$ als komplexe Zahl $z-z_0$ aufgefaßt wird. Das führt zur Definition der "komplexen Differenzierbarkeit".)

Man definiert "differenzierbar" daher geometrisch: $\big(\vec{x}, f(\vec{x})\big)$ auf dem Graph kommt einer Tangentialebene an f in $\big(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0)\big)$ "sehr nahe" für $\vec{x}\to\vec{x}_0$, d.h. der Rest ist vom Typ $o\big(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|\big)$.

Def. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_0\in D$, $\vec{x}_0$ nicht am Rand von D.

f heißt in $\vec{x}_0$ differenzierbar $\iff \exists\, A, B\in\mathbb{R}:$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) + \varrho(\vec{x}-\vec{x}_0),$$

wobei $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{\varrho(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, d.h. daß ϱ "vom Typ $o\big(\|\vec{h}\|\big)$" ist. (Analog für $D\subset\mathbb{R}^n$.)

Satz 1 f sei in $\vec{x}_0\in D\subset\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Dann gilt:

1) f ist in $\vec{x}_0$ stetig und partiell differenzierbar;

2) $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$.

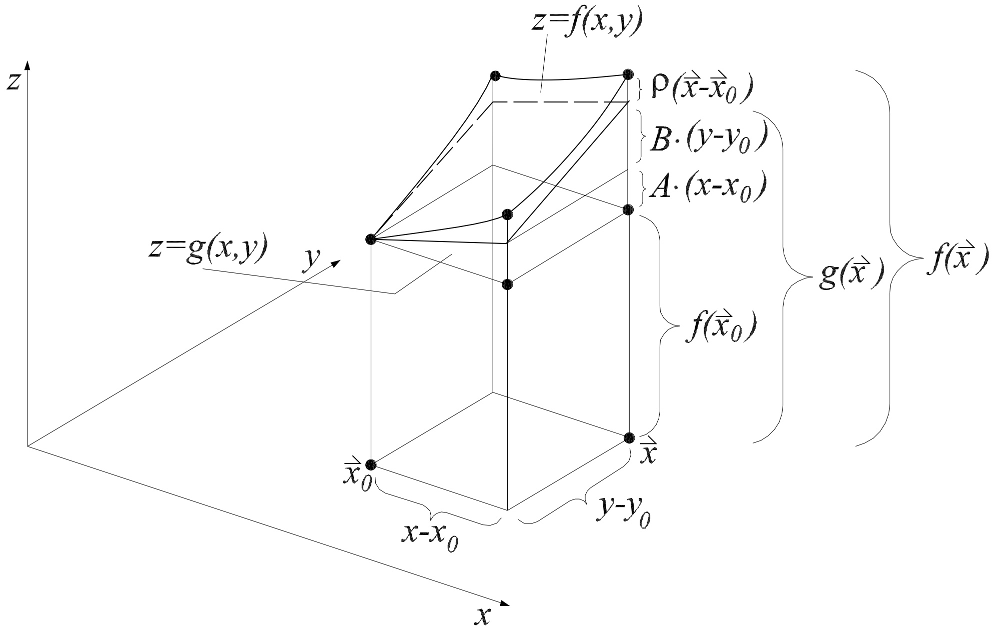
Bezeichnung: Die Ebene

$$\boxed{z = g(x,y) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot(y-y_0)}$$

heißt Tangentialebene (vgl. Tangente, p. 52).

(Lt. Def. ist dann $f(\vec{x})-g(\vec{x})$ vom Typ $o\big(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|\big)$, d.h. $f(\vec{x})\approx g(\vec{x})$ für $\vec{x}\to\vec{x}_0$).

Bild:



Beweis: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \big[f(\vec{x}_0)+\underbrace{A(x-x_0)}_{\to 0}+\underbrace{B(y-y_0)}_{\to 0}+\underbrace{\varrho(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\to 0}\big] = f(\vec{x}_0) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f$ ist in $\vec{x}_0$ stetig;

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{A(x-x_0)+B(y_0-y_0)+\varrho(x-x_0,y_0-y_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{A(x-x_0)+\varrho(x-x_0,0)}{x-x_0} = A + \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{\varrho(\overbrace{x-x_0,0}^{=\vec{h}})}{\underbrace{x-x_0}_{\pm\|\vec{h}\|}}}_{0} = A\end{aligned}$$

Analog für B. □

Bemerkung: Wie im 1-dimensionalen gilt, daß Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten (wo der Nenner $\neq 0$), Zusammensetzungen von differenzierbaren Funktionen differenzierbar sind. Daher muß man in der Praxis fast nie auf die Definition zurückgehen.

Bsp. 3 (Rotationsellipsoid)

Es sei $\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1, \quad z=f(x,y)=+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}, \quad \vec{x}_0=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(\vec{x}_0)=\dfrac{2}{3},$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = \frac{-x/2}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}(\vec{x}_0) = \frac{-1/3}{2\cdot 2/3} = -\frac{1}{4},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}(\vec{x}_0) = \frac{-4/3}{2\cdot 2/3} = -1,$$

Tangentialebene: $z = g(x,y) = f(\vec{x}_0) + A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) =$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) - 1\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right) = -\frac{x}{4} - y + \frac{3}{2}.$$

Verallgemeinerung: $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n,\ \vec{x}_0 \in D.$ f in $\vec{x}_0$ differenzierbar $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ f in $\vec{x}_0$ partiell differenzierbar $\wedge$

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)\cdot(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\cdot(x_n - x_{0,n})}_{g(\vec{x})} + \underbrace{\varrho(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\text{vom Typ } o}$$

$u = g(\vec{x})$ heißt Gleichung der Tangentialhyperebene an f in $\vec{x}_0$; g heißt Linearisierung von f bei $\vec{x}_0$.

Schreibweise: Für $x_1 - x_{0,1}$ etc. schreibt man oft $\mathrm{d}x_1$ etc. Dann ist

$$g(\vec{x}) = g(\vec{x}_0 + \mathrm{d}\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x_n}_{\text{Def } \mathrm{d}f \text{ (“Differential von } f\text{”)}}$$

und $f(\vec{x}) \approx g(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \mathrm{d}f$ für $\vec{x}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. $\mathrm{d}\vec{x}$ klein. $\mathrm{d}f$ ist also eine Funktion der $2n$ Variablen $\vec{x}_0$, $\mathrm{d}\vec{x}$.

In $\vec{x}$ statt $\vec{x}_0$ geschrieben: $f(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x}) \approx g(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x}) = f(\vec{x}) + \mathrm{d}f(\vec{x}, \mathrm{d}\vec{x})$.

Bsp. 3.5 Auf wieviel % kann man die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks angeben, wenn man die Katheten x, y auf 2% genau messen kann?

Lösung: $A(x,y) = \frac{1}{2}xy,\ \mathrm{d}x \le 0.02\,x,\ \mathrm{d}y \le 0.02\,y$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}A = \frac{\partial A}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \frac{y}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{2}\,\mathrm{d}y \le 0.02\,xy = 0.04\,A$$

$\Longrightarrow A$ kann auf 4% genau angegeben werden.

19.3 DIE KETTENREGEL

Gegeben: a) eine Kurve $\vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$;

b) eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$.

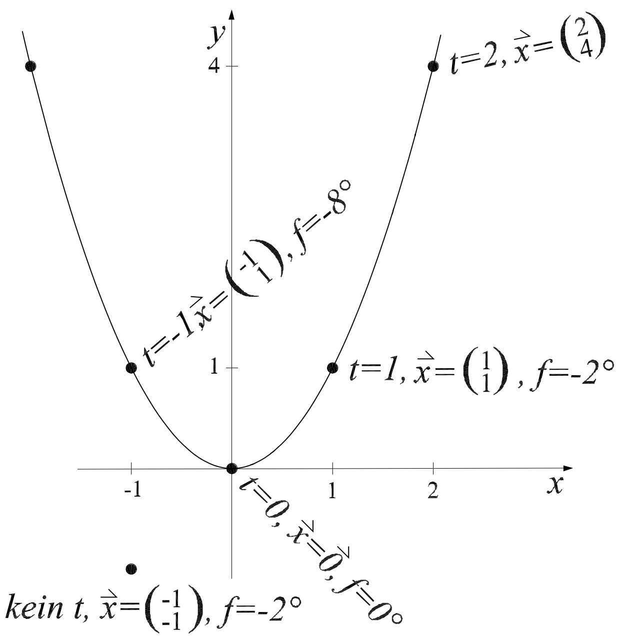
Das Bild der Kurve liege in D. Dann läßt sich $f\circ\vec{x} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f\big(\vec{x}(t)\big)$ bilden.

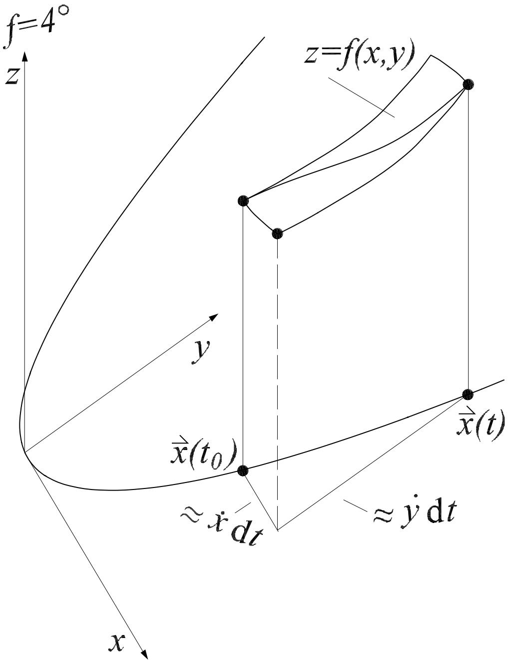
Bsp. 4 Es sei $n = 2$. Wir stellen uns $f(x, y)$ als Temperatur in der xy-Ebene vor. $f \circ \vec{x}(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ ist dann die Temperatur auf der Kurve zur Zeit t.

Problem: Wie verändert sich $f \circ \vec{x}(t)$, d.h. wie ist die Temperaturzu-/abnahme $\dfrac{\mathrm{d}(f \circ \vec{x})}{\mathrm{d}t}$ auf der Kurve?

Z.B. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ (nach x parametrisierte Standardparabel),

$f(x, y) = 3xy - 5x^2 \Longrightarrow f \circ \vec{x}(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = f(t, t^2) = 3t^3 - 5t^2$





Nach dem rechten Bild ist wegen 19.2 $f\big(\vec{x}(t)\big) \approx f\big(\vec{x}(t_0)\big) + A \cdot \dot{x}(t_0)\,\mathrm{d}t + B \cdot \dot{y}(t_0)\,\mathrm{d}t$ mit $\mathrm{d}t = t - t_0$. Das führt zu

Satz 2 (Kettenregel)

$\vec{x}$ sei differenzierbar in t_0, f sei differenzierbar in $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\, f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

In t statt t_0: $\boxed{f\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{x}_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{x}_n}$

Beweis: Z.B. für $n = 2$

$$\frac{\mathrm{d}\, f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f\big(\vec{x}(t)\big) - f\big(\vec{x}(t_0)\big)}{t - t_0};$$

$f\big(\vec{x}(t)\big) = f\big(x(t), y(t)\big) =$ (weil f in $\vec{x}_0$ differenzierbar)

$$= f(\vec{x}_0) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)}^{A} \cdot \big(x(t) - x_0\big) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)}^{B} \cdot \big(y(t) - y_0\big) + \varrho\big(\vec{x}(t) - \vec{x}_0\big)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\, f\circ\vec{x}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f\bigl(\vec{x}(t)\bigr) - f(\vec{x}_0)}{t-t_0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\cdot \underbrace{\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x_0}{t-t_0}}_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)=\dot{x}(t_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\cdot \underbrace{\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y_0}{t-t_0}}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)} + \underbrace{\lim_{t\to t_0}\frac{\varrho\bigl(\vec{x}(t)-\vec{x}_0\bigr)}{t-t_0}}_{=0},$$

denn $\dfrac{\varrho\bigl(\vec{x}(t)-\vec{x}_0\bigr)}{t-t_0} = \underbrace{\dfrac{\varrho\bigl(\vec{x}(t)-\vec{x}_0\bigr)}{\|\vec{x}(t)-\vec{x}_0\|}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\dfrac{\|\vec{x}(t)-\vec{x}_0\|}{t-t_0}}_{\to\pm\|\dot{\vec{x}}(t_0)\|} \longrightarrow 0,$ da

$$\frac{\|\vec{x}(t)-\vec{x}_0\|}{t-t_0} = \pm\sqrt{\frac{\bigl(x(t)-x_0\bigr)^2}{(t-t_0)^2}+\frac{\bigl(y(t)-y_0\bigr)^2}{(t-t_0)^2}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \pm\sqrt{\dot{x}(t_0)^2+\dot{y}(t_0)^2} \text{ für } \begin{Bmatrix} t\searrow t_0 \\ t\nearrow t_0 \end{Bmatrix}. \qquad \square$$

Zurück zu Bsp. 4 $\;f(x,y) = 3xy-5x^2,\; \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow f\bigl(\vec{x}(t)\bigr) = 3t^3-5t^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f\bigl(\vec{x}(t)\bigr)^{\boldsymbol{\cdot}} = 9t^2-10t.$

Mit der Kettenregel: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y-10x,\; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x,\; \dot{x}=1,\; \dot{y}=2t,$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(\vec{x}(t)\bigr)\cdot\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(\vec{x}(t)\bigr)\cdot\dot{y} = \bigl(3y(t)-10x(t)\bigr)\cdot 1+3x(t)\cdot 2t = 3t^2-10t+3t\cdot 2t = 9t^2-10t$$

Anschauliche Bedeutung von $f\bigl(\vec{x}(t)\bigr)^{\boldsymbol{\cdot}}$: Z.B. zur Zeit $t=2$ steigt die Temperatur auf der Kurve um $16^\circ/\,\mathrm{sec}$.

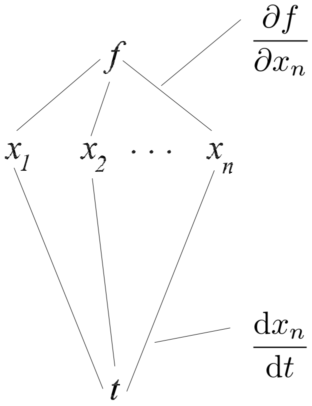
Bemerkungen:

1) In konkreten Fällen ist man mit der Kettenregel langsamer als beim direkten Ausrechnen von $f\bigl(\vec{x}(t)\bigr)$ (s. Bsp. 4). Man benötigt die Kettenregel aber gewöhnlich in allgemeinen Situationen, wo $f\bigl(\vec{x}(t)\bigr)$ nicht durch Einsetzen berechnet werden kann.

2) Für $n=1$ gibt Satz 2 gerade die übliche Kettenregel

$$f\bigl(x(t)\bigr)^{\boldsymbol{\cdot}} = \underbrace{f'\bigl(x(t)\bigr)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_{\text{innere Ableitung}} \qquad \text{(s. p. 58)}$$

Für größere n stellen wir uns die Abhängigkeiten baumartig vor:



Die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\, f \circ \vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

ergibt sich, wenn wir alle Wege von f nach t gehen, multiplizieren entlang der Wege und dann addieren.

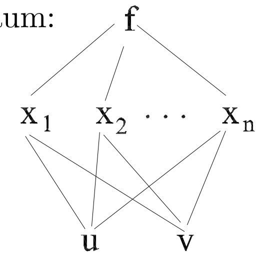
3) Wenn $\vec{x}$ von 2 Variablen u, v abhängt, so hängt auch $f \circ \vec{x} = f\big(x_1(u,v), x_2(u,v), \ldots, x_n(u,v)\big)$ von u und v ab.

Bei $\dfrac{\partial\, f \circ \vec{x}}{\partial u}$ wird v festgehalten und u spielt die Rolle von t in Satz 2.

Daher gilt $\dfrac{\partial f \circ \vec{x}}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_n}{\partial u}$

und analog $\dfrac{\partial f \circ \vec{x}}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial v} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \dfrac{\partial x_n}{\partial v}$

Baum:



$\dfrac{\partial\, f \circ \vec{x}}{\partial u}$: alle Wege von f nach u

$\dfrac{\partial\, f \circ \vec{x}}{\partial v}$: alle Wege von f nach v

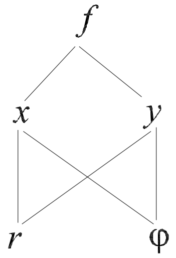
<u>Bsp. 5</u> (Ableitungen in Polarkoordinaten)

a) $z = f(x,y)$ gegeben, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

Wie ändert sich f bei Änderung von r, φ?

Hier ist also $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u = r$, $v = \varphi$;

Baum:



$\tilde{f} = f \circ \vec{x} = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

<u>Schreibweise:</u> Statt $\tilde{f}(r,\varphi)$ schreibt man einfach $f(r,\varphi)$.

Die Kettenregel gibt:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\varphi)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\cos\varphi)$$

<u>Schreibweise:</u> Partielle Ableitungen werden auch manchmal als Index geschrieben, d.h.

$$f_x \text{ für } \frac{\partial f}{\partial x},\ f_y \text{ für } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ etc.}$$

Die Kettenregel sieht dann oben so aus:

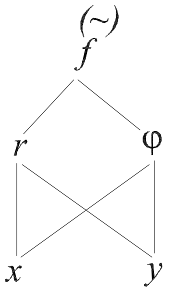
$$f_\varphi = f_x\cdot x_\varphi + f_y\cdot y_\varphi \text{ etc.}$$

b) Umgekehrt: $z=\tilde{f}(r,\varphi)$ gegeben, wieder geschrieben als $f(r,\varphi)$.

Wie drücken sich $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ durch $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ aus?

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi=\arctan\frac{y}{x}(+\pi)$



$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{y}{r^2} \text{ etc.}$$

<u>Bemerkung:</u> Die eigentlich falsche Schreibweise, wieder f statt $\tilde{f}$ zu schreiben, führt <u>dann</u> zu Fehlern, wenn einige Koordinaten unverändert bleiben:

Z.B. $f(x,y)=x+2y,\ u=x+y,\ v=y$ (unverändert!)

$\Longrightarrow \tilde{f}(u,v)=\tilde{f}(u,y)=u+y.$

Wenn man hier $f(u,y)$ statt $\tilde{f}(u,y)$ schreibt, so entsteht ein Fehler, denn

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}=1 \text{ aber } \frac{\partial f}{\partial y}=2.$$

Mehr dazu in § 21 unter “Koordinatenwechsel”.

19.4 GRADIENT UND RICHTUNGSABLEITUNG

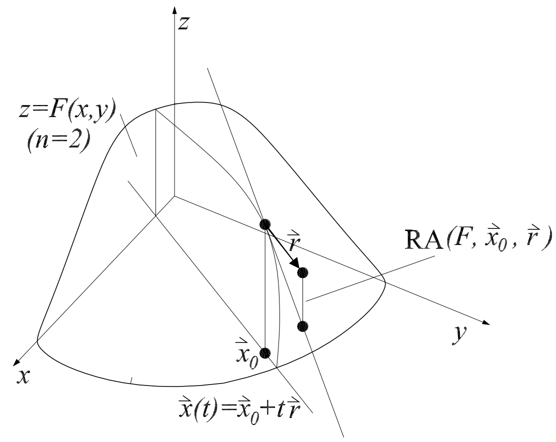
Da wir f noch anderweitig brauchen, schreibe ich hier F für die Funktion. In 19.1 wurden die Steigungen der Kurven betrachtet, die sich ergeben, wenn wir von $\vec{x}_0$ aus parallel zur x bzw. $y-$Achse gehen. Allgemeiner wollen wir nun in eine beliebige Richtung, dargestellt durch einen Einheitsvektor $\vec{r}$, gehen. Wir suchen also die Änderungsgeschwindigkeit von F, wenn von $\vec{x}_0$ aus mit Geschwindigkeit 1 in Richtung $\vec{r}$ gegangen wird.

Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{r}$ (parametrisierte Gerade) $\Longrightarrow$

(Kettenregel) $F\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot}(0) =$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \cdot \underbrace{\dot{x}_1(0)}_{r_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \cdot \underbrace{\dot{x}_n(0)}_{r_n}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}, \vec{r} \right\rangle$$



Def. F differenzierbar in $\vec{x}_0$, $\|\vec{r}\| = 1$, $c \in \mathbb{R}$

1) Der Vektor $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$ heißt Gradient von F in $\vec{x}_0$.

Schreibweisen: grad $F(\vec{x}_0)$, $\nabla F(\vec{x}_0)$ (letzteres sprich “nabla ef von iks null”)

2) $\big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r} \big\rangle$ heißt Richtungsableitung von F in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{r}$.

Schreibweise: RA $(F, \vec{x}_0, \vec{r})$

Interpretation: $\big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r} \big\rangle =$ Änderungsgeschwindigkeit von F von $\vec{x}_0$ aus in Richtung $\vec{r}$, vgl. oben.

3) Die Menge $M_c = \big\{\vec{x} \in D : F(\vec{x}) = c\big\}$ heißt Niveaufläche (für $n = 2$ Niveaulinie) von F zum Niveau c.

Interpretation: Wenn z.B. $F =$ Temperatur, so ist $M_c =$ Menge aller Punkte mit Temperatur c. Beachte, daß sich verschiedene M_c nicht schneiden.

Bsp. 3 $\boxed{n = 3}$ $w = F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

(Um $w = F(x, y, z)$ zu zeichnen, bräuchten wir den $\mathbb{R}^4$.)

a) $\vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\|\vec{r}\| = 1$;

$$\nabla F = \begin{pmatrix} x/2 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \ \nabla F(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{RA}\,(F, \vec{x}_0, \vec{r}) =$$

$= \big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r} \big\rangle = \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{2}{9}$, d.h. die Temperatur F fällt von $\vec{x}_0$ aus in Richtung $\vec{r}$ mit Geschwindigkeit $\frac{2}{9}$, d.h. genauer

$$F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r}) = \underbrace{F(\vec{x}_0)}_{1} - \frac{2}{9}\epsilon + \varrho(\epsilon), \quad \frac{\varrho(\epsilon)}{\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ für } \epsilon \longrightarrow 0.$$

Zahlenbsp.: $\epsilon = 0.01 \Longrightarrow \vec{x}_0 + \epsilon\vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2.02 \\ 2.01 \\ 1.98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.67\dot{3} \\ 0.67 \\ 0.66 \end{pmatrix}$,

$F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r}) = \frac{0.67\dot{3}^2}{4} + 0.67^2 + 0.66^2 = 0.9978\dot{4}$,

$F(\vec{x}_0) - \frac{2}{9}\epsilon = 1 - \frac{2}{9} \cdot 0.01 = 0.99\dot{7}$, der Unterschied ist das $\varrho(\epsilon)$.

b) Die Niveauflächen sind

$$M_c = \begin{cases} \{\} & : c < 0 \\ \{\vec{0}\} & : c = 0 \\ \text{Ellipsoid } \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = c & : c > 0 \end{cases}$$

Speziell: $\vec{x}_0 \in M_c \Longleftrightarrow c = F(\vec{x}_0) = F\big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\big) = 1$

Problem: In welchen Richtungen steigt/fällt F am schnellsten, in welchen Richtungen ist keine Änderung?

Satz 3 $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $c = F(\vec{x}_0)$. Dann gilt:

1) $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r}) = \big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| \cdot \cos\angle\big(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r}\big)$

   Speziell: a) $\mathrm{RA} = 0$, wenn $\vec{r} \perp \nabla F(\vec{x}_0)$

   b) $\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| =$ maximale RA; diese wird erreicht, wenn $\vec{r}$ in Richtung $\nabla F(\vec{x}_0)$ geht, d.h. wenn $\vec{r} = \dfrac{\nabla F(\vec{x}_0)}{\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\|}$.

   In Worten: Der Vektor $\nabla F(\vec{x}_0)$ weist in die Richtung der stärksten Zunahme von F und seine Länge ist gleich der maximalen Richtungsableitung.

2) Wenn $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \neq 0$ und $c = F(\vec{x}_0)$, so läßt sich die ($\vec{x}_0$ enthaltende) Niveaufläche M_c bei $\vec{x}_0$ als Graph einer Funktion $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ schreiben. Man sagt: " $F(\vec{x}) = c$ definiert f implizit."

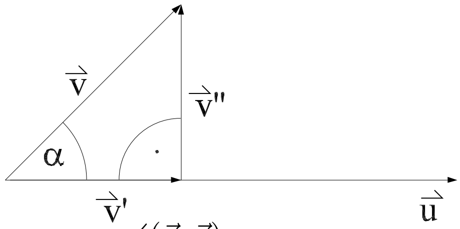
3) Die Tangential(hyper)ebene an M_c in $\vec{x}_0$ ist dann $\big\langle \vec{x} - \vec{x}_0,\, \nabla F(\vec{x}_0)\big\rangle = 0$

Somit: $\boxed{\nabla F(\vec{x}_0) \text{ steht senkrecht auf die Niveaufläche durch } \vec{x}_0}$

<u>Beweis:</u> Wiederholung zu linearer Algebra:

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \boxed{\langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}\,)}$$

(Vorstellung dazu:



$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}\,''$, $\vec{v}\,' \parallel \vec{u}$,
$\vec{v}\,'' \perp \vec{u} \Longrightarrow \|\vec{v}\,'\| = \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha$, $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

$$\Longrightarrow \vec{v}\,' = \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\Longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\,'\rangle + \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{v}\,''\rangle}_{0}$$

$$= \left\langle \vec{u}, \frac{\|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha}{\|\vec{u}\,\|} \cdot \vec{u} \right\rangle = \frac{\|\vec{v}\| \cos\alpha}{\|\vec{u}\|} \cdot \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}_{\|\vec{u}\|^2} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\alpha)$$

1) $\mathrm{RA}\,(F, \vec{x}_0, \vec{r}) = \big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{r}\,\big\rangle =$

$$= \big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| \cdot \underbrace{\|\vec{r}\|}_{=1} \cdot \cos\angle\big(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r}\big) =$$

$$= \begin{cases} \text{maximal} : \angle = 0, \text{ d.h.} & \vec{r} = \dfrac{\nabla F(\vec{x}_0)}{\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\|} \\[2ex] \text{minimal} : \angle = \pi, \text{ d.h.} & \vec{r} = -\dfrac{\nabla F(\vec{x}_0)}{\big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\|} \\[2ex] 0 \qquad\quad : \angle = \dfrac{\pi}{2}, \text{ d.h.} & \vec{r} \perp \nabla F(\vec{x}_0) \end{cases}$$

2) Beweisskizze: Betrachte $\underset{\substack{\| \\ t}}{x_n} \underset{\longmapsto}{\longmapsto} \underbrace{F(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}_{u(t)}$ für feste $x_1, \ldots, x_{n-1}$;

$\dot{u} = \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0 \Longrightarrow t = x_n$ läßt sich für feste $x_1, \ldots, x_{n-1}$ als Funktion von $u(t) = F$ ausdrücken (vgl. 18.1, Satz 1, 1. Beweis, 1) $\Longrightarrow M_c =$
$= \big\{\vec{x} : F(\vec{x}) = c\big\} = \big\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) : x_n = \underbrace{\text{Funktion von } c \text{ und } x_1, \ldots, x_{n-1}}_{=f(x_1, \ldots, x_{n-1})}\big\}$

(Ganz genaugenommen braucht man hier als Voraussetzung, daß $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}$ in $\vec{x}_0$ stetig ist.)

3) $\vec{x}(t)$ sei eine Kurve in der Niveaufläche M_c mit $\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \Longrightarrow$

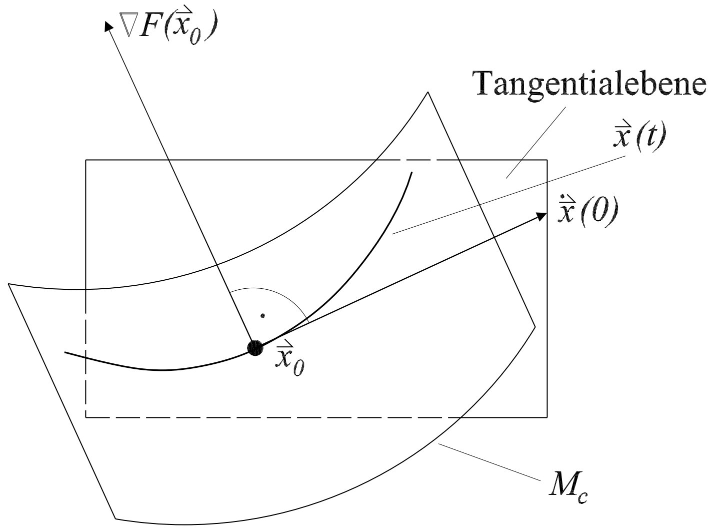
$$\Longrightarrow \forall t : F\big(\vec{x}(t)\big) = c \qquad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$\Longrightarrow \big\langle \nabla F(\vec{x}_0), \dot{\vec{x}}(0) \big\rangle = 0 \Longrightarrow \nabla F(\vec{x}_0) \perp \dot{\vec{x}}(0) \Longrightarrow \nabla F(\vec{x}_0) \perp$ alle Richtungsvektoren in der Tangentialebene an $M_c \Longrightarrow \nabla F(\vec{x}_0) =$ Normalvektor der Tangentialebene.

Also: $\vec{x} \in$ Tangentialebene $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 \perp \nabla F(\vec{x}_0) \Longleftrightarrow \big\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \nabla F(\vec{x}_0) \big\rangle = 0 \qquad \Box$$

Bild:



<u>Zurück zu Bsp. 3</u> $F = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2,\ \vec{x}_0 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \nabla F(\vec{x}_0) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$

1) Maximale RA für $\vec{r} \parallel \nabla F(\vec{x}_0)$, d.h. $\vec{r} = \dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dann ist RA $= \big\|\nabla F(\vec{x}_0)\big\| = \dfrac{1}{3}\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{\sqrt{33}}{3} \approx 1.915$

$\mathrm{RA} = 0 \Longleftrightarrow \vec{r} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) $c = F(\vec{x}_0) = 1,\ M_1 = \left\{ \vec{x} : \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 \right\};$

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(\vec{x}_0) = \dfrac{4}{3} \neq 0 \overset{\text{Satz 3,2)}}{\Longrightarrow}$ bei $\vec{x}_0$ ist $z = f(x,y)$; in unserem Fall können wir f ausrechnen, $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$.

3) Tangentialebene: $\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \nabla F(\vec{x}_0) \rangle = 0$, d.h. $\left\langle \vec{x} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3} + 4\left(y - \frac{2}{3}\right) + 4\left(z - \frac{2}{3}\right)\right) = 0 \Longleftrightarrow x + 4y + 4z = 6,$$

$$z = g(x,y) = -\frac{x}{4} - y + \frac{3}{2}, \text{ vgl. 19.2.}$$

Zusammenfassung zu 3): Wir können die Tangentialebene auf zwei Weisen berechnen, nämlich, z.B. für $n = 2$ bei f, d.h. $n = 3$ bei F :

(a) Bei explizìter Angabe der Funktion $z = f(x,y)$,

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ durch } g : z = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)$$

(b) Bei impliziter Angabe von f mittels $F(x,y,z) = c$,

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ durch } \left\langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \right\rangle = 0$$

§20: Zweite Ableitungen

20.1 DER SATZ VON SCHWARZ

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei differenzierbar. f heißt (in $\vec{x}_0$) zweimal differenzierbar $\Longleftrightarrow$ alle Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, sind (in $\vec{x}_0$) differenzierbar.

Schreibweisen: 1) Man faßt $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ oft als "Operator" auf, der einer Funktion f die Funktion $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ zuordnet. Daher schreibt man $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f$ für $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

2) Für $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$ schreibt man $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

3) Für $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man oft f_{x_i} und für

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(f_{x_j}) = (f_{x_j})_{x_i}$ schreibt man daher $f_{x_j x_i}$.

Beachte die **verschiedene Reihenfolge** von x_i und x_j in den zwei Schreibweisen!

Bsp. 1 $f(x, y, z) = x^2 y^3 + x \cos z \Longrightarrow$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = 2xy^3 + \cos z, \ f_y = 3x^2 y^2, \ f_z = -x \sin z,$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = 2y^3,$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial x} = 6xy^2,$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(2xy^3 + \cos z)}{\partial y} = 6xy^2,$$

$$f_{yy} = 6x^2 y, \ f_{zz} = -x \cos z, \ f_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial(2xy^3 + \cos z)}{\partial z} = -\sin z,$$

$$f_{zx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial(-x \sin z)}{\partial x} = -\sin z, \ f_{yz} = 0 = f_{zy}.$$

Daß f_{xy} und f_{yx} etc. jeweils dasselbe ergeben, ist zum Glück kein Zufall:

Satz 1 (H.A. Schwarz, 1843–1921) Wenn f in $\vec{x}_0$ 2–mal differenzierbar ist, so gilt:

$$\forall i, j : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0)$$

Beweis: Zur Vereinfachung nehmen wir $n = 2$ an und daß f_{yx} in der Nähe von $\vec{x}_0$ definiert und in $\vec{x}_0$ stetig ist; $f_x(x_0, y) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}$,

$$f_{xy}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(\vec{x}_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f_x(x_0,y) - f_x(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$= \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0} - \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}}{y-y_0}$$

$$= \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)}}_{A}$$

Es sei $g(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y) \Longrightarrow A = \frac{g(x,y)-g(x,y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)} \overset{\text{(MWS, 8.2, Satz 3)}}{=}$

$= \frac{1}{x-x_0} \cdot g_y(x,y_1) = \frac{f_y(x,y_1) - f_y(x_0,y_1)}{x-x_0} \overset{\text{(MWS)}}{=} f_{yx}(x_1,y_1)$ wobei x_1 zwischen x_0 und x liegt, und y_1 zwischen y_0 und y; f_{yx} stetig in $\vec{x}_0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f_{xy}(\vec{x}_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} A = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f_{yx}(x_1,y_1) = f_{yx}(x_0,y_0) = f_{yx}(\vec{x}_0)$ $\square$

<u>Bemerkung:</u> Ebenso gilt für höhere Ableitungen, daß es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Also z.B. $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}$

(wenn f 3-mal stetig differenzierbar ist).

20.2 <u>DER LAPLACE-OPERATOR</u>

<u>Bsp. 2</u> $f : \left\{\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} \neq \vec{0}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto \ln \|\vec{x}\|$.

Also $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

(Man nennt f “logarithmisches Potential”.)

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{0 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Nach Satz 1 ist $f_{yx} = f_{xy}$;

$f_y = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (aus Symmetrie)

Beachte: $f_{xx} + f_{yy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$

Also $\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{\Delta} f = 0$

<u>Def.:</u> $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n,$ sei zweimal differenzierbar.

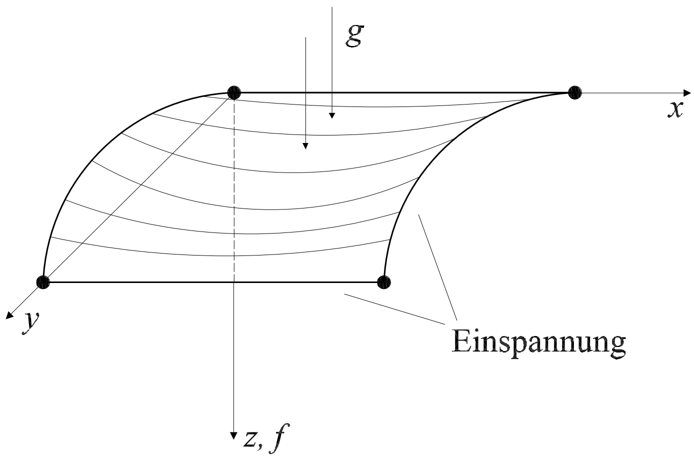
1) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ (sprich “laplaß ef”)

Δ heißt <u>Laplace-Operator</u> (nach P.-S. de Laplace, 1749–1827).

2) Wenn $\Delta f = 0$, so sagt man, f ist <u>harmonisch</u> bzw. f <u>erfüllt</u> die <u>Laplace-gleichung</u> (oder <u>Potentialgleichung</u>).

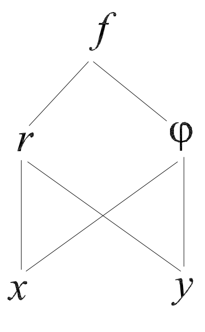
<u>Physikalische Bedeutung:</u> Wenn $D \subset \mathbb{R}^2$ und eine Membran am Rand von D (nicht unbedingt eben) eingespannt ist und unter der Last $g(x,y)\,[\mathrm{N/m^2}]$ steht, so erfüllt ihre Durchbiegung $z = f(x,y)$ die (partielle Differential-)Gleichung $\tau\Delta f = -g$, wobei $\tau =$ Membranspannung [N/m].

Speziell: $\Delta f = 0$ heißt Last = 0, z.B. Seifenhaut.



20.3 Δ IN POLARKOORDINATEN

Wie berechnet man Δf, wenn f in Polarkoordinaten gegeben ist?
(Etwa in Bsp. 2 wäre $f(r,\varphi) = \ln r$.)



Kettenregel: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial r}}_{u} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial r}{\partial x}}_{v} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$

Zweimal Produktregel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{v} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}}_{v'} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad (*)$$

Noch einmal Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}_{g}\Bigg) = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

und ebenso $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$

Einsetzen in $(*)$ gibt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}_{\| } + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$+\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

<u>Vorsicht:</u> $\displaystyle\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$ und $\displaystyle\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ sind etwas Verschiedenes!

Analog für y (ersetze x durch y) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

<u>Zusammen:</u>

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial f}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]$$

(a) $\displaystyle r = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = 1$$

(b) $\displaystyle \varphi = \arctan\frac{y}{x}(+\pi) \Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \overbrace{=}^{\cdot x^2} -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2},$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \overbrace{=}^{\cdot x^2} \frac{x}{r^2} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{r}\cdot\left(-\frac{y}{r^2}\right) + \frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r^2} = 0$$

(c) $\displaystyle \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{r^4} + \frac{x^2}{r^4} = \frac{x^2+y^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$

(d) $\displaystyle \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3} \Longrightarrow \Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2+y^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

(e) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{0-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy}{r^4}$,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{r^4} \Longrightarrow \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

Ergebnis: $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot 1 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\cdot 0 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\cdot\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\partial f}{\partial r}\cdot\dfrac{1}{r} + \dfrac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot 0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}}$$

<u>Zurück zu Bsp. 2</u> $\quad f(r,\varphi) = \ln r \Longrightarrow$

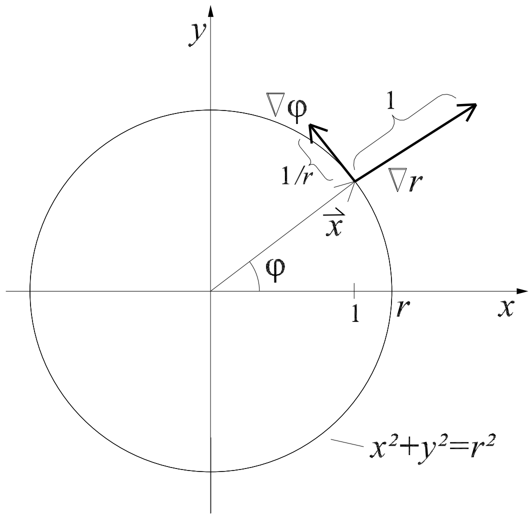
$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\ln r)}_{-\frac{1}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\ln r)}_{0} + \frac{1}{r}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(\ln r)}_{\frac{1}{r}} = 0$$

<u>Bemerkung:</u> Anschauliches Verständnis von (a), (b), (c) oben:

Die Rechnung ergab:

α) $\nabla r = \begin{pmatrix}\partial r/\partial x\\ \partial r/\partial y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x/r\\ y/r\end{pmatrix} = \dfrac{\vec{x}}{r}$

β) $\nabla\varphi = \begin{pmatrix}\partial\varphi/\partial x\\ \partial\varphi/\partial y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y/r^2\\ x/r^2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{r^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}$



<u>Geometrisch:</u>

α) $\nabla r \perp r = \text{konstant}$ (§19, Satz 3, 1) $\Longrightarrow \nabla r \parallel \vec{x}$;

$\|\nabla r\| = (\text{RA von } r \text{ in Richtung } \nabla r) = 1$

$\downarrow$

(§19, Satz 3, 1)

Also: $\nabla r = \dfrac{\vec{x}}{r}$

β) $\nabla\varphi \perp \varphi = \text{konstant} \Longrightarrow \nabla\varphi \parallel \begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}$

$\|\nabla\varphi\| = (\text{RA von } \varphi \text{ in Richtung } \nabla\varphi) = \dfrac{1}{r}$

Also: $\nabla\varphi = \dfrac{1}{r^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}$

$\Big[$Wenn man die Größen der RAen geometrisch nicht erkennt, müßte man nach 19.4 rechnerisch so vorgehen:

α) $F = r, \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\dfrac{\vec{x}_0}{r}$ (Dann ist $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, $\big\|\dot{\vec{x}}(0)\big\| = 1$, $\dot{\vec{x}}(0) \parallel \nabla r$)

$$F\big(\vec{x}(t)\big) = \underbrace{\|\vec{x}_0\|}_{r}\left(1 + \frac{t}{r}\right) = r + t,\ \text{RA} = F\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot}(0) = 1$$

β) $F = \varphi, \vec{x}(t) = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi + t/r)\\ \sin(\varphi + t/r)\end{pmatrix}$ (Dann ist $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, $\big\|\dot{\vec{x}}(0)\big\| = 1$, $\dot{\vec{x}}(0) \parallel \nabla\varphi$)

$$F\big(\vec{x}(t)\big) = \varphi + t/r,\ F\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot}(0) = \frac{1}{r}\Big]$$

(a), (b), (c) folgen aus α), β), denn sie bedeuten

$$\|\nabla r\|^2 = 1,\ \big\langle \nabla r, \nabla\varphi\big\rangle = 0,\ \|\nabla\varphi\|^2 = \frac{1}{r^2}.$$

(d), (e) und die Endformel $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}$ sind anschaulich schwerer zu verstehen.

20.4 EXTREMA

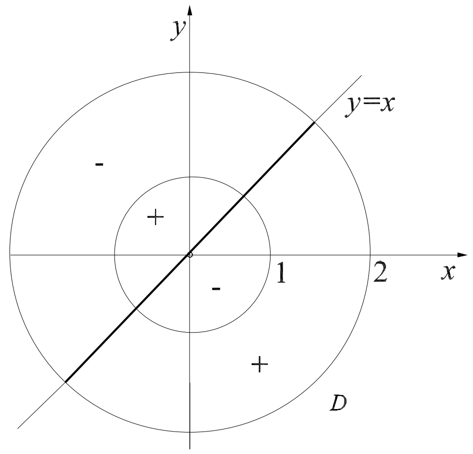
Def.: (vgl. 8.2) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$.

1) f hat in $\vec{x}_0$ ein globales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in D : \left\{\begin{matrix} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})\\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})\end{matrix}\right\}$.

2) f hat in $\vec{x}_0$ ein lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ ein Extremum $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \exists\,\delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \left\{\begin{matrix} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})\\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})\end{matrix}\right\}.$$

Bsp. 3 $f : \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| \leq 2\big\} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$



$\pm =$ Vorzeichen von f

Wie in §8 müssen Randpunkte separat betrachtet werden.

Def.: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

1) $\vec{x}_0 \in D$ heißt innerer Punkt von $D \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \vec{x} \in D$$

(In Worten: D enthält einen (kleinen) Kreis um $\vec{x}_0$. δ kann dabei für jedes innere $\vec{x}_0$ ein anderes sein.)

2) $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von $D \Longleftrightarrow$

(i) $\vec{x}_0$ ist kein innerer Punkt von D

(ii) D enthält $\vec{x}_0$ oder Punkte beliebig nahe bei $\vec{x}_0$.

3) D heißt abgeschlossen $\Longleftrightarrow D$ enthält alle seine Randpunkte.

4) D heißt beschränkt $\Longleftrightarrow \exists R > 0 : \forall \vec{x} \in D : \|\vec{x}\| \leq R$.

(In Worten: Es gibt ein R, sodaß D in einer Kugel (= Kreis für $n = 2$) mit Radius R um $\vec{0}$ liegt.)

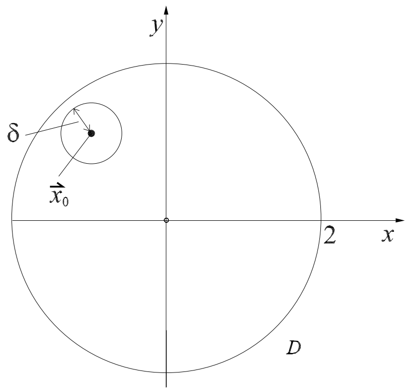
Bsp. 3 a) $D = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| \leq 2\}$

ist abgeschlossen und beschränkt.

Die inneren Punkte sind

$\vec{x}_0$ mit $\|\vec{x}_0\| < 2$ (vgl. das Bild),

die Randpunkte sind $\vec{x}_0$ mit $\|\vec{x}_0\| = 2$



b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x + y > 5\}$ ist nicht abgeschlossen und nicht beschränkt.

Satz 2 (Weierstraß) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, D abgeschlossen und beschränkt $\Longrightarrow f$ hat (zumindest) ein globales Maximum und ein globales Minimum in D.

Es gilt auch das Análogon zu Satz 1, 8.2:

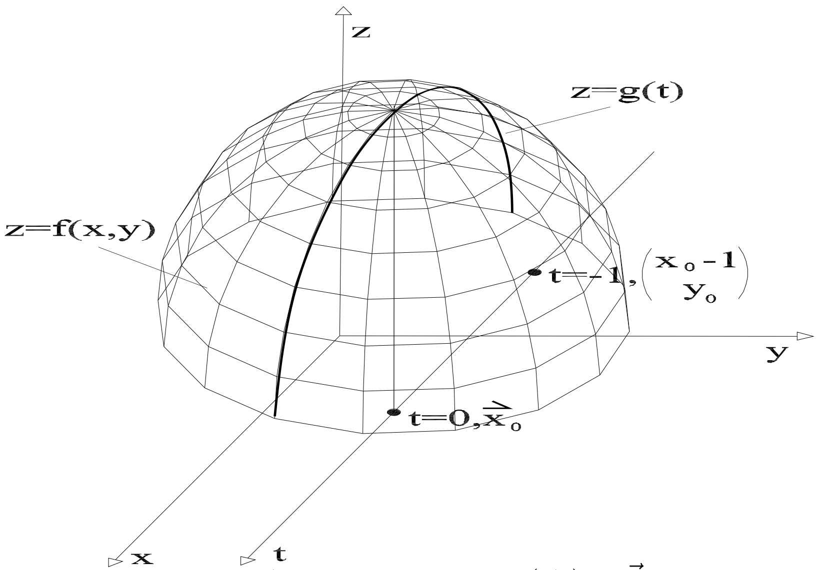
Satz 3 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ sei ein innerer Punkt von D, f sei in $\vec{x}_0$ differenzierbar. Dann gilt: f hat in $\vec{x}_0$ ein Extremum $\Longrightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$

Beweis: f habe in $\vec{x}_0$ z.B. ein lokales Maximum $\Longrightarrow g(t) = f\Big(\vec{x}_0 + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\Big) =$

$f(x_{01} + t, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ hat in $t = 0$ ein lokales Maximum.

Nach Satz 1, 8.2, folgt $0 = \dot{g}(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)$.

Analog $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0,\ i = 2, \ldots, n \Longrightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. $\square$



Def.: Ein innerer Punkt $\vec{x}_0$ von D, wo $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$, heißt stationärer Punkt von f.

(Stationäre Punkte sind also die $\vec{x}_0$, wo die Tangentialebene waagrecht ist.)

Ergebnis von Satz 3: Die möglichen **Kandidaten** für Extrema sind also

(a) stationäre Punkte, d.h.

$$\vec{x}_0 \text{ im Innern von } D \wedge f \text{ in } \vec{x}_0 \text{ differenzierbar } \wedge \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0},$$

(b) Randpunke von D,

(c) Punkte $\vec{x}_0$, wo f nicht differenzierbar ist.

Bsp. 3 $f(x,y) = (x-y)\cdot(x^2+y^2-1)$ ist ein Polynom und daher überall differenzierbar.

(a) $\nabla f = \vec{0} \Longleftrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2+y^2-1+(x-y)\cdot 2x = 3x^2-2xy+y^2-1 = 0 \qquad \text{I}$$

$$\wedge \frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2+y^2-1)+(x-y)\cdot 2y = -x^2+2xy-3y^2+1 = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{I+II} : 2x^2-2y^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = \pm y$$

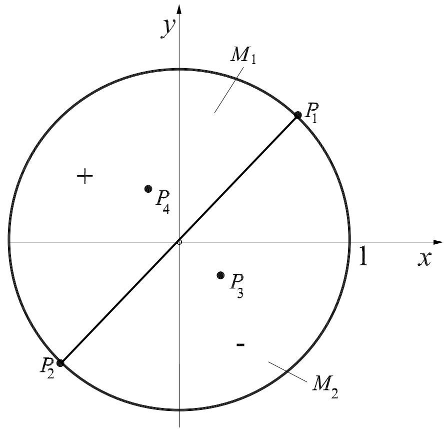
1. Fall: $y = x \Longrightarrow$ aus I : $2x^2 = 1,\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = y$

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2. Fall: $y = -x \Longrightarrow$ aus I : $6x^2 = 1,\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = -y$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Das Bild zeigt,
daß P_1, P_2 *keine* *Extrema* sein können,
da $f > 0$ in
$M_1 = \{\vec{x} : y > x,\ x^2 + y^2 < 1\}$
und $f < 0$ in
$M_2 = \{\vec{x} : y < x,\ x^2 + y^2 < 1\}$.



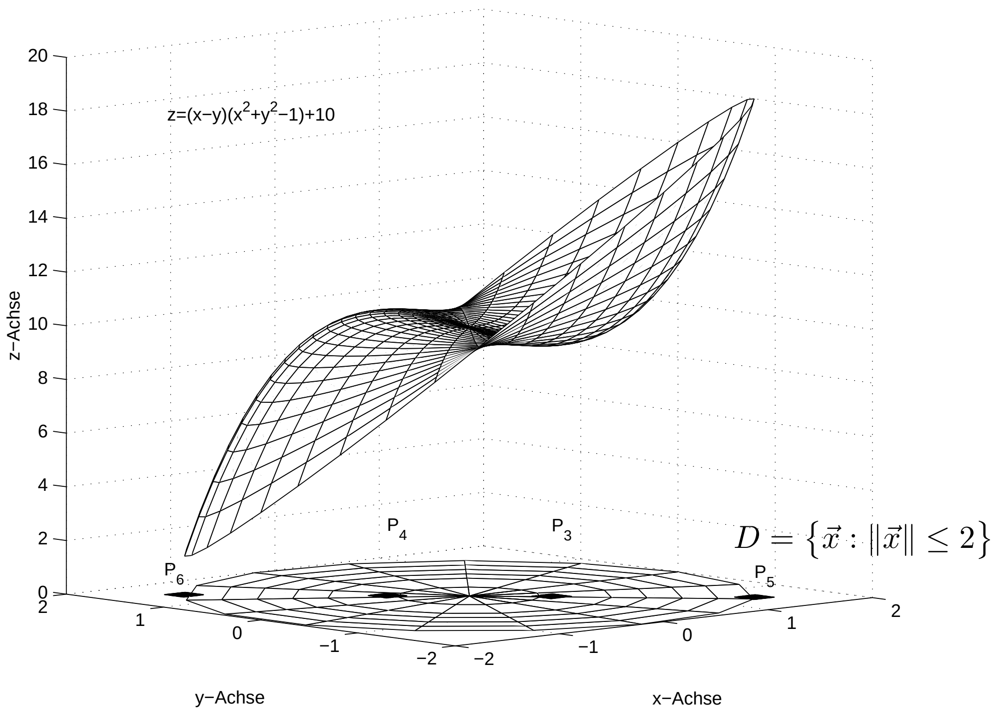
f hat in P_4 ein *lokales Maximum,* da nach Satz 2 in $\overline{M_1} = \{\vec{x} : y \geq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein solches existieren muß. (Die Minima von f in $\overline{M_1}$ liegen am Rand, wo $f = 0$.) Ebenso hat f in P_3 ein *lokales Minimum.*

(b) Die Randpunkte von D sind
$\big\{\vec{x} : \|\vec{x}\| = 2\big\}$, d.h. $\vec{x}$ mit $x^2 + y^2 = 4$.
Wir parametrisieren diesen Kreis durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big) = (2\cos t - 2\sin t) \cdot (4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 1)$$
$$= 6(\cos t - \sin t)$$

f hat ein Extremum $\Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big)^{\cdot} = 6(-\sin t - \cos t) = 0 \Longrightarrow \sin t + \cos t = 0$
$\Longrightarrow y = -x \Longrightarrow P_5 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ P_6 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2});\ f(P_5) = 6\sqrt{2} > f(P_4) = \dfrac{4}{3\sqrt{6}}$
$\Longrightarrow f$ hat in P_5 ein *globales Maximum.* Ebenso hat f in P_6 ein *globales Minimum.*

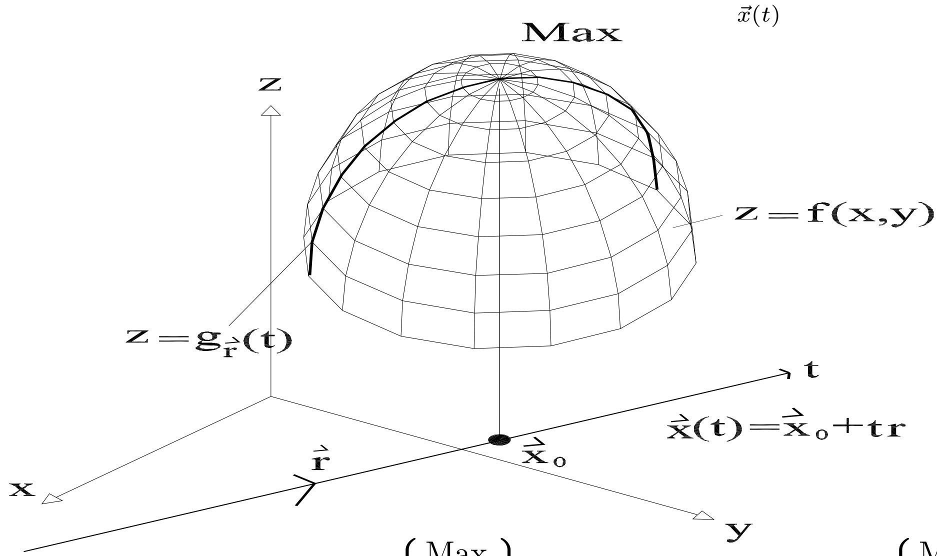
Bild:



20.5 DER EXTREMSTELLENTEST

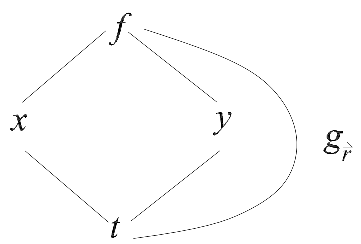
Wir suchen ein mehrdimensionales Análogon zu Satz 1 in 9.1. (Dort heißt es: Es sei $f'(x_0) = 0$ (d.h. x_0 stationär). Dann gilt: $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \text{Min.} \\ f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \text{Max.}) \end{cases}$

Wir setzen (vgl. den Beweis von Satz 3) $g_{\vec{r}}(t) = f(\underbrace{\vec{x}_0 + t\vec{r}}_{\vec{x}(t)}) = f \circ \vec{x}(t)$.



Dann gilt: f hat in $\vec{x}_0$ ein $\left\{\begin{matrix} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \forall \vec{r} : g_{\vec{r}}$ hat in 0 ein $\left\{\begin{matrix} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{matrix}\right\}$.

Auf $g_{\vec{r}}$ werden wir 9.1, Satz 1 anwenden und dann auf f schließen. Dazu wird mit der Kettenregel $\ddot{g}_{\vec{r}}(0)$ berechnet:



Zunächst für $n = 2$:

$$g_{\vec{r}}(t) = f(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2) \Longrightarrow$$

$$\dot{g}_{\vec{r}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2) \cdot r_1 + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2) \cdot r_2$$

$$\Longrightarrow \ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) \cdot r_1^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}_0)}_{\searrow} \cdot r_1 r_2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0)}_{\swarrow} \cdot r_1 r_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) \cdot r_2^2$$

$$\underset{\text{(Schwarz)}}{=}$$

Allgemein in n Variablen:

$$\ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) \cdot r_i r_j$$

Def.: Die symmetrische Matrix

$$\mathrm{H}f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

heißt Hesse'sche Matrix von f (für zweimal stetig differenzierbares f).

Bemerkungen: 1) In einer Variablen ist $\nabla f = f'$, $\mathrm{H}f = f''$.

2) $\ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) r_j}_{(\mathrm{H}f\cdot\vec{r})_i} r_i = \underbrace{\underset{1\times n,\, n\times n,\, n\times 1}{\vec{r}^{\,T} \cdot \mathrm{H}f \cdot \vec{r}}}_{1\times 1}$

Bsp. 3 $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2 - 1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - 2x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - 6y$

$\Longrightarrow \mathrm{H}f = \begin{pmatrix} 6x-2y & 2y-2x \\ 2y-2x & 2x-6y \end{pmatrix}; \qquad P_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\Longrightarrow \mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f(P_3) = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} \\ -4/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} \end{pmatrix};$

$\ddot{g}_{\binom{1}{0}}(P_1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = \dfrac{4}{\sqrt{2}} > 0 \overset{\text{(Satz 1, 9.1)}}{\Longrightarrow} g_{\binom{1}{0}}$ hat in 0 ein Minimum.

$\ddot{g}_{\binom{0}{1}}(P_1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) = -\dfrac{4}{\sqrt{2}} < 0 \Longrightarrow g_{\binom{0}{1}}$ hat in 0 ein Maximum.

P_1 ist daher ein "Sattelpunkt" und kein Extremum (wie wir ohnehin schon wissen).

Def.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ innerer Punkt von D.

$\vec{x}_0$ heißt Sattelpunkt $\Longleftrightarrow$ (i) $\vec{x}_0$ stationär, d.h. $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$,

(ii) $\vec{x}_0$ ist kein Extremum.

In P_3 hingegen ist $\ddot{g}_{\vec{r}}(0) = \vec{r}^{\,T} \cdot \mathrm{H}f \cdot \vec{r}$ immer positiv, denn

$(r_1, r_2) \cdot \begin{pmatrix} 8/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} \\ -4/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} r_1^2 - \dfrac{8}{\sqrt{6}} r_1 r_2 + \dfrac{8}{\sqrt{6}} r_2^2$

$= \dfrac{8}{\sqrt{6}}(r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2) = \dfrac{8}{\sqrt{6}}\left[\dfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \dfrac{1}{2}(r_1 - r_2)^2\right] > 0$ für $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Nach Satz 1, 9.1 hat $g_{\vec{r}}$ in $t = 0$ ein Minimum und daher auch f.

Def.: Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt

(a) $\left\{\begin{matrix}\underline{\text{positiv}}\\ \\ \underline{\text{negativ}}\end{matrix}\right\}$ $\underline{\text{definit}}$ $\iff \forall \vec{0} \neq \vec{r} \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} \vec{r}^{\,T} A \vec{r} > 0 \\ \\ \vec{r}^{\,T} A \vec{r} < 0 \end{cases}$

(b) $\underline{\text{indefinit}}$ $\iff \begin{array}{l} (\exists \vec{r} \in \mathbb{R}^n : \vec{r}^{\,T} A \vec{r} > 0) \\ \wedge\ (\exists \vec{r} \in \mathbb{R}^n : \vec{r}^{\,T} A \vec{r} < 0) \end{array}$

Satz 4 Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\det A = ac - b^2$.

(1) A positiv definit $\iff a > 0 \wedge \det A > 0$

(2) A negativ definit $\iff a < 0 \wedge \det A > 0$

(3) A indefinit $\iff \det A < 0$

Beweis: Es sei $\vec{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $v \neq 0$, $t = \dfrac{u}{v} \implies$

$$\implies \vec{r}^{\,T} A \vec{r} = (u,v) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = au^2 + 2buv + cv^2 = \underbrace{v^2}_{>0}(at^2 + 2bt + c)$$

(1) A positiv definit $\iff \vec{r}^{\,T} A \vec{r} > 0$ für $v = 0,\ u \neq 0$

$\wedge\ \vec{r}^{\,T} A \vec{r} > 0$ für $v \neq 0$

$$\iff a > 0 \wedge \forall t : \underbrace{at^2 + 2bt + c}_{h(t)} > 0$$

Wenn $a > 0$, so ist $y = h(t)$ ist eine nach oben offene Parabel. Dann gilt:

$\forall t : h(t) > 0 \iff h$ hat keine reelle Nullstelle

$$\iff {}_1t_2 = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}} \notin \mathbb{R} \iff \underbrace{b^2 - ac}_{-\det A} < 0 \iff \det A > 0$$

(2) und (3) werden ähnlich bewiesen. □

Bemerkung: Für beliebiges n gilt nach dem "Jacobi-Kriterium":

$$A \left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{matrix}\right\} \text{definit} \iff a_{11} \left\{\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right\} \wedge \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \ \wedge$$

$$\wedge \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \left\{\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right\} \wedge \cdots,$$

d.h. die Vorzeichen der "Hauptunterdeterminanten" von A sind

$$\left\{\begin{matrix} \text{alle } > 0 \\ \text{abwechselnd } < 0 \text{ und } > 0 \end{matrix}\right\}$$

<u>Folgerung</u> (Extremstellentest) $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f $\big(=$ Kandidat vom Typ a$\big)$, f sei in $\vec{x}_0$ 2-mal differenzierbar. Dann gilt:

(1) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit, d.h. für $n = 2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) > 0$, $\det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) > 0$

$\Longrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum

(2) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ negativ definit, d.h. für $n = 2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) < 0$, $\det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) > 0$

$\Longrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum

(3) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ indefinit, d.h. für $n = 2$: $\det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) < 0$

$\Longrightarrow f$ hat in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt

(4) $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ ist weder noch, d.h. für $n = 2$: $\det \mathrm{H}f(\vec{x}_0) = 0$

keine Entscheidung; man muß $g_{\vec{r}}$ direkt betrachten.

<u>Beweis:</u> Z.B. für (1):

$\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Longleftrightarrow \forall \vec{r} \neq \vec{0} : \ddot{g}_{\vec{r}}(0) > 0 \Longrightarrow$ (Satz 1, 9.1): $\forall \vec{r} \neq \vec{0}$:

$g_{\vec{r}}$ hat in $t = 0$ ein Minimum $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall \vec{r} \neq \vec{0}$: $\forall 0 \neq t$ klein: $g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r}) > f(\vec{x}_0)$

Mit Hilfe der Taylorreihe (s. Kap. VI) sieht man, daß sogar gilt:

$(*)$ $\exists \delta > 0 : \forall \vec{r}$ mit $\|\vec{r}\| = 1$: $\forall t$ mit $0 < |t| < \delta : g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r}) > f(\vec{x}_0)$

und daher $\forall \vec{x}$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$: $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$, d.h. f hat in $\vec{x}_0$ ein Minimum.

$\square$

<u>Bemerkung:</u> $\vec{x}_0$ ist in $\left\{ \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \right\}$ sogar ein "isoliertes" $\left\{ \begin{matrix} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{matrix} \right\}$, d.h. das einzige $\left\{ \begin{matrix} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{matrix} \right\}$ in einer kleinen Umgebung von $\vec{x}_0$, denn in $(*)$ gilt $>$.

<u>Schema z.B. für Bsp. 3</u>

Kandidaten nach (a) (=stationäre Punkte)	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	det Hf	Ergebnis
P_1	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$-\frac{16}{2} < 0$	Sattelpunkt
P_2	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$-\frac{16}{2} < 0$	Sattelpunkt
P_3	$\frac{8}{\sqrt{6}} > 0$	$\frac{64-16}{6} > 0$	lokales Minimum
P_4	$-\frac{8}{\sqrt{6}} < 0$	$\frac{64-16}{6} > 0$	lokales Maximum

20.6 EXTREMA BEI NEBENBEDINGUNGEN

Bsp. 3 Die Kandidaten nach (b) erfüllen die Gleichung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Def.: Es seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1, \ldots, g_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D$.

$\vec{x}_0$ heißt Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_1, \ldots, g_k \Longleftrightarrow$

(a) $g_1(\vec{x}_0) = \cdots = g_k(\vec{x}_0) = 0 \wedge$

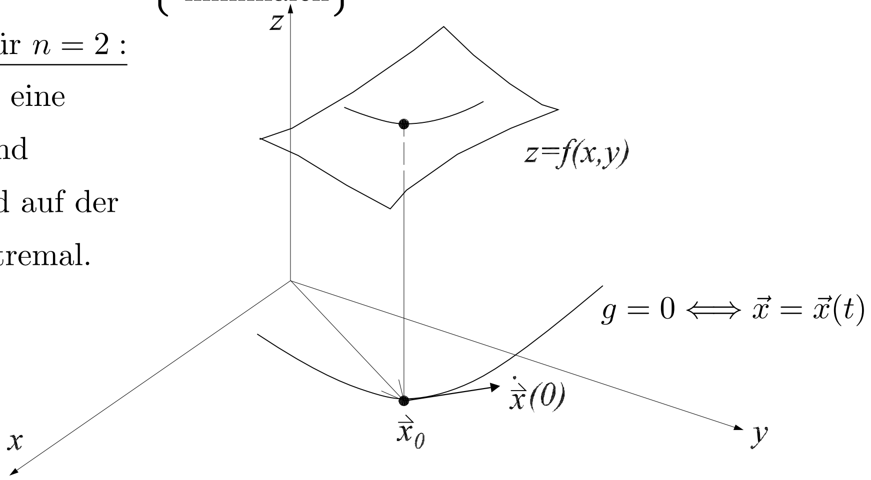
(b) $\exists \delta > 0$:

$$\forall \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \text{ und } g_1(\vec{x}) = \cdots = g_k(\vec{x}) = 0 : \begin{cases} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \end{cases}$$

In Worten: Unter den $\vec{x}$, die die Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = 0, \ldots, g_k(\vec{x}) = 0$ erfüllen, hat $\vec{x}_0$ lokal einen $\left\{\begin{matrix} \text{maximalen} \\ \text{minimalen} \end{matrix}\right\}$ f-Wert.

Untersuchung für $n = 2$:

$g(x,y) = 0$ gibt eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ und $z = f(x,y)$ wird auf der Kurve in $\vec{x}_0$ extremal.



Es sei $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Dann läßt sich nach §19, Satz 3, 2, $g(x,y) = 0$ als $y = h(x)$ oder als $x = h(y)$ schreiben. Allgemeiner sei $\vec{x}(t)$ irgendeine Parametrisierung von $g(x,y) = 0$ mit $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, $\dot{\vec{x}}(0) \neq \vec{0}$.

$\vec{x}_0$ Extremum unter der Nebenbedingung $g \Longleftrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big)$ hat in 0 ein Extremum $\Longrightarrow f\big(\vec{x}(t)\big)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = 0 \Longrightarrow$

$$\text{I} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot \dot{x}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot \dot{y}(0) = 0$$

Andererseits ist $\forall t : g\big(\vec{x}(t)\big) = 0 \Longrightarrow$

$$\text{II} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{x}_0) \cdot \dot{x}(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}_0) \cdot \dot{y}(0) = 0$$

Da $\dot{\vec{x}}(0) \neq \vec{0}$, müssen die Zeilen dieses Gleichungssystems linear abhängig sein, d.h. $\exists \lambda_0 : \nabla f(\vec{x}_0) = \lambda_0 \nabla g(\vec{x}_0)$, d.h. in $\vec{x}_0$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}$$

Dies führt zu folgendem Rezept:

Bilde $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$;

$\vec{x}_0$ Extremum von f unter der Nebenbedingung $g \wedge \ (\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}\,)$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ ist ein stationärer Punkt von } F \text{ für ein gewisses } \lambda_0$$

Denn in $\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -g \qquad\qquad = 0 \end{aligned}$$

Bezeichnung: λ heißt Lagrange'scher Multiplikator.

Zurück zu Bsp. 3 $\ f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1),\ g(x,y) = x^2+y^2-4$

$F(x,y,\lambda) = (x-y)(x^2+y^2-1) - \lambda(x^2+y^2-4)$

$$\text{I} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2 - 1 - 2\lambda x = 0$$

$$\text{II} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 - 2\lambda y = 0$$

$$\text{III} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 + 4 = 0$$

I+II: $2x^2 - 2y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y = 0$

$$\Longrightarrow (x-y)(x+y) - \lambda(x+y) = 0$$

$$\Longrightarrow (x+y)[x-y-\lambda] = 0$$

1. Fall $\ x+y=0,\ y^2 = x^2 \quad$ III: $2x^2 = 4,\ x = \pm\sqrt{2}$; das führt auf P_5, P_6

2. Fall $\ x+y \neq 0 \Longrightarrow x - y = \lambda$

I gibt $3x^2 - 2xy + y^2 - 1 - 2(x-y)x = 0$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad$ Widerspruch zu III.

(Beachte, daß die Voraussetzung $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ für alle $\vec{x}_0$ auf dem Kreis zutrifft!)

Allgemeines Rezept:

$\vec{x}_0$ Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_1, \ldots, g_k \Longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{\lambda}_0 \end{pmatrix}$ stationärer Punkt von $F(\vec{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \cdots - \lambda_k g_k(\vec{x})$ für ein gewisses $\vec{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^k$.

§21: Vektorfelder

21.1 NABLA

Def. Eine vektorwertige Funktion $\vec{v}$ ist eine Vorschrift, die jedem $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ ein $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.

Schreibweise: $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$

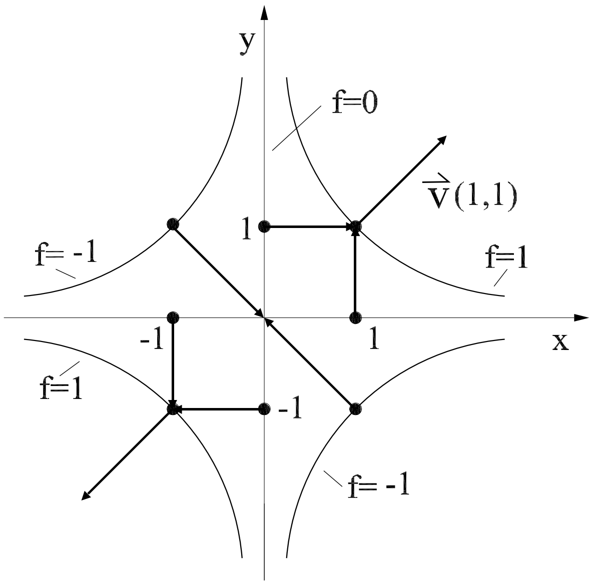
Bemerkung: Wenn $m = n$, so nennt man $\vec{v}$ auch Vektorfeld. Zur Betonung des Unterschiedes wird $f(\vec{x})$ wie in §19 auch Skalar(feld) genannt.

Mathematische Interpretation: $\vec{v}$ besteht aus den m gewöhnlichen (“skalaren”) Funktionen $v_1, \ldots, v_m$.

Physikalische Interpretation: Man kann sich $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ z.B. als Geschwindigkeitsvektor einer Strömung oder als Kraftvektor im Punkt $\vec{x}$ vorstellen. Man zeichnet daher $\vec{v}(\vec{x})$ als Vektor mit Anfangspunkt in $\vec{x}$.

Bsp. 1 $f(\vec{x})$ Funktion $\Longrightarrow \operatorname{grad} f$ ist ein Vektorfeld.

Z.B. im $\mathbb{R}^2 : f = xy \Longrightarrow \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \vec{v}(\vec{x})$



Def. $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix}, \; D \subset \mathbb{R}^3.$

1) $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}$ heißt Divergenz von $\vec{v}$.

$$2)\quad \operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{heißt } \underline{\text{Rotation}} \text{ von } \vec{v}.$$

Schreibweise: Wenn $\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$ als Operator-Vektor aufgefaßt wird, so ist $\operatorname{grad} f = \nabla \cdot f$, $\operatorname{div}\vec{v} = \langle \nabla, \vec{v}\rangle$, $\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$

Bemerkungen:

1) Skalarfeld $\underset{\text{div}}{\overset{\text{grad}}{\rightleftarrows}}$ Vektorfeld $\circlearrowleft$ rot

2) grad, div können ebenso im $\mathbb{R}^n$ definiert werden $\left(\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{pmatrix}, \operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}\right)$, aber $\operatorname{rot}\vec{v}$ wird im $\mathbb{R}^n$ eine schiefsymmetrische Matrix:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \mathrm{J}\vec{v} - (\mathrm{J}\vec{v})^T \quad \text{(s. 21.3) und hat also } \frac{n(n-1)}{2}$$

Komponenten.

Bsp. 2 $\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix}$

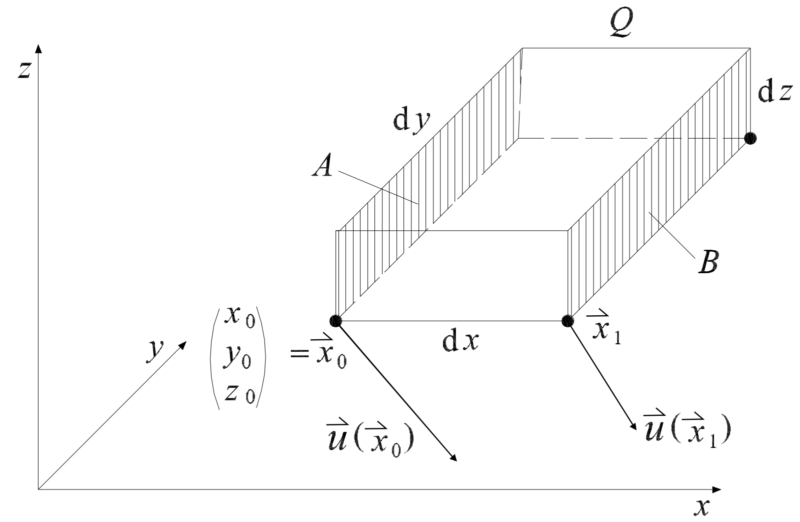
$$\Longrightarrow \operatorname{div}\vec{v} = \langle\nabla, \vec{v}\rangle = \langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix} \rangle = y + 0 - \cos(y-z)$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(y-z) - 1 \\ 0 - 0 \\ 0 - x \end{pmatrix}$$

Physikalische Interpretation der Divergenz

$\vec{v}(\vec{x})$ sei das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, $\varrho(\vec{x})\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$ sei die Dichte, $\vec{u} = \varrho \cdot \vec{v}\ [\mathrm{kg\,m^{-2}\,sec^{-1}}]$ ist die Impulsdichte. Im allgemeinen hängen $\vec{v}, \varrho, \vec{u}$ auch noch von der Zeit t ab. Wenn das nicht der Fall ist, nennt man die Strömung "stationär". Dies nehmen wir zunächst an.

Von $\vec{x}_0$ aus werde ein kleiner Quader Q mit den Seitenlängen $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ gezeichnet:



AFM sei eine Abkürzung für "aus Q pro Sekunde austretende Flüssigkeitsmasse [kg/sec]".

$$\left.\begin{aligned} \text{AFM} = a > 0 \\ \text{AFM} = a < 0 \end{aligned}\right\} \text{ bedeutet } \left\{\begin{aligned} &a \text{ [kg/sec] strömt aus } Q \text{ aus} \\ &|a| \text{ [kg/sec] strömt nach } Q \text{ ein} \end{aligned}\right.$$

Dann gilt:

$$\text{AFM durch } A \approx -u_1(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned} \text{AFM durch } B \approx \ u_1(\vec{x}_1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= u_1(x_0 + \mathrm{d}x, y_0, z_0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &\approx \left[u_1(\vec{x}_0) + \frac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x}_0)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned}$$

(Denn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ gibt einen Flüssigkeitstransport parallel zu A, B)

$\Longrightarrow$ AFM durch A und $B \approx \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$\Longrightarrow$ AFM auf allen Seiten von $Q \approx \operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Also: $\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}_0) =$ "Quellstärke von $\vec{u}$ in $\vec{x}_0$".

Bei einer stationären Strömung oder bei einer inkompressiblen Flüssigkeit ist daher $\operatorname{div}\vec{u} = 0$; wenn $\vec{u}$ zusätzlich von t abhängt und die Flüssigkeit/das Gas kompressibel ist, muß das nicht der Fall sein. Ähnlich läßt sich $\operatorname{rot}\vec{u}$ als "Wirbelstärke von $\vec{u}$ in $\vec{x}_0$" interpretieren.

Def. Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heißt

$$\left\{\begin{matrix} \underline{\text{quellenfrei}} \\ \underline{\text{wirbelfrei}} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \end{matrix}\right\}.$$

21.2 ZUSAMMENGESETZTE OPERATOREN

Sinnvoll sind: div grad $f = \Delta f$

rot grad $f = \vec{0}$

div rot $\vec{v} = 0$

rot rot $\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}$

Sinnlos sind: rot div $\vec{v}$, div div $\vec{v}$, grad grad f und grad rot $\vec{v}$

Rechnungen dazu:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$

b) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Schwarz}}}{=} \vec{0}.$

c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{3y} - v_{2z} \\ v_{1z} - v_{3x} \\ v_{2x} - v_{1y} \end{pmatrix} \rangle$

$$= v_{3yx} - v_{2zx} + v_{1zy} - v_{3xy} + v_{2xz} - v_{1yz} \overset{\substack{\text{Schwarz} \\ \uparrow}}{=} 0$$

d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$, wobei $\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$ (vgl. die Übung 65)

Bemerkung: b) und c) kann man sich "alchimistisch" merken: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$, da "$\nabla f \parallel \nabla$"; $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \langle \nabla, \nabla \times \vec{v} \rangle = 0$, da "$\nabla \times \vec{v} \perp \nabla$".

Def: Wenn das Vektorfeld $\vec{v}$ sich als $\vec{v} = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{grad} f \\ \operatorname{rot}\vec{w} \end{matrix} \right\}$ schreiben läßt, so sagt man

$\vec{v}$ hat ein $\left\{ \begin{matrix} \underline{\text{Potential}}\ (= f) \text{ oder } \vec{v} \text{ ist } \underline{\text{konservativ}} \\ \underline{\text{Vektorpotential}}\ (= \vec{w}) \end{matrix} \right\}$.

Bemerkungen: 1) f ist (wie das unbestimmte Integral) durch $\vec{v}$ bis auf eine Konstante bestimmt:

$\nabla f_1 = \vec{v} = \nabla f_2 \Longrightarrow \nabla(\underbrace{f_1 - f_2}_{g}) = \vec{0} \Longrightarrow \forall y, z : \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow g$ ist bzgl. x konstant; ebenso ist g bzgl. y, z konstant $\Longrightarrow$ $g =$ Konstante. $\vec{w}$ ist nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt, da $\operatorname{rot}(\vec{w} + \operatorname{grad} g) = \operatorname{rot}\vec{w}$, s. auch Satz 1.

(2) Wenn $\vec{K}$ ein konservatives Kraftfeld ist, d.h. $\vec{K} = \nabla f$, so nennt man in der Physik $U = -f$ Potential von $\vec{K}$.

Grund dafür: Ein Massenpunkt mit Masse m erfüllt $m\ddot{\vec{x}} = \vec{K} = -\nabla U \quad \big| \cdot \dot{\vec{x}}$

$$\Longrightarrow \underbrace{m\langle\ddot{\vec{x}},\dot{\vec{x}}\rangle}_{m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})} = -\underbrace{\langle\nabla U,\dot{\vec{x}}\rangle}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U\left(\vec{x}(t)\right)} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\cdot} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2}_{E_{\mathrm{kin}}}+\underbrace{U\left(\vec{x}(t)\right)}_{E_{\mathrm{pot}}}\right) = 0,$$ d.h. in einem konservativen Kraftfeld gilt der Energieerhaltungssatz und die potentielle Energie ist U mit $\vec{K} = -\nabla U$.

Satz 1

1) $\vec{v}$ hat ein Potential $\Longrightarrow \operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$, d.h. $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

2) $\vec{v}$ hat ein Vektorpotential $\Longrightarrow \operatorname{div}\vec{v} = 0$, d.h. $\vec{v}$ ist quellenfrei.

3) Wenn die Definitionsmenge D von $\vec{v}$ konvex ist $\big[$d.h. $\vec{x}_0,\vec{x}_1 \in D \Longrightarrow$ die ganze Verbindungsstrecke $t\vec{x}_0+(1-t)\vec{x}_1$, $t\in[0,1]$, liegt auch in $D\big]$, so gilt in $1), 2)$ auch " $\Longleftarrow$ ".

Beweis:

1) $\vec{v} = \operatorname{grad} f \Longrightarrow \operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \vec{0}$

2) $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w} \Longrightarrow \operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{w} = 0$

3) Es sei z.B. $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und der Einfachheit halber $D = \mathbb{R}^3$. Wir wollen ein f mit $\nabla f = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$ bestimmen.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = v_1 \Longrightarrow f = \displaystyle\int v_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x = V_1(\vec{x}) + C;$

darin ist V_1 eine Stammfunktion von v_1 bzgl. x, z.B. $V_1(\vec{x}) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} v_1(t,y,z)\,\mathrm{d}t$, und C eine Konstante bzgl. x, die aber noch von y,z abhängen kann, d.h. $C = C(y,z)$.

b) $f = V_1 + C \Longrightarrow$

$$v_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial y} = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial v_1}{\partial y}(t,y,z)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial C}{\partial y};$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \Longrightarrow$$

$$v_2(\vec{x}) = \frac{\partial C}{\partial y} + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial v_2}{\partial x}(t,y,z)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial C}{\partial y} + v_2(\vec{x}) - v_2(x_0,y,z) \qquad \Big| - v_2(\vec{x})$$

$$\Longrightarrow C(y,z) = \int v_2(x_0,y,z)\,\mathrm{d}y = V_2(y,z) + D;$$

darin ist V_2 eine Stammfunktion von $v_2(x_0,y,z)$ bzgl. y, z.B.
$V_2(y,z) = \int\limits_{y_0}^{y} v_2(x_0,t,z)\,\mathrm{d}t$ und D eine Konstante bzgl. x und y, die aber noch von z abhängen kann, d.h. $D = D(z)$.

c) $f = V_1 + V_2 + D \Longrightarrow$

$$v_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial v_1}{\partial z}(t,y,z)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial v_2}{\partial z}(x_0,t,z)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}$$

$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \dfrac{\partial v_1}{\partial z} = \dfrac{\partial v_3}{\partial x},\ \dfrac{\partial v_2}{\partial z} = \dfrac{\partial v_3}{\partial y} \Longrightarrow v_3(\vec{x}) = \dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} + v_3(\vec{x}) - v_3(x_0,y,z) +$ $v_3(x_0,y,z) - v_3(x_0,y_0,z) \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z} = v_3(x_0,y_0,z)$, d.h. D ist eine Stammfunktion von $v_3(x_0,y_0,z)$ bzgl. z.

$f = V_1 + V_2 + D$ ist also ein Potential von $\vec{v}$. $\square$

<u>Bsp. 3</u> $\vec{v} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \end{pmatrix}$. $D = \mathbb{R}^3$ ist konvex.

Es ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) - \cos(xy) + xy\sin(xy) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Nach Satz 1 existiert ein Potential f. Wir bestimmen es wie im Beweis:

$$\vec{v} = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = v_1 = y\cos(xy) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f = \int y\cos(\underbrace{xy}_{u})\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{\frac{\mathrm{d}u}{y}} = \sin(xy) + C(y,z)$$

$$\Longrightarrow v_2 = y + \cancel{x}\cancel{\cos}(\cancel{x}y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big[\sin(xy) + C(y,z)\big] = \cancel{x}\cancel{\cos}(\cancel{x}y) + \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = y \Longrightarrow C = \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + D(z) \Longrightarrow f = \sin(xy) + \frac{y^2}{2} + D(z)$$

$$\Longrightarrow v_3 = \mathrm{e}^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\sin(xy) + \frac{y^2}{2} + D(z)\right] = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}$$

$$\Longrightarrow D = \int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z + E$$

Also ist $f = \sin(xy) + \dfrac{y^2}{2} + \mathrm{e}^z + E$. Die Konstante E kann beliebig gewählt werden (vgl. Bemerkung 1 oben).

21.3 DIE JACOBI-MATRIX

Wir haben uns bisher nicht systematisch um die Differenzierbarkeit von Vektorfeldern gekümmert, sondern vorausgesetzt, daß die benötigten partiellen Ableitungen existieren.

Def.: $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 \in D$ innerer Punkt.

$\vec{v}$ heißt in $\vec{x}_0$ (bzw. schlechthin) differenzierbar $\iff \forall i = 1, \dots, m : v_i$ in $\vec{x}_0$ (bzw. schlechthin) differenzierbar. Dann heißt die $m \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \frac{\partial v_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} (\nabla v_1)^T \\ \vdots \\ (\nabla v_m)^T \end{pmatrix} (\vec{x}_0)$$

Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix von $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$.

Bezeichnung dafür J oder genauer $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ oder $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Bemerkung: J faßt also alle ersten Ableitungen $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ in einer Matrix zusammen.

Für ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ gilt z.B.

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{und } \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{Spur}(\mathrm{J}), \ \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} (\mathrm{J} - \mathrm{J}^T)_{32} \\ (\mathrm{J} - \mathrm{J}^T)_{13} \\ (\mathrm{J} - \mathrm{J}^T)_{21} \end{pmatrix}$$

Satz 2 (Bedeutung der Jacobi-Matrix)

$\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Äquivalent sind:

(a) $\vec{v}$ ist in $\vec{x}_0$ differenzierbar,

(b) $\exists\ m \times n$-Matrix A, sodaß

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{\varrho}(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

wobei $\vec{\varrho}(\vec{h})$ vom Typ $o\big(\|\vec{h}\|\big)$ ist, d.h. $\lim\limits_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|\vec{\varrho}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$

In diesem Fall (wenn (a),(b) gelten) ist $A = \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$.

<u>Beweis:</u> Analog §19, Satz 1.

<u>Bedeutung von Satz 2:</u> $J\vec{v}(\vec{x}_0)$ liefert also eine "lineare Approximation" von $\vec{v}$ bei $\vec{x}_0$, d.h. genauer

$$\underbrace{\vec{v}(\vec{x})}_{m\times 1} \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \underbrace{J\vec{v}(\vec{x}_0)}_{m\times n} \cdot \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{n\times 1} \text{ für } \vec{x} \to \vec{x}_0.$$

<u>Bsp. 2</u> $\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$J = \begin{pmatrix} (\nabla v_1)^T \\ (\nabla v_2)^T \\ (\nabla v_3)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(y-z) & -\cos(y-z) \end{pmatrix};$$

es sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $J\vec{v}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

nach Satz 2 ist für $\vec{x} \to \vec{x}_0$

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &\approx \vec{v}(\vec{x}_0) + J\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x}-\vec{x}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-1 \\ z \\ y-z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. z.B. $\underbrace{\vec{v}(1.01, 0.98, 1.02)}_{\|} \approx \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.02 \\ -0.04 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1.01 \cdot 0.98 \\ 1.02 \\ \sin(-0.04) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9898 \\ 1.02 \\ -0.039989\ldots \end{pmatrix}$$

Der Unterschied ist $\vec{\varrho}(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

<u>Bemerkung:</u> Satz 2 zeigt, warum die partiellen Ableitungen als $m \times n$-Matrix und nicht als $n \times m$-Matrix angeordnet werden: Sonst hätte das Produkt $J\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x}-\vec{x}_0)$ keinen Sinn. Ebenso bei der Kettenregel:

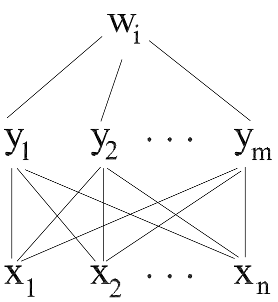
$$\vec{v} : \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{D_1} \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \vec{y}, \quad \vec{w} : \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^m}}{D_2} \longrightarrow \mathbb{R}^l : \vec{y} \longmapsto \vec{w}(\vec{y})$$

$$\vec{w} \circ \vec{v} : \left\{ \vec{x} \in D_1 : \vec{v}(\vec{x}) \in D_2 \right\} \longrightarrow \mathbb{R}^l : \vec{x} \longmapsto \vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big)$$

Dann gilt für $\vec{x}_0 \in D_1$ mit $\vec{v}(\vec{x}_0) \in D_2$:

$$\underbrace{J(\vec{w} \circ \vec{v})(\vec{x}_0)}_{l\times n} = \underbrace{(J\vec{w})\big(\vec{v}(\vec{x}_0)\big)}_{l\times m} \cdot \underbrace{J\vec{v}(\vec{x}_0)}_{m\times n}$$

denn



$$\Longrightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial w_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v})_{ij} &= (\mathrm{J}\vec{w})_{i1}(\mathrm{J}\vec{v})_{1j} + \cdots + (\mathrm{J}\vec{w})_{im}(\mathrm{J}\vec{v})_{mj} \\ &= \big((\mathrm{J}\vec{w}) \cdot (\mathrm{J}\vec{v})\big)_{ij} \end{aligned}$$

(wobei der Einfachheit halber das Einsetzen von $\vec{x}_0$ bzw. $\vec{v}(\vec{x}_0)$ hier nicht explizit angeschrieben wurde).

21.4 DAS NEWTONSCHE NÄHERUNGSVERFAHREN IN MEHREREN VARIABLEN

Es seien n Gleichungen in n Variablen gegeben:

$v_1(x_1, \cdots, x_n) = 0$

$\cdots$ bzw. $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}.$

$v_n(x_1, \cdots, x_n) = 0$

$\vec{x}_0$ sei ein Startpunkt "in der Nähe" einer Nullstelle $\vec{x}$. Dann gilt nach Satz 2:

$$\vec{0} = \vec{v}(\vec{x}) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \qquad / - \vec{v}(\vec{x}_0)$$

$$\Longrightarrow - \vec{v}(\vec{x}_0) \approx \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \qquad / \cdot \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)^{-1} \text{ von links}$$

$$\Longrightarrow - \mathrm{J}(\vec{v})(\vec{x}_0)^{-1} \cdot \vec{v}(\vec{x}_0) \approx \vec{x} - \vec{x}_0 \qquad / + \vec{x}_0$$

$$\Longrightarrow \vec{x}_0 - \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)^{-1} \cdot \vec{v}(\vec{x}_0) \approx \vec{x}$$

Daher nehmen wir als nächste Näherung

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)^{-1} \cdot \vec{v}(\vec{x}_0)$$

und gelangen mit Iteration zur Formel

$$\boxed{\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_k)^{-1} \cdot \vec{v}(\vec{x}_k)}$$

Bemerkungen: 1) Für $n = 1$ erhalten wir die Formel aus Mathematik A mit v statt f, k statt n :

$$n = 1 \Longrightarrow \mathrm{J}v(x) = v'(x) \Longrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{v(x_k)}{v'(x_k)}.$$

2) Damit $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_k)^{-1}$ existiert, muss $\det \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_k) \neq 0$ gelten.

Bsp. 3.5 Bestimme das lokale Maximum von $f(x, y) = \cos x + \cos y + \sin\big(\frac{xy}{2}\big) + \frac{x}{5}$ in der Nähe von $(0/0)$.

Die Funktion $z = \cos x + \cos y$ ist periodisch, vgl. Übung 58 und hat ein Maximum bei $\vec{0}$, durch die (kleinen) Zusatzterme verschiebt sich dieses Maximum etwas.

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x + \frac{y}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right) + \frac{1}{5} \\ -\sin y + \frac{x}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

$$\mathrm{J}\vec{v} = \begin{pmatrix} -\cos x - \frac{y^2}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right) - \frac{xy}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{xy}{2}\right) - \frac{xy}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) & -\cos y - \frac{x^2}{4}\sin\left(\frac{xy}{2}\right) \end{pmatrix} = \mathrm{H}\,f$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \mathrm{J}v(\vec{x}_0)^{-1} \cdot \vec{v}(\vec{x}_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2\dot{6} \\ 0.1\dot{3} \end{pmatrix}$$

Mit Iteration erhält man $\vec{x} \approx \begin{pmatrix} 0.27134 \\ 0.13607 \end{pmatrix}$. Vgl. dazu das folgende maple-Programm.

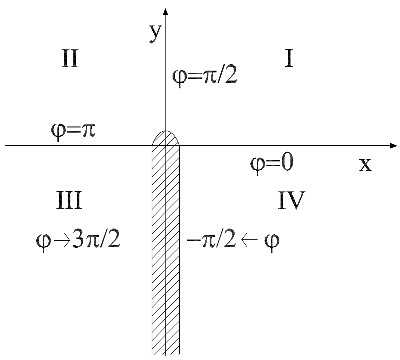
21.5 KOORDINATEN-TRANSFORMATIONEN

Def.: n differenzierbare Funktionen $v_1(\vec{x}), \ldots, v_n(\vec{x})$, $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißen Koordi- naten, wenn die Abbildung $\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n : \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ umkehrbar ist, d.h. wenn $\left[\vec{v}(\vec{x}_1) = \vec{v}(\vec{x}_2) \Longrightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2\right]$.

Bemerkung: Zur Unterscheidung nennt man die Koordinaten bzgl. einer Basis (s. Math. A) manchmal *lineare* Koordinaten, und den obigen, allgemeineren Begriff *krummlinige* Koordinaten.

Bsp. 4 (Polarkoordinaten)

$n = 2$, $v_1 = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v_2 = \varphi = \arctan \dfrac{y}{x}(+\pi)$ sind Koordinaten in $D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y > 0\}$. (Beachte: "$x \neq 0$" gilt außerhalb der y-Achse, "$y > 0$" gilt in der oberen Halbebene, "$x \neq 0$ oder $y > 0$" gilt in der **Vereinigung** dieser beiden Mengen, d.h. außerhalb der negativen y-Achse.)



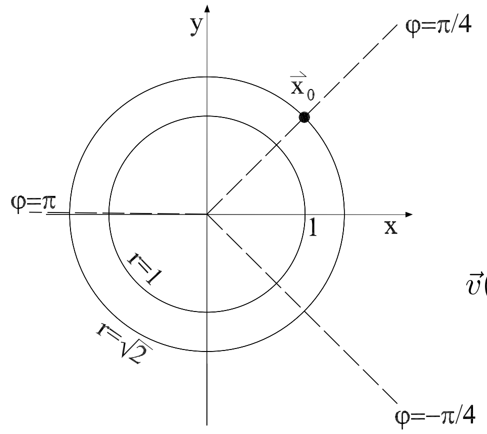
Wir nehmen immer
$\varphi = \arctan \dfrac{y}{x} + \pi$ für $\vec{x} \in$ II,III
und daher muß die xy-Ebene
wie im Bild "aufgeschnitten" werden.

(Oft wird auch $\varphi = \arctan \dfrac{y}{x} - \pi$ für $\vec{x} \in$ III gesetzt. Dann ist φ entlang der negativen x-Achse unstetig und es wird dort aufgeschnitten.)

Es gibt zwei Möglichkeiten, sich Koordinaten vorzustellen:

(a) Zeichne in $\mathbb{R}^n$ die Niveauflächen von $v_1, \ldots, v_n$. Die Koordinaten eines Punktes $\vec{x}_0$ werden durch die Niveauflächen bestimmt, auf denen er liegt.

In Bsp. 4:



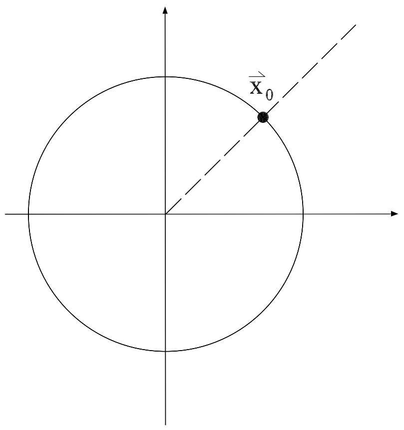
Z.B.:

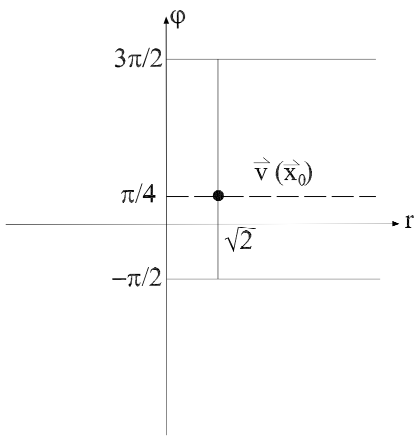
$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{ kartesische Koordinaten von } \vec{x}_0$$

$$\vec{v}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi/4 \end{pmatrix} = \text{ Polarkoordinaten von } \vec{x}_0$$

(b) Als Abbildung, die jedem Punkt $\vec{x}$ von $D \subset \mathbb{R}^n$ den Punkt $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Die Niveauflächen gehen dabei in (Hyper-)ebenen (bzw. für $n = 2$: Geraden) über.

Im Bsp. 4:





Satz 3 (über die Umkehrfunktion)

$\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Wenn $\det \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0$, so sind $v_1, \ldots, v_n$ bei $\vec{x}_0$ Koordinaten (d.h. $\exists\, \delta > 0 : \vec{v}$ ist auf $\{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$ umkehrbar).

Bezeichnung:

$$\det(\mathrm{J}\vec{v}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ heißt Funktionaldeterminante und wird auch

mit $\dfrac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ bezeichnet.

Beweis: a) $\det \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0 \iff \nabla v_1(\vec{x}_0), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_0)$ sind eine Basis im $\mathbb{R}^n$ (denn dies sind die Zeilen von $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$).

$\vec{v}$ stetig differenzierbar in $\vec{x}_0 \Longrightarrow \nabla v_1, \ldots, \nabla v_n$ sind stetig in $\vec{x}_0 \Longrightarrow \nabla v_1(\vec{x}_1), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_n)$ sind auch eine Basis im $\mathbb{R}^n$, wenn $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ n Punkte nahe bei $\vec{x}_0$ sind.

b) Der MWS angewendet auf $f(t) = v_1\big(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})\big)$, gibt

$f(1) - f(0) = (1-0) \cdot \dot{f}(t_1),\ t_1 \in]0,1[;$

$\vec{x}_1 = \vec{x} + t_1(\vec{y} - \vec{x}) \Longrightarrow$

$$v_1(\vec{y}) - v_1(\vec{x}) = f(1) - f(0) = \dot{f}(t_1) \overset{\substack{\text{Kettenregel}\\ \downarrow}}{=} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}_1) \cdot (y_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial v_1}{\partial x_n}(\vec{x}_1) \cdot (y_n - x_n) = \langle \nabla v_1(\vec{x}_1), \vec{y} - \vec{x} \rangle$$

Analog für $v_2, \cdots, v_n$.

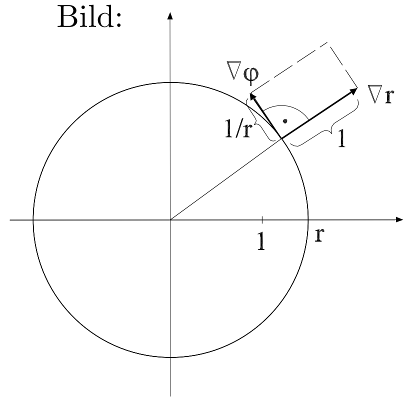
Wenn daher $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{y})$ für $\vec{x}, \vec{y}$ nahe bei $\vec{x}_0 \Longrightarrow \vec{y} - \vec{x} \perp \nabla v_1(\vec{x}_1), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_n)$ $\Longrightarrow \vec{y} - \vec{x} = \vec{0}$, da $\nabla v_1(\vec{x}_1), \ldots, \nabla v_n(\vec{x}_n)$ eine Basis ist. □

Zurück zu Bsp. 4:

$$\mathrm{J}\vec{v} = \begin{pmatrix} (\nabla r)^T \\ (\nabla \varphi)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathrm{J}\vec{v}) = \frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

Bild:



$\big|\det(\mathrm{J}\vec{v})\big| =$ Fläche des Parallelogramms, das $\nabla v_1, \nabla v_2$ aufspannen. Hier ist das Parallelogramm ein Rechteck, da $\nabla r \perp \nabla \varphi$ und daher $\big|\det(\mathrm{J}\vec{v})\big| = \|\nabla r\| \cdot \|\nabla \varphi\| = 1 \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

Def.: Die Koordinaten $v_1, \cdots, v_n$ heißen orthogonal $\iff$ alle Niveauflächen von $v_1, \ldots, v_n$ schneiden sich senkrecht $\iff \nabla v_1, \ldots, \nabla v_n$ stehen in jedem Punkt $\perp$.

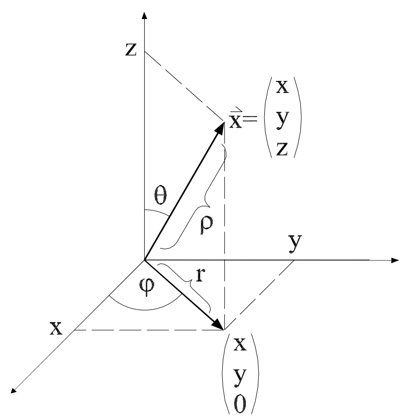
Bemerkung: Für orthogonale Koordinaten gilt $|\det \mathrm{J}\vec{v}| =$ Volumen des von $\nabla v_1, \ldots, \nabla v_n$ aufgespannten "Quaders" $= \|\nabla v_1\| \cdots \|\nabla v_n\|$

Bsp. 5: Kugelkoordinaten

$v_1 = \varrho = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$v_2 = \vartheta = \angle(\vec{x}, z\text{-Achse})$

$v_3 = \varphi = \angle\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x\text{-Achse}\right)$



Wie erhalten wir x, y, z aus $\varrho, \vartheta, \varphi$?

$$z = \varrho\cos\vartheta,\ r = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \varrho\sin\vartheta,\ x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{x} = \varrho \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

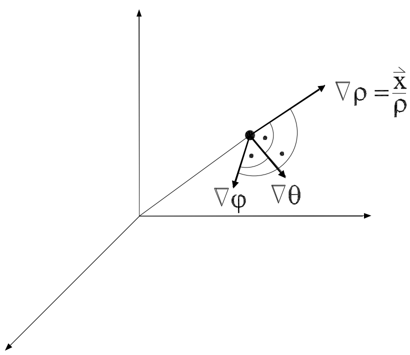
Umgekehrt folgt daraus $\vartheta = \arccos\dfrac{z}{\varrho},\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}(+\pi)$

Die Niveauflächen von $v_1 = \varrho$: Kugeln um 0

$v_2 = \vartheta$: Kegel um die z-Achse

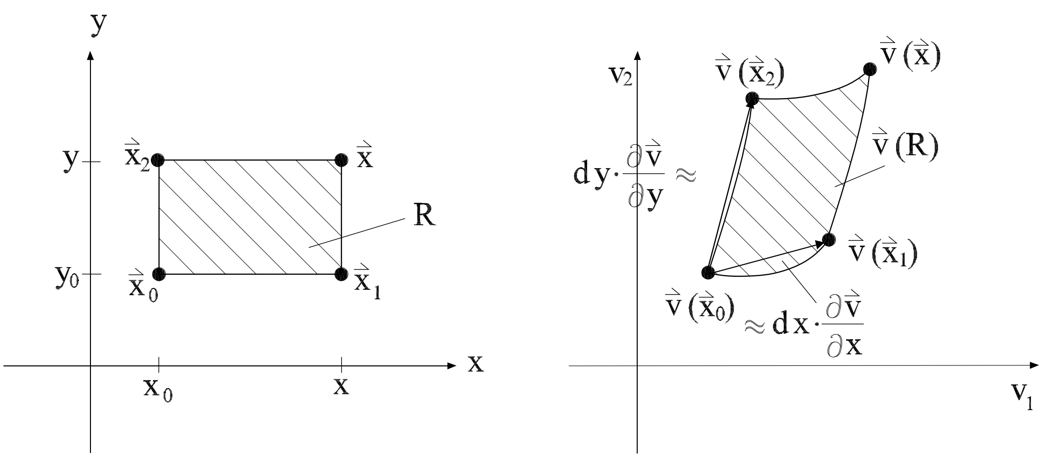
$v_3 = \varphi$: Halbebenen durch die z-Achse

schneiden sich senkrecht $\Longrightarrow$ Kugelkoordinaten sind orthogonal.



21.6 DIE FUNKTIONALDETERMINANTE ALS FLÄCHEN- (VOLUMS-)DEHNUNG

Es sei $n = 2$ und v_1, v_2 Koordinaten. Vorstellung wie in 21.5,(b):



Wenn wir $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix}$ nahe bei $\vec{x}_0$ wählen, so ist

$$\vec{v}(\vec{x}_1) = \vec{v}\left(\vec{x}_0 + \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{v}(\vec{x}_0) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}(\vec{x}_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\mathrm{d}x} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x \\ \partial v_2/\partial x \end{pmatrix}}_{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}}$$

$\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} =$ erste Spalte von $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) = \mathrm{J}$

Ebenso ist $\vec{v}(\vec{x}_2) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{d}y \cdot \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ und

$$\vec{v}(\vec{x}) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + \mathrm{d}x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \mathrm{d}y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$$

Wegen $|\det \mathrm{J}| =$[Fläche des von den Spalten $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}, \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ aufgespannten Parallelogramms] erhalten wir, daß $\vec{v}$ das Rechteck R von der Fläche $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ in etwas ungefähr parallelogrammartiges mit der näherungsweisen Fläche $|\det \mathrm{J}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ abbildet, d.h.

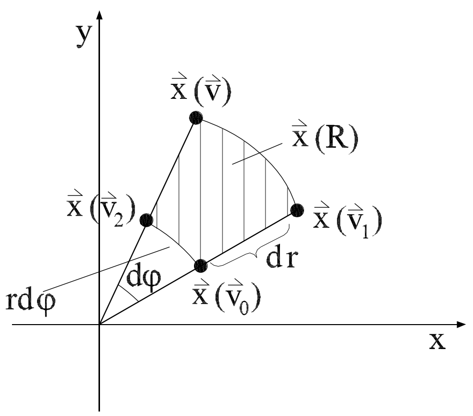
$$\boxed{|\det \mathrm{J}| = \left|\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x, y)}\right| = \lim_{R \to 0} \frac{\text{Fläche von } \{\vec{v}(\vec{x}) : \vec{x} \in R\}}{\text{Fläche von } R}}$$

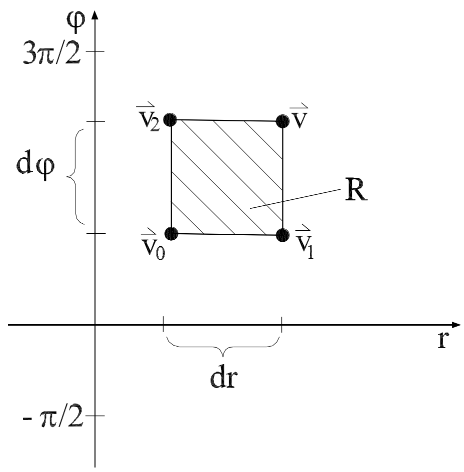
$\left\{\begin{matrix} |\det \mathrm{J}| > 1 \\ |\det \mathrm{J}| < 1 \end{matrix}\right\}$ bedeutet also, bei $\vec{x}_0$ $\left\{\begin{matrix} \text{vergrößert} \\ \text{verkleinert} \end{matrix}\right\}$ $\vec{v}$ die Fläche. (Das Vorzeichen von $\det \mathrm{J}$ sagt, wie die Spalten $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}, \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ bzw. wie die Zeilen $\nabla v_1, \nabla v_2$ orientiert sind.)

Die eingerahmte Aussage gilt natürlich analog im $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^n)$, wenn R ($n-$dimensionale) Quader sind und "Fläche" durch "Volumen" (im $\mathbb{R}^n$) ersetzt wird.

Umgekehrt werden Rechtecke in v_1, v_2-Koordinaten in krummlinige Gebiete der xy-Ebene mit Fläche $\approx \left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(v_1, v_2)}\right| \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2$ abgebildet.

Im Bsp. 4:





Offenbar ist die Fläche von $\vec{x}(R)$ (für kleine $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\varphi$) $\approx r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$, d.h. $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r$

Rechnerische Kontrolle: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{pmatrix}}{\underset{\downarrow}{=}}$

$= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$

Früher hatten wir $\dfrac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{r}$ erhalten und das ist in Übereinstimmung mit

Satz 4 $\vec{v}$ umkehrbar $\Longrightarrow \dfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(v_1,\dots,v_n)} \cdot \dfrac{\partial(v_1,\dots,v_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = 1$

(Vgl. auch §7, Satz 3, p. 59).

1. Beweis (Geometrisch) z.B. für $n = 2$:

Ein kleines Rechteck R mit Fläche F bei $\vec{x}_0$ wird von $\vec{v}$ in ein ungefähres Parallelogramm P mit Fläche $F_1 \approx F \cdot \left|\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right|$ bei $\vec{v}(\vec{x}_0)$ abgebildet. P wird von $\vec{v} \longmapsto \vec{x}(\vec{v})$ wieder auf R abgebildet mit Fläche

$$F \approx F_1 \cdot \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{v}}\right| \approx F \cdot \left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right| \cdot \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{v}}\right|.$$

Für $F \to 0$ folgt $\left|\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right| \cdot \left|\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{v}}\right| = 1.$ $\square$

2. Beweis: (Kettenregel)

Es sei $\vec{w} = \vec{v}^{-1} : \vec{v}(\vec{x}) \longmapsto \vec{x}$.

Dann ist $\vec{w} \circ \vec{v} =$ Identität, d.h.

$\vec{w} \circ \vec{v}(\vec{x}) = \vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big) = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$

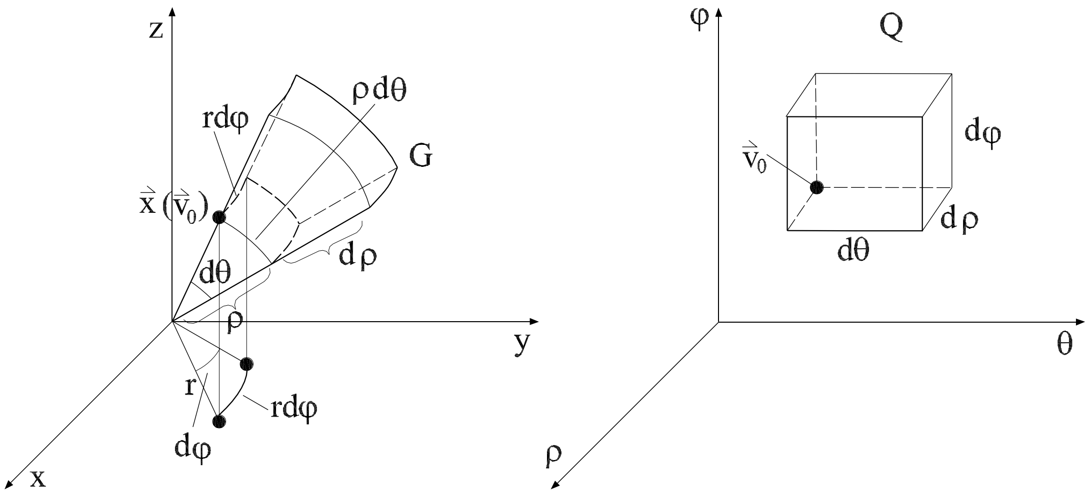
$\mathrm{J}(\vec{w} \circ \vec{v}) = \mathrm{J}$ Identität $= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$

I

$\Longrightarrow$ (s.21.3) $\mathrm{J}\vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x}_0)\big) \cdot \mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0) = I$

$\underbrace{\det \mathrm{J}\vec{w}}_{\dfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(v_1,\dots,v_n)}} \cdot \underbrace{\det \mathrm{J}\vec{v}}_{\dfrac{\partial(v_1,\dots,v_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}} = \det I = 1$ $\square$

Bsp. 5: Um $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$ zu bestimmen, kann man rechnerisch vorgehen (s. Übungen) oder geometrisch:



Ein kleiner Quader Q mit Seitenlängen $\mathrm{d}\varrho$, $\mathrm{d}\vartheta$, $\mathrm{d}\varphi$ wird im xyz-Raum in ein quaderartiges Gebiet G mit den Seiten $\mathrm{d}\varrho$, $\varrho\mathrm{d}\vartheta$, $r\mathrm{d}\varphi = \varrho \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$ und daher mit Volumen $\approx \varrho^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$ abgebildet

$$\Longrightarrow \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)} \right| = \varrho^2 \sin\vartheta.$$

(Daß G rechte Winkel hat, liegt an der Orthogonalität der Kugelkoordinaten. I.a. wäre G ein parallelepiped-artiges Gebiet.)