ZUSATZ SoSe 2002

Resonanz

Schwingungsgleichung: $m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t),\ x_{\text{stationär}} = A\sin(\vartheta t - \alpha)$ mit

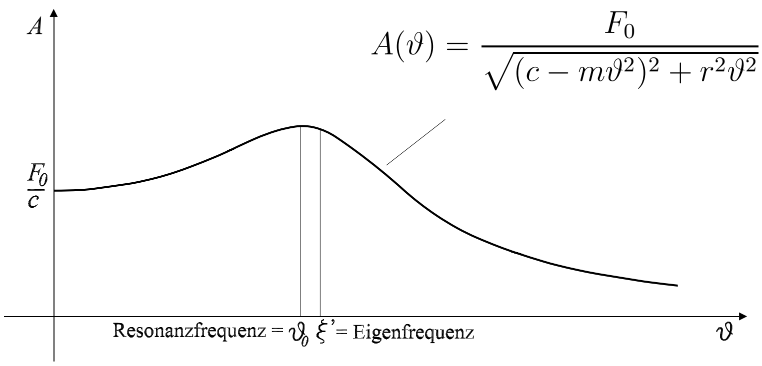
$$\text{Amplitude} \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}}$$

Problem: Bei welcher Frequenz $\vartheta = \vartheta_0$ der äußeren Kraft ist A maximal? (für F_0 fest)

Def.: Diese Frequenz ϑ_0 heißt **Resonanzfrequenz**.

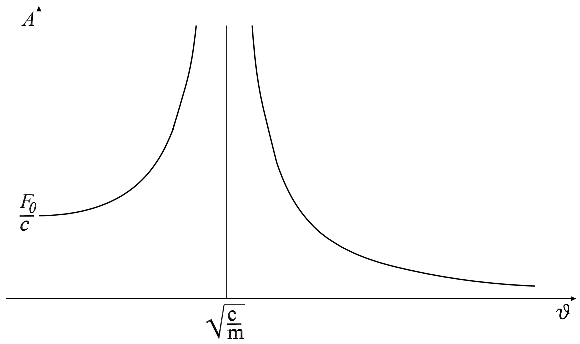
Lösung: A maximal $\Longleftrightarrow (c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2$ minimal $\Longrightarrow$ die Ableitung nach ϑ ist 0
$\Longrightarrow\ 2(c - m\vartheta^2)\cdot(-2m\vartheta) + 2r^2\vartheta = 0$
$\Longrightarrow\ \vartheta[-4cm + 4m^2\vartheta^2 + 2r^2] = 0$
$\Longrightarrow\ \vartheta = 0$ oder $\boxed{4m^2\vartheta^2 = 4cm - 2r^2}$

1. Fall: $4cm - 2r^2 > 0$, d.h. $r < \sqrt{2cm} \underset{\square}{\Longrightarrow} \vartheta_0 = \dfrac{\sqrt{4cm - 2r^2}}{2m}$

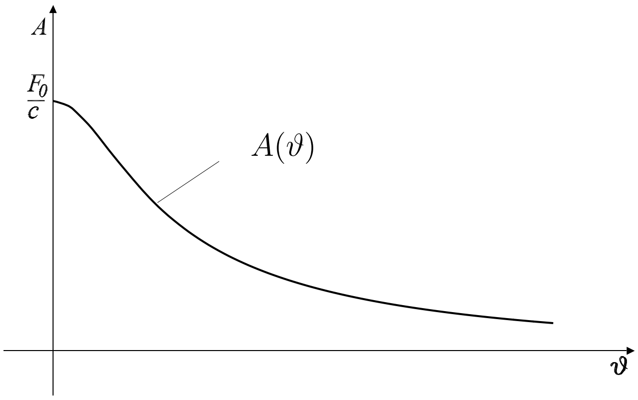


Beachte:
Die **Eigenfrequenz** ξ' bei der freien Schwingung ist $\xi' = \sqrt{\xi^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} =$
$= \dfrac{\sqrt{4cm - r^2}}{2m}$ ist größer als ϑ_0 außer für $r = 0$, d.h. bei ungedämpfter Schwingung.
In diesem Fall ist $A = \dfrac{F_0}{|c - m\vartheta^2|}$, $\quad \xi' = \vartheta_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ und A wird bei dieser Frequenz ∞ :

Weitere Diskussion von $r = 0$ und $\vartheta = \xi' = \vartheta_0$ siehe 17.4. Dies heißt „Resonanzfall“.



2. Fall: $4cm - 2r^2 \leq 0, \quad r \geq \sqrt{2cm} \Longrightarrow \vartheta_0 = 0$



17.4 LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Def.: 1) Eine **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung** hat die Form

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x) \qquad *)$$

2) $*)$ heißt **homogen** $\Longleftrightarrow g = 0$, sonst **inhomogen**.
3) $*)$ heißt mit **konstanten Koeffizienten** $\Longleftrightarrow f_0, \cdots, f_{n-1}$ sind konstant.

Satz 3: Gegeben sei $*)$ mit stetigen $f_0, \cdots, f_{n-1}, g$.
1) Für $g = 0$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum der Dimension n, d.h.
$y_{\text{hom}} = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ mit linear unabhängigen Funktionen $y_1, \cdots, y_n$.
2) $y_{\text{inh}} = y_p + y_{\text{hom}}$, wenn y_p eine Lösung von $*)$ ist.
(y_p heißt wieder EINE partikuläre Lösung.)
3) Zu gegebenen $y(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$ existiert genau ein y, das $*)$ löst, d.h.
das **Anfangswertproblem** ist eindeutig lösbar.

Bsp. 1: a) $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ und $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sind linear unabhängige Funktionen, denn $C_1y_1 + C_2y_2 =$ 0-Funktion

$$\Longleftrightarrow \forall x : C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} = 0 \implies \text{z.B. } \begin{aligned} x = 0 &: \ C_1 + C_2 = 0 \\ x = 1 &: \ C_1\mathrm{e} + C_2\mathrm{e}^{-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\implies \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e} & 1/\mathrm{e} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2, \ \det B = 1/\mathrm{e} - \mathrm{e} \neq 0$$

$$\implies \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0} \implies C_1 = C_2 = 0$$

b) $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $y_3(x) = \operatorname{ch} x$ sind linear abhängige Funktionen, denn $\forall x : -\frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \operatorname{ch} x = 0$, d.h. $\underbrace{-\dfrac{1}{2}y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 + 1 \cdot y_3}_{\text{LK von } y_1, y_2, y_3} =$ 0-Funktion $= \vec{0}$ im Vektorraum der Funktionen.

17.4.1 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1y' + d_0y = 0, \quad d_j \in \mathbb{R}$$

Der $\boxed{\text{Ansatz: } y = \mathrm{e}^{\lambda x}}$ liefert wieder die **charakteristische Gleichung**

$$P(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0 = 0$$

Diese habe die Wurzeln (=Nullstellen) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (manche vielleicht mehrfach). λ_j sei eine der Wurzeln.
1. Fall: $\lambda_j \in \mathbb{R}$ einfach $\implies$ Lösungsanteil $C\mathrm{e}^{\lambda_j x}$
2. Fall: $\lambda_j = a + \mathrm{i}\overset{\neq 0}{b} \in \mathbb{C}$ einfach
$\implies \overline{\lambda}_j = a - \mathrm{i}b$ ist auch eine Wurzel (denn $P(\overline{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0$)
$\implies z_1 = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx)$
$z_2 = \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx - \mathrm{i}\sin bx)$
sind komplexe Lösungen.
$\implies y_1 = \dfrac{z_1 - z_2}{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{ax}\sin bx, \quad y_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} = \mathrm{e}^{ax}\cos bx$
sind reelle Lösungen.
Lösungsanteil: $C\mathrm{e}^{ax}\sin bx + D\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

Bsp. 2: $y''' + y'' + 8y' - 10y = 0$

$\boxed{y = \mathrm{e}^{\lambda x}} \quad \implies \lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 10 = 0$

$\lambda_1 = 1$ (erraten) Lösungsanteil: $C\mathrm{e}^{1\cdot x}$
$(\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 10) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$
$\cdots$
${}_2\lambda_3 = -1 \pm \sqrt{1-10} = \underbrace{-1}_{a} \pm \underbrace{3}_{b}\mathrm{i}$
Lösungsanteil: $C\mathrm{e}^{-x}\sin 3x + D\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$
$y_{\text{hom}} = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}\sin 3x + C_3\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$

3. Fall: $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ist eine k-fache Wurzel, d.h. $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^k \cdot Q(\lambda)$ und $Q(\lambda_j) \neq 0$
Schreibweise: $\lambda_j^{[k]}$
Lösungsanteil: $C_0\mathrm{e}^{\lambda_j x} + C_1 x\mathrm{e}^{\lambda_j x} + \cdots + C_{k-1}x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_j x}$

4. Fall: $\lambda_j = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{R}$ ist eine k-fache Wurzel, dann ist auch $\overline{\lambda}_j = a - \mathrm{i}b$ eine k-fache Wurzel.
Lösungsanteil:
$\mathrm{e}^{ax}[C_0\sin bx + D_0\cos bx + C_1 x\sin bx + D_1 x\cos bx + \cdots + C_{k-1}x^{k-1}\sin bx + D_{k-1}x^{k-1}\cos bx]$

$$\begin{array}{lcll} \textbf{Bsp. 3:} & & y^{(11)} + 32y^{(7)} + 256y^{(3)} & = 0 \\ y = \mathrm{e}^{\lambda x} & \implies & \lambda^{11} + 32\lambda^7 + 16^2\lambda^3 & = 0 \\ & & \lambda^3(\underbrace{\lambda^8 + 32\lambda^4 + 16^2}_{(\lambda^4+16)^2}) & = 0 \end{array}$$
$\implies \lambda_1 = 0^{[3]}$ (dreifache Nullstelle) oder $\lambda^4 + 16 = 0$ siehe S. 141

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}^{[2]} \\
\lambda_3 &= -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}^{[2]}
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix}
\lambda_4 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}^{[2]} \\
\lambda_5 = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}^{[2]}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{\text{hom}} = \underbrace{C_1\mathrm{e}^{0x} + C_2x\mathrm{e}^{0x} + C_3x^2\mathrm{e}^{0x}}_{C_1+C_2x+C_3x^2} + \qquad & \text{(von } \lambda_1\text{)} \\
+C_4\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,x}\sin\sqrt{2}\,x + C_5\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,x}\cos\sqrt{2}\,x + \qquad & \text{(von } \lambda_2\text{)} \\
+ C_6x\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,x}\sin\sqrt{2}\,x + C_7x\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,x}\cos\sqrt{2}\,x + \qquad & \\
+C_8\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,x}\sin\sqrt{2}\,x + C_9\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,x}\cos\sqrt{2}\,x + \qquad & \text{(von } \lambda_3\text{)} \\
+ C_{10}x\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,x}\sin\sqrt{2}\,x + C_{11}x\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,x}\cos\sqrt{2}\,x. \qquad &
\end{aligned}
$$

17.4.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1y' + d_0y = g(x), \quad d_j \in \mathbb{R}$$

KOCHREZEPT

1. Schritt: Bestimme y_{hom}, siehe 17.4.1 Ergebnis: $y_{\text{hom}} = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$

2. Schritt: Bestimme ein y_p.

Wenn g nur aus Polynomen, e^{cx}, $\sin cx$, $\cos cx$, $\operatorname{sh} cx$, $\operatorname{ch} cx$ besteht, so macht man den Ansatz:

y_p	$=$	was in g steht und was durch Differenzieren daraus entsteht, mit unbestimmten Koeffizienten

Zusatz: Wenn ein Teil von g in y_{hom} k-mal vorkommt, so wird er im Ansatz mit x^k multipliziert. (Dies nennt man „Resonanzfall".)

3. Schritt: $y_{\text{inh}} = y_p + y_{\text{hom}}$; bestimme $C_1, \cdots, C_n$ aus den Anfangsbedingungen.

Bsp. 4: $y''' + y'' + 8y' - 10y = 2\mathrm{e}^{2x} - 5x = g(x)$

1. Schritt: $y_{\text{hom}} = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}\sin 3x + C_3\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$, siehe Bsp. 2

2. Schritt: Ansatz $y_p = a\mathrm{e}^{2x} + bx + c\cdot 1$ (denn in g kommen e^{2x}, x vor; durch Differenzieren entsteht noch 1)

$y_p' = 2a\mathrm{e}^{2x} + b,\ y_p'' = 4a\mathrm{e}^{2x},\ y_p''' = 8a\mathrm{e}^{2x}$

Dgl.: $\underbrace{y_p''' + y_p'' + 8y_p' - 10y_p}_{} \overset{!}{=} 2\mathrm{e}^{2x} - 5x$

$$\underbrace{8a\mathrm{e}^{2x} + 4a\mathrm{e}^{2x} + 8(2a\mathrm{e}^{2x} + b) - 10(a\mathrm{e}^{2x} + bx + c)}_{18a\mathrm{e}^{2x} - 10bx + 8b - 10c} \overset{!}{=} 2\mathrm{e}^{2x} - 5x$$

Koeffizientenvergleich: $\Longrightarrow 18a = 2,\ -10b = -5,\ 8b - 10c = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow\ a = \frac{1}{9},\ b = \frac{1}{2},\ 4 - 10c = 0,\ c = \frac{2}{5}$
$y_p = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

3. Schritt: $y_{\text{inh}} = y_p + y_{\text{hom}} = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{2}{5} + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}\sin 3x + C_3\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$.
Wenn z.B. $y(0) = 11,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 2002$, so kann man daraus C_1, C_2, C_3 eindeutig bestimmen.
Bei einem **Randwertproblem** hingegen (d.h. z.B. $y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y(5) = 3$) kann die Determinante der Matrix des Gleichungssystems für C_1, C_2, C_3 Null werden und keine Lösung oder viele Lösungen existieren.

Bsp. 5: a) Wieder sei $y''' + y'' + 8y' - 10y = g$,

$$y_{\text{hom}} = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\boxed{\mathrm{e}^{-x}\sin 3x} + C_3\,\boxed{\mathrm{e}^{-x}\cos 3x}$$

$g(x)$	Ansatz für y_p	
$12\sin 2x + \mathrm{e}^{5x}$	$a\sin 2x + b\cos 2x + c\mathrm{e}^{5x}$	
$3x^2$	$ax^2 + bx + c$	
$2\mathrm{e}^{-x}$	$a\mathrm{e}^{-x}$	
$-3\mathrm{ch}\,4x$	$a\,\mathrm{ch}\,4x + b\,\mathrm{sh}\,4x$	kein Resonanzfall
$4\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$	$a\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + b\mathrm{e}^{-x}\sin 2x$	
$3 + 7x\mathrm{e}^{x}\sin 3x$	$a + bx\mathrm{e}^{x}\sin 3x + cx\mathrm{e}^{x}\cos 3x + d\mathrm{e}^{x}\sin 3x + f\mathrm{e}^{x}\cos 3x$	
$5x^2\mathrm{e}^{2x} + 3x$	$ax^2\mathrm{e}^{2x} + bx\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{2x} + dx + f$	
$2\,\mathrm{e}^{x}$	$ax\mathrm{e}^{x}$	
$-7\,\boxed{\mathrm{e}^{-x}\sin 3x}$	$ax\mathrm{e}^{-x}\sin 3x + bx\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$	Resonanzfall
$12\,x^2\mathrm{e}^{x} + 2x$	$ax^3\mathrm{e}^{x} + bx^2\mathrm{e}^{x} + cx\mathrm{e}^{x} + dx + f$	

Warum geht z.B. für $g(x) = 3x^2$ der Ansatz $y_p = ax^2$ nicht?
$y_p = ax^2 \implies y_p' = 2ax,\ y_p'' = 2a,\ y_p''' = 0,$

$y_p''' + y_p'' + 8y_p' - 10y_p = 2a + 16ax - 10ax^2 \overset{!}{=} 3x^2,\ \forall x$
$\implies -10a = 3,\ 16a = 0,\ 2a = 0$ ↯

Warum geht z. B. für $g(x) = 2\mathrm{e}^x$ der Ansatz $y_p = a\mathrm{e}^x$ nicht?
$a\mathrm{e}^x$ ist die Lösung der homogenen Gleichung $\implies$ wenn $y_p = a\mathrm{e}^x$, so ist
$\underbrace{y_p'''}_{a\mathrm{e}^x} + \underbrace{y_p''}_{a\mathrm{e}^x} + \underbrace{8y_p'}_{8a\mathrm{e}^x} - \underbrace{10y_p}_{-10a\mathrm{e}^x} = 0 \neq 2\mathrm{e}^x$ egal wie a gewählt wird.

b) Wenn $y_{\text{hom}} = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + C_3x^2\mathrm{e}^x$ (d.h. $\lambda_1 = 1^{[3]}$, $k = 3$) so gilt:

$g(x)$	Ansatz für y_p
$3\mathrm{e}^x$	$ax^3\mathrm{e}^x$
$7x\mathrm{e}^x$	$ax^4\mathrm{e}^x + bx^3\mathrm{e}^x$

„3-fache Resonanz“

Bsp. 6: Inhomogene Schwingungsgleichungen ohne Dämpfung mit Resonanz, d.h.

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t) \quad \text{mit} \quad \vartheta = \xi = \sqrt{\tfrac{c}{m}}$$

1. Schritt: $\ddot{x} + \underbrace{\tfrac{c}{m}}_{\xi^2}x = 0,\ x_{\text{hom}} = C_1\sin(\xi t) + C_2\cos(\xi t)$

$(\lambda^2 + \xi^2 = 0,\ {}_1\lambda_2 = \pm\mathrm{i}\,\xi = \underbrace{0}_{a} \pm \mathrm{i}\underbrace{\xi}_{b}\ )$

2. Schritt: Wegen $\vartheta = \xi$ ist der richtige Ansatz

$$\begin{aligned}
& x_p = a\underline{\underline{t}}\sin(\xi t) + b\underline{\underline{t}}\cos(\xi t) \\
\implies & \dot{x}_p = a\sin(\xi t) + at\cos(\xi t)\cdot\xi + b\cos(\xi t) - bt\sin(\xi t)\cdot\xi \\
\implies & \ddot{x}_p = 2a\xi\cos(\xi t) - a\xi^2t\sin(\xi t) - 2b\xi\sin(\xi t) - b\xi^2t\cos(\xi t)
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\ddot{x}_p + \xi^2x_p}_{} \overset{!}{=} \frac{F_0}{m}\sin(\xi t)$$

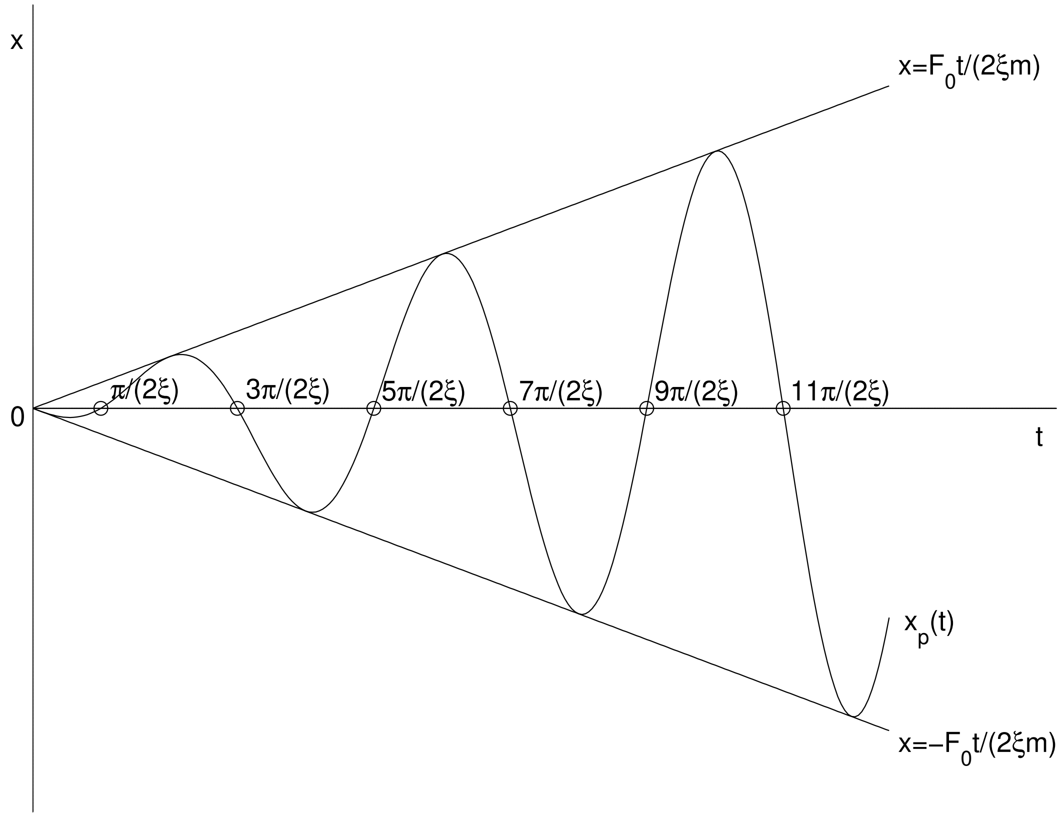
$$\underbrace{2a\xi\cos - \cancel{a\xi^2t\sin} - 2b\xi\sin - \cancel{b\xi^2t\cos} + \xi^2(\cancel{at\sin} + \cancel{bt\cos})}_{}$$

$$2a\xi\cos(\xi t) - 2b\xi\sin(\xi t) \overset{!}{=} \frac{F_0}{m}\sin(\xi t)$$

$\implies a = 0,\ -2b\xi = \dfrac{F_0}{m},\ b = -\dfrac{F_0}{2\xi m}$

$x_p = -\dfrac{F_0}{2\xi m}t\cos(\xi t)$

Bild:



3. Schritt: $x_{\text{inh}} = x_p + x_{\text{hom}} = -\dfrac{F_0}{2\xi m} t\cos(\xi t) + C_1 \sin(\xi t) + C_2 \cos(\xi t),\ C_1, C_2$ werden aus $x(0),\ \dot{x}(0)$ bestimmt.

Schlussbemerkung: Unterscheide zwischen „Resonanzfrequenz“ und „Resonanzfall“. Bei der Resonanzfrequenz ist im Allgemeinen kein Resonanzfall (außer für $r = 0$).