Skriptum zur Vorlesung Lineare Algebra

Peter Wagner

VO 2 WS 2000/01
Letzte Änderung: 2. 7. 2012
www: `http://techmath.uibk.ac.at/mathematik/wagner/skripten.html`

Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik
Baufakultät, Universität Innsbruck

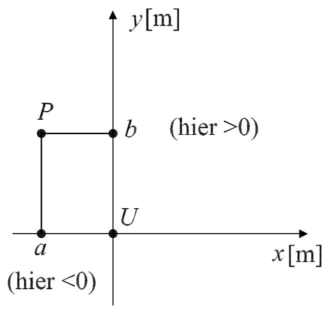
Inhaltsverzeichnis

§ 1 Vektoren im $\mathbb{R}^n$

A) Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Um die Menge der Punkte einer Ebene zahlenmäßig zu erfassen, fixieren wir 1. einen Punkt U (=„Ursprung“, „Nullpunkt“), legen 2. zwei senkrechte Geraden (=„Koordinatenachsen“) durch U, und versehen 3. diese 2 Geraden mit einem Längenmaß $\big($z.B. [m]$\big)$. Dann entsprechen jedem Punkt P der Ebene zwei Zahlen a, b (=„Koordinaten“), die sich durch senkrechte Projektion auf die Achsen ergeben:

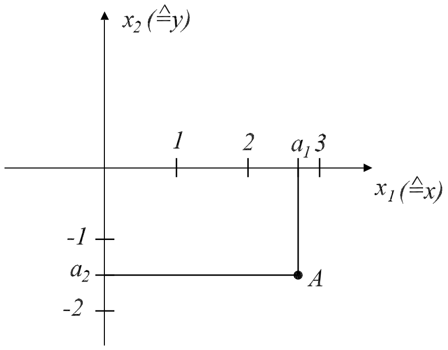
Schreibweise: $P = (a/b)$



Die Ebene wird dargestellt durch $\mathbb{R}^2$, wobei

Def.: $\mathbb{R}^2 = \big\{(a/b) : a, b \in \mathbb{R}\big\}$

In Worten: $\mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Paare von reellen Zahlen.
Schreibweise: Um Buchstaben zu sparen, verwenden wir Indizes: $A = (a_1/a_2)$.
Wenn z.B. $A = (2.7/-1.5)$, so ist also $a_1 = 2.7$, $a_2 = -1.5$ und



($\widehat{=}$ heißt „entspricht“).

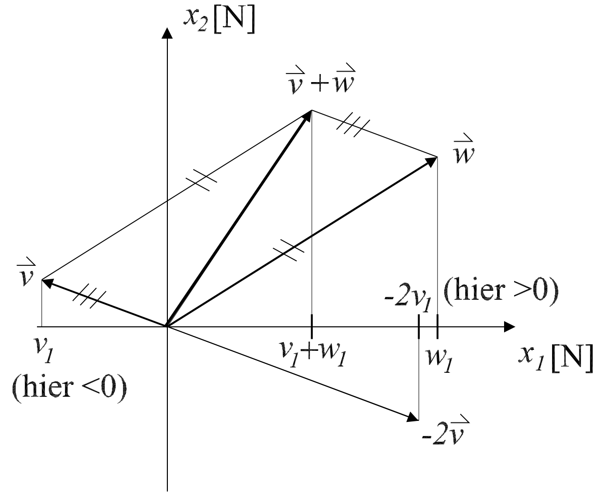
Um ebene Kräfte, die in einem festen Punkt U angreifen, zahlenmäßig zu erfassen, gehen wir ebenso vor. Wieder entspricht die Menge aller möglichen Kräfte $\mathbb{R}^2$, nachdem

1. U als Ursprung gewählt wurde,
2. zwei senkrechte Geraden durch U gewählt wurden,
3. entlang der Achsen eine Maßeinheit, z.B. [N], aufgetragen wurde.

Im Gegensatz zu Punkten lassen sich Kräfte addieren. Wir verwenden dann eine andere **Schreibweise:** $\mathbb{R}^2 = \left\{\vec{v} = \binom{v_1}{v_2} : v_1, v_2 \in \mathbb{R}\right\}$ mit

1. Addition: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$,
2. Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Bild:

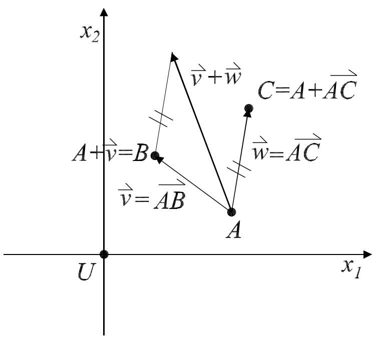


Bemerkungen: 1) Der Pfeil über $\vec{v}$ wird oft weggelassen. In Büchern verwendet man Fettdruck oder Fraktur.
2) $\mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum (siehe § 3) und daher nennt man $\vec{v}, \vec{w}$ auch **Vektoren**. v_1, v_2 heißen die **Koordinaten** von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Reelle Zahlen (wie oben λ) heißen in der Vektorrechnung oft **Skalare** (von „Skala“=Maßstab).
3) Man verwendet auch die Schreibweise (v_1, v_2) und nennt das **Zeilenvektor** und nennt $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dann genauer **Spaltenvektor**.
4) **Vektoren in der Geometrie:**
Hier bezeichnet $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ die Verschiebung um v_1 in x_1-Richtung und um v_2 in x_2-Richtung

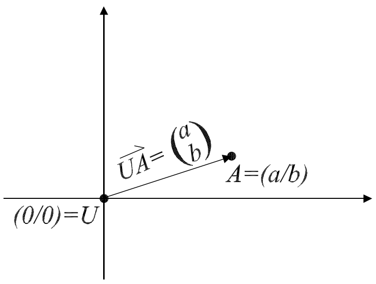
und wird durch einen Pfeil mit beliebigem Anfangspunkt gezeichnet (=„freier Vektor“). (Vorsicht: Bei Kräften muss man auch den Anfangspunkt oder zumindest die Wirkungslinie kennen.) Der Verschiebungsvektor, der von $A = (a_1/a_2)$ nach $B = (b_1/b_2)$ führt, ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ und wird mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.

Merkregel: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \text{„Spitze (d.h.}B) - \text{Schaft(d.h.}A)\text{“}}$

Beachte: Verschiebungen lassen sich addieren (sind Vektoren), Punkte nicht!
Sinnvoll: $A + \vec{v} =$ Punkt, $\vec{v} + \vec{w} =$ Vektor
Sinnlos: $A + B$

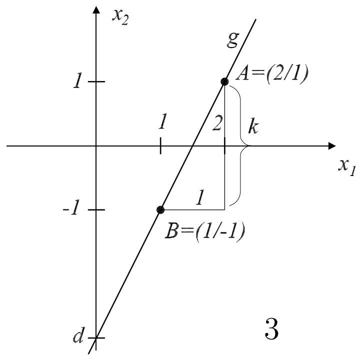


Jedem Punkt A entspricht sein **Ortsvektor** $\overrightarrow{UA}$:



Im folgenden fassen wir „Geraden“, „Ebenen“ etc. immer als Mengen von Ortsvektoren auf.

Bsp. 1: Was ist die Gleichung der Geraden g durch $A = (2/1)$ und $B = (1/-1)$?



Mögliche Darstellungen:

a) $y = kx + d$, d.h. in unseren Bezeichnungen $x_2 = kx_1 + d$
(„explizite Funktionsdarstellung")

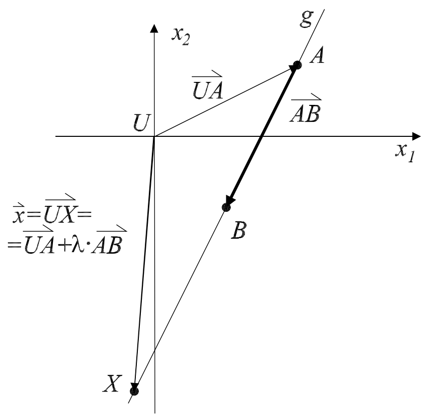
b) $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ („implizite Funktionsdarstellung")

c) $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$ („Parámeterdarstellung")

Zu a) 1) *Anschaulich:* $k =$ Steigung $= 2$, $d =$[2 herunter von b_2] $= -3 \implies x_2 = 2x_1 - 3$
2) *Rechnerisch:* $x_2 = kx_1 + d$
$(\underset{x_1}{2}/\underset{x_2}{1}) \in g \implies$ I: $\quad 1 = 2k + d$
$B \in g \implies \qquad$ II: $-1 = k + d$
I-II: $2 = k \implies$ in I: $1 = 2 \cdot 2 + d \implies d = -3; \quad \implies g: \ x_2 = 2x_1 - 3$
Zu b) $g: x_2 = 2x_1 - 3 \implies g: \underbrace{2}_{\alpha} \cdot x_1 \underbrace{-1}_{\beta} \cdot x_2 = \underbrace{3}_{\gamma}$

Beachte: α, β, γ sind nicht eindeutig, $4x_1 - 2x_2 = 6$ ist dieselbe Gerade. Aber b) hat den Vorteil, dass auch senkrechte Gerade in dieser Darstellungsform enthalten sind, z.B. $x_1 = 3$.

Zu c) Wenn $X \in g$, so gilt für $\vec{x} = \overrightarrow{UX}$, dass $\vec{x} = \overrightarrow{UA}$+reelles Vielfaches von $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{UA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$



In unserem Beispiel ist $\overrightarrow{UA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \implies$
$\implies g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Def.: In der Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$ einer Geraden heißt $\vec{p}$ **Stützvektor** und $\vec{r}$ **Richtungsvektor**.

Beachte: $\vec{p}, \vec{r}$ sind beide nicht eindeutig, $\vec{p}$ kann irgendein Ortsvektor auf g sein, $\vec{r}$ irgendein Vektor parallel zu g (mit $\vec{r} \neq \vec{0}$).
Z.B. oben ist auch $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g: \ \vec{x} =$

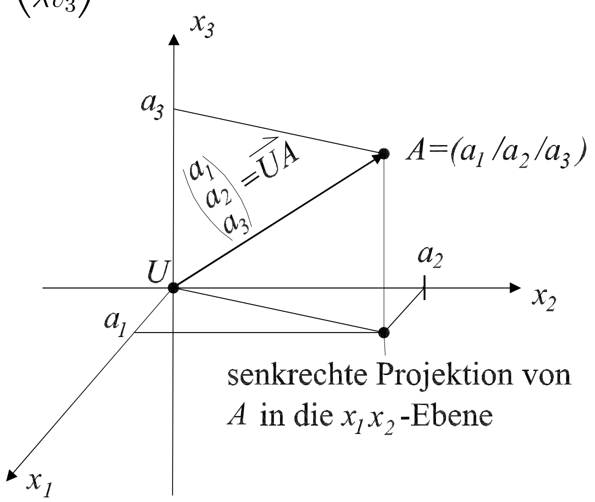
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}17\\34\end{pmatrix}$, wobei für einen bestimmten $\vec{x}$-Vektor auf g in jeder der 3 Darstellungen verschiedene λ genommen werden müssen.

B) Vektoren im $\mathbb{R}^3$

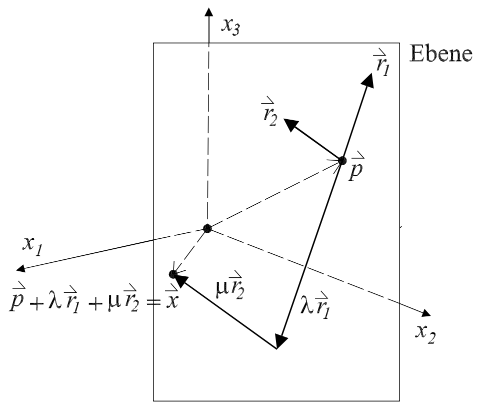
Der Raum wird dargestellt durch $\mathbb{R}^3$.

Def.: $\mathbb{R}^3 = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} : v_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3 \right\}$ mit 1. $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\\v_3+w_3\end{pmatrix}$ und 2. $\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\\\lambda v_3\end{pmatrix}$.

Bild:



Ebenen im $\mathbb{R}^3$: a) „Explizit“: $z = ax+by+c$ bzw. in Indexschreibweise $x_3 = ax_1+bx_2+c$
b) „Implizit“: $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$
c) „Parameterdarstellung“: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$



Geraden im $\mathbb{R}^3$: a) Gerade = Schnitt von 2 Ebenen. Also „2 Gleichungen“

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= \delta \\ \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 &= \delta' \end{aligned}$$

Bessere Bezeichnung (vgl. § 2):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

b) „Parámeterdarstellung“: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}$

C) Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Def.: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n \right\}$ mit

1. $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$ und 2. $\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Die beste Vorstellung von $\mathbb{R}^n$ ist als Menge aller, zu einem bestimmten Problem gehörigen, möglichen Datensätze.
Z.B. werde die Durchbiegung einer Platte an 100 Messpunkten bestimmt. Dann ergibt sich (nach Nummerierung der Messpunkte) ein Vektor im $\mathbb{R}^{100}$. Für jede Belastung der Platte ergibt sich ein anderer Vektor. Für die Überlagerung zweier Belastungen ergibt sich (in der linearen Näherung) die Summe der entsprechenden Vektoren.

Def.: 1) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**.

2) Für $\vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{r} \neq \vec{0}$ heißt $g: \ \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r},\ \lambda \in \mathbb{R}$, **Gerade**.
3) Für $\vec{p}, \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^n,\ \vec{r}_1, \vec{r}_2$ nicht parallel, heißt $\epsilon: \ \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, **Ebene**.

Bsp. 2: Was für ein Gebilde (Gerade, Ebene,...) ist im $\mathbb{R}^4$ durch

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{I:} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ \text{II:} & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

gegeben?
Lösung: Wir wollen eine Gleichung ohne x_1 erzeugen.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} 2\cdot \text{I:} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \\ \text{I'=II} - 2\cdot\text{I:} & 0 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -7 \end{array}$$

(Beachte: Wenn $\vec{x}$ I,II erfüllt, so auch I,I' und umgekehrt.)
Wenn x_3 und x_4 beliebig gewählt werden, so ist x_2 durch I' festgelegt und dann x_1 durch I. Wir setzen $x_3 = \lambda, x_4 = \mu$
$\Longrightarrow\ x_2 = -7 + 4\lambda - 3\mu$
$\Longrightarrow$ I: $x_1 + 2(-7 + 4\lambda - 3\mu) + 3\lambda - \mu = 4$
$\Longrightarrow\ x_1 = 18 - 11\lambda + 7\mu$
Ergebnis:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 11\lambda + 7\mu \\ -7 + 4\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_1} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_2} \text{ bzw.}$$

$L = \{\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Somit ist durch I,II eine Ebene im $\mathbb{R}^4$ gegeben.

Def.: Eine Menge von Vektoren der Form $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, heißt ***k*-dimensionaler affiner Raum** (kurz AR), falls sie nicht mit weniger als k Richtungsvektoren dargestellt werden kann.

Bemerkungen: 1) Gerade = 1-dimensionaler AR, Ebene = 2-dimensionaler AR.
Allgemein: Dimension = „Anzahl der Freiheitsgrade"= Anzahl der frei wählbaren Parámeter $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
2) (Vorgriff auf § 3) Ein k-dimensionaler AR im $\mathbb{R}^n$ lässt sich durch $n - k$ lineare Gleichungen beschreiben. (In Bsp. 2: $n = 4,\ k = 2$, 2 Gleichungen). Anschaulich: Je mehr Freiheitsgrade, umso weniger Gleichungen. Umgekehrt: Wenn m lineare Gleichungen gegeben sind, so ist die Lösungsmenge entweder leer oder ein k-dimensionaler AR mit einem $k \geq n - m$. Genauer gilt: $k = n-$[Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen], vgl. Satz 5, Seite 24.
Bsp. 1: (noch einmal)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_2} \text{ kann mit } \vec{r}_1 \text{ allein dargestellt werden, denn}$$

$$\vec{r}_2 = -5\vec{r}_1 \implies \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + \lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2 \cdot (-5\vec{r}_1) = \vec{p} + \underbrace{(\lambda_1 - 5\lambda_2)}_{\lambda}\vec{r}_1.$$

Somit ist das ein 1-dimensionaler AR, d.h. eine Gerade $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}_1$ $(n = 2, k = 1)$. Sie ist durch 1 $(= n - k)$ Gleichung gegeben: $2x_1 - x_2 = 3$ (siehe Seite 3). Umgekehrt: Wenn die $m = 2$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

gegeben sind, so ist die Lösungsmenge leer. Wenn

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

gegeben sind, so ist die Lösungsmenge die obige Gerade, ein 1-dimensionaler AR und $1 = k \geq n - m = 2 - 2 = 0$.

§ 2 Lineare Gleichungssysteme

Wir stellen uns $\mathbb{R}^n$ als die Menge aller möglichen Datensätze zu einem bestimmten Problem vor. Eine Gleichung im $\mathbb{R}^n$ bedeutet eine Einschränkung der zugelassenen Datensätze.

Z.B. folgt aus $x_1 + x_4\, \mathrm{e}^{x_2/\sin x_3} = 27$, dass nur mehr gewisse $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ auftreten können (immer noch ∞ viele).

Hier betrachten wir nur **lineare** Gleichungen. Sie haben die Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Ein lineares **Gleichungssystem** hat die Form

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \mathrm{II} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ \mathrm{M} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Wenn alle $b_i = 0$, so nennt man es **homogen**, sonst **inhomogen**. Die Lösungsmenge ist entweder leer (wenn die Gleichungen sich widersprechen) oder ein affiner Raum. Zur Lösung verwendet man den **Gauß'schen Algorithmus**:

1. Schritt: Wir erzeugen zuerst Gleichungen ohne x_1 (vgl. § 1, Bsp. 2). Dazu wird Gleichung k mit möglichst einfachem $a_{k1} \neq 0$ (am besten 1) als **Pivotzeile** bezeichnet, und ein reelles Vielfaches der Pivotzeile von allen anderen Zeilen abgezogen, sodass der Koeffizient von x_1 Null wird. Dies liefert $m-1$ Gleichungen ohne x_1. Als neues Gleichungssystem betrachten wir die Pivotzeile sowie die neuen $m-1$ Gleichungen ohne x_1. Eine Lösung $\vec{x}$ des alten Gleichungssystems ist auch Lösung des neuen Gleichungssystems und umgekehrt.

Dann wird dasselbe auf x_2, dann auf x_3 etc. angewendet.

Bsp. 1	A(lt)	**1. Schritt**	N(eu)
I:	$5x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$	I'=I-5·II:	$-9x_2 - 12x_3 = -3$
II:	$\boxed{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1}$	Pivotzeile, bleibt	
III:	$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$	II'=III+II:	$3x_2 + 4x_3 = 1$
IV:	$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3$	III'=IV-5·II:	$-6x_2 - 8x_3 = -2$

Wenn $\vec{x}$ A löst, so auch N und umgekehrt! Denn von N kommt man nach A zurück: I=I'+5·II, III=II'-II, IV=III'+5·II. Wenn man aber I'=I-5·II, II'=III+II, III'=IV-I(!) machen würde, so wäre nicht klar, ob man auch zurückkommt, d.h. N hätte vielleicht mehr Lösungen als A.

Beachte also: In jedem Schritt dürfen nur reelle Vielfache einer **festen** Pivotzeile dazugezählt (bzw. abgezogen) werden!

2. Schritt:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I'}: & -9x_2 - 12x_3 = -3 & \qquad & \text{I"=I'+3II'}: \quad 0 = 0 \\
\text{II'}: & \boxed{3x_2 + \ 4x_3 = \ \ 1} & & \text{Pivotzeile, bleibt} \\
\text{III'}: & -6x_2 - \ 8x_3 = -2 & & \text{II"=III'+2II'}: \quad 0 = 0
\end{array}$$

Die Gleichungen $0 = 0$ sind für alle $\vec{x}$ gültig. Es bleiben daher nur die zwei Pivotzeilen übrig: II: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ und II': $3x_2 + 4x_3 = 1$

x_3 kann beliebig sein, $x_3 = \lambda \implies 3x_2 = 1 - 4\lambda$,

$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda \implies$ (in II): $x_1 + 2\big(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda\big) + 3\lambda = 1 \implies x_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda \implies$

$$\implies \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die 4 Ebenen I, II, III, IV schneiden sich also in einer Geraden g. Der Richtungsvektor kann verlängert werden, d.h.

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Kurzschema: Wir schreiben die Gleichungen ohne x_i :

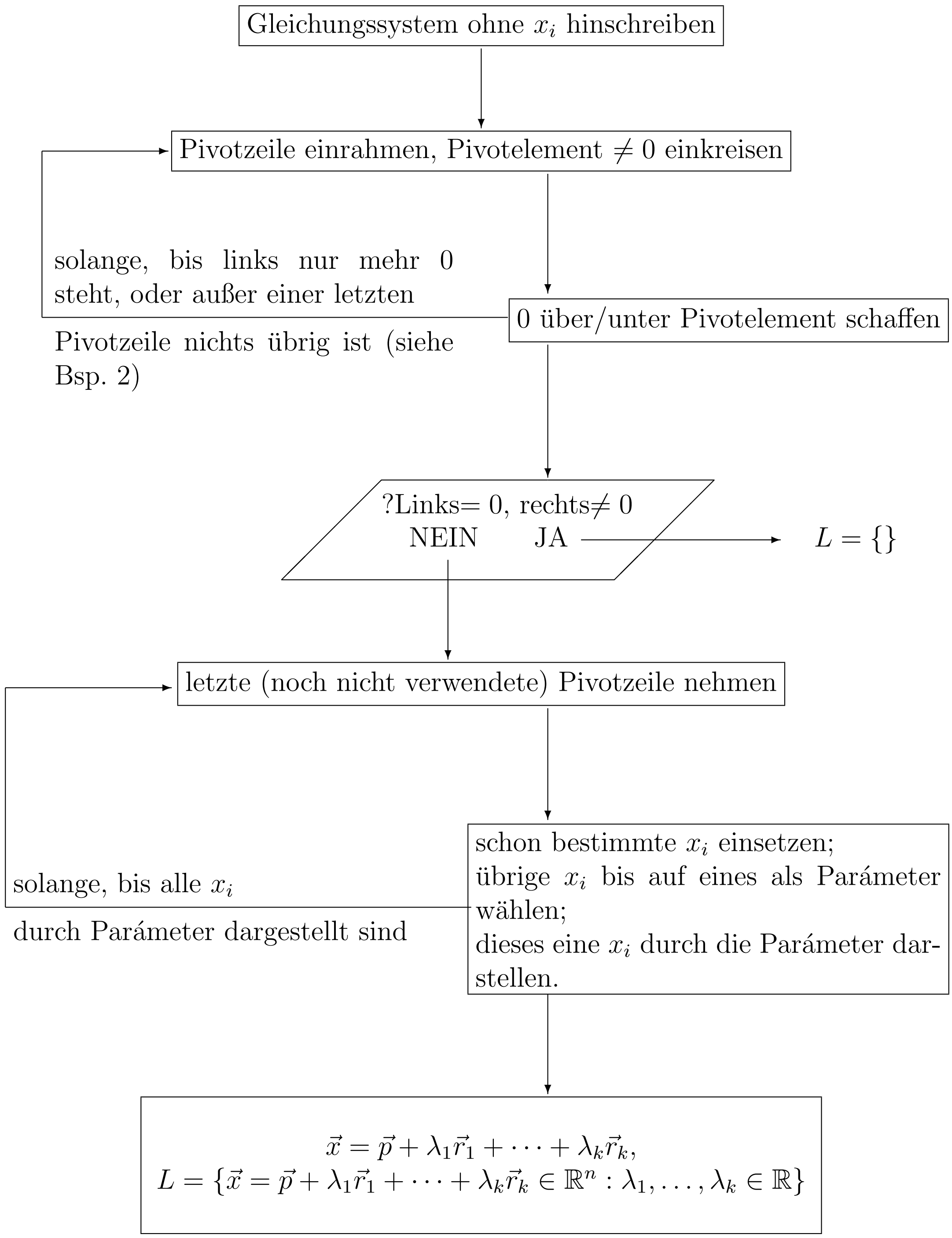
$$\begin{array}{lrrr|rl}
 & x_1 & x_2 & x_3 & & \\
\text{I}: & 5^* & 1 & 3 & 2 & (3) \\
\text{II}: & 1 & 2 & 3 & 1 & \implies x_1 + 2\underbrace{\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}\lambda\right)}_{\text{stammt von +)}} + 3\lambda = 1 \implies x_1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\lambda \\
\text{III}: & -1^* & 1 & 1 & 0 & \\
\text{IV}: & 5^* & 4 & 7 & 3 & \\
\hline
\text{I'=I-5II}: & 0 & -9 & -12 & -3 & (-2) \\
\text{II'=III+II}: & 0 & 3 & 4 & 1 & \implies 3x_2 + 4x_3 = 1; x_3 = \lambda \implies x_2 = \underbrace{\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}\lambda}_{+)} \\
\text{III'=IV-5II}: & 0 & -6 & -8 & -2 & \\
\hline
\text{I"=I'+3II'}: & 0 & 0 & 0 & 0 & (1) \\
\text{II"=III'+2II'}: & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

* hier wird mit II 0 gemacht.

(Die eingekreiste Zahl heißt **Pivotelement**. Es muss $\neq 0$ sein. Darüber und darunter wird 0 gemacht.)

Wenn statt I stünde $5x_1 + x_2 + 3x_3 = \underline{\underline{3}}$, so würde sich die Zeile $0\ 0\ 0 \mid 1$ ergeben. Sie sagt $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ und ist für kein $\vec{x}$ erfüllt, d.h. dann wäre $L = \{\}$. Die 4 Ebenen hätten dann keinen Schnittpunkt.

Logischer Ablauf („Algorithmus“):



Wir erhalten als Lösungsmenge L entweder die leere Menge oder einen k-dimensionalen AR, wobei $\boxed{k = n - \text{Anzahl der Pivotzeilen}}$. (Das überlegt man sich so: Die n Variablen x_i werden entweder als einer der Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gewählt oder mittels einer Pivotzeile durch die schon gewählten Parameter dargestellt. Daher ist $n = k +$ Anzahl der Pivotzeilen.) Dass L sich nicht durch weniger Richtungsvektoren darstellen lässt (und somit wirklich k-dimensional ist) wird in Seite 24 gezeigt werden. Beachte auch, dass die Darstellung der Lösungsmenge nicht eindeutig ist, da die Pivotzeilen verschieden gewählt werden können. Nach § 3, Satz 4, ist aber k bzw. die Anzahl der verwendeten Pivotzeilen immer dasselbe.

Bemerkung zur Numerik: Wenn man mit der Hand rechnet, so wird man die Pivotzeile so wählen, dass das Pivotelement ($\neq 0$!!) möglichst einfach (1 oder -1) ist. Computerprogramme nehmen die Pivotzeilen hingegen so, dass die Pivotelemente möglichst großen Absolutbetrag haben, da die Rechnung dann numerisch genauer wird.

Bsp. 2:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bei homogenen Gleichungssystemen lässt man die 0-Spalte rechts weg. Beachte auch, dass bei homogenen Gleichungssystemen immer $\vec{0} \in L$ und daher $L \neq \{\}$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
I:	2	2	2	1	$\Longrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 3\lambda + \lambda = 0$, $x_2 = \mu$,
II:	3	3	4	0	$x_1 = -\mu - 2\lambda$
I'=II-$\frac{3}{2}$ I:	0	0	1	$-3/2$	$\Longrightarrow x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0$, $x_4 = \lambda$, $x_3 = \frac{3}{2}\lambda$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu - 2\lambda \\ \mu \\ 3\lambda/2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Ebene ϵ im $\mathbb{R}^4$. Richtungsvektoren können in der Länge verändert werden

$$\Longrightarrow \epsilon: \ \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ L = \left\{ \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

§ 3 Vektorräume

A) Vergleich homogene/inhomogene lineare Gleichungssysteme

Bsp. 1: (vgl. Bsp. 2 in § 1)

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{I:} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ \text{II:} & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Das ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem.

Allgemeine Lösung (siehe Seite 7)

$$\vec{x}_{\text{inh}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_1} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_2}$$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist also eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems (die sich für $\lambda = 0,\ \mu = 0$ ergibt). Tatsächlich:

$$\begin{array}{lcl} 18 + 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 0 - 0 & = & 4\surd \\ 2 \cdot 18 + 5 \cdot (-7) + 2 \cdot 0 + 0 & = & 1\surd \end{array}$$

Hingegen sind $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ **keine** Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems!

Z.B. für $\vec{r}_1$: $\quad -11 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 - 0 = 0 \neq 4$

$\quad 2 \cdot (-11) + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 0 = 0 \neq 1$

Vielmehr sind $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ spezielle Lösungen und $\lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$ ist die allgemeine Lösung des **homogenen** Gleichungssystems (wo rechts 0 statt 4 bzw. 1 steht), denn $\lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$ kommt gerade heraus, wenn wir rechts mit Nullen rechnen. Symbolisch: $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$. Das gilt immer:

Satz 1 Die allgemeine Lösung $\vec{x}_{\text{inh}}$ eines lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

hat die Form $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$, wobei $\vec{p}$ eine (beliebig gewählte) Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist und $\vec{x}_{\text{hom}}$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist, d.h. von

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{array} \right.$$

Anders ausgedrückt: Entweder $L_{\text{inh}} = \{\}$ oder $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$.

Beweis: $\vec{p} \in L_{\text{inh}}$ sei fixiert. a) $\vec{v} \in L_{\text{hom}} \Longrightarrow$

I: $\overbrace{a_{11}p_1 + \cdots + a_{1n}p_n = b_1; \quad a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = 0}^{+}$

$\cdots$

M: $a_{m1}p_1 + \cdots + a_{mn}p_n = b_m;\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n = 0$
$\Longrightarrow$ I: $a_{11}(p_1 + v_1) + \cdots + a_{1n}(p_n + v_n) = b_1$

$\cdots$

M: $a_{m1}(p_1 + v_1) + \cdots + a_{mn}(p_n + v_n) = b_m$
$\Longrightarrow \vec{p} + \vec{v} \in L_{\text{inh}}$. Also: $L_{\text{inh}} \supset \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$
($A \supset B$ bedeutet A ist Obermenge von B, d.h. $\forall x \in B:\ x \in A$. Dabei ist $A = B$ auch erlaubt. Analog bei $A \subset B$.)
b) $\vec{q} \in L_{\text{inh}} \Longrightarrow$

I: $\overbrace{a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n = b_1; \quad a_{11}p_1 + \cdots + a_{1n}p_n = b_1}^{-}$

$\cdots$

$\Longrightarrow$ I: $a_{11}(q_1 - p_1) + \cdots + a_{1n}(q_n - p_n) = 0$

$\cdots$

Wenn wir $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p}$ setzen, ist also $\vec{v} \in L_{\text{hom}}$ und $\vec{q} = \vec{p} + \vec{v}$.
Also: $L_{\text{inh}} \subset \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$.
Aus a) und b) folgt $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$, d.h. $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$. $\square$
Bemerkung: Man nennt in diesem Zusammenhang $\vec{p}$ **e i n e** **partikuläre** Lösung und man drückt Satz 1 dann so aus:
„inhomogene Lösung = partikuläre Lösung + homogene Lösung“.
Beachte, dass die Ausdrucksweise „**die** partikuläre Lösung“ ebenso sinnlos ist wie die Ausdrucksweise $\vec{p}$ ist „**der** Stützvektor“ der Geraden/Ebene etc.

B) L_{hom} ist ein Vektorraum

Bsp. 2: (vgl. Bsp. 2 in § 2)
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind Lösungen (check it!); $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $4\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
sind auch Lösungen (check it!). Das gilt allgemein:

Satz 2 Wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Lösungen eines **homogenen** linearen Gleichungssystems sind, so sind $\vec{v} + \vec{w}$ und $\lambda\vec{v}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) auch Lösungen.
Mathematisch ausgedrückt: $\vec{v}, \vec{w} \in L_{\text{hom}},\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \vec{v} + \vec{w},\ \lambda\vec{v} \in L_{\text{hom}}$.

Beweis: $\vec{v}, \vec{w} \in L_{\text{hom}} \implies$

$$\text{I: } \overbrace{a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = 0; \quad a_{11}w_1 + \cdots + a_{1n}w_n = 0}^{+}$$

$$\cdots$$

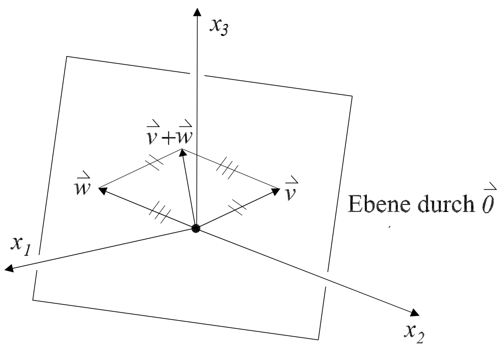
$$\implies \text{I: } a_{11}(v_1 + w_1) + \cdots + a_{1n}(v_n + w_n) = 0$$

$$\cdots$$

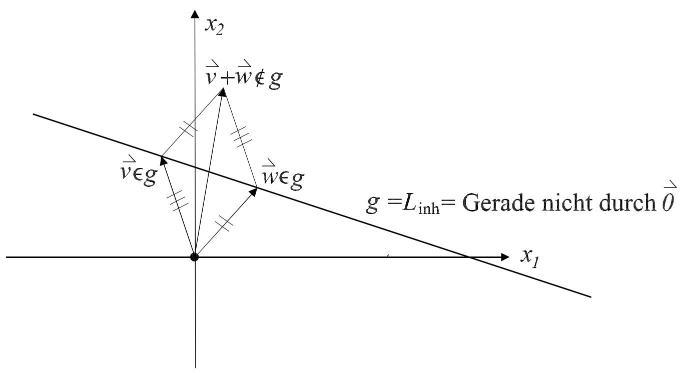
$\implies \vec{v} + \vec{w} \in L_{\text{hom}}$. Ebenso für $\lambda\vec{v}$. □

Bemerkungen: 1) L_{hom} ist also ein Vektorraum (siehe C).

2) Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ kann man Satz 2 geometrisch veranschaulichen. Dort ist L entweder leer oder ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene oder ganz $\mathbb{R}^3$ (vgl. § 1). Wenn das Gleichungsystem homogen ist, so ist jedenfalls $\vec{0} \in L$. Für eine Gerade oder Ebene durch $\vec{0}$ ist aber klar, dass mit den Ortsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ auch $\vec{v} + \vec{w}$ und $\lambda\vec{v}$ darinliegen:



Wenn das Gleichungssystem inhomogen ist, geht die Gerade/Ebene nicht durch $\vec{0}$ und die Aussage von Satz 2 gilt nicht:



C) Die abstrakte Definition des Vektorraumes

Zum Verständnisproblem des Begriffes „Vektorraum" vergleiche ich die Situation mit der eines Kindes, das in einer Familie mit dem Hund Harro aufwächst. Es gibt drei

Stufen des Verständnisses für das Kind:

	zuerst	später	noch später
	$\boxed{\text{Harro}}$	$\boxed{\text{Hund}}$	$\boxed{\text{Tier}}$
Analog hier:	$\boxed{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3}$	$\boxed{\mathbb{R}^n}$	$\boxed{\text{Vektorraum}}$

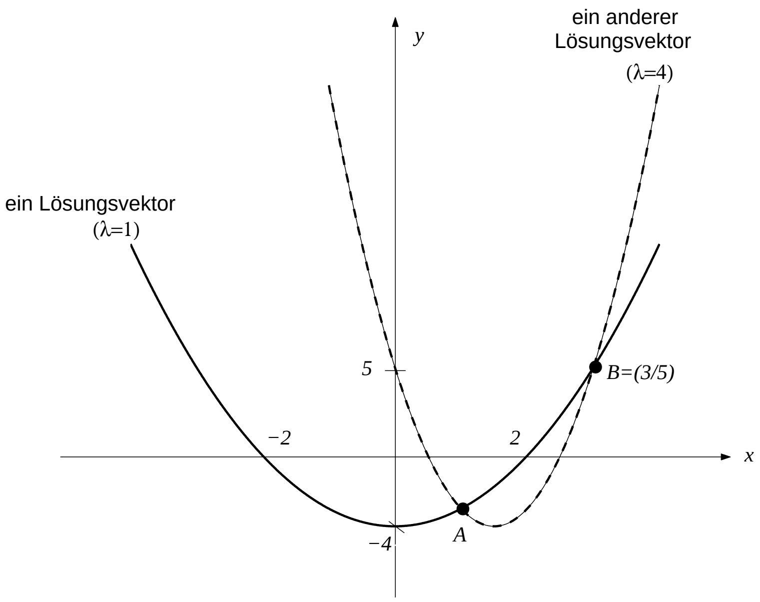
Def.: Eine Menge V heißt **Vektorraum** (kurz VR), wenn in V 1. Addition, d.h. $\vec{v}+\vec{w} \in V$ für $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und 2. Skalarmultiplikation, d.h. $\lambda \cdot \vec{v} \in V$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$ definiert sind, sodass die folgenden Gesetze gelten:

(G1)+kommutativ:	$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \ \vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$
(G2)+assoziativ:	$\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in V: \ (\vec{v}+\vec{w})+\vec{x} = \vec{v}+(\vec{w}+\vec{x})$
(G3) neutrales Element:	$\exists\, \vec{0} \in V: \ \forall \vec{v} \in V: \ \vec{0}+\vec{v} = \vec{v}$
(G4) inverse Elemente:	$\forall \vec{v} \in V: \ \exists\, \vec{w} \in V: \ \vec{v}+\vec{w} = \vec{0}$
(G5) $\cdot$ assoziativ:	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \ \forall \vec{v} \in V: \ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$
(G6)+, $\cdot$ distributiv:	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \begin{cases} (\lambda+\mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v} \\ \lambda \cdot (\vec{v}+\vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w} \end{cases}$
(G7)1=Einselement:	$\forall \vec{v} \in V: \ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$

Bemerkungen: 1) Aus G1-G7 folgt, dass $(-1) \cdot \vec{v}$ das inverse Element zu $\vec{v}$ ist, d.h. dass $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} = \vec{0}$. (Beweis: $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} \overset{\text{G6,G7}}{=} (1-1) \cdot \vec{v} = \vec{0} \cdot \vec{v}$; andererseits ist mit $\vec{w}$ aus G4: $\vec{0} \overset{\text{G4}}{=} \vec{v} + \vec{w} \overset{\text{G6,G7}}{=} (0 \cdot \vec{v} + \vec{v}) + \vec{w} \overset{\text{G2}}{=} 0 \cdot \vec{v} + (\vec{v} + \vec{w}) \overset{\text{G4}}{=} 0 \cdot \vec{v} + \vec{0} \overset{\text{G1,G3}}{=} 0 \cdot \vec{v}$.)
Für $(-1) \cdot \vec{v}$ schreibt man $-\vec{v}$, für $\lambda \cdot \vec{v}$ schreibt man $\lambda \vec{v}$.
2) Oft werden die Pfeile weggelassen.

Bsp. 3: $\mathbb{R}^n$ ist ein VR. Z.B. gilt $\vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + v_1 \\ \vdots \\ w_n + v_n \end{pmatrix} = \vec{w}+\vec{v}$
und ähnlich überprüft man G2 bis G7.
Bsp. 4: Die Lösungsmenge L eines **homogenen** linearen Gleichungssystems ist ein VR. Denn einerseits sind für $\vec{v}, \vec{w} \in L$ auch $\vec{v}+\vec{w}, \lambda\vec{v} \in L$, andererseits sind G1-G7 erfüllt, da sie im $\mathbb{R}^n$ gelten. L ist ein **Unterraum** von $\mathbb{R}^n$.
Def.: Der VR W heißt **Unterraum** des VR-s V, wenn $W \subset V$ und Addition und Skalarmultiplikation in W von V übernommen sind.
Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist hingegen kein VR, da für $\vec{v}, \vec{w} \in L$ gilt $\vec{v}+\vec{w} \notin L$.
Bsp. 5: P_n sei die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. P_n ist ein VR. Z.B. ist $P_2 = \{\vec{v} : y = a + bx + cx^2 : \ a, b, c \in \mathbb{R}\} =$ Menge aller quadratischen sowie linearen Funktionen (letztere für $c = 0$). Ein Vektor in P_2 ist also nicht als Pfeil vorstellbar, sondern als Parabel oder Gerade. Bei der Addition wird die Summenfunktion genommen.

Aufgabe: Welche Parabeln (bzw. Geraden) gehen durch $A = (1/-3)$ und $B = (3/5)$?



Die Gleichung der Parabel $\vec{v}$ sei $y = a + bx + cx^2$;
für $x = 1$ ist $y = -3 \Longrightarrow$ I: $a + b + c = -3$
für $x = 3$ ist $y = 5 \Longrightarrow$ II: $a + 3b + 9c = 5$
Das ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem

	a	b	c		
I:	1	1	1	-3	$\Longrightarrow a + (4 - 4\lambda) + \lambda = -3,\ a = 3\lambda - 7$
II:	1	3	9	5	
I'=II-I:	0	2	8	8	$\Longrightarrow 2b + 8c = 8,\ c = \lambda \Longrightarrow b = 4 - 4\lambda$

Lösung: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda - 7 \\ 4 - 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Somit: $L = \left\{ \vec{v} : y = 3\lambda - 7 + (4 - 4\lambda)x + \lambda x^2 : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ist die Menge aller Parabeln durch A, B. (Für $\lambda = 0$ erhalten wir die lineare Funktion $y = -7 + 4x$.) L ist eine Gerade in P_2.

Wir haben also in P_2 so gerechnet, als ob $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gesucht wäre.

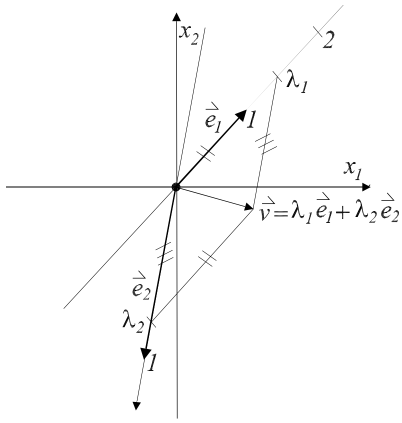
Der Vektor $\vec{v} : y = a + bx + cx^2$ ist offenbar durch seine **Koordinaten** (siehe unten) a, b, c bestimmt.

D) Basis, Koordinaten, Dimension im VR

Def.: V sei ein VR, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$.
1) Wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so heißt der Vektor $\lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n$ eine **Linearkombination** (kurz LK) von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.
2) $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ heißt **Basis** von $V \iff$ jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lässt sich auf genau eine Weise als LK von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ darstellen. (Mathematisch:
$\underset{\substack{\text{für}\\\text{alle}}}{\forall} \vec{v} \in V: \quad \underset{\substack{\text{existiert}\\\text{genau ein}}}{\exists_1} \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \exists_1\lambda_2 \in \mathbb{R}, \dots, \exists_1\lambda_n \in \mathbb{R}: \ \vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n$)
3) Wenn $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine Basis von V ist und $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n$, so heißen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die **Koordinaten** von $\vec{v}$ bzgl. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.
4) Wenn $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine Basis von V ist, so heißt n **Dimension** von V.
Schreibweise: $n = \dim V$. (Satz 4 wird zeigen, dass verschiedene Basen immer gleichviel Elemente haben.)

Bsp. 6: $V = \mathbb{R}^2$ und $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien zwei nichtparallele Vektoren. Dann sind $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ eine Basis, denn jeder Vektor lässt sich eindeutig als LK von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ darstellen:

λ_1, λ_2 nennt man (um sie von den üblichen Koordinaten zu unterscheiden) manchmal „schiefwinklige“ Koordinaten. Entlang der $\vec{e}_1$- bzw. $\vec{e}_2$-Achsen werden die Maßeinheiten so gewählt, dass 1 den Vektoren $\vec{e}_1$ bzw. $\vec{e}_2$ entspricht.



Bsp. 7: $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist eine Basis im $\mathbb{R}^3$. Sie heißt **Standardbasis**. $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$, d.h. die üblichen Koordinaten v_1, v_2, v_3 (vgl. z.B. Seite 2) sind die Koordinaten bzgl. der Standardbasis. (Analog im $\mathbb{R}^n$ heißt $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ **Standardbasis**.
Beachte, dass es in einem allgemeinen VR keine Standardbasis gibt!)

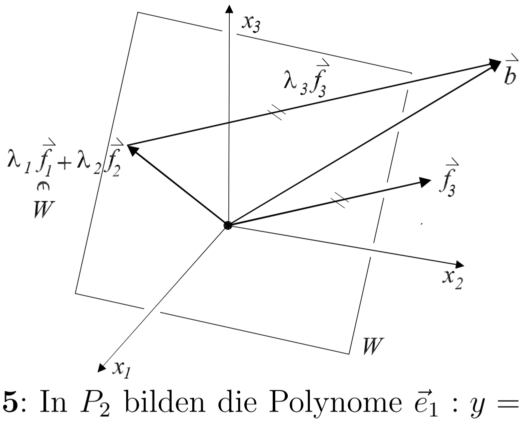
$\vec{f_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ist keine Basis im $\mathbb{R}^3$, denn z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ ist keine LK von $\vec{f_1}, \vec{f_2}$. Denn sonst müsste gelten

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \vec{v} = \lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\2\lambda_1\\3\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\Longrightarrow \lambda_2 = 0\\ \Uparrow \\ \Longrightarrow \lambda_1 = 1\\ \lightning \ (3\cdot 1+0\neq 4)\end{matrix}$$

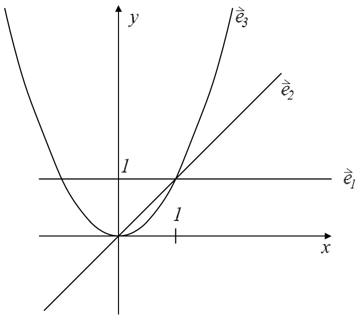
Die Menge aller LK von $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ ist $W = \{\lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} : \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$. W ist eine Ebene durch $\vec{0}$ und daher ein VR (vgl. Seite 15). Z.B. ist $\vec{w} = 2\vec{f_1} - \vec{f_2} = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} \in W$.

$\vec{f_1}, \vec{f_2}$ ist eine Basis von W (vgl. Seite 20), $\dim W = 2$ (Ebenen haben Dimension 2). Die Koordinaten von $\vec{w}$ in W bzgl. $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ sind $2, -1$. Wenn wir noch $\vec{f_3} = \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ dazunehmen, so wird $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$. Rechnerisch müssten wir dazu zeigen, dass sich jeder Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig durch $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ darstellen lässt (vgl. die Übungen).

Anschaulich: Von $\vec{b}$ gelangt man mit einem Vielfachen $\lambda_3\vec{f_3}$ von $\vec{f_3}$ nach W, d.h. $\vec{b} - \lambda_3\vec{f_3} \in W$, und dieser Vektor lässt sich eindeutig als LK von $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ darstellen $\Longrightarrow$ $\vec{b} = \underbrace{\lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2}}_{\in W} + \lambda_3\vec{f_3}$.



Noch einmal **Bsp. 5**: In P_2 bilden die Polynome $\vec{e}_1 : y = 1, \vec{e}_2 : y = x$, und $\vec{e}_3 : y = x^2$ eine Basis und $\vec{v} : y = a + bx + cx^2$ hat genau die Koordinaten a, b, c bzgl. dieser Basis.



Speziell: $\dim P_2 = 3$.

Bemerkungen: 1) Nicht jeder VR hat eine endliche Basis. Z.B. hat der VR P_∞ **aller** Polynome keine endliche Basis und ebenso der VR $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen (der ja P_∞ enthält).
2) Wenn $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine Basis in einem VR V ist, so entspricht jeder Vektor $\vec{v} \in V$ eineindeutig seinem Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$. Nach Wahl einer Basis entspricht also das Rechnen mit $\vec{v} \in V$ dem Rechnen mit $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, vgl. etwa Bsp. 5, wo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ geschrieben wurde.

E) Lineare Unabhängigkeit und Basissatz

Satz 3 V sei ein VR und $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$. Dann gilt:
$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ist eine Basis von $V \iff$ (A) jeder Vektor $\vec{v} \in V$ ist LK von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ **und** (B) wenn $\vec{0} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$, so ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Def.: Wenn (A) gilt, so heißen $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ **Erzeugendensystem** bzw. sagt man $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ **spannen V auf**; wenn (B) gilt, so heißen $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ **linear unabhängig** (kurz l.u.). Wenn (B) nicht gilt, heißen $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ **linear abhängig** (l.a.).

Noch einmal **Bsp. 7:**
$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind l.u., denn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} = \lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \implies 0 = 2\lambda_1 \implies \lambda_1 = 0,$$

$0 = \lambda_1 + \lambda_2 \implies \lambda_2 = 0$.

Wenn $\vec{w} = 2\vec{f_1} - \vec{f_2}$, so sind $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{w}$ l.a., weil $\underbrace{-2}_{\lambda_1} \cdot \vec{f_1} + \underbrace{1}_{\lambda_2} \cdot \vec{f_2} + \underbrace{1}_{\lambda_3} \cdot \vec{w} = \vec{0}$ und $\lambda_1 \neq 0$.
(Allgemein gilt: 2 Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn sie parallel sind; 3 Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn sie in einer Ebene durch $\vec{0}$ liegen.)
$\vec{f_1}, \vec{f_2}$ sind ein Erzeugendensystem in W und daher nach Satz 3 eine Basis von W. $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ sind kein Erzeugendensystem in $V = \mathbb{R}^3$, da $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq$ LK von $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ (vgl. Seite 19).

Beweis von Satz 3: „$\Longrightarrow$“: $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ Basis in $V \Longrightarrow$ jedes $\vec{v}$ lässt sich eindeutig als LK von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ darstellen $\Longrightarrow$ (A) und auch (B) (letzteres weil $\vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{e}_n = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n \Longrightarrow$ (wegen eindeutiger Darstellung) $0 = \lambda_1, 0 = \lambda_2, \ldots$).
„$\Longleftarrow$“: Nach (A) lässt sich jedes $\vec{v}$ als LK $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$ von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ darstellen. Um zu zeigen, dass $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis ist, müssen wir noch nachweisen, dass die Darstellung auch eindeutig ist.
Wenn auch $\vec{v} = \mu_1 \vec{e}_1 + \cdots + \mu_n \vec{e}_n$ gilt, so folgt $\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\vec{e}_n$ und (B) liefert $0 = \lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n \Longrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$. $\square$

Satz 4 (Basissatz) Es seien V ein VR, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis von V und $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m} \in V$. Dann gelten:
1) a) $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m}$ Erzeugendensystem von $V \Longrightarrow m \geq n$
   b) $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m}$ linear unabhängig $\Longrightarrow m \leq n$
2) $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m}$ Basis von $V \Longrightarrow m = n$
3) Es sei $m = n$.
   a) $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ Erzeugendensystem $\Longrightarrow \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ Basis
   b) $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ linear unabhängig $\Longrightarrow \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ Basis.

Bsp. 8: Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, somit $n = 3$.

Satz 4 besagt dann:
1) a) Man braucht mindestens 3 Vektoren, um $\mathbb{R}^3$ aufzuspannen.
b) Mehr als 3 (d.h. 4,5,...) Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig.
2) Jede andere Basis von $\mathbb{R}^3$ hat auch 3 Elemente.
3) a) Wenn 3 Vektoren $\mathbb{R}^3$ aufspannen, sind sie schon eine Basis (d.h. außerdem linear unabhängig).
b) Wenn 3 Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, sind sie schon eine Basis (d.h. außerdem ein Erzeugendensystem).

Beweis von Satz 4: 1)a) $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m}$ sei ein Erzeugendensystem. **Annahme:** $n > m$. Wir zeigen, dass diese Annahme zum Widerspruch führt (ein sogenannter „indirekter

Beweis“).
Da $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ V aufspannen, sind $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ Linearkombinationen von $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$, d.h.

$$\begin{gathered} \vec{e}_1 = a_{11}\vec{f}_1 + \cdots + a_{m1}\vec{f}_m \\ \cdots \\ \vec{e}_n = a_{1n}\vec{f}_1 + \cdots + a_{mn}\vec{f}_m. \end{gathered}$$

Wir untersuchen nun, für welche $x_1, \ldots, x_n$ gilt, dass $\vec{0} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$.
$\vec{0} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = x_1(a_{11}\vec{f}_1 + \cdots + a_{m1}\vec{f}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\vec{f}_1 + \cdots + a_{mn}\vec{f}_m) = (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n})\vec{f}_1 + \cdots + (x_1a_{m1} + \cdots + x_na_{mn})\vec{f}_m$.
Daher gilt $\vec{0} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ jedenfalls dann,
wenn I: $\quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$

$\cdots$

M: $\quad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$.
Das sind m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$. Wenn wir den Gaußschen Algorithmus anwenden (siehe § 2), so erhalten wir höchstens m Pivotzeilen für $n > m$ Variable und daher zumindest einen freien Parámeter: $\vec{x} = \lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k, k \geq n - m \geq 1$. Das kann nicht sein, da $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ linear unabhängig sind und daher $\vec{x} = \vec{0}$ sein müsste. Folglich ist die Annahme $n > m$ zu verwerfen und gilt $m \geq n$.
1)b) $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ seien l.u. **Annahme:** $m > n$.
Weil $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ ein Erzeugendensystem sind, können wir $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ als LK von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ darstellen. Dies liefert wie im Beweis von 1)a) $x_1, \ldots, x_m$ nicht alle 0 mit $x_1\vec{f}_1 + \cdots + x_m\vec{f}_m = \vec{0}$. Das kann nicht sein, da $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ l.u. sind. Folglich ist die Annahme zu verwerfen.
2) folgt aus Satz 3 und 1).
3)a) $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ seien ein Erzeugendensystem.
Annahme: $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ sind l.a.
Dann existieren $x_1, \ldots, x_n$ nicht alle 0 mit $x_1\vec{f}_1 + \cdots + x_n\vec{f}_n = 0$. Es sei z.B. $x_1 \neq 0$ (Was nach Umnummerierung angenommen werden kann). Dann ist

$$\begin{aligned} x_1\vec{f}_1 &= -x_2\vec{f}_2 - \cdots - x_n\vec{f}_n \\ \Longrightarrow \vec{f}_1 &= -\tfrac{x_2}{x_1}\vec{f}_2 - \cdots - \tfrac{x_n}{x_1}\vec{f}_n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ wenn $\vec{v}$ LK von $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ ist, d.h. $\vec{v} = \lambda_1\vec{f}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{f}_n$, so ist $\vec{v} = \lambda_1\big(-\frac{x_2}{x_1}\vec{f}_2 - \cdots - \frac{x_n}{x_1}\vec{f}_n\big) + \lambda_2\vec{f}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{f}_n =$ LK von $\vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$. Daher wäre auch $\vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ ein Erzeugendensystem von V im Widerspruch zu 1)a).
3)b) $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ seien linear unabhängig.
Wenn $\vec{v} \in V$, so sind $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n, \vec{v}$ $n + 1$ Vektoren und daher nach 1)b) linear abhängig. Also existieren x_i nicht alle 0 mit $x_1\vec{f}_1 + \cdots + x_n\vec{f}_n + x_{n+1}\vec{v} = \vec{0}$. Wäre $x_{n+1} = 0$, so wären $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ linear abhängig. Also ist $x_{n+1} \neq 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\ \vec{v} = \frac{x_{n+1}\vec{v}}{x_{n+1}} = \frac{-x_1\vec{f_1} - \cdots - x_n\vec{f_n}}{x_{n+1}} = \underbrace{-\frac{x_1}{x_{n+1}}}_{\lambda_1}\vec{f_1} - \cdots \underbrace{-\frac{x_n}{x_{n+1}}}_{\lambda_n}\vec{f_n} \Longrightarrow \vec{v} \text{ ist LK von}$$

$\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n}$. Also sind $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n}$ auch ein Erzeugendensystem. □

Bemerkung: Man kann 1) im Satz 4 auch so ausdrücken:

$\dim V$ = Maximalanzahl von l.u. Vektoren
= Minimalanzahl eines Erzeugendensystems.

F) Lineare Gleichungssysteme

Mit dem Gauß'schen Algorithmus (siehe § 2, Seite 9) ergibt sich bei linearen Gleichungssystemen entweder $L_{\text{inh}} = \{\}$ oder $L_{\text{inh}} = \{\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1\vec{r_1} + \cdots + \lambda_k\vec{r_k} \in \mathbb{R}^n : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$. Nach den Sätzen 1,2 ist dabei $L_{\text{hom}} = \{\lambda_1\vec{r_1} + \cdots + \lambda_k\vec{r_k} : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ und L_{hom} ist ein VR. Dabei ist $k = n-$Anzahl der verwendeten Pivotzeilen. (Weiters ist $k \geq n - m$, da die Anzahl der verwendeten Pivotzeilen $\leq m$ ist. Wenn man „überflüssige“ Gleichungen (die zu 0-Zeilen führen) weglässt, so ist $k = n - m$.)

Bsp. 9: (vgl. Bsp. 2 in § 2) Das Gleichungssystem

I: $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$
II: $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$

wird im Gauß'schen Algorithmus durch

I: 2 2 2 1
II: 3 3 4 0

dargestellt. Wenn wir noch die Zeile III=I+II: 5 5 6 1 dazunehmen, ändert sich L überhaupt nicht:

I:	2	2	2	1
II:	3	3	4	0
III:	5	5	6	1
I'=II-$\frac{3}{2}$I:	0	0	1	$-\frac{3}{2}$
II'=III-$\frac{5}{2}$I:	0	0	1	$-\frac{3}{2}$
I"=II'-I':	0	0	0	0

Zur Bestimmung von L verwenden wir nur die 2 Pivotzeilen. Eine der 3 Zeilen I,II,III ist also „überflüssig“ und kann weggelassen werden.

Hier ist $L = \left\{\lambda_1\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$ (siehe Seite 12) und

$k = 2$, $n = 4$, $m = 3$.

Die Anzahl der nötigen Zeilen (oben 2) stimmt mit dem Rang des Gleichungssystems überein (siehe Def. und Satz 5,1)).

Def.:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \text{ sei ein homogenes lineares Gleichungssystem.}$$

1) Der von den m Zeilenvektoren $(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Unterraum $Z \subset \mathbb{R}^n$ heißt der **Zeilenraum** des Gleichungssystems.
Es ist also $Z = \big\{\lambda_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}) + \cdots + \lambda_m(a_{m1}, \ldots, a_{mn}) : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\big\}$.
2) $\dim Z$ heißt **Rang** des Gleichungssystems.

Bemerkung: Beachte: Bei Z schreiben wir die Vektoren als Zeilenvektoren, bei L als Spaltenvektoren.

Satz 5

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ & \ldots \\ \text{M:} & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \text{ sei ein homogenes lineares Gleichungssystem,}$$

$Z \subset \mathbb{R}^n$ sein Zeilenraum, $L \subset \mathbb{R}^n$ sein Lösungsraum,
$L = \{\lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ das Ergebnis des Gauß'schen Algorithmus. Dann gilt:
1) L hängt nur von Z ab, d.h. 2 homogene lineare Gleichungssysteme mit demselben Zeilenraum haben dieselbe Lösungsmenge;
2) $\dim L = k$, d.h. L lässt sich nicht mit weniger als k Richtungsvektoren darstellen;
3) die Pivotzeilen bilden eine Basis von Z. Speziell gilt $\dim Z =$ Anzahl der verwendeten Pivotzeilen.
4) $$\boxed{\dim L = n - \dim Z}$$

Beweis: 1) Wenn ein anderes Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ b_{p1}x_1 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \end{array}\right\} \text{ dasselbe } Z \text{ hat, so liegen } (b_{11}, \ldots, b_{1n}) \text{ etc. in } Z \text{ und lassen}$$

sich daher als LK von $(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ darstellen, d.h.
$(b_{11}, \ldots, b_{1n}) = \lambda_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}) + \cdots + \lambda_m(a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ etc.
Dann gilt aber 1. Zeile in b-System $= \lambda_1 \cdot \mathrm{I} + \lambda_2 \cdot \mathrm{II} + \cdots + \lambda_m \cdot \mathrm{M}$. Daher ist jede Lösung des a-Systems auch Lösung des b-Systems. Ebenso gilt das Umgekehrte.
2) Offenbar sind $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ ein Erzeugendensystem von L. Wenn wir noch zeigen, dass $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ linear unabhängig sind, so sind sie eine Basis, $\dim L = k$ und wir sind fertig. Die λ_i in der Lösungsdarstellung treten auf, indem ein $x_j = \lambda_i$ gesetzt wird. (Vgl. etwa

§ 2, Bsp. 2, wo $x_4 = \lambda \hat{=} \lambda_1,\ x_2 = \mu \hat{=} \lambda_2$). Wenn z. B. $x_j = \lambda_1$, so folgt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\vec{r}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\vec{r}_2} + \cdots + \lambda_k \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\vec{r}_k} \qquad *)$$

Somit hat $\vec{r}_1$ in einer Koordinate 1, wo alle anderen $\vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_k$ 0 haben. Ebenso für die anderen $\vec{r}_i$. Wenn in $*$) $\vec{x} = \vec{0}$, so ist also $x_j = \lambda_1 = 0$ und ebenso müssen alle anderen $\lambda_i = 0$ sein. Daher sind $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ linear unabhängig.
3) Beim Gauß'schen Algorithmus bildet man Linearkombinationen von Zeilen, z.B. I'=II-c·I, und diese liegen wieder in Z, da Z ein VR ist. Weiters sind die Schritte umkehrbar, z.B. II=I'+c·I, und daher bleibt Z gleich von Schritt zu Schritt. Am Ende bleiben die Pivotzeilen und 0-Zeilen übrig. Die Pivotzeilen spannen daher Z auf. Wären sie linear abhängig, so könnten wir eine davon weglassen und würden $\dim L > k$ erhalten im Widerspruch zu 2). Also bilden sie eine Basis von Z.
4) $\dim L = k = n-$Anzahl der verwendeten Pivotzeilen$= n - \dim Z$. □

Bemerkung: Aus den Sätzen 1 und 5 folgt, dass L_{inh} entweder leer ist oder ein k-dim AR, wobei

$$\begin{aligned} k = \dim L_{\text{hom}} &= n-[\text{Anzahl der verwendeten Pivotzeilen}] \\ &= n - \dim Z \\ &= n-[\text{Rang des homogenen Gleichungssystems}] \\ &\overset{\text{(s. Bem. Seite 23)}}{=} n-[\text{Maximalanzahl von l.u. Zeilen im homogenen Gleichungssystem}]. \end{aligned}$$

Das kann so veranschaulicht werden:
Wenn **keine** Gleichung gegeben ist, so sind alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zugelassen, d.h. $L = \mathbb{R}^n$ ist n-dimensional. Jede linear unabhängige Zeile im Gleichungssystem verringert dann die Dimension von L um 1, bis man schließlich $k = \dim L = n - \dim Z$ erhält.

Bsp. 10: (vgl. Bsp. 1 in § 2)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \end{array}$$

Nach Seite 10 erhalten wir die 2 Pivotzeilen

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1. \end{array}$$

Daher sind (1,2,3), (0,3,4) eine Basis von Z. Z ist also die Ebene $\epsilon: \ \vec{x} = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,3,4)$ und daher [Rang des homogenen Gleichungssystems] $= \dim Z = 2, \ k = 3-2 = 1, \ L_{\text{inh}}$ ist ein 1-dim. AR, d.h. eine Gerade.

Nach Seite 10 ist $L_{\text{inh}} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

§ 4 Matrizen

A) Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise

Das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

wird in der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (oder kürzer $A\vec{x} = \vec{b}$) geschrieben, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Def.: 1) Eine (reelle) $m\times n$-**Matrix** A ist eine rechteckige Anordnung von $m\cdot n$ (reellen) Zahlen in m **Zeilen** und n **Spalten**.
Schreibweise: $\mathbb{R}^{m\times n}$= [Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen] =

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

2) Die **Multiplikation** einer $m \times n$-Matrix A mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ergibt $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, wobei

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

3) $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist ein VR, indem

$$A + C = \begin{pmatrix} a_{11} + c_{11} & \cdots & a_{1n} + c_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} + c_{m1} & \cdots & a_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix},\ \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ & \cdots & \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

gesetzt wird.

Bemerkungen: 1) In der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A steht a_{ij}. Der erste Index (hier i) ist also der **Zeilenindex**, der zweite (hier j) ist der **Spaltenindex**.
2) Das Multiplizieren $A \cdot \vec{x}$ erfolgt so: Man nimmt die erste Zeile von A, multipliziert a_{11} mit x_1, a_{12} mit $x_2, \dots, a_{1n}$ mit x_n und addiert. Das ergibt b_1. Dann ebenso mit der 2. Zeile von A etc.

Man „multipliziert“ also nacheinander die Zeilen von A mit der $\vec{x}$-Spalte und drückt das aus durch die **Merkregel** $\boxed{\text{Zeile} \cdot \text{Spalte}}$.

Bsp. 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies$

$$\implies A\vec{x} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Hier ist also $A \in \mathbb{R}^{2\times3},\ m = 2,\ n = 3,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

B) Abbildungen

Im obigen Beispiel ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ also eine Lösung des Gleichungssystems

$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix} = \vec{b}$, d.h. von $\begin{array}{rl} x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 12 \\ 2x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 34. \end{array}$

Früher (in § 2) war $\vec{b}$ gegeben und $\vec{x}$ gesucht und wir erhielten meistens **viele** Lösungen $\vec{x}$. Nun betrachten wir das Gleichungssystem „umgekehrt“ und fragen uns, welches $\vec{b}$ zu einem gegebenen $\vec{x}$ gehört. Offenbar ist $\vec{b}$ durch $\vec{x}$ eindeutig bestimmt, nämlich $\vec{b} = A \cdot \vec{x}$ (vgl. Bsp. 1). $\vec{b}$ ist also eine Funktion (Abbildung) von $\vec{x}$. (I.a. nicht aber $\vec{x}$ von $\vec{b}$!) Im folgenden schreibe ich $\vec{y}$ statt $\vec{b}$.

Def.: 1) Eine **Funktion** (**Abbildung**) f von der Menge V in die Menge W ist eine Vorschrift, die jedem Element x von V genau ein Element y aus W zuordnet.
Schreibweise: $f : V \longrightarrow W$ oder genauer $f : V \longrightarrow W : x \longmapsto f(x) = y$.
2) f heißt **injektiv**, wenn verschiedene Elemente von V auf verschiedene Elemente von W abgebildet werden, d.h. $\forall x_1 \neq x_2 \in V : f(x_1) \neq f(x_2)$.
3) f heißt **surjektiv**, wenn jedes Element von W wenigstens einem Element von V zugeordnet wird, d.h. $\forall y \in W : \exists x \in V : f(x) = y$.
4) Die Abbildung f heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Bemerkungen: 1) V, W müssen nicht unbedingt Vektorräume sein, daher sind x, y oben ohne Pfeil.
2) Bei uns ist $V = \mathbb{R}^n,\ W = \mathbb{R}^m,\ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $\vec{y} = f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Das Wort „Funktion“ wird eher verwendet, wenn $W = \mathbb{R}$, wir verwenden daher das Wort „Abbildung“.

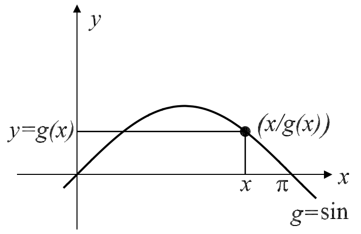
Bsp. 2: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \longmapsto A \cdot \vec{x}$ und $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

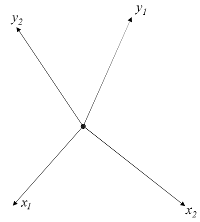
(Das Gleichungssystem dazu wäre $\begin{array}{r} 0x_1 - \ \ x_2 = y_1 \\ x_1 + 0x_2 = y_2. \end{array}$)

Eine „gewöhnliche“ Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lässt sich durch einen **Graph** darstellen, z.B.

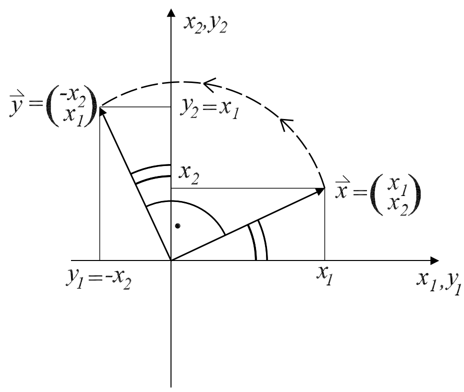
$g(x) = y = \sin x$



Für $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist das nicht möglich,
weil wir 4 Achsen bräuchten:



Stattdessen zeichnen wir alles im $\mathbb{R}^2$:

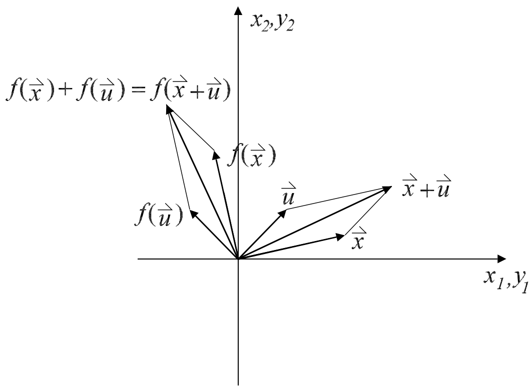


Die Abbildung f von Bsp. 2 ist also die Vorschrift „Drehen um 90° im Gegenuhrzeigersinn“.

Bemerkung: In Abbildungen schreibt man $\vec{x}$ als Zeilenvektor, d.h. oben schreibt man $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ obwohl eigentlich $f\left(\binom{x_1}{x_2}\right)$ korrekt wäre.

C) Lineare Abbildungen

Die Abbildung aus Bsp. 2 ist linear: Addition und Skalarmultiplikation bleiben beim Drehen erhalten, d.h. $f(\vec{x}+\vec{u}) = f(\vec{x}) + f(\vec{u}),\ f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$. Bild:



Das ist nicht bei jeder Abbildung der Fall. Z.B. für $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1+3 \\ \cos(x_1x_2) \end{pmatrix}$
gilt $g(\underbrace{1,0}_{\vec{x}}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g(\underbrace{-2,0}_{\vec{u}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, aber $g(\underbrace{-1,0}_{\vec{x}+\vec{u}}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq g(1,0)+g(-2,0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Beachte, dass sich $g(\vec{x})$ auch nicht in der Form $A \cdot \vec{x}$ mit einer 2×2-Matrix A schreiben lässt.

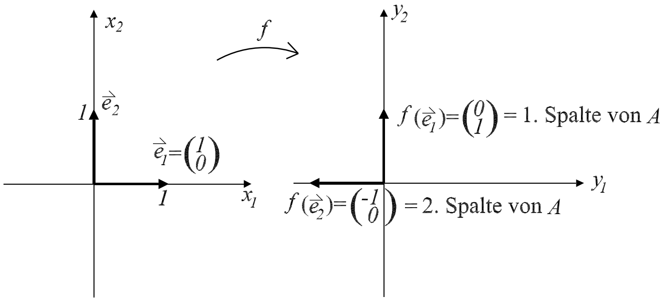
Def.: V, W seien Vektorräume. $f : V \longrightarrow W$ heißt **linear** $\Longleftrightarrow$
1. f additiv, d.h. $\forall \vec{x}, \vec{u} \in V : f(\vec{x}+\vec{u}) = f(\vec{x}) + f(\vec{u})$, und
2. f homogen, d.h. $\forall \vec{x} \in V : \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

Satz 1 1) Wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto A\cdot\vec{x}$ linear.
2) Umgekehrt, wenn $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear ist, so existiert genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$.

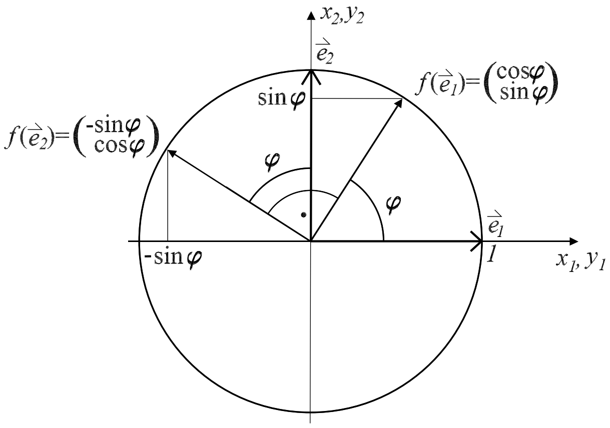
Dabei sind die Spalten von A die Bilder der Standardbasisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = $
$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & & f(\vec{e}_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Bsp. 2 (noch einmal): Die Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn ist linear. Nach Satz 1 ist sie durch eine Matrix gegeben.



Nach dem Bild und Satz 1 muss $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sein. Allgemeiner, wenn wir um den Winkel φ drehen, so ist



und daher $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Beweis von Satz 1:

1) $f(\vec{x}+\vec{u}) = A\cdot(\vec{x}+\vec{u}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1+u_1 \\ \vdots \\ x_n+u_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1+u_1)+\cdots+a_{1n}(x_n+u_n) \\ \cdots \\ a_{m1}(x_1+u_1)+\cdots+a_{mn}(x_n+u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+a_{11}u_1+\cdots+a_{1n}u_n \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} =$$

$= A\vec{x} + A\vec{u} = f(\vec{x}) + f(\vec{u})$. Ebenso für $f(\lambda\vec{x})$.

2) Es seien $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ definiert als Bilder der Standardbasis, d.h. $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} =$

$f(\vec{e}_1), \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = f(\vec{e}_n)$. Weiters sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$.
Wir müssen zeigen, dass dann für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ gilt.
Weil $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, ergibt die Linearität von f $\circledast$:

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \overset{\circledast}{=} x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) =$$
$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n} \\ \cdots \\ x_1 a_{m1} + \cdots + x_n a_{mn} \end{pmatrix} = A\vec{x}. \qquad \square$$

Bsp. 3: Bestimme die Matrix der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, für welche $f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für A benötigen wir $f(\vec{e}_1) = f(1,0)$ und $f(\vec{e}_2) = f(0,1)$. Weil f linear ist, gehen Summen und Vielfache von Vektoren unter f wieder in Summen und Vielfache über. Wir können daher (etwas abgeändert) den Gaußschen Algorithmus verwenden:

	x_1	x_2	f	y_1	y_2	y_3
I:	1	1		1	2	3
II:	-2	1		0	1	-1
$\alpha =$ II+2I:	0	3		2	5	5
$\beta = \frac{1}{3}\alpha$:	0	1		$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\gamma = \mathrm{I} - \beta$:	1	0		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

Also ist $f(1,0) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$, $f(0,1) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Wenn wir lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^1$ nach $\mathbb{R}^1$ betrachten, so ist $A = (a_{11})$, d.h., wenn wir $k = a_{11}$ setzen, so ist $f(x) = k \cdot x$.
VORSICHT: Auch $f(x) = kx + d$ wird als „lineare Funktion“ bezeichnet (vgl. Seite 17), obwohl man das strenggenommen nur für $d = 0$ sagen dürfte.

D) Zusammensetzung und Matrizenmultiplikation

Eine wichtige Operation bei Funktionen ist die **Zusammensetzung**. Wenn z.B. $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \mathrm{e}^x$, so sind $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sin(\mathrm{e}^x)$ und $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \mathrm{e}^{\sin x}$ aus f, g zusammengesetzte Funktionen. (Beim Differenzieren wird hier die Kettenregel angewandt.) Beachte, dass $f \circ g$ und $g \circ f$ i.a. **verschiedene** Funktionen sind (z.B. $\sin(\mathrm{e}^x) \neq \mathrm{e}^{\sin x}$). Wir betrachten nun die Zusammensetzung **linearer** Abbildungen.
Wenn $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist $f \circ g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto f\big(\underbrace{g(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^n}\big)$.

Wenn f, g linear sind, so ist auch $f \circ g$ linear, denn $(f \circ g)(\vec{x} + \vec{u}) = f\big(g(\vec{x} + \vec{u})\big) \overset{g \text{ linear}}{=} f\big(g(\vec{x}) + g(\vec{u})\big) \overset{f \text{ linear}}{=} f\big(g(\vec{x})\big) + f\big(g(\vec{u})\big)$ und ähnlich für $\lambda\vec{x}$.
Wegen Satz 1 gilt:
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear $\implies \exists_1\, A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m : f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$,
$g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear $\implies \exists_1\, B \in \mathbb{R}^{n \times p} : \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p : g(\vec{x}) = B \cdot \vec{x}$,
$f \circ g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear $\implies \exists_1\, C \in \mathbb{R}^{m \times p} : \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m : f\big(g(\vec{x})\big) = C \cdot \vec{x}$.
Satz 2 sagt, wie man C aus A und B bildet.

Satz 2 Mit A, B, C wie oben gilt

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

für feste $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, p$.

Bezeichnung: Für C schreibt man $A \cdot B$ und nennt es das **Matrizenprodukt** von A und B.
Bemerkungen: 1) Eigentlich wäre es logischer $C = A \circ B$ zu schreiben, da wir folgende Entsprechung haben

lineare Abbildung	f	g	$f \circ g$
Matrix	A	B	$A \cdot B$

Auch müsste man eigentlich „Zusammensetzung“ statt „Produkt“ sagen.
2) Das Matrizenprodukt lässt sich nur bilden, wenn sich die linearen Abbildungen f, g zusammensetzen lassen. Es gilt (siehe oben)

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{array}$$

d.h. $A \cdot B$ ist nur sinnvoll, wenn A soviel Spalten hat wie B Zeilen.
Z.B. ist $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 5}{B}$ sinnvoll und ergibt eine 2×5-Matrix. $\underset{3\times 5}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A}$ ist hier aber sinnlos.

Auch im Fall, dass $A \cdot B$ und $B \cdot A$ beide sinnvoll sind, werden sich i.a. verschiedene Matrizen ergeben, da die Zusammensetzung von Abbildungen nicht kommutativ ist ($f \circ g \neq g \circ f$ i.a., s.o.). Man drückt das so aus: **Die Matrizenmultiplikation ist NICHT kommutativ.** Speziell können Matrizengleichungen nur **von einer Seite** mit Matrizen multipliziert werden:
$A = B \;/ \cdot C$ von links $\implies CA = CB$ (richtig);
$A = B \;/ \cdot C$ von rechts $\implies AC = BC$ (richtig);
$A = B \;/ \cdot C \not\Longrightarrow AC = CB$ FALSCH!
Weil aber die Zusammensetzung von Abbildungen assoziativ ist, d.h. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ $\Big[$denn $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\big(g(h(x))\big)$ und $f \circ (g \circ h)(x) = f\big(g \circ h(x)\big) = f\big(g(h(x))\big)\Big]$, gilt: **Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ**, d.h. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, wenn alle Produkte sinnvoll sind.
3) Die Formel in Satz 2 lässt sich so veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & j\text{-te Spalte} & & j\text{-te Spalte} & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ i\text{-te Zeile} \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} & & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \cdots & \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ & & & & & & \\ & A & \cdot & B & = & C & \end{array}$$

Um das Element c_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $C = A \cdot B$ zu erhalten, multiplizieren wir die Elemente der **i-ten Zeile von** A mit denen der **j-ten Spalte von** B und addieren. Es gilt also wieder die Merkregel $\boxed{\text{Zeile} \cdot \text{Spalte}}$.
Speziell kann auch $A \cdot \vec{x}$ (siehe Seite 27) als Matrizenmultiplikation verstanden werden, wenn wir $\vec{x}$ als $n \times 1$-Matrix auffassen.

Bsp. 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Hier sind $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B}$ **und** $\underset{3\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A}$ sinnvoll.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{-5} & 6 \\ \boxed{1} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 \\ \boxed{-5} & 8 \end{pmatrix} = C.$

Eingerahmt ist das Matrixelement $c_{21} = -5$ in der 2. Zeile und 1. Spalte von C, das durch „Multiplikation“ der 2. Zeile von A mit der 1. Spalte von B entsteht.

$$\text{b) } B \cdot A = \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} -2 & 8 & 14 \\ -11 & -4 & -3 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}}$$

Beweis von Satz 2: In der j-ten Spalte von C steht das Bild von $\vec{e}_j$ unter $f \circ g$ (siehe Satz 1, Seite 30),

$$\text{d.h. } \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = f\big(g(\vec{e}_j)\big) = A \cdot g(\vec{e}_j).$$

Ebenso folgt aus Satz 1, dass

$$g(\vec{e}_j) = [j\text{-te Spalte von } B] = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Das ergibt: $c_{ij} = i\text{-te Komponente von } \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix}$

$$= i\text{-te Komponente von } A \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \qquad \square$$

E) Tensorschreibweise bei Vektoren und Matrizen

Bisher wurden Summen durch Punkte symbolisiert, z.B. $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$. Die genaue mathematische Schreibweise verwendet das Summensymbol $\sum$:

Def.: Wenn $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, so schreibt man $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i$ für $c_1 + c_2 + \cdots + c_k$.

Bemerkungen: Der Summationsbuchstabe (oben i) ist unwichtig (englisch: dummy), d.h. $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j$. Wenn ab c_m statt ab c_1 summiert wird, schreibt man analog:

$\sum\limits_{i=m}^{k} c_i = c_m + c_{m+1} + \cdots + c_k$.

Bsp. 5: $\sum\limits_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$ (hier ist also $c_i = i$); $\sum\limits_{j=2}^{4} \frac{1}{j} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{j=2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{j=3} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{j=4} = 1\frac{1}{12}$ $\big($hier ist also $c_i = \frac{1}{i}\big)$; $\sum\limits_{i=-3}^{1} (i+1)^2 = \sum\limits_{n=-3}^{1} (n+1)^2 = 10$

Bsp. 6: Lineares Gleichungssystem:

	Mit Punkten:		Mit $\sum$:
I:	$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \ = b_1$	Gl. 1:	$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1$
	$\cdots$		$\cdots$
M:	$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$	Gl. m:	$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = b_m$
	$\uparrow\uparrow \qquad \uparrow\uparrow$ diese Indizes werden durch j ersetzt, $j = 1, \ldots, n$		

Weitere Vereinfachungen in der Schreibweise:
1) Statt Gleichung $1, \ldots,$ Gleichung m separat anzuschreiben, schreibt man die Gleichung nur **einmal** an, aber mit einem **freien Index** i für 1 bis m, d.h.
Gleichung i: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$. Gemeint ist hier, dass i von 1 bis m läuft. Dann ergibt sich I, d.h. Gleichung 1, für $i = 1$ und M, d.h. Gleichung m, für $i = m$.
Wenn klar ist, dass j von 1 bis n läuft, schreibt man kürzer $\sum\limits_{j} a_{ij}x_j = b_i$.

2) **Einstein'sche Summationskonvention**
Sie besagt, dass über einen Index (z.B. j), der „multiplikativ doppelt vorkommt“, zu summieren ist, d.h. $\sum\limits_{j}$ dazuzudenken ist. Dann erhält man $a_{ij}x_j = b_i$. Dies nennt man **Tensorschreibweise** (TSW).

Bsp. 6 (nochmals): Schreibweisen für lineare Gleichungssysteme:

Mit Punkten	Matrix	$\sum$	TSW
$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ $\cdots$ $a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$	$A\vec{x} = \vec{b}$	$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$	$a_{ij}x_j = b_i$

Bsp. 7: Schreibweisen für Matrizenprodukte:

Mit Punkten	Matrix	$\sum$	TSW
$a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$ $\left(\begin{smallmatrix} i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p \end{smallmatrix}\right)$	$A \cdot B = C$	$\sum\limits_k a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$ $\left(\begin{smallmatrix} i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p \end{smallmatrix}\right)$	$a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$

Bemerkungen: 1) Generell können alle Indizes umbenannt werden. Z.B. ist $a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$ dasselbe wie $a_{rs}b_{st} = c_{rt}$. Unterscheide dabei „freie Indizes“ (hier i, j bzw. r, t) und „Summenindizes“ (hier k bzw. s). Vergleich:

	freie Indizes	Summenindizes
a)	stehen auf beiden Seiten einer Gleichung	stehen nur auf einer Seite einer Gleichung
b)	kommen „multiplikativ einfach“ vor	kommen „multiplikativ doppelt“ vor
c)	jede Fixierung ergibt eine eigene **Gleichung**; Anzahl der Gleichungen = Anzahl der Besetzungsmöglichkeiten der freien Indizes	jede Fixierung ergibt einen **Summanden**; Anzahl der Summanden in jeder Gleichung =Anzahl der Besetzungsmöglichkeiten der Summenindizes

2) Statt $A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ schreibt man oft $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ oder kurz $A = (a_{ij})$.

Bsp. 8: a) $a_i + \sin a_i = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. i ist ein freier Index, wir haben daher die 3 Gleichungen $a_1 + \sin a_1 = b_1$, $a_2 + \sin a_2 = b_2$, $a_3 + \sin a_3 = b_3$. Über i wird **nicht** summiert, es kommt zwar links doppelt vor, aber nicht „multiplikativ doppelt“.

b) $b_{ji} + c_{ik}v_kw_j = d_{ij}$ $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3)$. k ist ein Summenindex, i, j sind freie Indizes. Das sind also 9 Gleichungen, z.B. für $i = 1, j = 2$ haben wir $b_{21} + w_2 \sum\limits_k c_{1k}v_k = d_{12}$.

c) $a_{ik}b_{kj} = c_{ki}$ ist eine fehlerhafte Gleichung. (Warum?)

F) Transponierte Matrizen

Wir betrachten noch einmal die Gleichung $b_{ji} + c_{ik}v_kw_j = d_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ aus Bsp. 8b. Was entspricht ihr in Matrixschreibweise? Rechts stehen offenbar die Elemente d_{ij} einer

Matrix $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$. Wir wollen annehmen, dass auch k von 1 bis 3 läuft.

Dann kommen links Elemente von

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \; \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

vor. Weil links b_{ji} steht, werden in der Matrix B Zeilen und Spalten vertauscht.

Def.: 1) Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2n} \\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so heißt

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$ **transponierte Matrix** zu A.

2) Wenn $A = A^T$, so heißt A **symmetrisch**, wenn $A = -A^T$, so heißt A **schiefsymmetrisch**.

Bemerkung: Speziell ist $\vec{v}^T$ der zum Spaltenvektor $\vec{v}$ gehörige Zeilenvektor.
Bsp. 9: a)
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \neq A$ und $\neq -A$, A ist also weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch.

b) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch $\Longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$.

Dann hat A 6 frei wählbare Elemente. Mathematisch: $\dim\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A = A^T\} = 6$.

c) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ schiefsymmetrisch $\Longleftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$.

Dann hat A 3 frei wählbare Elemente. Mathematisch: $\dim\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A = -A^T\} = 3$.
Bsp. 8b (noch einmal):

$$\begin{array}{ccccccc} b_{ji} & + & \underbrace{c_{ik} v_k} & w_j & = & d_{ij} \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ B^T & & C \cdot \vec{v} & \vec{w}^T & & D \end{array}$$

(Weil j rechts ein Spaltenindex ist, entspricht w_j dem Zeilenvektor $\vec{w}^T$.)

Also: $\underset{3\times 3}{B^T} + \underbrace{\underset{3\times3}{C}\cdot\underset{3\times1}{\vec{v}}\cdot\underset{1\times3}{\vec{w}^T}}_{3\times 3} = \underset{3\times 3}{D}$

Satz 3 Wenn man $A\cdot B$ bilden kann, so gilt $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$.

Beweis: in TSW: $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}) \Longrightarrow A\cdot B=(a_{ik}b_{kj}),\ (A\cdot B)^T=(a_{jk}b_{ki})$;
$\underbrace{B^T}_{C} = (\underbrace{b_{ji}}_{c_{ij}}),\ \underbrace{A^T}_{D} = (\underbrace{a_{ji}}_{d_{ij}}) \Longrightarrow B^T\cdot A^T = C\cdot D = (c_{ik}d_{kj}) = (b_{ki}a_{jk}) = (A\cdot B)^T.$ $\square$

G) Matrizeninversion und eindeutig lösbare Gleichungssysteme

Wir untersuchen nun, wann Gleichungssysteme mit ebensoviel Gleichungen wie Unbekannten, d.h. $m=n$, eindeutig lösbar sind. In Matrixschreibweise ist $A\vec{x}=\vec{y}$, wobei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. eine quadratische Matrix ist.

Def.: 1) Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn sie gleichviel Zeilen wie Spalten hat, d.h. wenn $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n\in\mathbb{N}$.
2) Die **Diagonale** einer quadratischen Matrix A wird gebildet von den Elementen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. A heißt **Diagonalmatrix**, wenn außerhalb der Diagonale 0 steht.
3) Als **Einheitsmatrix** (geschrieben I oder genauer I_n) bezeichnet man die Diagonalmatrix, die in der Diagonale lauter Einser hat. Es gilt also

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

4) Eine quadratische Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **invertierbar** (**regulär**), wenn es eine Matrix $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $A\cdot B=I_n$ und $B\cdot A=I_n$. Man nennt dann B **inverse Matrix** zu A und schreibt dafür A^{-1}. (Es gibt höchstens **ein** solches B, denn $A\cdot B = I,\ C\cdot A=I \Longrightarrow B = I\cdot B = C\cdot A\cdot B = C\cdot I = C$.) Eine nicht invertierbare quadratische Matrix heißt **singulär**.

Bemerkungen: 1) I wird in TSW mit dem „Kroneckersymbol“ δ_{ij} bezeichnet. Es ist also $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 : i=j, \\ 0 : i\neq j. \end{cases}$ Es gilt $I\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \vec{x}$,

d.h. in TSW $\delta_{ij}x_j = x_i$. Die lineare Abbildung f, die zu I gehört, lässt jeden Vektor unverändert, denn $f(\vec{x}) = I \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Man nennt f auch **Identität**. Ebenso gilt $A \cdot I = A,\ I \cdot A = A$, bzw. in TSW $a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik},\ \delta_{ij}a_{jk} = a_{ik}$.
2) Wenn $A = (a_{ij})$ invertierbar ist und $A^{-1} = B = (b_{ij})$, so gilt also $A \cdot B = B \cdot A = I$, bzw. in TSW $a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$ und $b_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}$. Wenn $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ und $g(\vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{x}$, so ist nach D $(f \circ g)(\vec{x}) = A \cdot A^{-1} \cdot \vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}$ und ebenso $(g \circ f)(\vec{x}) = A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = \vec{x}$, d.h. g ist die Umkehrfunktion zu f, geschrieben $g = f^{-1}$. (Vorsicht: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$). Speziell gilt dann, dass f bijektiv ist.

Bsp. 10: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

In den Spalten von A stehen die Bilder der Standardbasis: $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Falls A invertierbar ist und $g(\vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{x}$, so muss gelten $g\big(f(\vec{e}_i)\big) = \vec{e}_i$, d.h. $g(1,-2,2) = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(2,0,6) = \vec{e}_2,\ g(3,-1,8) = \vec{e}_3$. Wir gehen dann wie in Bsp. 3 vor

A^T	x_1	x_2	x_3	g	y_1	y_2	y_3	
I	1	-2	2		1	0	0	
II	2	0	6		0	1	0	
III	3	-1	8		0	0	1	
$\alpha = \text{II} - 2\text{I}$	0	4	2		-2	1	0	
$\beta = \text{III} - 3\text{I}$	0	5	2		-3	0	1	
$\gamma = \beta - \alpha$	0	1	0		$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{1}$	in der
$\delta = \alpha - 4\gamma$	0	0	2		2	5	-4	richtigen
$\epsilon = \frac{\delta}{2}$	0	0	1		$\boxed{1}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$\boxed{-2}$	Reihenfolge
$\lambda = \text{II} - 6\epsilon$	2	0	0		-6	-14	12	gibt das
$\mu = \frac{\lambda}{2}$	1	0	0		$\boxed{-3}$	$\boxed{-7}$	$\boxed{6}$	$(A^{-1})^T$

Somit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -7 & -1 & 5/2 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Wenn A singulär gewesen wäre, hätten wir links nicht alle Standardbasisvektoren erzeugen können. Kontrolle:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -7 & -1 & 5/2 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$A \cdot A^{-1} = I$ muss dann gar nicht mehr kontrolliert werden, vgl. Satz 4, 1d.
Bemerkung: Wenn A invertierbar ist, so gilt $A\vec{x} = \vec{y} \; / \cdot A^{-1}$ von links $\Longrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$, d.h. die eindeutige Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$ ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$. Vor der Formulierung dieser Tatsache als Satz 4 noch eine

Def.: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei $Z(A)$ der **Zeilenraum** von A, d.h. der von den Zeilen von A in $\mathbb{R}^n$ aufgespannte Unterraum. Seine Dimension $\dim Z(A) = \operatorname{rg} A$ heißt **Rang** von A (vgl. die Def. auf Seite 24). Es gilt immer $\operatorname{rg} A \leq n$ und $\operatorname{rg} A \leq m$.

Bemerkung: Nach § 3, Satz 5, 3), Seite 24 ist $\operatorname{rg} A$ die Anzahl der Pivotzeilen bei Anwendung des Gauß'schen Algorithmus auf das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$.

Satz 4 (über Matrizeninversion) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. A sei eine quadratische Matrix und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ sei die lineare Abbildung mit Matrix A.
1) Die folgenden 7 Aussagen sind gleichbedeutend (äquivalent):
a) Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ hat für jedes $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (d.h. f ist bijektiv).
b) $\operatorname{rg} A = n$;
c) A ist invertierbar;
d) $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n} : B \cdot A = I_n$; d)' f ist injektiv;
e) $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot B = I_n$; e)' f ist surjektiv.
2) Wenn A invertierbar ist, so ist die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$ durch $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ gegeben.
3) Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar sind, so gilt
a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ und b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Bemerkung: Vorsicht: Dass injektiv, surjektiv und bijektiv gleichbedeutend sind, gilt nur für **lineare** Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.
Bsp. 10 (noch einmal): Nach der Rechnung oben und Satz 4 hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & y_1 \\ -2x_1 & & & - & x_3 & = & y_2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & y_3 \end{array}$$

die eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$, d.h.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & = & -3y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\ x_2 & = & -7y_1 & - & y_2 & + & \frac{5}{2}y_3 \\ x_3 & = & 6y_1 & + & y_2 & - & 2y_3. \end{array}$$

Wenn z.B. $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, so ist die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3-2+3 \\ -7-2+15/2 \\ 6+2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Beweis von Satz 4: 1) und 2): Wenn wir $A\vec{x} = \vec{y}$ mit dem Gauß'schen Algorithmus lösen, so ergibt sich für L entweder die leere Menge oder ein k-dimensionaler AR mit $k = n - \operatorname{rg} A$ (siehe § 3 F). Eindeutig lösbar kann das Gleichungssystem also nur für $\operatorname{rg} A = n$ sein.
Wenn andererseits $\operatorname{rg} A = n$ gilt, so erhalten wir nach § 3, Satz 5, 3) genau n Pivotzeilen und, da wir mit n Gleichungen starten, keine Nullzeilen. Dann ist $A\vec{x} = \vec{y}$ eindeutig lösbar. Also ist a)$\Longleftrightarrow$b).

Auch aus c) folgt a), da $A\vec{x} = \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$. Umgekehrt, wenn a) gilt, so sei $g(\vec{y})$ die Lösung $\vec{x}$ von $A\vec{x} = \vec{y}$. Dann ist g linear, und daher (nach Satz 1) $\exists\, B : g(\vec{y}) = B \cdot \vec{y}$ und es gelten $B \cdot A = A \cdot B = I$, d.h. es folgt c).

Schließlich betrachten wir d), d)' und e), e)'. Offenbar folgen sie aus c) bzw. a). Umgekehrt, wenn d) gilt und L der Lösungsraum von $A\vec{x} = \vec{0}$ ist, so ist $\vec{x} \in L \implies \vec{x} = BA\vec{x} = B\vec{0} = \vec{0}$. Wenn d)' gilt, so folgt aus $\vec{x} \in L$, d.h. $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}$, auch $\vec{x} = \vec{0}$. Also ist in beiden Fällen $L = \{\vec{0}\}$ und $0 = \dim L = n - \operatorname{rg} A$, d.h. $\operatorname{rg} A = n$, d.h. es gelten b) und nach dem früheren auch a), c).
Wenn e) gilt und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, so ist $f(B\vec{y}) = AB\vec{y} = \vec{y}$, d.h. $\vec{y}$ ist im Bild von f und somit gilt auch e)'. Wäre dann $\operatorname{rg} A < n$, so müsste zumindest eine Zeile von A (z.B. die i-te) im Gauß'schen Algorithmus zu einer Nullzeile werden. Wenn wir y_i so besetzen, dass dann rechts $\neq 0$ steht, so hat $A\vec{x} = \vec{y}$ keine Lösung und e)' wäre falsch. Also müssen b) und nach dem früheren auch a), c) gelten.
3) a) $A \cdot A^{-1} = I \overset{\text{Satz 3}}{\implies} (A^{-1})^T \cdot A^T = I^T = I \implies (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
b) $C = AB \implies CB^{-1}A^{-1} = A\underbrace{BB^{-1}}_{I}A^{-1} = AA^{-1} = I$ und ebenso $B^{-1}A^{-1}C = I \implies C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

H) Über den Rang von Matrizen

Zum Schluss noch einige eher abstrakte Tatsachen zum Rang von Matrizen. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ können wir auch den von den Spalten von A in $\mathbb{R}^m$ aufgespannten Unterraum betrachten, den **Spaltenraum** $S(A)$. Da die Spalten von A die Bilder der Standardbasisvektoren $\vec{e}_i$ sind, stimmt er überein mit dem **Bildraum** der linearen Abbildung f zu A, d.h. $S(A) = f(\mathbb{R}^n)$. Denn:

$$
\begin{aligned}
S(A) &= \left\{ v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} : v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \big\{ v_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + v_n f(\vec{e}_n) : v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \big\} \\
&\overset{f \text{ linear}}{=} \big\{ f(v_1 \vec{e}_1 + \cdots + v_n \vec{e}_n) : v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \big\} \\
&= \big\{ f(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^n \big\} = f(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}
$$

Andererseits gilt auch $S(A) = Z(A^T)$ und die Dimension von $S(A)$ ist daher $\operatorname{rg} A^T$. Interessanterweise gilt $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$ (Satz 5), was man manchmal auch so ausdrückt: **Zeilenrang** (d.h. was ich Rang genannt habe) = **Spaltenrang** $\big($d.h. $\dim S(A)\big)$.

Satz 5 $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$

Beweis: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $L \subset \mathbb{R}^n$ sei die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$, d.h. $L = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = \vec{0}\big\}$. (Man nennt L manchmal den **Kern** von f.) Es sei $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ eine Basis von L, z.B. die sich mit dem Gauß'schen Algorithmus ergebende. Nach § 3, Satz 5, Seite 24, ist $k = \dim L = n - \operatorname{rg} A$. Weiters sei $l = \operatorname{rg} A^T$ und $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l \in \mathbb{R}^m$ eine Basis von $S(A) = f(\mathbb{R}^n)$ und $\vec{r}_{k+1}, \ldots, \vec{r}_{k+l} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $f(\vec{r}_{k+j}) = \vec{g}_j$ für $j = 1, \ldots, l$. Dann sind $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{k+l}$ linear unabhängig, denn:

$$
\begin{aligned}
\vec{0} &= \lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_{k+l} \vec{r}_{k+l} \\
\Longrightarrow \quad \vec{0} &= f(\vec{0}) = \lambda_1 \underbrace{f(\vec{r}_1)}_{\vec{0}} + \cdots + \lambda_k \underbrace{f(\vec{r}_k)}_{\vec{0}} + \lambda_{k+1} \underbrace{f(\vec{r}_{k+1})}_{\vec{g}_1} + \cdots + \lambda_{k+l} \underbrace{f(\vec{r}_{k+l})}_{\vec{g}_l} \\
\overset{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \quad & \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+l} = 0 \\
\Longrightarrow \quad \vec{0} &= \lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{r}_k \\
\overset{\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \quad & \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.
\end{aligned}
$$

Daher muss $k+l \leq n$ gelten (siehe § 3, Satz 4), d.h. $n - \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} A^T \leq n$ und $\operatorname{rg} A \geq \operatorname{rg} A^T$. Wenn wir A^T an Stelle von A setzen, folgt $\operatorname{rg} A^T \geq \operatorname{rg}(A^{TT}) = \operatorname{rg} A$ und der Satz ist bewiesen. □

Mittels Satz 5 lässt sich ein **Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems** beweisen. Wenn $A\vec{x} = \vec{b}$, d.h.

$$
\begin{gathered}
a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\
\cdots \\
a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m,
\end{gathered}
$$

so nennen wir die $m \times (n+1)$-Matrix $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ die **erweiterte** Matrix des Gleichungssystems. Es gilt:

Satz 6 $A\vec{x} = \vec{b}$ hat eine Lösung $\vec{x}$ $\big($d.h. $L_{\text{inh}} \neq \{\}\big) \Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}$.

Beweis: Wenn $\vec{x}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist, so gilt $\vec{b} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$,

d.h. $\vec{b}$ ist Linearkombination der Spalten von A und damit $S(\tilde{A}) = S(A)$.
Nach Satz 5 ist dann $\operatorname{rg} A = \dim S(A) = \dim S(\tilde{A}) = \operatorname{rg} \tilde{A}$. Ebenso verläuft der umgekehrte Schluss. $\square$

§ 5 Determinanten

A) Die Determinante im $\mathbb{R}^2$

Def.: 1) Die **Determinante** zweier Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ ist $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ = [Fläche des von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ aufgespannten Parallelogramms] mit dem Vorzeichen $\pm$, je nachdem, ob $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ an diesem Parallelogramm (nach Drehung, Stauchung, Streckung; NICHT: Spiegelung) $\left\{\begin{array}{l}\text{ebenso}\\ \text{umgekehrt}\end{array}\right\}$ liegen wie die Standardbasisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ am von ihnen aufgespannten Quadrat.

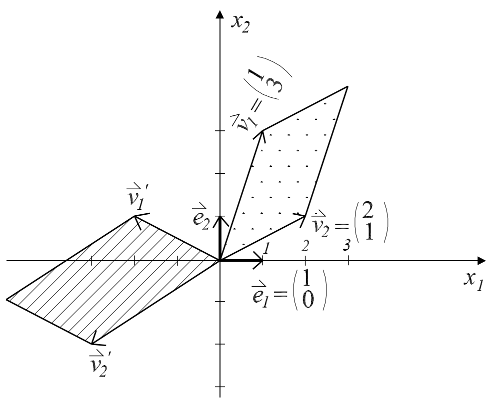
2) Für eine 2×2-Matrix A mit den Spalten $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ setzt man $\det A = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Bemerkungen: 1) Falls $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear abhängig, d.h. parallel sind, so ist die aufgespannte Fläche 0 und das Vorzeichen bleibt unbestimmt.

2) Üblicherweise wird $\mathbb{R}^2$ so gezeichnet, dass man von $\vec{e}_1$ nach $\vec{e}_2$ 90° im Gegenuhrzeigersinn (oft **positiver Drehsinn** genannt) drehen muss. In einer solchen Zeichnung ist also $\pm$ zu nehmen, je nachdem, ob man $\vec{v}_1$ im $\left\{\begin{array}{l}\text{Gegenuhrzeigersinn}\\ \text{Uhrzeigersinn}\end{array}\right\}$ um $< 180°$ nach $\vec{v}_2$ drehen kann.

Bsp. 1:

$\det(\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}') =$
$= +$ schraffierte Fläche



$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) =$
$= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$
$= -$ punktierte Fläche

Grundeigenschaften der Determinante:

(I) det ist **linear in** $\vec{v}_1$:

(a) $\det(\vec{v}_1 + \vec{v}_1{}', \vec{v}_2) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_1{}', \vec{v}_2)$

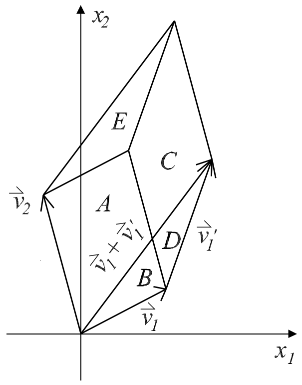
(b) $\det(\lambda \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \lambda \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

(II) det ist **alternierend**: $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\det(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$

(III) det ist **normiert**: $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$.

Bildbeweis zu (Ia):

$$\begin{aligned}
\det(\vec v_1, \vec v_2) &= A + B,\\
\det(\vec v_1{}', \vec v_2) &= C + D,\\
\det(\vec v_1 + \vec v_1{}', \vec v_2) &= A + C + E\\
&= A + C + B + D =\\
&= \det(\vec v_1, \vec v_2) + \det(\vec v_1{}', \vec v_2).
\end{aligned}$$



In diesem Bild sind $\det(\vec v_1, \vec v_2)$ und $\det(\vec v_1{}', \vec v_2)$ positiv. Für andere Vorzeichen erhält man ähnliche Bilder (Übung!). (Ib), (II) und (III) sind einfacher zu sehen.

Bemerkungen: 1) Aus (I) und (II) folgt, dass det auch **linear in** $\vec v_2$ ist:

$\det(\vec v_1, \vec v_2 + \vec v_2{}') \overset{\text{(II)}}{=} -\det(\vec v_2 + \vec v_2{}', \vec v_1) =$

$\overset{\text{(Ia)}}{=} -\det(\vec v_2, \vec v_1) - \det(\vec v_2{}', \vec v_1) \overset{\text{(II)}}{=} \det(\vec v_1, \vec v_2) + \det(\vec v_1, \vec v_2{}').$

Also: (I') (a) $\det(\vec v_1, \vec v_2 + \vec v_2{}') = \det(\vec v_1, \vec v_2) + \det(\vec v_1, \vec v_2{}')$

und ebenso (b) $\det(\vec v_1, \lambda \vec v_2) = \lambda \det(\vec v_1, \vec v_2)$.

Man nennt det daher **multilinear**.

2) Aus (II) folgt, dass $\det(\vec v, \vec v) = -\det(\vec v, \vec v) \Longrightarrow \det(\vec v, \vec v) = 0$. Das ist auch anschaulich klar, da das von $\vec v$ und wieder $\vec v$ aufgespannte Parallelogramm ein Strich ist und Fläche 0 hat. Für $A = (\vec v_1, \vec v_2)$ können wir allgemeiner sagen

$$\det A = 0 \Longleftrightarrow \vec v_1, \vec v_2 \text{ parallel } \Longleftrightarrow \dim S(A) < 2 \Longleftrightarrow \operatorname{rg} A < 2.$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften können wir die Determinante bestimmen:

Satz 1

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Schreibweise: Statt $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ schreibt man oft $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Bsp. 1: (nochmals) $\vec v_1 = \binom{1}{3},\ \vec v_2 = \binom{2}{1} \Longrightarrow \det(\vec v_1, \vec v_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$. Die punktierte Fläche im Bild hat also 5 Flächeneinheiten.

Beweis von Satz 1: Es seien $\vec v_1 = \binom{a}{c},\ \vec v_2 = \binom{b}{d},\ \vec e_1 = \binom{1}{0},\ \vec e_2 = \binom{0}{1}$

$$\Longrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{aligned}[t] &= \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \det(a\vec{e}_1 + c\vec{e}_2, \vec{v}_2) \\ &\overset{\text{(I)}}{=} a\det(\vec{e}_1, \vec{v}_2) + c\det(\vec{e}_2, \vec{v}_2) \\ &= a\det(\vec{e}_1, b\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) + c\det(\vec{e}_2, b\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) \\ &\overset{\text{(I')}}{=} ab\underbrace{\det(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}_{=0} + ad\underbrace{\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{=1} + cb\underbrace{\det(\vec{e}_2, \vec{e}_1)}_{\text{II: } -\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2)} + cd\underbrace{\det(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}_{=0} \\ &\overset{\text{(III)}}{=} ad - bc \end{aligned} \qquad \square$$

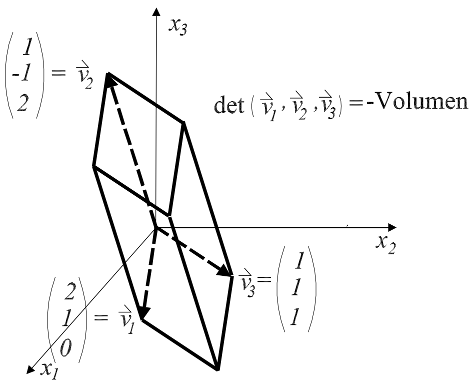
B) Die Determinante im $\mathbb{R}^3$

Def.: 1) Die **Determinante** dreier Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ ist $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) =$ [Volumen des von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aufgespannten Parallelepipeds] mit dem Vorzeichen $\pm$, je nachdem, ob $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ an diesem Parallelepiped (nach Drehung, Stauchung, Streckung) $\left\{\begin{matrix}\text{ebenso}\\ \text{anders}\end{matrix}\right\}$ liegen wie die Standardbasisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ am von ihnen aufgespannten Würfel.
2) Für eine 3×3 Matrix A mit den Spalten $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ setzt man $\det A = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Bemerkungen: 1) Wenn $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear abhängig sind, d.h. in einer Ebene durch $\vec{0}$ liegen, so hat das Parallelepiped Volumen 0, d.h. $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$. Das Vorzeichen bleibt dann unbestimmt.
2) Wenn $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind (und daher nach § 3, Satz 4, 3b eine Basis von $\mathbb{R}^3$), so nennt man die Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ $\left\{\begin{matrix}\textbf{positiv}\\ \textbf{negativ}\end{matrix}\right\}$ **orientiert** (bzgl. der Standardorientierung), wenn $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist. Üblicherweise wird $\mathbb{R}^3$ so dargestellt, dass $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ so wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der **rechten** Hand liegen. In einer solchen Darstellung sind also $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ orientiert, wenn sie wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der $\left\{\begin{matrix}\text{rechten}\\ \text{linken}\end{matrix}\right\}$ Hand liegen. [Bei den in unserer Gesellschaft üblichen Korkenziehern entspricht $\vec{v}_3$ im 1. Fall der Richtung, in die der Korkenzieher geht, wenn man von $\vec{v}_1$ nach $\vec{v}_2$ dreht (Korkenzieherregel).] Diese **physikalischen** Orientierungen von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ nennt man $\left\{\begin{matrix}\textbf{Rechtssystem}\\ \textbf{Linkssystem}\end{matrix}\right\}$.

VORSICHT: Die Standardorientierung von $\mathbb{R}^3$ entsprechend $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ist vollkommen unabhängig von der Wahl einer Orientierung des physikalischen Raumes, in dem wir leben: Dass $\mathbb{R}^3$ entsprechend einem Rechtssystem dargestellt wird, ist reine Konvention

und beeinflusst die Rechenergebnisse nicht.
Dass **der Mensch** Rechts- und Linkssysteme (als Erwachsener) relativ leicht unterscheiden kann, d.h. den Raum orientiert erlebt, liegt daran, dass sein Körper (an der Oberfläche) nur **eine** Spiegelsymmetrie besitzt. Marsmenschen, die auch bzgl. vorn/hinten symmetrisch wären, könnten den Raum nicht orientiert erleben, d.h. zwischen linkem und rechtem Arm nicht unterscheiden.
Beachte auch, dass die Wahl einer Orientierung im physikalischen Raum ebenso willkürlich wie die Wahl eines Ursprungs bzw. von Achsen ist: Einem äußerlich uns gleichen Marsmenschen könnte man rein telefonisch nicht beschreiben, welche Hand rechts ist, ohne Bezug auf Astronomie (Gestirnkonstellationen) oder Physik (β-Zerfall, Lee-Yang 1956).
Bsp. 2:



Grundeigenschaften der Determinante:

(I) det ist **linear in** $\vec{v}_1$:

(a) $\det(\vec{v}_1 + \vec{v}_1{}', \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_1{}', \vec{v}_2, \vec{v}_3)$
(b) $\det(\lambda\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \lambda \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

(II) det ist **alternierend**:
$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -\det(2 \text{ Vektoren vertauscht})$, d.h.
$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -\det(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2) = -\det(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) = -\det(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3)$

(III) det ist **normiert**: $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$

Bemerkung: Wieder folgt, dass det auch linear in $\vec{v}_2$ und linear in $\vec{v}_3$ ist, d.h. **multilinear** ist und dass det $= 0$, wenn 2 Vektoren gleich sind.

Satz 2 (Regel von Sarrus (gesprochen Sarrü; Pierre Frédéric Sarrus, 1798-1861))

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- [a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}]. \end{aligned}$$

Merkschema:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{cl} \diagdown & \text{mit } + \\ \diagup & \text{mit } - \end{array}$$

Bezeichnung: Wieder schreibt man oft $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots \\ \cdots & \\ \cdots & \end{vmatrix}$ statt $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \cdots & \\ \cdots & \end{pmatrix}$.

Bsp. 2: (nochmals)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 2 - [0 + 4 + 1] = -5$$

Schema:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right.$$

Das gezeichnete Parallelepiped hat also 5 Volumseinheiten.

Beweis von Satz 2: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ seien die 3 Spalten der Matrix, d.h.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 = a_{i1}\vec{e}_i \text{ (TSW!)} \;\text{ und ebenso } \vec{v}_2 = a_{j2}\vec{e}_j, \vec{v}_3 = a_{k3}\vec{e}_k.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= \det(a_{i1}\vec{e}_i, a_{j2}\vec{e}_j, a_{k3}\vec{e}_k) = \text{ (weil det multilinear ist) } = \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\Big) a_{i1}a_{j2}a_{k3} \det(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k), \end{aligned}$$

$\det(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = 0$, wenn $i = j$ oder $i = k$ oder $j = k$. Daher bleiben von den insgesamt $3^3 = 27$ Summanden nur $3! = 6$ übrig:

$$\begin{array}{ll} i=1, j=2, k=3: & \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \overset{\text{(III)}}{=} 1, \\ i=1, j=3, k=2: & \det(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) \overset{\text{(II)}}{=} -\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \overset{\text{(III)}}{=} -1, \\ i=2, j=1, k=3: & \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) \overset{\text{(ebenso)}}{=} -1, \\ i=2, j=3, k=1: & \det(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) \overset{\text{(II)}}{=} -\det(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) \overset{\text{(s.o.)}}{=} 1, \\ i=3, j=1, k=2: & \det(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \overset{\text{(II)}}{=} -\det(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) \overset{\text{(s.o.)}}{=} 1, \\ i=3, j=2, k=1: & \det(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) \overset{\text{(II)}}{=} -\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = -1. \end{array}$$

Das ergibt
$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$.

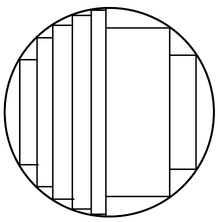
$\square$

C) Die Determinante im $\mathbb{R}^n$

Auch im $\mathbb{R}^n$ lässt sich ein Volumsbegriff einführen, indem man fordert

$$\begin{aligned} &\text{Vol.}\big(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 \le x_1 \le b_1, \ldots, a_n \le x_n \le b_n\}\big) = \\ &= (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \text{ für } a_1 \le b_1, \ldots, a_n \le b_n \end{aligned}$$

(Für $n = 1/2/3$ ergibt sich dabei Länge/Fläche/übliches Volumen.) Das Volumen einer „beliebigen“ Menge erhält man durch Zerlegung in (u.U. ∞ viele) Quader: Z.B. für $n = 2$ und einen Kreis:



Im Grenzwert ergibt sich die Kreisfläche.

Ein Problem für det bleibt allerdings das Vorzeichen $\pm$, das in A,B nur anschaulich erklärt wurde. Wir starten hier exakter und abstrakter direkt mit den **Grundeigenschaften** von det : Für $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ erfülle $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$

(I) det ist **linear in** $\vec{v}_1$:

- (a) $\det(\vec{v}_1 + \vec{v}_1{}', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) + \det(\vec{v}_1{}', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$
- (b) $\det(\lambda\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = \lambda \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$

(II) det ist **alternierend**:
$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = -\det$ (2 Vektoren vertauscht)

(III) det ist **normiert**: $\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$
(Hierin ist $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ wieder die Standardbasis.)

Bemerkungen: 1) Wieder folgt aus I, II dass det multilinear ist, und dass det verschwindet, wenn 2 Vektoren gleich sind. Wir setzen auch wieder $\det A = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, wobei $\vec{v}_j$ die Spalten von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind. Speziell gilt: $\det I = 1$ nach III.
VORSICHT:

$$\begin{aligned} &\det(\lambda\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \ldots, \lambda\vec{v}_n) \overset{\text{(I)}}{=} \lambda \det(\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \ldots, \lambda\vec{v}_n) = \\ &\overset{\substack{\text{det in} \\ \vec{v}_2 \text{ linear}}}{=} \lambda^2 \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \lambda\vec{v}_3, \ldots, \lambda\vec{v}_n) = \cdots = \lambda^n \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \end{aligned}$$

Also: $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$

Schon das zeigt, dass det **nicht linear** ist, d.h. i. Allg. $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.
2) Ähnlich wie beim Beweis von Satz 2 wird $\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ auf $\det(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n})$ zurückgeführt, wobei $i_1, \dots, i_n$ den i, j, k dort entsprechen. Wenn 2 Indizes gleich sind, so ergibt sich 0. Wenn alle Indizes verschieden sind, so nennt man $i = (i_1, \dots, i_n)$ eine **Permutation** von $(1, \dots, n)$. Z.B. ist $(\underbrace{2}_{i_1}, \underbrace{4}_{i_2}, \underbrace{1}_{i_3}, \underbrace{3}_{i_4})$ eine Permutation von $(1, \dots, 4)$.
Für eine Permutation $i = (i_1, \dots, i_n)$ ist $\det(\vec{e}_{i_1}, \dots \vec{e}_{i_n}) = \pm 1$, je nachdem ob man eine $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Vertauschungen braucht, um auf $(1, \dots, n)$ zu kommen. Man nennt $\det(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n})$ das **Signum** der Permutation i und schreibt $\operatorname{sign}(i)$. Z.B. gilt

$$(2, 4, 1, 3) \rightsquigarrow (2, 3, 1, 4) \rightsquigarrow (1, 3, 2, 4) \rightsquigarrow (1, 2, 3, 4)$$

$$\text{und daher } \operatorname{sign}(2, 4, 1, 3) = -1.$$

Satz 3 Es gibt genau eine Funktion det, die I, II, III erfüllt, und zwar gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i \text{ Permutation} \\ \text{von } (1, \dots, n)}} \operatorname{sign}(i)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

Bemerkung: Für eine Permutation i hat man n Möglichkeiten i_1 zu wählen, danach $n-1$ Möglichkeiten i_2 zu wählen (weil $i_2 \neq i_1$ sein muss), danach $n-2$ Möglichkeiten i_3 zu wählen, ... $\Longrightarrow$ es gibt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Permutationen. Die Formel von Satz 3 ist daher zum Rechnen ungünstig.
Für $n = 2, 3$ stimmt die Formel von Satz 3 mit den Formeln von Satz 1 bzw. Satz 2 überein.
VORSICHT: Für $n \neq 3$ gilt das Merkschema von Sarrus nicht! Z.B. für $n = 4$ liefert es statt $4! = 24$ nur 8 Terme und die Hälfte davon mit falschen Vorzeichen.
Bsp. 3:
$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ lässt sich wegen der vielen Nullen mit Satz 3 leicht berechnen.
Außer für $i_1 = 2$ ist $a_{i_1 1} = 0$. Dann muss $i_2 = 4$ sein (sonst $a_{i_2 2} = 0$), $i_3 = 1, i_4 = 3 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow d = \underbrace{\operatorname{sign}(2, 4, 1, 3)}_{-1} \underbrace{a_{21}}_{5} \underbrace{a_{42}}_{-1} \underbrace{a_{13}}_{-4} \underbrace{a_{34}}_{3} = -60.$

Beweis von Satz 3: a) Wieder sei $\vec{v}_1 =$[1. Spalte von A] $= \left(\sum_{i_1=1}^{n}\right) a_{i_1 1} \vec{e}_{i_1}$, $\vec{v}_2 = a_{i_2 2} \vec{e}_{i_2}$

etc. (statt i, j, k wie beim Beweis von Satz 2 verwenden wir die nummerierten Summationsindizes $i_1, \ldots, i_n$) $\Longrightarrow \det A = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \det(a_{i_1 1}\vec{e}_{i_1}, \ldots, a_{i_n n}\vec{e}_{i_n}) \overset{\substack{\text{(det}\\ \text{multilinear)}}}{=}$ $a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \det(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_n}) = \sum\limits_{i \text{ Perm.}} \operatorname{sign}(i)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$.
Falls es also eine Funktion det gibt, die I, II, III erfüllt, so ist sie eindeutig und durch die Formel im Satz 3 gegeben.
b) Wir haben noch zu zeigen, dass die Formel im Satz 3 $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ definiert mit I, II, III. Dabei tritt zunächst die Frage auf, ob sign wohldefiniert ist, d.h. ob man nicht manche $(i_1, \ldots, i_n)$ sowohl mit einer geraden als auch mit einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen in $(1, \ldots, n)$ verwandeln kann.
Es sei $i = (i_1, \ldots, i_n)$ und $\mathrm{FP}(i) =$[Anzahl der „falsch liegenden Paare" in $(i_1, \ldots, i_n)$] $=$ $=$[Anzahl der $j < k$, wo $i_j > i_k$]. Z.B. ist $\mathrm{FP}(2, 4, 1, 3) = 3$, da $2, 1 | 4, 1 | 4, 3$ verkehrt liegen.
Eine Vertauschung zweier Indizes kann durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen nebeneinander liegender Indizes erzielt werden:
Zuerst $i = (i_1, \ldots, i_{j-1}, \overleftrightarrow{i_j,}\ \overleftrightarrow{i_{j+1}, \cdots}, i_k, \ldots, i_n)$; wenn man i_j $(k-j)$-mal nach oben tauscht, erhält man $(i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_k, i_j, i_{k+1}, \ldots, i_n)$; wenn man i_k $(k-j-1)$-mal nach unten tauscht, erhält man $\tilde{i} = (i_1, \ldots, i_{j-1}, i_k, i_{j+1}, \ldots, i_{k-1}, i_j, i_{k+1}, \ldots, i_n)$ (d.h. in $\tilde{i}$ sind i_j und i_k vertauscht). Jedesmal ändert sich FP um $\pm 1 \Longrightarrow \mathrm{FP}(\tilde{i}) = \mathrm{FP}(i) \pm$ ungerade Zahl $\Longrightarrow (-1)^{\mathrm{FP}(\tilde{i})} = -(-1)^{\mathrm{FP}(i)}$.
Wegen $\mathrm{FP}(1, \ldots, n) = 0$ folgt, dass $(-1)^{\mathrm{FP}(i)} = \pm 1$, je nachdem man $(1, \ldots, n)$ mit einer $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Vertauschungen erreicht, d.h. $\operatorname{sign}(i) = (-1)^{\mathrm{FP}(i)}$ ist wohldefiniert und es gilt $\operatorname{sign}(\tilde{i}) = -\operatorname{sign}(i)$.
Nun sieht man leicht, dass I-III erfüllt sind. $\square$

D) Berechnung der Determinante mit dem Gauß'schen Algorithmus

Ebenso wie in Bsp. 3 lässt sich $\det A$ besonders leicht berechnen, wenn A eine Dreiecksmatrix ist.

Def.: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt $\left\{\begin{matrix}\textbf{obere}\\ \textbf{untere}\end{matrix}\right\}$ **Dreiecksmatrix**, wenn in $A \left\{\begin{matrix}\text{unterhalb}\\ \text{oberhalb}\end{matrix}\right\}$ der Diagonale nur 0 steht.

Satz 4 Für eine Dreiecksmatrix A ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente, d.h. $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. Speziell: $\boxed{\det I = 1}$

Bsp. 4:

$$A=\begin{pmatrix}2&11&5&3\\0&0.5&4&1\\0&0&-3&2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\ \text{(obere Dreiecksmatrix)} \Longrightarrow \det A = 2\cdot 0.5\cdot(-3)\cdot(-2)=6.$$

Beweis von Satz 4: In $\det A = \sum\limits_{i\,\text{Perm.}} \operatorname{sign}(i)\, a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}$ sind alle Summanden 0 bis auf den mit $i_1=1,\ i_2=2,\ldots,i_n=n$. $\square$

Mit dem Gauß'schen Algorithmus kann eine beliebige Matrix in eine obere Dreiecksmatrix verwandelt werden. Wir verwenden hier folgendes Schema: Die Pivotzeilen werden durch Vertauschung nach oben gebracht und jedesmal wieder angeschrieben.

Bsp. 5:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2&4\\2&0&2&1\\-1&1&-1&2\\0&-1&3&0\end{pmatrix}\ \widetilde{\text{VT}}\ \begin{array}{l}\begin{pmatrix}-1&1&-1&2\\2&0&2&1\\3&-1&2&4\\0&-1&3&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{II+2I}\\ \text{III+3I}\\ \text{IV+0I}\end{array}\ \widetilde{\text{G}}$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1&2\\0&2&0&5\\0&2&-1&10\\0&-1&3&0\end{pmatrix}\ \widetilde{\text{VT}}\ \begin{pmatrix}-1&1&-1&2\\0&-1&3&0\\0&2&-1&10\\0&2&0&5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \text{III+2II}\\ \text{IV+2II}\end{array}\ \widetilde{\text{G}}$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1&2\\0&-1&3&0\\0&0&5&10\\0&0&6&5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{IV-}\frac{6}{5}\text{III}\end{array}\ \widetilde{\text{G}}\ \begin{pmatrix}-1&1&-1&2\\0&-1&3&0\\0&0&5&10\\0&0&0&-7\end{pmatrix}=B$$

(rg A = Anzahl der Pivotzeilen=4)

Nach dem folgenden Satz ändert jede Zeilenvertauschung VT die Determinante um den Faktor -1, Gauß-Schritte G lassen die Determinante unverändert. Daher ist

$$\det A = \underbrace{(-1)}_{\text{1. VT}}\cdot\underbrace{(-1)}_{\text{2. VT}}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot 5\cdot(-7)}_{\det B} = -35$$

Satz 5 1) $\boxed{\det A^T = \det A}$

2)a) Zeilenvertauschungen ändern $\det A$ um den Faktor -1.

b) Gauß-Schritte lassen $\det A$ unverändert.

Bemerkung: VORSICHT: Wenn Zeilen mit einem Faktor multipliziert werden, so wird auch $\det A$ mit diesem Faktor multipliziert. Wenn wir in Bsp. 5 am Schluss 5IV-6III machen, so erhalten wir $5\det A$ statt $\det A$.

Beweis von Satz 5: 1) $\det A^T = \sum\limits_{j\,\text{Perm.}} \operatorname{sign}(j)\, \underbrace{(A^T)_{j_1 1}}_{a_{1j_1}}\cdots\underbrace{(A^T)_{j_n n}}_{a_{nj_n}}$

Das Produkt $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ ändert sich nicht, wenn wir es umordnen. Wir ordnen es so um, dass an 1. Stelle das Element aus der 1. Spalte (d.h. $a_{\dots 1}$) steht, an 2. Stelle das Element aus der 2. Spalte ($a_{\dots 2}$) etc. Nach einer Anzahl c von Vertauschungen erhalten wir $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} = a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}$ mit einer geeigneten Permutation i.
Dabei ist $(-1)^c = \operatorname{sign}(j)$. Z.B. für $j=(2,4,1,3)$ ist

$$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} = a_{12}a_{43}a_{31}a_{24} = a_{31}a_{43}a_{12}a_{24} = a_{31}a_{12}a_{43}a_{24},$$

d.h. $c=3$ und $i=(3,1,4,2)$. Umgekehrt kommen wir mit denselben c Vertauschungen von $a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}$ zurück nach $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ und daher ist $\operatorname{sign}(i) = (-1)^c = \operatorname{sign}(j)$. Das ergibt

$$\begin{aligned}\det A^T &= \sum_j \operatorname{sign}(j)\, a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_i \operatorname{sign}(i)\, a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n} = \det A.\end{aligned}$$

2) a) $\det$ (2 Spalten von A vertauscht) $\overset{\text{(II in C)}}{=} -\det A$,
Wegen $\det A = \det A^T$ gilt dasselbe für Zeilen.

b) $\det(\vec v_1,\dots,\vec v_{j-1},\vec v_j + \lambda\vec v_1,\vec v_{j+1},\dots,\vec v_n) \overset{\substack{\text{(det}\\\text{multilinear)}}}{=}$
$= \det(\vec v_1,\dots,\vec v_n) + \lambda\,\underbrace{\det(\vec v_1,\vec v_2,\dots,\vec v_{j-1},\vec v_1,\vec v_{j+1},\dots,\vec v_n)}_{=0}.$ $\square$

E) Die Determinante ist multiplikativ

Def.: Wenn $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear ist und $f(\vec x) = A\cdot\vec x$, so setzt man $\det f = \det A$.

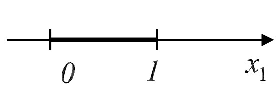
Wir wollen $\det f$ anschaulich begreifen. Die Spalten von A sind $f(\vec e_1),\dots,f(\vec e_n)$.
Wie zu Beginn von C gesagt, kann man auch im $\mathbb{R}^n$ einen Volumsbegriff einführen, sodass $\mathbb{R}^n$-Vol.(Quader)=Produkt der Seitenlängen.

$$\text{Es gilt dann } \mathbb{R}^n\text{-Vol.} = \begin{cases}\text{Länge:} & n=1\\ \text{Fläche:} & n=2\\ \text{übl. Volumen:} & n=3.\end{cases}$$

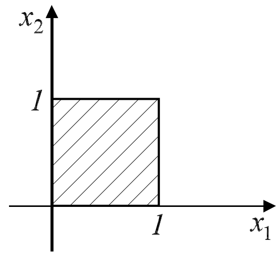
Dann ist $|\det f| = |\det A| = \left|\det\bigl(f(\vec e_1),\dots,f(\vec e_n)\bigr)\right| \overset{\substack{\text{(vgl.}\\ \text{A,B)}}}{=} \mathbb{R}^n$-Vol. des von $f(\vec e_1),\dots,f(\vec e_n)$ aufgespannten Parallelepipeds $=$

$$\begin{aligned}&= \mathbb{R}^n\text{-Vol. von } \Bigl\{\underbrace{x_1 f(\vec e_1)+\cdots+x_n f(\vec e_n)}_{f(\vec x)=f(x_1,\dots,x_n)} : 0\le x_i\le 1,\ i=1,\dots,n\Bigr\}\\ &= \mathbb{R}^n\text{-Vol. von } f(\mathbb{R}^n\text{-Einheitsquader}), \text{ wobei}\end{aligned}$$

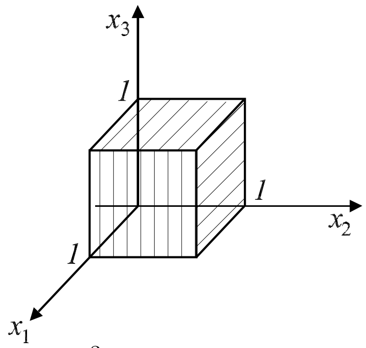
$\mathbb{R}^n$-Einheitsquader $= \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : 0 \leq x_i \leq 1 \right\}$



$\mathbb{R}^1$-Einheitsquader

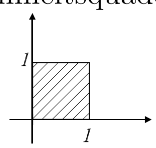
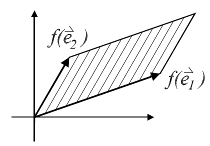
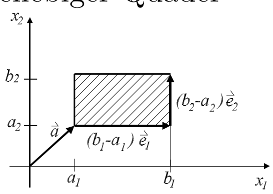
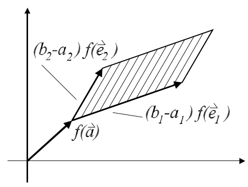


$\mathbb{R}^2$-Einheitsquader



$\mathbb{R}^3$-Einheitsquader

Weil f linear ist, gilt dann (Skizze für $n = 2$) :

Menge	$\mathbb{R}^n -$ Vol.	f (Menge)	$\mathbb{R}^n -$ Vol.
Einheitsquader 	1		$\vert \det f \vert$
beliebiger Quader 	$(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$		$(b_1 - a_1) \cdots$ $\cdots (b_n - a_n)$ $\cdot \vert \det f \vert$
allgemeine Menge M (zerlegbar in (∞) viele kleine Quader)	V	$f(M)$	$V \cdot \vert \det f \vert$

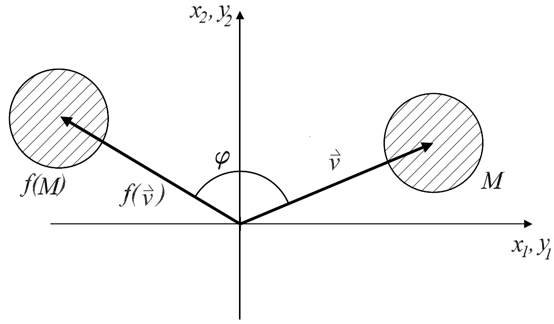
Also vergrößert/verkleinert f allgemein das $\mathbb{R}^n$-Volumen mit dem Faktor $|\det f|$.

Wenn $\det f \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$, so sagt man, dass f die **Orientierung** $\begin{Bmatrix} \textbf{erhält} \\ \textbf{umkehrt} \end{Bmatrix}$. Dies bedeutet, dass $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$ $\begin{Bmatrix} \text{„ebenso“} \\ \text{„umgekehrt“} \end{Bmatrix}$ liegen, wie $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ (vgl. A,B für $n = 2, 3$).

Ergebnis: $\boxed{\det f = \pm \mathbb{R}^n - \text{Volumsveränderungsfaktor von } f}$

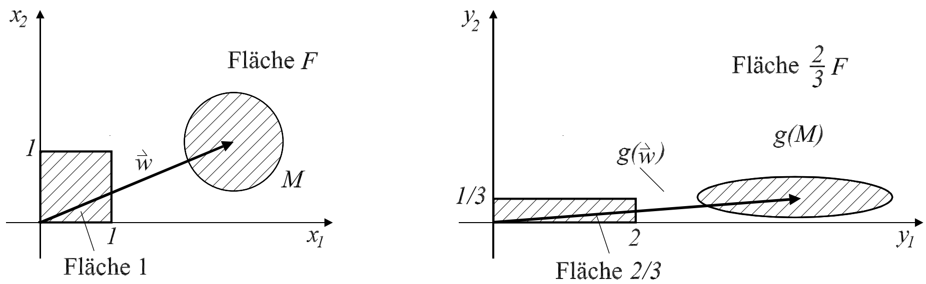
wobei $\pm$ steht, wenn f die Orientierung $\begin{Bmatrix} \text{erhält} \\ \text{umkehrt} \end{Bmatrix}$.

Bsp. 6: a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung, d.h. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
f verändert die Fläche nicht und erhält die Orientierung $\Longrightarrow \det f = 1$.
Kontrolle: $\det A = \cos\varphi \cdot \cos\varphi - (-\sin\varphi \cdot \sin\varphi) = 1$
Bild:



b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei Streckung in x_1 mit Faktor 2, Stauchung in x_2 mit Faktor $\frac{1}{3} \Longrightarrow g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2/3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; die Orientierung bleibt erhalten $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \det g = +$ Flächenveränderungsfaktor$= 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \det B$.
Bild:



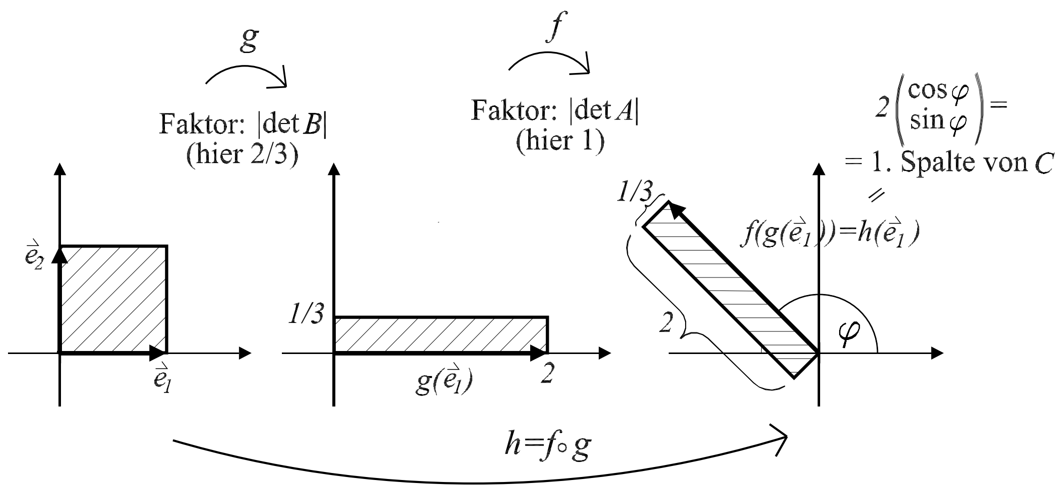
vorher nachher

c) Es sei $h = f \circ g$. Dann erhält auch h die Orientierung und verkleinert die Fläche mit dem Faktor $\frac{2}{3}$, d.h. $\det h = \det f \cdot \det g$, bzw. wenn $C = A \cdot B$, so ist $\det C = \det A \cdot \det B = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Kontrolle: $C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi & -\frac{1}{3}\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & \frac{1}{3}\cos\varphi \end{pmatrix}$,

$\det C = 2\cos\varphi \cdot \frac{1}{3}\cos\varphi - \left(-\frac{1}{3}\sin\varphi \cdot 2\sin\varphi\right) = \frac{2}{3}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{2}{3}$.

Bild:



Flächenveränderungsfaktor: $|\det A \cdot \det B|$

Die Verallgemeinerung von Bsp. 6 ist Satz 6. Da Volumen und Orientierung im $\mathbb{R}^n$ hier nur heuristisch eingeführt wurden, wird Satz 6 direkt bewiesen. Die Vorstellung dazu sollte aber wie in Bsp. 6 sein.

Satz 6 Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

Beweis: Es sei A fest und $\widetilde{\det}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \det(A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_n)$. Dann erfüllt $\widetilde{\det}$ die Bedingungen I, II in C (siehe Seite 48) sowie $\widetilde{\text{III}}: \widetilde{\det}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \det(\underbrace{A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n}_{=A \ (\S\ 4,\ \text{Satz } 1)}) =$
$= \det A$ statt III.
Nach dem Beweis von Satz 3 ist $\widetilde{\det}$ durch I, II, $\widetilde{\text{III}}$ eindeutig bestimmt. Auch

$$\det A \cdot \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \text{ erfüllt I, II, } \widetilde{\text{III}} \Longrightarrow \forall \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n : \\ \det(A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_n) = \det A \cdot \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n).$$

Wenn $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ die Spalten von B sind, so ist $A \cdot B = A \cdot \underbrace{(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)}_{B} = (A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_n)$

und wir erhalten den Satz. □

F) Weitere Eigenschaften der Determinante

Satz 7 Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

1) $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow A$ invertierbar $\Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
$\Longleftrightarrow$ die Zeilen/Spalten von A sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ die Zeilen/Spalten von A sind eine Basis im $\mathbb{R}^n$

2) $\det A = 0 \Longleftrightarrow A$ singulär $\Longleftrightarrow \operatorname{rg} A < n \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ die Zeilen/Spalten von A sind linear abhängig.

Bsp. 7: In Übung 25 gilt $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4+6+4-(24-4-1) =$
$= -5 \neq 0 \underset{\text{Satz 7}}{\Longrightarrow} \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig.

In Übung 26 gilt $\det(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 6 + 16 - 9 - (36 - 24 + 1) =$
$= 0 \underset{\text{Satz 7}}{\Longrightarrow} \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ linear abhängig.

Beweis von Satz 7: a) Nach § 4 G ist A invertierbar $\Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Longleftrightarrow \dim Z(A) = n$. Die n Zeilen von A spannen $Z(A)$ auf; wenn $\dim Z(A) = n$, so sind sie nach § 3, Satz 4, 3a auch eine Basis von $Z(A)$ und daher linear unabhängig. Nach § 4, 3b sind sie dann auch eine Basis von $\mathbb{R}^n$, d.h. $Z(A) = \mathbb{R}^n$. Das bedingt wieder $\operatorname{rg} A = n$. Wegen $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$ gilt dasselbe für die Spalten.
b) Wenn A invertierbar ist $\Longrightarrow A \cdot A^{-1} = I \overset{\text{Satz 6}}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det(A^{-1}) = \det I = 1 \Longrightarrow$ $\det A \neq 0$.
c) Wenn A singulär ist $\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow}$ die Spalten $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ von A sind linear abhängig $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \text{ mit z.B. } \lambda_1 \neq 0 \Longrightarrow \vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{v}_n \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \det A = \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \det\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{v}_n, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\right) \overset{\text{(I)}}{=}$$
$$= \quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\det(\vec{v}_2, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\det(\vec{v}_n, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = 0. \qquad \square$$

Bemerkung: Anschaulich lässt sich Satz 7 so begreifen: $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow [\mathbb{R}^n-$Volumen Parallelepiped $A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n] \neq 0 \Longleftrightarrow$ die Spalten von A spannen $\mathbb{R}^n$ auf $\Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n$.

Def.: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $A_{\not i \not j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entstehende Matrix. $\det(A_{\not i \not j})$ heißt (i,j)-te **Streichungsdeterminante** von A.

Satz 8 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1) Für $i = 1, \dots, n$ fest gilt
$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{\cancel{i}\cancel{1}}) + a_{i2}(-1)^{i+2}\det(A_{\cancel{i}\cancel{2}}) + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(A_{\cancel{i}\cancel{n}})$

2) Für $j = 1, \dots, n$ fest gilt
$\det A = a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{\cancel{1}\cancel{j}}) + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}\det(A_{\cancel{n}\cancel{j}})$

3) Wenn A invertierbar ist, d.h. $\det A \neq 0$, so ist $(A^{-1})_{ji} = \dfrac{1}{\det A}(-1)^{i+j}\det(A_{\cancel{i}\cancel{j}})$

Bemerkungen: 1) Zur ersten Formel sagt man: **Entwicklung nach der i-ten Zeile**. Dabei fixiert man die i-te Zeile von A, nimmt der Reihe nach ihre Elemente a_{ij}, $j = 1, \dots, n$, multipliziert sie mit den entsprechenden Streichungsdeterminanten $\det(A_{\cancel{i}\cancel{j}})$ sowie mit $(-1)^{i+j} = \pm 1$ und addiert. $(-1)^{i+j} = \pm 1$ wird dabei nach dem **Schachbrettmuster** bestimmt:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ & & \cdots & & \end{pmatrix}$$

denn z.B. für $i = 2, j = 1$ (eingekreist) ist $(-1)^{i+j} = (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1\checkmark$
2) Zur zweiten Formel sagt man **Entwicklung nach der j-ten Spalte**. Alles ist analog bei Fixierung der j-ten Spalte. 1)$\Longleftrightarrow$2) weil $\det A = \det A^T$.
3) Die Berechnung von A^{-1} in 3) erfolgt in 4 Schritten:
a) Berechne alle Streichungsdeterminanten $\det(A_{\cancel{i}\cancel{j}})$.
b) Multipliziere mit $(-1)^{i+j} = \pm 1$ via Schachbrett.
c) Bilde die transponierte Matrix (weil links $(A^{-1})_{ji}$).
d) Dividiere durch $\det A$.
Die nach a,b,c entstehende Matrix heißt **adjungierte Matrix**. Bezeichnung: A^{ad}. Somit $(A^{\text{ad}})_{ji} = (-1)^{i+j}\det(A_{\cancel{i}\cancel{j}})$. A^{ad} existiert auch falls $\det A = 0$ und erfüllt immer $A \cdot A^{\text{ad}} = A^{\text{ad}} \cdot A = (\det A) \cdot I_n$ (siehe den Beweis).

Bsp. 8:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(vgl. § 4 G, Seite 40)}$$

1. Entwicklung z.B. nach der 2. Zeile $\left(S = \text{Schachbrett} \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}\right)$:

$$\begin{aligned} \det A &= (-2)\cdot\underbrace{(-1)}_{S}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 0\cdot\underbrace{(+1)}_{S}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\underbrace{(-1)}_{S}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 2\cdot(16-18) + 0 + 1\cdot(6-4) = \underline{\underline{-2}} \end{aligned}$$

2. Entwicklung z.B. nach der 3. Spalte:

$$\begin{aligned} \det A &= 3\cdot\underbrace{(+1)}_{S}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\underbrace{(-1)}_{S}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 8\cdot\underbrace{(+1)}_{S}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 3\cdot(-12) + 1\cdot 2 + 8\cdot 4 = -2\surd \end{aligned}$$

3. a) $\left(\det(A_{\cancel{i}\cancel{j}})\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -14 & -12 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

   b) Schachbrett: $\begin{pmatrix} 6 & 14 & -12 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

   c) Transponieren: $A^{\text{ad}} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 14 & 2 & -5 \\ -12 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

   d) Mit $\dfrac{1}{\det A} = -\dfrac{1}{2}$ multiplizieren:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -7 & -1 & 5/2 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \surd \qquad \text{(Vgl. Seite 40)}$$

Übung: Was gibt Satz 8, 3) für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

Ergebnis: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Beweis von Satz 8: 1) folgt aus 2) mit $\det A = \det A^T$.

2) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ seien die Spalten von $A \Longrightarrow$

$$\det A = \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \underbrace{a_{1j}\vec{e}_1 + \dots + a_{nj}\vec{e}_n}_{=\vec{v}_j}, \cdots, \vec{v}_n) \overset{\substack{\det \\ \text{multilinear}}}{=}$$

$$= a_{1j} \underbrace{\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{e}_1, \dots, \vec{v}_n)}_{D_1} + \dots + a_{nj} \underbrace{\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{e}_n, \dots, \vec{v}_n)}_{D_n}$$

$D_1 = \det(\vec{v}_1 - a_{11}\vec{e}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{e}_1, \dots, \vec{v}_n)$, weil $\det(-a_{11}\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_1, \dots) = 0$, ebenso bei den anderen Spalten $\Longrightarrow$

$$D_1 = \det \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} a_{2,j-1} \\ \vdots \\ a_{n,j-1} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{2,j+1} \\ \vdots \\ a_{n,j+1} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{matrix}} \end{array} \right)$$
$$\begin{array}{cccccccc} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & & \vec{w}_{j-1} & & \vec{w}_j & & \vec{w}_{n-1} \end{array}$$

Wenn $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$, so erfüllt $\widetilde{\det}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-1}) =$
$= \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vec{w}_1 & & \vec{w}_{j-1} & \vec{0} & \vec{w}_j & & \vec{w}_{n-1} \end{pmatrix}$ I, II und statt III gilt für die Standardbasis $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1}$ in $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\widetilde{\det}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det(\underset{\in\mathbb{R}^n}{\vec{e}_2}, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_j, \vec{e}_1, \vec{e}_{j+1}, \dots, \vec{e}_n) \overset{(\mathrm{II})}{=} (-1)^{j-1} \det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (-1)^{1+j}$$

Also ist (vgl. den Beweis zu Satz 6)

$$\begin{aligned} D_1 &= \widetilde{\det}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-1}) = (-1)^{1+j} \underset{(\mathrm{im}\, \mathbb{R}^{n-1})}{\det} (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-1}) \\ &= (-1)^{1+j} \det \begin{pmatrix} a_{21} & & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+j} \det(A_{\cancel{1}\cancel{j}}). \text{ Ebenso } D_i = (-1)^{i+j} \det(A_{\cancel{i}\cancel{j}}). \end{aligned}$$

Das liefert 2).
3) Es sei $b_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A_{\cancel{i}\cancel{j}})$. Nach 2) gilt

$(B \cdot A)_{jj} = b_{j1}a_{1j} + b_{j2}a_{2j} + \cdots + b_{jn}a_{nj} = \det A$; außerdem ist für $i \neq j$
$(B \cdot A)_{ij} = b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{in}a_{nj} \overset{2)}{=} \det \tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ in der i-ten Spalte $\vec{v}_j$ statt $\vec{v}_i$ hat (denn $\tilde{A}_{\cancel{i}\cancel{j}} = A_{\cancel{i}\cancel{j}}$). Dann ist aber

$$\det \tilde{A} = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) = 0.$$

Also folgt $B \cdot A = \det A \cdot I$ und $B = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{-1}$. □

Zum Schluss noch die **Cramer'sche Regel** (nach G. Cramer, 1704–1752):

Satz 9 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ die Spalten von A, und $\det A \neq 0$. (Nach Satz 7 und § 4, Satz 4 ist dann das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.)
Dann gilt:
Die Lösung $\vec{x}$ von $A\vec{x} = \vec{y}$ ist gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)}{\det A}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

In Worten: Um x_i zu erhalten, wird die i-te Spalte von A durch die rechte Seite $\vec{y}$ ersetzt, die Determinante genommen, und durch $\det A$ dividiert.

Bsp. 9:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & 3 \end{array}$$

Hier ist also $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\det A = -2$ (s. Bsp. 8),

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-6 + 36 - (32 - 6)}{-2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{16 - 2 - 18 - (12 - 3 - 16)}{-2} = -\frac{3}{2},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{8 - 12 - (12 - 12)}{-2} = 2 \qquad \text{(vgl. Seite 41).}$$

Beweis von Satz 9: Es sei $\vec{x}$ die Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$. Dann ist also

$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}}}_{\vec{v}_1} \begin{matrix} x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{matrix}$$

$\Longrightarrow x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \vec{y}$ bzw. in TSW $x_j\vec{v}_j = \vec{y}$

$\Longrightarrow \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) =$

$= \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, x_j\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$ TSW! (eigentlich $\sum\limits_{j=1}^{n}$)

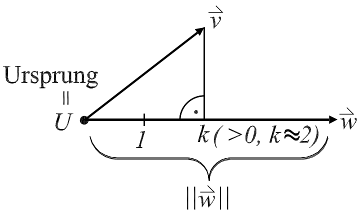
$$\overset{\substack{\text{det} \\ \text{multilinear}}}{=} x_j \underbrace{\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)}_{\begin{cases} = 0, \text{wenn } i \neq j, \text{ weil dann } \vec{v}_j \text{ 2-mal vorkommt} \\ = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \det A, \text{ wenn } i = j \end{cases}}$$

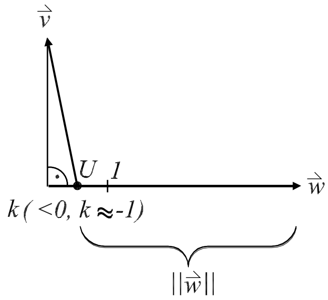
$$= x_i \det A \Longrightarrow x_i = \frac{\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)}{\det A} \qquad \square$$

§ 6 Das Skalarprodukt

A) Das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Wenn ein Objekt auf dem Weg entlang des Vektors $\vec{w}$ mit der Kraft $\vec{v}$ bewegt wird, so wird die Arbeit
W = [Kraftkomponente in Wegrichtung] $\cdot$ Weglänge = $k \cdot \|\vec{w}\|$ geleistet, wobei $\|\vec{w}\|$ = [Länge von $\vec{w}$] und k = Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{w}$ = „Koordinate von $\vec{v}$ in $\vec{w}$-Richtung“.
(VORSICHT: Der Koordinatenbegriff in § 3 ist etwas anderes)
Bilder:





Wir schreiben $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ für diese Arbeit W. Somit gilt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = k \cdot \|\vec{w}\|$.

Grundeigenschaften von $\langle\, , \rangle$

(I) $\langle\, , \rangle$ ist **linear in** $\vec{v}$, d.h.

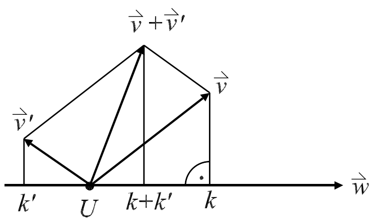
(a) $\langle \vec{v} + \vec{v}\,', \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}\,', \vec{w} \rangle$

(b) $\langle \lambda\vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

(II) $\langle\, , \rangle$ ist **symmetrisch**, d.h. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$

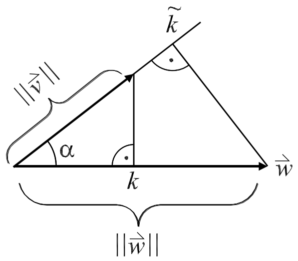
(III) $\langle\, , \rangle$ ist **normiert**, d.h. $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \left\{ \begin{array}{l} 0 : i \neq j \\ 1 : i = j \end{array} \right\} = \delta_{ij}$

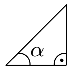
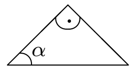
Letztlich können wir I, II, III im $\mathbb{R}^n$ nicht beweisen, es sind **Axiome**. Wir wollen nur überlegen, dass sie in unserem Anschauungsraum plausibel sind:
I:

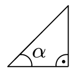


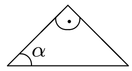
$$\Longrightarrow \langle \vec{v} + \vec{v}\,', \vec{w} \rangle = \\ = (k + k') \cdot \|\vec{w}\| = k\|\vec{w}\| + k'\|\vec{w}\| = \\ = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}\,', \vec{w} \rangle$$

II:



 und  sind ähnlich (d.h. haben dieselben Winkel) $\Longrightarrow$

$\dfrac{k}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ in  $= \cos\alpha =$

$= \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ in  $= \dfrac{\tilde{k}}{\|\vec{w}\|}$

$\Longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = k\|\vec{w}\| = \tilde{k}\|\vec{v}\| = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (Ähnlich geht der Nachweis für $k < 0$; Übung!)
III bedeutet, dass die Achsen senkrecht gewählt werden und dass Kraft- und Längenmaß entsprechend den Koordinaten gewählt sind.
Bemerkung: Aus I, II folgt, dass $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ auch in $\vec{w}$ linear ist (vgl. § 5). Man nennt $\langle\, , \rangle$ **bilinear**.

Satz 1 Es gibt genau eine Funktion $\langle\, , \rangle$ mit I, II, III und zwar ist

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Def.: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ heißt **Standardskalarprodukt** im $\mathbb{R}^n$.

Andere **Schreibweisen**: $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $(\vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{v}|\vec{w})$, $\langle \vec{v}|\vec{w} \rangle$.
Andere **Namen**: **Inneres Produkt**, **Skalarprodukt**, **euklidisches Produkt**.

Beweis von Satz 1: Offenbar erfüllt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$ I bis III. Umgekehrt,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n = v_i\vec{e}_i \text{ (TSW)}, \ \vec{w} = w_j\vec{e}_j \Longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \Big\langle \sum_i v_i\vec{e}_i, \sum_j w_j\vec{e}_j \Big\rangle \overset{\text{(I)}}{=}$$

$$= \sum_i v_i \Big\langle \vec{e}_i, \sum_j w_j\vec{e}_j \Big\rangle \overset{\substack{\text{(linear}\\ \text{in } \vec{w})}}{=} \underbrace{\sum_i v_i \sum_j w_j \underbrace{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle}_{\delta_{ij} = \left\{\begin{matrix} 0 : i \neq j \\ 1 : i = j \end{matrix}\right\}}}_{=w_i} = \sum_i v_i w_i = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n \qquad \square$$

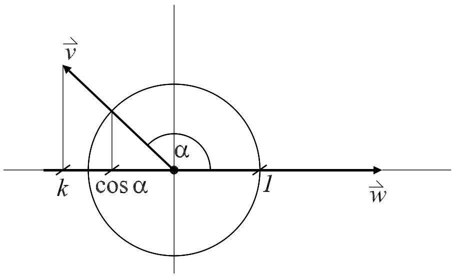
Bemerkungen: 1) In Matrixschreibweise ist $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n =$

$$= \underset{1\times n}{(v_1, \ldots, v_n)} \cdot \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}} = \underset{\substack{1\times 1,\\ \text{d.h. Zahl}}}{\vec{v}^T \cdot \vec{w}}, \ \boxed{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^T \cdot \vec{w}}; \text{ in TSW ist } \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_i w_i.$$

2) Die Begriffe von Länge und Winkel ergeben sich aus $\langle\, , \rangle$, denn für $\vec{w} = \vec{v}$ ist $k = \|\vec{v}\|$,

d.h. $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \|\vec{v}\|^2$ und $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$. Weiters ist $\cos\big(\measuredangle(\vec{v},\vec{w})\big) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Bild}}}{=} \dfrac{k}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$.

Speziell ist $\vec{v}\perp\vec{w} \iff \measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \dfrac{\pi}{2} \iff \langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$ (Beachte: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$)



$$\alpha = \measuredangle(\vec{v},\vec{w}),\ \cos\alpha = \frac{k}{\|\vec{v}\|}$$

Def.: $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$. In 2) seien $\vec{v}\neq\vec{0},\ \vec{w}\neq\vec{0}$.

1) $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle} = \sqrt{v_1^2+\cdots+v_n^2}$ heißt **Länge** (**Norm**, **Betrag**) von $\vec{v}$.

2) $\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \arccos\left(\dfrac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right)$ heißt **Winkel** zwischen $\vec{v},\vec{w}$.

3) $\vec{v},\vec{w}$ heißen **senkrecht** (**orthogonal**) (in Zeichen $\vec{v}\perp\vec{w}$) $\iff \langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$
($\iff \measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\pi}{2} \vee \vec{v}=\vec{0} \vee \vec{w}=\vec{0}$).

4) $\vec{v}$ heißt **Einheitsvektor** $\iff \|\vec{v}\| = 1$.

5) $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ heißt **Abstand** der Punkte A,B.

Bemerkungen: Dass $\dfrac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} \in [-1,1]$ für $\vec{v}\neq\vec{0},\ \vec{w}\neq\vec{0}$ und damit $\arccos(\cdots)$ sinnvoll ist, zeigen wir in D) allgemeiner.

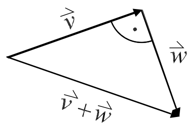
Wenn $\vec{v}\neq\vec{0}$, so ist $\vec{v}_0 = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{v}$, denn $\|\vec{v}_0\| = 1$.

Beachte, dass $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$, denn $\|\lambda\vec{v}\| = \sqrt{(\lambda v_1)^2+\cdots+(\lambda v_n)^2} =$
$= \sqrt{\lambda^2\cdot(v_1^2+\cdots+v_n^2)} = \underbrace{\sqrt{\lambda^2}}_{(!!!)|\lambda|}\cdot\underbrace{\sqrt{v_1^2+\cdots v_n^2}}_{\|\vec{v}\|}$.

Bsp. 1: $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\-3\end{pmatrix} \in\mathbb{R}^4 \Longrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30},\ \|\vec{w}\| =$
$= \sqrt{1+1+4+9} = \sqrt{15},\ \langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 1+2-6-12 = -15,\ \measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \arccos\left(\dfrac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right) =$
$= \arccos\left(\dfrac{-15}{\sqrt{30}\sqrt{15}}\right) = \arccos\left(\dfrac{-15}{\sqrt{2\cdot 15}\sqrt{15}}\right) = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3\pi}{4} = 135^\circ$

Satz 2 (Pythagoras) $\vec{v} \perp \vec{w} \Longrightarrow \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$

Bild:



Beweis: $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \langle \vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w} \rangle \overset{\text{I}}{=}$

$$= \langle \vec{v}, \vec{v}+\vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v}+\vec{w} \rangle \overset{\substack{\text{lin. in} \\ \text{2 Komp.}}}{=}$$

$$= \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}_{\|\vec{v}\|^2} + \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}_{\|\vec{w}\|^2}$$

(weil $\vec{v} \perp \vec{w}$) □

B) Hyperebenen

Def.: Eine **Hyperebene** im $\mathbb{R}^n$ ist die Lösungsmenge einer linearen Gleichung, d.h. von $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, wobei nicht alle $a_i = 0$.

Bemerkungen: 1) Wenn wir $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ setzen, so ist die Hyperebene durch $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b$ gegeben, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2)

$$\text{Hyperebene} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Punkt:} & n = 1 \\ \text{Gerade:} & n = 2 \\ \text{Ebene:} & n = 3 \\ (n-1)\text{-dim. AR:} & \text{allgemein} \end{array} \right\}$$

Letzteres gilt nach § 3, denn wir haben eine Pivotzeile $\Longrightarrow$ $\dim L_{\text{hom}} = n-1$ und $H = L_{\text{inh}} = (n-1)$-dim. AR.

Satz 3 $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, sei eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

1) $\vec{a}$ steht senkrecht auf H,

2) Ein Punkt Q mit Ortsvektor $\vec{y} = \overrightarrow{UQ}$ hat Abstand $\dfrac{\left|\langle \vec{a}, \vec{y} \rangle - b\right|}{\|\vec{a}\|}$ von H.

Def.: Wenn die Hyperebene in der Form $\dfrac{\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle - b}{\|\vec{a}\|} = 0$ geschrieben wird, so heißt sie in **Hesse'scher Normalform** (HNF). $\vec{a}$ heißt wegen 1) ein **Normalvektor** von H.

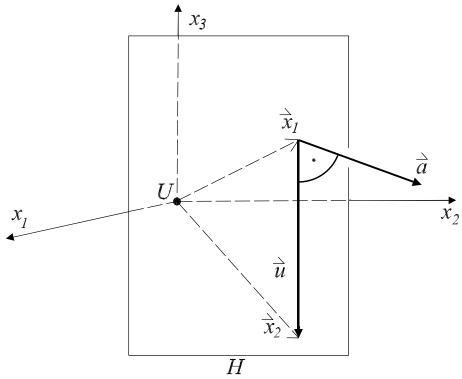
Bsp. 2: $H = \epsilon : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$. Hier ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$,

HNF von $\epsilon : \dfrac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10}{\sqrt{14}} = 0$.

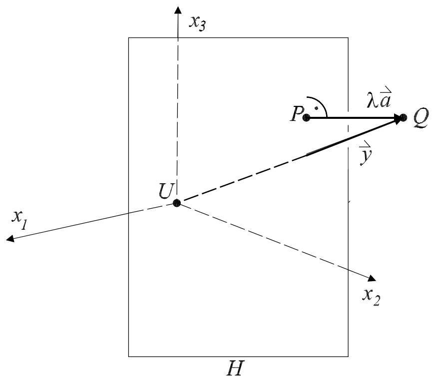
Es sei $Q=(1/1/1)$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow$ [Abstand von Q zu ϵ] $=$ |HNF von $\vec{y}$| $=$

$$= \left|\frac{1+2\cdot 1+3\cdot 1-10}{\sqrt{14}}\right| = \frac{|-4|}{\sqrt{14}} \approx 1.07$$

Beweis von Satz 3



1) $\vec{a}\perp H$ bedeutet, dass $\langle\vec{a},\vec{u}\rangle = 0$ für Vektoren $\vec{u} \parallel H$; wenn $\vec{u} \parallel H$, so ist $\vec{u}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$, $\vec{x}_i\in H$ (d.h. $\vec{x}_i$ sind Ortsvektoren zu Punkten in H, vgl. Seite 3, unten) $\Longrightarrow \langle\vec{a},\vec{u}\rangle = \langle\vec{a},\vec{x}_2-\vec{x}_1\rangle =$ $\underbrace{\langle\vec{a},\vec{x}_2\rangle}_{b} - \underbrace{\langle\vec{a},\vec{x}_1\rangle}_{b} = b-b = 0.$



2) Den Q am nächsten liegenden Punkt P (den **Fußpunkt**) erreichen wir, indem wir von Q senkrecht auf H gehen, d.h. nach 1) gilt $P=Q-\lambda\vec{a}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Weil $P\in\epsilon$, erfüllt $\overrightarrow{UP}=\overrightarrow{UQ}-\lambda\vec{a}=\vec{y}-\lambda\vec{a}$ die Gleichung $\langle\vec{a},\vec{y}-\lambda\vec{a}\rangle=b$ $\Longrightarrow \langle\vec{a},\vec{y}\rangle - \lambda\underbrace{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}_{\|\vec{a}\|^2} = b \Longrightarrow \lambda\|\vec{a}\|^2 =$

$$= \langle\vec{a},\vec{y}\rangle - b \Longrightarrow \lambda = \frac{\langle\vec{a},\vec{y}\rangle - b}{\|\vec{a}\|^2} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ [Abstand von Q zu H] $= \|\overrightarrow{PQ}\| =$ $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{a}\| = \dfrac{\big|\langle\vec{a},\vec{y}\rangle - b\big|}{\|\vec{a}\|}.$

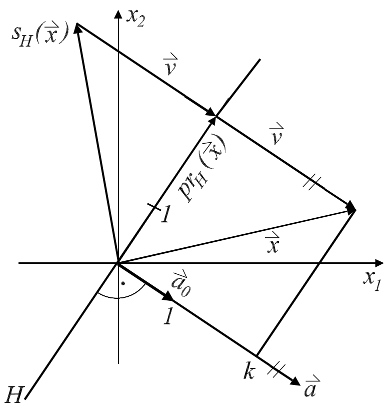
(P ist tatsächlich der nächste Punkt zu Q in H, denn $P_1\in H \Longrightarrow \|\overrightarrow{P_1Q}\| =$ $\|\underbrace{\overrightarrow{P_1P}}_{\substack{\perp\vec{a}\\ \text{(nach 1)}}} + \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{\parallel\,\vec{a}}\| \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Satz 2}}}{=} \sqrt{\underbrace{\|\overrightarrow{P_1P}\|^2}_{\geq 0} + \|\overrightarrow{PQ}\|^2} \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$.)

Bsp. 3: Gegeben ist eine Hyperebene $H:\langle\vec{a},\vec{x}\rangle = 0$ durch $\vec{0}$ (d.h. ein $(n-1)$-dim. Unterraum von $\mathbb{R}^n$). Gesucht sind folgende lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$:

a) pr_H = senkrechte Projektion auf H,

b) s_H = Spiegelung an H.

Bild z.B. im $\mathbb{R}^2$:



Nach A) ist $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = k \cdot \|\vec{a}\|$ (hier ist $\vec{x}$ statt $\vec{v}$ und $\vec{a}$ statt $\vec{w}$) $\implies k = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{a}\|}$;

$$\vec{v} \parallel \vec{a} \implies \vec{v} = k\vec{a}_0 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \underbrace{\frac{\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}}_{\text{Zahl}} \cdot \underbrace{\vec{a}}_{\text{Vektor}} \implies$$

$$\implies \mathrm{pr}_H(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{v} = \underbrace{\vec{x}}_{I \cdot \vec{x}} - \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle}_{\vec{a}^T \cdot \vec{x}} = I \cdot \vec{x} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \underbrace{\underbrace{\vec{a}}_{n \times 1} \cdot \underbrace{\vec{a}^T}_{1 \times n}}_{n \times n} \cdot \vec{x} =$$

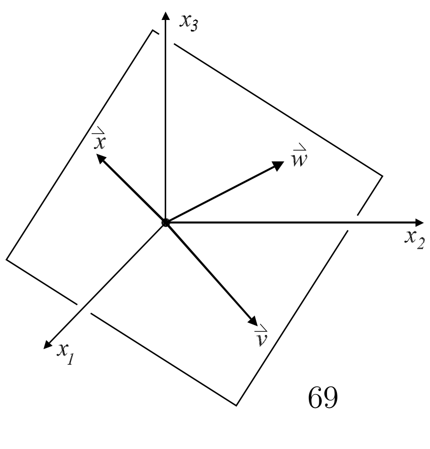
$$= \left(I - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} \cdot \vec{a}^T \right) \vec{x}, \text{ d.h. } \mathrm{pr}_H \text{ hat die Matrix } I - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} \cdot \vec{a}^T.$$

VORSICHT: Unterscheide $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}^T \cdot \vec{a} =$ Zahl und $\vec{a} \cdot \vec{a}^T = n \times n$-Matrix.

Ebenso gilt $\mathrm{s}_H(\vec{x}) = \vec{x} - 2\vec{v} \implies \cdots \implies \mathrm{s}_H$ hat die Matrix $I - \dfrac{2}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} \cdot \vec{a}^T$.

C) Das äußere Produkt

$\epsilon : \vec{x} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$ sei eine Ebene durch $\vec{0}$ im $\mathbb{R}^3$ (d.h. ϵ ist ein 2-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$). Was ist eine Gleichung von ϵ (vgl. § 1)?



Lösung mit det : $\vec{x} \in \epsilon \Longleftrightarrow \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ sind linear abhängig $\overset{\S\,5,\,\text{Satz }7}{\Longleftrightarrow}$ $\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{(Entwickeln nach} \\ \text{3. Spalte)}}}{=} x_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \overset{\text{Schachbrett!}}{-} x_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}}_{\vec{v} \times \vec{w}}, \vec{x} \right\rangle, \text{ d.h. } \epsilon : \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{x} \rangle = 0$$

Also (vgl. B) ist $\vec{v} \times \vec{w}$ ein Normalenvektor von ϵ und $\perp \vec{v}, \vec{w}$.

Def.: Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{v} \times \vec{w}$ der eindeutig bestimmte Vektor, für den $\forall \vec{x} : \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{x} \rangle$ gilt. $\vec{v} \times \vec{w}$ heißt **äußeres Produkt** (**Vektorprodukt**) von $\vec{v}, \vec{w}$.

Die obige Rechnung liefert $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$.

Merkschema dazu: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit

$$a = \begin{pmatrix} \cancel{v_1} & \cancel{w_1} \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ \cancel{v_2} & \cancel{w_2} \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ \cancel{v_3} & \cancel{w_3} \end{pmatrix}, \quad \diagdown = + \quad \diagup = -$$

(hier sind $\diagdown\!\!\diagup$ verkehrt wegen des Schachbrettminus)

Bsp. 4: Bestimme eine Gleichung der Ebene

$\epsilon : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_2}$; ϵ geht zwar nicht durch $\vec{0}$ (wie zu Beginn), aber

nach dem Obigen ist $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalvektor $\overset{\text{(B)}}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \epsilon :\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = b; \qquad \vec{p} \in \epsilon \Longrightarrow -3 - 8 + 3 = b \Longrightarrow b = -8 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \epsilon :\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -8$ oder $\epsilon :\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8$ oder

HNF von $\epsilon : \dfrac{x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 8}{\sqrt{26}} = 0$.

Satz 4 (Eigenschaften von $\vec{v} \times \vec{w}$) Es gilt:

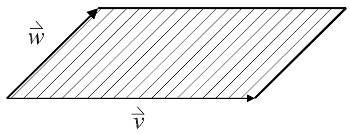
(a) $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \perp \vec{w}$; $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$; $\vec{v} \times \vec{w}$ bilinear

(b) $\vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig (d.h. parallel) $\Longrightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

(c) $\vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig $\Longrightarrow \vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$ positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$

(d) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$ = [Fläche des von $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms]

VORSICHT: Unterscheide:

Fläche 

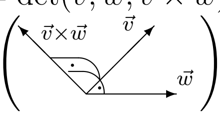
$= \begin{cases} \left|\det(\vec{v}, \vec{w})\right| : \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \\ \|\vec{v} \times \vec{w}\| : \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

Beweis: a) $\langle \vec{v} \times \vec{w}, \underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{statt}\\ \vec{x}}} \rangle = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}) = 0 \Longrightarrow \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$; ebenso für $\vec{w}$; $\langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{x} \rangle =$

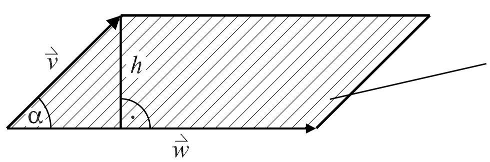
$= \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = -\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{x}) = \langle -\vec{w} \times \vec{v}, \vec{x} \rangle$.
(b) $\vec{w} = \lambda \vec{v} \Longrightarrow \forall \vec{x} : \langle \underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{v}, \lambda \vec{v}, \vec{x}) = 0 \Longrightarrow \forall \vec{x} : a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a, b, c = 0 \Longrightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.
(c/d) $\vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig $\Longrightarrow \exists \vec{u}$ mit $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ Basis von $\mathbb{R}^3$ (nimm irgendein $\vec{u}$ außerhalb der von $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Ebene) $\Longrightarrow \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{u} \rangle = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) \underset{(\S\ 5,\ \text{Satz } 7)}{\neq} 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0} \Longrightarrow \underline{0 <} \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \langle \vec{v} \times \vec{w}, \underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\text{statt } \vec{x}} \rangle = \underline{\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})} \overset{(\text{S. } 47)}{\Longrightarrow} \vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$

positiv orientierte Basis.
Weiters ist $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w}$ nach (a) $\Longrightarrow \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ = Volumen Parallelepiped = [Fläche Parallelogramm $\vec{v}, \vec{w}$] $\cdot \|\vec{v} \times \vec{w}\|$ (

) $\Longrightarrow \|\vec{v} \times \vec{w}\| =$
= [Fläche Parallelogramm $\vec{v}, \vec{w}$] $= \|v\|\, \|\vec{w}\| \sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$

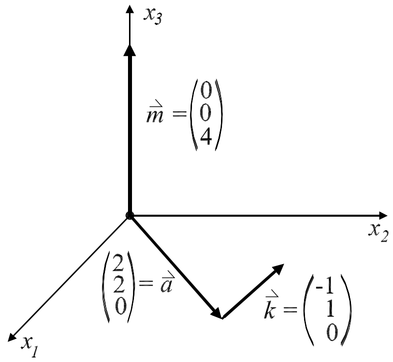


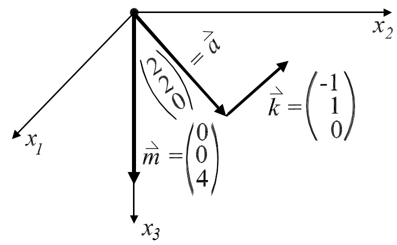
Fläche $= h \cdot \|\vec{w}\|$,
$h = \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha$

□

Def.: Für $\vec{a}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3$ heißt $\vec{m} = \vec{a} \times \vec{k}$ **Moment** der Kraft $\vec{k}$ zum Kraftarm $\vec{a}$.

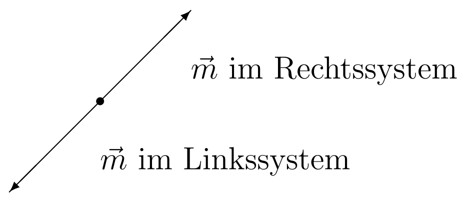
Bemerkung: $\vec{a}$ ist dabei als Ortsvektor vorzustellen, an dessen Spitze $\vec{k}$ als freier Vektor angreift.
VORSICHT: $\vec{a}, \vec{k}, \vec{m}$ bilden eine positiv orientierte Basis (für $\vec{a} \nparallel \vec{k}$). Je nachdem $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ als $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rechts-} \\ \text{Links-} \end{array} \right\}$ system gezeichnet werden, bilden $\vec{a}, \vec{k}, \vec{m}$ ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rechts-} \\ \text{Links-} \end{array} \right\}$ system. Z.B.



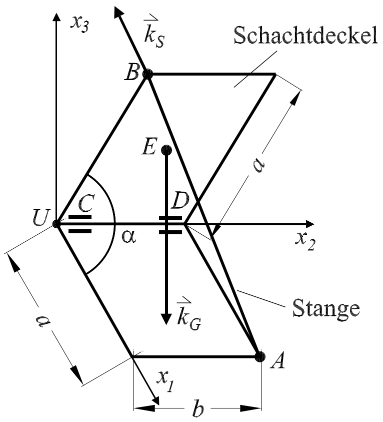


$\vec{m}$ entspricht also physikalisch einem Vektor, der je nach gewählter physikalischer Orientierung seine Richtung um den Faktor ± 1 ändert, ein **Pseudovektor** bzw. **axialer Vektor**.

Am besten stellt man sich $\vec{m}$ als ein **Paar** von zwei entgegengesetzten räumlichen Vektoren vor, die bei den zwei möglichen Orientierungen auftreten.



Bsp. 5:



In E = [Mittelpunkt des Schachtdeckels] greift das Gewicht G an.
Gesucht: $\|\vec{k}_S\|$ = Größe der Kraft in der Stange

Lösung: $A = (a/b/0)$, $B = (a\cos\alpha/0/a\sin\alpha)$, $\vec{k}_S = \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda \begin{pmatrix} a(\cos\alpha - 1) \\ -b \\ a\sin\alpha \end{pmatrix}$,

$E = \left(\frac{a}{2}\cos\alpha \big/ \frac{b}{2} \big/ \frac{a}{2}\sin\alpha\right),\ \vec{k}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{pmatrix}.$

$\vec{m}_S = [\text{Moment von } \vec{k}_S] = \overrightarrow{UB} \times \vec{k}_S = a \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \times \lambda \begin{pmatrix} a(\cos\alpha - 1) \\ -b \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} =$

$= a\lambda \begin{pmatrix} b\sin\alpha \\ a\sin\alpha(\cancel{\cos}\alpha - 1) - a\cancel{\sin}\,\cancel{\alpha}\cancel{\cos}\alpha \\ -b\cos\alpha \end{pmatrix},\ \vec{m}_G = [\text{Moment von } \vec{k}_G] = \overrightarrow{UE} \times \vec{k}_G =$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ b \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -bG \\ aG\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$; die Scharniere C, D übertragen keine Momente in x_2-Richtung $\Longrightarrow (\vec{m}_S)_2 + (\vec{m}_G)_2 = 0 \Longrightarrow -a^2\lambda\sin\alpha + \frac{aG}{2}\cos\alpha = 0 \Longrightarrow \lambda =$

$= \frac{G\cos\alpha}{2a\sin\alpha} \Longrightarrow \|\vec{k}_S\| = |\lambda|\|\vec{AB}\| = \frac{G\cos\alpha}{2a\sin\alpha}\sqrt{\underbrace{a^2(\cos\alpha-1)^2}_{\underbrace{a^2\cos\alpha}\,-2a^2\cos\alpha+a^2} + b^2 + \underbrace{a^2\sin^2\alpha}} =$

$= a^2$

$= \frac{G\cot\alpha}{2a}\sqrt{2a^2(1-\cos\alpha)+b^2}.$

Z.B. $a = b,\ G = 10\,[\text{kp}],\ \alpha = 20^\circ \Longrightarrow \|\vec{k}_S\| \approx 14.54\,[\text{kp}]$.

Schlussbemerkung: Im $\mathbb{R}^n$ braucht man $n-1$ Vektoren, um das äußere Produkt zu bilden: $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{x}) = \langle \vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}, \vec{x}\rangle$ für $\vec{v}_i, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Z.B. im $\mathbb{R}^2$ ist $\det\left(\binom{a}{b}, \vec{x}\right) = ax_2 - bx_1 = \left\langle \binom{-b}{a}, \vec{x}\right\rangle \Longrightarrow \times\binom{a}{b} = \binom{-b}{a}$,

im $\mathbb{R}^4$ z.B.: $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \\ 2 & 3 & -17 & \vec{x} \\ 0 & 4 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot x_4 \cdot \underbrace{\operatorname{sign}(2,3,1,4)}_{+1} = -8x_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{x} \right\rangle \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Beachte: $\vec{v} \times \vec{w}$ hat im $\mathbb{R}^n$ keinen Sinn für $n \neq 3$.

[Fläche Parallelogramm $\vec{v}, \vec{w}$] $= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \underbrace{\sin\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})}_{\sqrt{1-\cos^2}} =$

$= \sqrt{\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2\cos^2\left(\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})\right)} = \sqrt{\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle^2}$ kann im $\mathbb{R}^n$ zur Flächenberechnung verwendet werden.

D) Euklidische Vektorräume

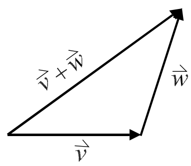
Wir betrachten nun einen reellen Vektorraum V mit einem inneren Produkt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. I, II in A bleiben sinnvoll, III muss ersetzt werden, da in einem beliebigen Vektorraum keine Standardbasis gegeben ist. Es soll wieder $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ sein und daher muss $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$. Außerdem soll außer $\vec{0}$ kein Vektor Länge 0 haben. Das führt zu

Def.: V sei ein Vektorraum mit einer Funktion $\langle\, , \rangle$, die I, II in A) erfüllt sowie (IV) $\langle\, , \rangle$ ist **positiv definit**, d.h. $\forall \vec{v} \neq \vec{0} : \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$. Dann nennt man $\langle\, , \rangle$ ein **Skalarprodukt** auf V und V mit $\langle\, , \rangle$ **euklidischen Vektorraum**.

Bemerkungen: 1) Wegen I ist immer $\langle \vec{0}, \vec{w} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{0}, \vec{w} \rangle = 0 \cdot \langle \vec{0}, \vec{w} \rangle = 0$ und ebenso $\langle \vec{v}, \vec{0} \rangle = 0$.
2) $V = \mathbb{R}^n$ mit $\langle\, , \rangle$ ist ein euklidischer Vektorraum.
3) In V werden wieder die Definition von $\| \, \|$, $\measuredangle$, $\perp$, d, Einheitsvektor wie in Seite 66 gemacht. Dass die Definition für $\measuredangle$ sinnvoll ist, d.h. $-1 \leq \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|} \leq 1$ (sonst ist arccos nicht sinnvoll), zeigt

Satz 5 In einem euklidischen Vektorraum gelten $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$:

1. $\big|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\big| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ (**Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**, CSU)
2. $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (**Dreiecksungleichung**, $\triangle$U)

(Bild zu 2.: 

, d.h. im $\mathbb{R}^3$ anschaulich klar)

Beweis: 1) a) Wenn $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{w} = \vec{0}$, so ist $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ und die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung ist daher erfüllt.
b) Es sei nun $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{w} \neq \vec{0}$. Wir setzen $\vec{x} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} - \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ und berechnen $\|\vec{x}\|^2$:

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} - \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} - \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \rangle = \langle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \rangle - 2\langle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \rangle + \langle \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \rangle$$
$$= 2 - \frac{2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$

Die letzte Gleichung gilt, da $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ und $\dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ Einheitsvektoren sind.
Wegen $0 \leq \|\vec{x}\|^2$ folgt dann $0 \leq 2 - \dfrac{2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \Longrightarrow \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \leq 1 \Longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$.
Wenn wir in der letzten Ungleichung $\vec{v}$ durch $-\vec{v}$ ersetzen, folgt auch $-\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$

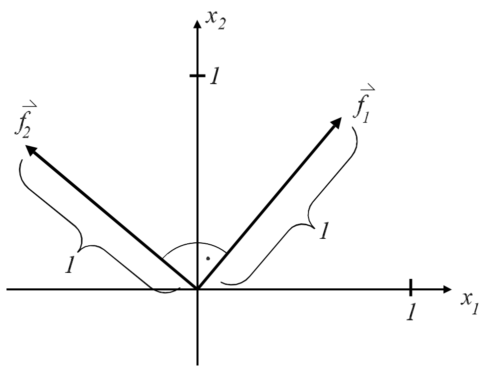
und damit die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.

2)
$$\begin{array}{lcl} \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 & = & \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{v},\vec{w}\rangle + \|\vec{w}\|^2 \\ \text{(weil allgemein } x \le |x|) & \le & \|\vec{v}\|^2 + 2\big|\langle \vec{v},\vec{w}\rangle\big| + \|\vec{w}\|^2 \\ & \overset{1)}{\le} & \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 = \big(\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|\big)^2. \qquad \square \end{array}$$

Die Standardbasis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ wird verallgemeinert zum folgenden Begriff:

Def.: V sei ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ von V heißt **Orthonormalbasis** von V (ONB) $\iff$ alle $\vec{f}_i$ haben Länge 1 und stehen paarweise aufeinander senkrecht, d.h. $\langle \vec{f}_i, \vec{f}_j\rangle = \delta_{ij}$.

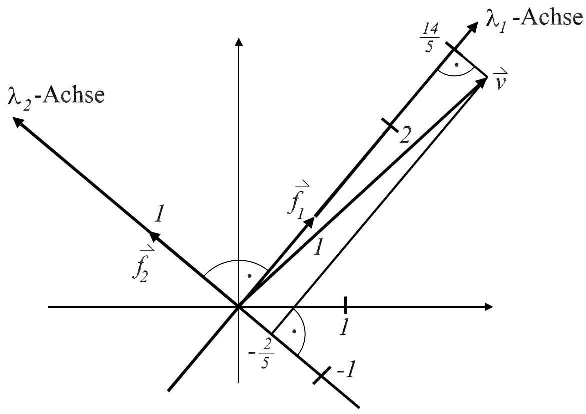
Bsp. 6: $\vec{f}_1 = \frac{1}{5}\binom{3}{4}$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{5}\binom{-4}{3}$ ist **eine** ONB in $\mathbb{R}^2$, denn $\|\vec{f}_1\| = \frac{1}{5}\|\binom{3}{4}\| = \frac{1}{5}\sqrt{25} = 1$, ebenso $\|\vec{f}_2\| = 1$ und $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2\rangle =$
$= \frac{1}{25}\left\langle \binom{3}{4}, \binom{-4}{3}\right\rangle = \frac{3\cdot(-4)+4\cdot 3}{25} = 0$.



Satz 6 Wenn $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ eine ONB in V ist und $\vec{v} \in V$, so hat $\vec{v}$ die Koordinaten $\lambda_i = \langle \vec{v}, \vec{f}_i\rangle$, d.h. $\vec{v} = \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{f}_1\rangle}_{\text{Zahl}} \underbrace{\vec{f}_1}_{\text{Vektor}} + \cdots + \langle \vec{v}, \vec{f}_n\rangle \vec{f}_n = \langle \vec{v}, \vec{f}_i\rangle \vec{f}_i$ (TSW).

Bemerkung: Für die Koordinaten λ_i von $\vec{v}$ bzgl. der ONB $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ gilt also $\lambda_i = \langle \vec{v}, \vec{f}_i\rangle = \|\vec{v}\| \cdot \underbrace{\|\vec{f}_i\|}_{=1} \cdot \cos\measuredangle(\vec{v}, \vec{f}_i) =$ [orthogonale Projektion von $\vec{v}$ auf die „λ_i-Achse"], wobei „λ_i-Achse" = Gerade durch $\vec{f}_i$ (in Richtung $\vec{f}_i$ orientiert). Für $\|\vec{v}\| = 1$ ist $\lambda_i = \cos\measuredangle(\vec{v}, \vec{f}_i)$ und man nennt die λ_i dann **Richtungskosinusse**.

Bsp. 6: (Fortsetzung)
Z.B. $\vec{v} = \binom{2}{2} \Longrightarrow \lambda_1 = \langle \vec{v}, \vec{f_1} \rangle =$
$= \langle \binom{2}{2}, \frac{1}{5}\binom{3}{4} \rangle = \frac{14}{5},\ \lambda_2 = -\frac{2}{5},$
$\vec{v} = \frac{14}{5}\vec{f_1} - \frac{2}{5}\vec{f_2}.$



Beweis von Satz 6: Da $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n}$ eine Basis ist, $\exists_1 \lambda_1, \dots, \exists_1 \lambda_n : \vec{v} = \lambda_1 \vec{f_1} + \dots + \lambda_n \vec{f_n}$. Dann gilt

$$\begin{array}{lcl} \langle \vec{v}, \vec{f_i} \rangle & = & \langle \lambda_1 \vec{f_1} + \dots + \lambda_n \vec{f_n}, \vec{f_i} \rangle \overset{\text{(I)}}{=} \\ & = & \lambda_1 \underbrace{\langle \vec{f_1}, \vec{f_i} \rangle}_{\delta_{1i}} + \lambda_2 \underbrace{\langle \vec{f_2}, \vec{f_i} \rangle}_{\delta_{2i}} + \dots + \lambda_n \underbrace{\langle \vec{f_n}, \vec{f_i} \rangle}_{\delta_{ni}} = \lambda_i \\ \vec{f_1}, \dots, \vec{f_n} \text{ ONB} & \Longrightarrow & \\ & & \text{(sind alle 0 außer bei } \lambda_i, \text{ dort 1)} \end{array}$$

$\square$

Bsp. 7: Bisher wurde nur $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Vektorraum betrachtet. Nun sei für $a < b$

$$\mathcal{C}\big([a,b]\big) = \big\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \big\}.$$

Dies ist ein Vektorraum, da wir Funktionen addieren und mit Zahlen (λ) multiplizieren können und da f, g stetig $\Longrightarrow f + g, \lambda f$ stetig.

Wir setzen $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$

Begründung: Wenn wir den Graph der Funktion f z.B. am Computer zeichnen, so wird f durch eine Wertetabelle ersetzt:

x	$a = a + 0 \cdot h$	$a + h$	$a + 2h$	$\cdots$	$a + (n-1)h = b$
y	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+2h)$	$\cdots$	$f(b)$

wobei $h = \dfrac{b-a}{n-1}$ (Z.B. für $a = 0,\ b = 1$ berechnen wir bei $n = 10$ die Werte von f an den 10 Stellen $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{8}{9}, 1$)

Statt f betrachten wir den Vektor $f_{[n]} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(a+h) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, der für großes n den Verlauf

$$f(b) \;\Vert\; a+(n-1)h$$

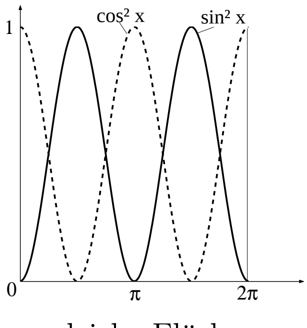
von f sehr genau beschreibt.

Dann ist $\langle f_{[n]}, g_{[n]}\rangle = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(a+ih)g(a+ih)$. Für $n \to \infty$ geht das $\to \infty$, wir betrachten daher anstelle der Summe den Mittelwert $\frac{1}{n}\langle f_{[n]}, g_{[n]}\rangle$. Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\langle f_{[n]}, g_{[n]}\rangle \overset{\left(\text{weil } h=\frac{b-a}{n-1}\right)}{=} \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(a+ih)g(a+ih)}_{\text{Riemannsumme } \to \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z.B. sei $a = 0,\ b = 2\pi,\ f = \sin \implies \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \overset{\text{Skizze} \atop \downarrow}{=}$
$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x\right)}_{\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi} = \frac{1}{2}$, d.h. $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $\mathcal{C}\big([0, 2\pi]\big)$.



gleiche Flächen

CSU (quadriert): $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x$

△U: $\sqrt{\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x} \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}$.

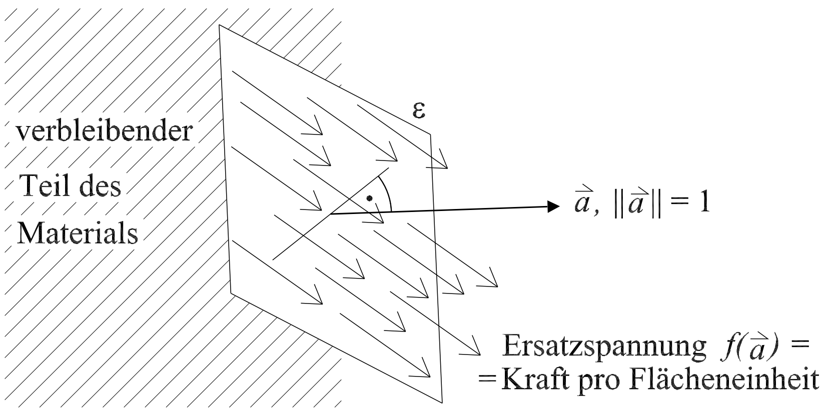
§ 7 Eigenwerte, Eigenvektoren und Basiswechsel

A) Der Spannungstensor

Wir betrachten ein ruhendes, elastisches Material, das in verzerrtem Zustand ist. Zunächst nehmen wir an, dass die Spannungsverhältnisse in jedem Punkt gleich sind („Homogenität“). Der Spannungszustand wird durch die **Spannungsabbildung** f beschrieben: Es sei $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und

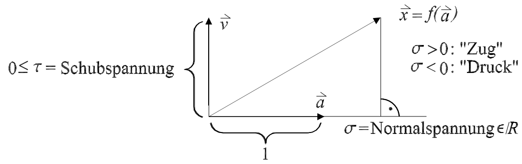
für einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ sei $f(\vec{a})$ die Kraft, die an einem Flächenstück $\perp$ zu $\vec{a}$ und mit Fläche $\|\vec{a}\|$ von dem in Richtung $\vec{a}$ gelegenen Teil des Materials auf den in Richtung $-\vec{a}$ gelegenen Teil ausgeübt wird.

Experimentell wird $\vec{a}$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ genommen, senkrecht auf $\vec{a}$ aufgeschnitten, der in Richtung $\vec{a}$ gelegene Materialteil entfernt, und die „Ersatzspannung“ $f(\vec{a})$ entlang der Ebene $\epsilon : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$ so angebracht, dass der in Richtung $-\vec{a}$ gelegene Teil wieder im ursprünglichen Zustand ist.
Bild:



Wenn V der 3-dimensionale Vektorraum aller möglichen in einem festen Punkt U angreifenden Kraftvektoren ist (siehe § 1), und die Längen- und Krafteinheiten fixiert sind, so ist also $f : V \longrightarrow V$. Da wir in V Längen- und Winkelmessungen durchführen, betrachten wir V als euklidischen Vektorraum.
Für $\vec{a} \in V$ mit $\|\vec{a}\| = 1$, d.h. $\vec{a} = \vec{a}_0$, zerlegen wir $\vec{x} = f(\vec{a})$ in einen Teil $\| \vec{a}$ und einen Teil $\perp \vec{a} : f(\vec{a}) = \sigma \cdot \vec{a} + \vec{v}$ mit $\sigma = \left\langle \vec{a}, f(\vec{a}) \right\rangle$ und $\vec{v} \perp \vec{a}$ (Kontrolle: $\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle = \left\langle \vec{a}, f(\vec{a}) - \sigma\vec{a} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, f(\vec{a}) \right\rangle - \sigma \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{1} = 0$; vgl. auch Seite 69).

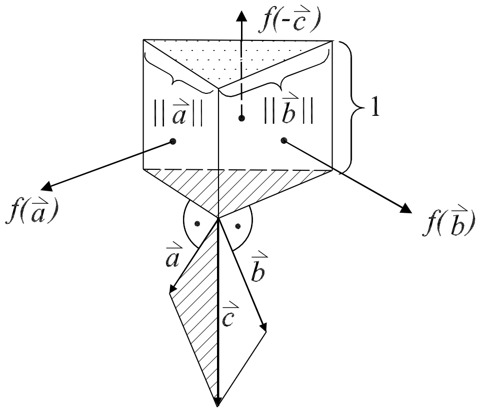
Bild:



Def.: Für $\vec{a}$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ heißt $\sigma = \langle \vec{a}, f(\vec{a}) \rangle$ **Normalspannung** und $\tau = \|f(\vec{a}) - \sigma\vec{a}\| = \|\vec{v}\|$ **Schubspannung** bzgl. $\vec{a}$.

Satz 1 Die Spannungsabbildung ist linear.

Bemerkung: Lineare Abbildungen sind Spezialfälle von Tensoren und man nennt f daher auch **Spannungstensor**. (Tatsächlich kommt das Wort „Tensor“ von diesem Spezialfall, tendere (lat.) = spannen.)
Beweis von Satz 1: a) Für $\lambda \geq 0$ ist $f(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a})$, da an der λ-fachen Fläche die λ-fache Ersatzkraft angebracht werden muss.
b) $f(-\vec{a}) = -f(\vec{a})$ nach Newton: actio = reactio.
c) Es bleibt noch $f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ zu zeigen. Es sei $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Wenn wir senkrecht auf $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Prisma der Höhe 1 aus dem Material schneiden, entsteht das folgende Bild:



Die 2 schraffierten Dreiecke sind kongruent und gegeneinander um 90° gedreht. Am gezeichneten Prisma greifen dann die Kräfte $f(\vec{a}), f(\vec{b})$ und $f(-\vec{c}) \overset{\text{b)}}{=} -f(\vec{a}+\vec{b})$ an sowie 2 Kräfte am oberen und unteren „Deckel“ (punktiert bzw. schraffiert), die sich nach b) aufheben. Da das Prisma in Ruhe ist, folgt $f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = f(\vec{a} + \vec{b})$. $\square$

Analog zu § 4, Satz 1, Seite 30, gilt (mit demselben Beweis)

Satz 2 V, W seien Vektorräume, $f : V \longrightarrow W, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ Basis von $V, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ Basis von W. (Speziell $\dim V = n, \dim W = m$).
Dann ist f genau dann linear, wenn $\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $f(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = y_1\vec{f}_1 + \cdots + y_m\vec{f}_m, \vec{y} = A\vec{x}$. Die j-te Spalte von A enthält die Koordinaten von $f(\vec{e}_j)$ bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$.

Def.: In der Situation von Satz 2 heißt A die <u>Matrix von f bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$</u>. Wenn $V = W$ und $\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \ldots, \vec{f}_n = \vec{e}_n$, heißt A <u>Matrix von f bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$</u>.

Bemerkung: Durch die Basen erhält man bijektive lineare Abbildungen („Isomorphismen“)

$V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : \vec{e}_i x_i = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \longmapsto \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und

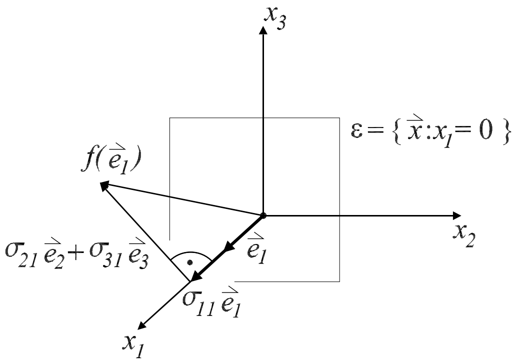
$W \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m : \vec{f}_j y_j \longmapsto \vec{y}$, die also jedem Vektor seine Koordinaten zuordnen.
Damit entspricht f der linearen Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \underbrace{\vec{e}_i x_i}_{\in V} \longmapsto \underbrace{f(\vec{e}_i x_i)}_{\in W} = \vec{f}_j y_j \longmapsto \vec{y}$$

mit Matrix A (bzgl. der Standardbasen). Die j-te Spalte von A enthält die Koordinaten von $f(\vec{e}_j)$ bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$, d.h. $f(\vec{e}_j) = \vec{f}_i a_{ij}$. Manchmal nennt man a_{ij} die **Koordinaten** von f bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$.

Schreibweise: $f : V \longrightarrow V$ sei der Spannungstensor. Wenn in V eine ONB $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gewählt ist, so heißt die Matrix S von f bzgl. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ **Spannungsmatrix**. Man schreibt $S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$. [Oft werden auch x_1, x_2, x_3 mit x, y, z bezeichnet und wird dann geschrieben $S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$.]

Die erste Spalte $\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}$ von S enthält die Koordinaten von $f(\vec{e}_1)$, d.h. $f(\vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3 = \vec{e}_i \sigma_{i1}$ und ebenso $f(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \sigma_{ij}$. Daher ist σ_{11} = Normalspannung und $\|\sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3\| = \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{31}^2}$ = Schubspannung bzgl. $\vec{e}_1$.



Es zeigt sich, dass die Spannungsmatrix S symmetrisch ist. Zur Vorbereitung dient

Satz 3 V sei ein euklidischer Vektorraum, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine ONB, $f : V \longrightarrow V$ linear, A die Matrix von f bzgl. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Dann sind äquivalent:

1) A symmetrisch, d.h. $A = A^T$;

2) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \big\langle f(\vec{v}), \vec{w} \big\rangle = \big\langle \vec{v}, f(\vec{w}) \big\rangle$;

3) $\forall \vec{v} \perp \vec{w} : \big\langle f(\vec{v}), \vec{w} \big\rangle = \big\langle \vec{v}, f(\vec{w}) \big\rangle$.

Def.: Wenn $1), 2), 3)$ gelten, heißt f **symmetrisch** (oder **selbstadjungiert**).

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): $\vec{v} = \vec{e}_j v_j \Longrightarrow f(\vec{v}) = f(\vec{e}_j) v_j = \vec{e}_i a_{ij} v_j,\ \vec{w} = \vec{e}_k w_k$,
$f(\vec{w}) = \vec{e}_i a_{ik} w_k \Longrightarrow \big\langle f(\vec{v}), \vec{w} \big\rangle = \underbrace{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle}_{\delta_{ik}} a_{ij} v_j w_k = a_{kj} v_j w_k$;

$$\big\langle \vec{v}, f(\vec{w}) \big\rangle = \underbrace{\langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle}_{\delta_{ij}} v_j a_{ik} w_k = v_j a_{jk} w_k \underset{(A=A^T)}{\underset{\uparrow}{=}} a_{kj} v_j w_k = \big\langle f(\vec{v}), \vec{w} \big\rangle.$$

2) $\Longrightarrow$ 3) ist klar
3) $\Longrightarrow$ 1): $f(\vec{e}_j) = \vec{e}_i a_{ij} \Longrightarrow \underbrace{\big\langle f(\vec{e}_j), \vec{e}_k \big\rangle}_{\|\text{ (nach 3)}} = \underbrace{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle}_{\delta_{ik}} a_{ij} = a_{kj}$

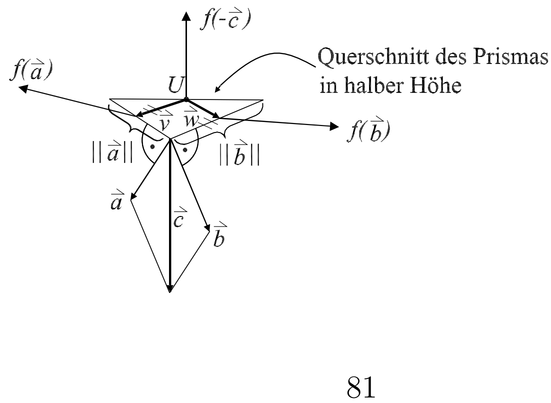
$$\big\langle \vec{e}_j, f(\vec{e}_k) \big\rangle = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_i a_{ik} \rangle =$$
$$= \delta_{ij} a_{ik} = a_{jk} \Longrightarrow a_{kj} = a_{jk} \Longrightarrow A = A^T. \qquad \square$$

Bemerkung: Für $V = \mathbb{R}^n, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n =$ Standardbasis, ist 1) $\Longrightarrow$ 2) in Matrixnotation einfacher:
$$\big\langle f(\vec{v}), \vec{w} \big\rangle = \langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle = (A\vec{v})^T \cdot \vec{w} = \vec{v}^T \underbrace{A^T}_{=A} \vec{w} = \vec{v}^T \cdot (A\vec{w}) = \big\langle \vec{v}, f(\vec{w}) \big\rangle.$$

Satz 4 Der Spannungstensor ist symmetrisch.

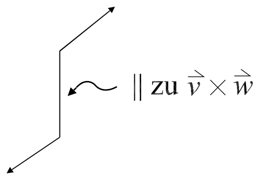
Beweis: Wir wählen als Ursprung U den Mittelpunkt der hinteren senkrechten Fläche im Bild in Seite 79. $f(-\vec{c})$ ist eigentlich die Resultierende einer Flächenlast an dieser Fläche. Bzgl. U hat sie Moment $\vec{0}$. Ebenso geben $f(\vec{a})$ und $f(\vec{b})$ bzgl. U das Moment

$$\vec{x} = \vec{v} \times f(\vec{a}) + \vec{w} \times f(\vec{b})$$



An den 2 Deckeln des Prismas greifen entgegengesetzt gleiche Kräfte an, die man sich in den Mittelpunkten der Deckel konzentriert vorstellen kann:

Das entstehende Moment ist unabhängig von der Wahl von U und $\perp$ zu $\vec{v} \times \vec{w}$.



Weil das Gesamtmoment aller auf das Prisma wirkenden Kräfte verschwinden muss, folgt ($\vec{x}$ siehe oben):

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = -\det(\vec{v}, \vec{x}, \vec{w}) = \\
&= -\langle \vec{v} \times \vec{x}, \vec{w} \rangle = -\big\langle \vec{v} \times \big(\vec{v} \times f(\vec{a})\big), \vec{w} \big\rangle - \big\langle \vec{v} \times \big(\vec{w} \times \vec{f}(\vec{b})\big), \vec{w} \big\rangle = \\
&\overset{(baz-zab,\ \text{Üb.66})}{=} -\Big\langle \vec{v}\big\langle \vec{v}, f(\vec{a})\big\rangle - f(\vec{a})\|\vec{v}\|^2, \vec{w} \Big\rangle - \Big\langle \vec{w}\big\langle \vec{v}, f(\vec{b})\big\rangle - f(\vec{b})\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle, \vec{w} \Big\rangle = \\
&= \underbrace{\|\vec{v}\|^2\big\langle f(\vec{a}), \vec{w}\big\rangle - \|\vec{w}\|^2\big\langle \vec{v}, f(\vec{b})\big\rangle}_{Z} + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle\Big(-\big\langle \vec{v}, f(\vec{a})\big\rangle + \big\langle f(\vec{b}), \vec{w}\big\rangle\Big).
\end{aligned}$$

Es gilt $\|\vec{a}\| = 2\|\vec{w}\|$, $\|\vec{b}\| = 2\|\vec{v}\|$; für $\vec{v} \perp \vec{w}$ ist außerdem $\vec{a} \parallel \vec{v}$ und $\vec{b} \parallel \vec{w} \Longrightarrow$ $\vec{a} = 2\|\vec{w}\| \cdot \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ und $\vec{b} = 2\|\vec{v}\| \cdot \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ und wegen $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$ folgt dann $Z = 0$, d.h.
$\|\vec{v}\|^2\Big\langle f\Big(\dfrac{2\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\Big), \vec{w}\Big\rangle = \|\vec{w}\|^2\Big\langle \vec{v}, f\Big(\dfrac{2\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\Big)\Big\rangle \Longrightarrow \big\langle f(\vec{v}), \vec{w}\big\rangle = \big\langle \vec{v}, f(\vec{w})\big\rangle \overset{\text{Satz 3,3)}}{\Longrightarrow}$
$\Longrightarrow f$ ist symmetrisch. $\square$

Schlussbemerkung: I. a. ist der Spannungszustand von Punkt zu Punkt verschieden. f und S hängen also vom Punkt P ab. Dabei wird $f_P(\vec{a})$ definiert als $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{1}{\epsilon} \cdot \big[$Ersatzkraft an einem Flächenstück $\perp \vec{a}$, durch P, und von der Größe $\epsilon\|\vec{a}\|\big]$.
Die Sätze 1,4 bleiben weiterhin gültig, wobei im Beweis das Prisma mit dem Faktor ϵ verkleinert wird und $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{1}{\epsilon^2} \sum$ Kräfte bzw. Momente betrachtet wird.

Bsp. 1: Für den Spannungszustand im Punkt P sei bekannt

a) $\sigma_x = 0,\ \tau_{xy} = -2,\ \sigma_y = 3;$

b) In Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ herrscht reine Normalspannung $\sigma = -1$, d.h. Druck der Größe $1\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$.

Bestimme die Spannungsmatrix S!
Lösung: Nach a) ist $\sigma_{11} = 0,\ \sigma_{12} = -2,\ \sigma_{22} = 3$, und weil S symmetrisch ist (Satz 4), folgt

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ -2 & 3 & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Nach b) ist $f(\vec{a}) = -\vec{a}$ für $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vgl. Seite 78.

Daher ist auch $S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2+\alpha \\ -2+3+\beta \\ \alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha = 1,\ \beta = -2 \Longrightarrow \gamma = 0,\ S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

B) Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir wollen **die** Vektoren $\vec{a}$ bestimmen, bzgl. derer die Schubspannung 0 ist, d.h. „reine Normalspannung“ herrscht. Dann muss $f(\vec{a}) = \sigma\vec{a}$ sein. Man nennt $\vec{a}$ dann Eigenvektor von f und die Normalspannung σ Eigenwert von f.

Def.: V sei ein Vektorraum, $f: V \longrightarrow V$ sei linear. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert** (kurz EW) von $f \Longleftrightarrow \exists \vec{0} \neq \vec{a} \in V$ mit $f(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$. Alle Vektoren $\vec{a} \in V$ mit $f(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$ heißen dann **Eigenvektoren** (kurz EVen) von f zum EW λ.

Bemerkungen: 1) Wenn $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, so nennt man λ bzw. $\vec{x}$ auch EW bzw. EV von A. Damit gilt: $\boxed{\boxed{\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}}}$ bzw. $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

2) Wenn $\vec{a}, \vec{b}$ EVen zum **selben** λ sind, so sind auch $\vec{a} + \vec{b}$ und $c\vec{a}$ EVen zu λ, da $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ und $f(c\vec{a}) = cf(\vec{a}) = c\lambda\vec{a} = \lambda \cdot c\vec{a}$. Die Menge aller EVen zu einem festen λ bildet also einen Unterraum W_λ von V, den man **Eigenraum** von λ nennt.
Speziell gilt, dass EVen niemals eindeutig sind, sondern zu jedem EW λ mindestens eine Gerade davon existiert. Man hüte sich daher zu sagen „$\vec{x}$ ist **der** EV zu λ = soundso“.

Satz 5 V Vektorraum, $f: V \longrightarrow V$ linear, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ Basis von V, A Matrix von f bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ (d.h. $f(\vec{e}_i x_i) = \vec{e}_j y_j$ mit $\vec{y} = A\vec{x}$). Dann gilt:

1) λ EW von $f \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$;

2) wenn λ ein EW von f ist, so ist $\vec{a} = \vec{e}_i x_i$ EV von f zu $\lambda \Longleftrightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Bsp. 2: Es sei $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ wie in Bsp. 1.

1) $\det(S - \lambda I) = \det\left(S - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Sarrus} \\ \downarrow}}{=}$

$= \underbrace{(-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda)}_{3\lambda^2-\lambda^3} + 4 + 4 - [\underbrace{3 - \lambda - 4\lambda - 4\lambda}_{3-9\lambda}] =$

$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = P(\lambda)$.
Durch Probieren stellen wir fest, dass $\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle von P ist: $1 + 3 - 9 + 5 = 0$.

$$
\begin{array}{l}
P(\lambda) : (\lambda - \lambda_1) = (-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5) : (\lambda + 1) = -\lambda^2 + 4\lambda + 5 \\
\quad \underline{-[-\lambda^3 - \lambda^2]} \\
\qquad\quad 4\lambda^2 + 9\lambda \\
\qquad\quad \underline{-[4\lambda^2 + 4\lambda]} \\
\qquad\qquad\quad 5\lambda + 5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-[5\lambda + 5]} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$-\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Longrightarrow {}_2\lambda_3 = 2 \pm \underbrace{\sqrt{4+5}}_{3} = \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases}$

Somit hat S die EWe $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$.
Die Nummerierung der λ-s ist willkürlich.

2) Die Eigenvektoren zu einem λ_i sind nach 2) von Satz 5 L_{hom} vom Gleichungssystem $(S - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$.
Das lösen wir mit Gauß:

2.1) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ S - \lambda_1 I = S + I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

I:	$\boxed{1 \quad -2 \quad 1}$		
II:	-2	4	-2
III:	1	-2	1
II+2I:	0	0	0
III-I:	0	0	0

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ x_2 = \mu,\ x_3 = \nu$
(NICHT λ als Parameter verwenden!)
$x_1 = 2\mu - \nu$
$\vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir haben 1 Pivotzeile, $\dim L = 3 - 1 = 2$, der Eigenraum von S zu $\lambda_1 = \lambda_2$ ist die Ebene $\epsilon :\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ bzw. $\epsilon : \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2) $\lambda_3 = 5,\ S - \lambda_3 I = S - 5I = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l|rrr|l}
\text{I:} & -5 & -2 & 1 & \\
\text{II:} & -2 & -2 & -2 & \\
\text{III:} & \boxed{1 \quad -2 \quad -5} & & & \Longrightarrow\ x_1 - 2(-2\mu) - 5\mu = 0,\ x_1 = \mu \\
\hline
\text{I'=I+5III:} & 0 & -12 & -24 & \\
\text{II'=II+2III:} & \boxed{0 \quad -6 \quad -12} & & & \Longrightarrow\ -6x_2 - 12x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0, \\
\hline
\text{I'-2II':} & 0 & 0 & 0 & \quad x_3 = \mu,\ x_2 = -2\mu
\end{array}$$

$$\vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben 2 Pivotzeilen, $\dim L = 3 - 2 = 1$, der Eigenraum von S zu λ_3 ist die Gerade $g:\ \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ergebnis: Bzgl. $\vec{a} \in \epsilon$ bzw. $\vec{a} \in g$ herrscht reine Normalspannung $\sigma = -1$ bzw. $\sigma = 5$.
Vorsicht: Wenn λ ein Eigenwert ist, so MUSS es Eigenvektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ geben (siehe Def.), d.h. die Anzahl der Pivotzeilen MUSS kleiner als n sein, d.h. es MUSS Nullzeilen geben. Wenn das nicht der Fall ist, liegt ein Rechenfehler vor. In dieser Situation $\vec{x} = \vec{0}$ zu schließen anstatt die Rechnung zu kontrollieren, ist als Denkfehler anzusehen.
Beweis von Satz 5: Vermöge der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ identifizieren wir V mit $\mathbb{R}^n$ und betrachten statt f die lineare Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ (vgl. Satz 2).

1) λ EW $\Longleftrightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0} : A\vec{x} = \underbrace{\lambda\vec{x}}_{\lambda I \cdot \vec{x}} \Longleftrightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0} : (A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow A - \lambda I$ ist nicht invertierbar (vgl. § 4, Satz 4) $\overset{\text{§ 5,Satz 7}}{\Longleftrightarrow} \det(A - \lambda I) = 0$

2) $\vec{x}$ EV zu $\lambda \Longleftrightarrow A\vec{x} = \lambda \underbrace{\vec{x}}_{I\vec{x}} \Longleftrightarrow (A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$. $\square$

Def.: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ **charakteristisches Polynom** von A.

Bemerkung: $P(\lambda)$ ist vom Grad n und hat daher höchstens n reelle Nullstellen. Also kann A bzw. f höchstens n reelle EW haben. In $\mathbb{C}$ hat $P(\lambda)$ nach dem Satz von Gauß genau n Nullstellen, wenn man mit Vielfachheit zählt. Wenn wir $\mathbb{C}^n$ statt $\mathbb{R}^n$ zugrundelegen, so gelten alle Sätze in § 1 bis § 5 ebenso. (In § 6 sind kleine Änderungen nötig.) Dementsprechend nennt man $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\det(A - \lambda I) = 0$ **komplexe Eigenwerte** und $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $(A - \lambda I)\vec{z} = \vec{0}$ **komplexe Eigenvektoren**.

Bsp. 3: Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dies ist die Matrix einer Drehung um 90° (vgl. § 4, Bsp. 2). Offenbar ist niemals $A\vec{x} \parallel \vec{x}$, d.h. A kann keine reellen EWe haben. Rechnung über $\mathbb{C}^2$:

1) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1, \ {}_1\lambda_2 = \pm \mathrm{i}$

2.1) $\lambda_1 = \mathrm{i}, \ A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l|cc} \text{I:} & -\mathrm{i} & -1 \\ \text{II:} & \boxed{1 \quad -\mathrm{i}} & \\ \hline \text{I+iII:} & 0 & 0 \end{array}$

(hier MUSS sich eine Nullzeile ergeben, vgl. die Bemerkung vor dem Beweis von Satz 5).

$z_1 - \mathrm{i}z_2 = 0, \ z_2 = \mu, \ z_1 = \mathrm{i}\mu, \ \vec{z} = \mu \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2) $\lambda_2 = -\mathrm{i}, \ A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \ z_1 + \mathrm{i}z_2 = 0, \ \vec{z} = \mu \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$

Beachte, dass für reelle Matrizen A die nicht reellen EWe als Paare von konjugiert komplexen Zahlen auftreten (oben i und $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$), denn $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow P(\overline{\lambda}) = 0$. Weiters sind die entsprechenden Eigenvektoren konjugiert komplex (oben $\mu \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mu \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{i}} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$), denn $(A - \lambda I)\vec{z} = \vec{0} \Longrightarrow (A - \overline{\lambda} I)\overline{\vec{z}} = \vec{0}$. Man braucht bei so einem Paar von EWen also nur einmal rechnen.

C) Das charakteristische Polynom

Satz 6 Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ das charakteristische Polynom von A. Dann gilt $P(-\lambda) = \det(A + \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ mit $c_0 = \det A$, $c_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{sp}A$ und allgemein $\boxed{c_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \det(A_{\cancel{i_1}\cancel{i_1}, \ldots, \cancel{i_k}\cancel{i_k}})}$, wobei $A_{\cancel{i_1}\cancel{i_1}, \ldots, \cancel{i_k}\cancel{i_k}}$ aus A entsteht, indem die i_1-ten,…,i_k-ten Zeilen und Spalten gestrichen werden.

Def.: Die Koeffizienten $c_{n-1}, \ldots, c_0$ von $P(-\lambda) = \det(A + \lambda I)$ heißen **Hauptinvarianten** von A. Speziell $c_{n-1} = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \left[\sum \text{der Diagonalelemente}\right] = \mathrm{sp}A$ heißt **Spur** von A.

Bsp. 4: Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so ist $c_2 = \mathrm{sp}A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$,

$c_0 = \det A,\ c_1 = \sum\limits_{i=1}^{3} \det(A_{\cancel{i}\cancel{i}}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ und somit

$P(-\lambda) = \det(A + \lambda I) = \lambda^3 + \mathrm{sp}A \cdot \lambda^2 + c_1\lambda + \det A$ und
$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \mathrm{sp}A \cdot \lambda^2 - c_1\lambda + \det A$.
Speziell für $A = S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (vgl. Bsp. 1,2) ist $\mathrm{sp}A = 3,\ c_1 = -4 - 1 - 4 = -9,\ \det A \overset{\overset{\text{Sarrus}}{\downarrow}}{=} 4 + 4 - 3 = 5$ und somit $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5$, vgl. Bsp. 2.

Beweis von Satz 6: Einfach zu sehen ist, dass $c_0 = P(-0) = \det(A + 0I) = \det A$. Um c_k zu erhalten, differenzieren wir $\det(A+\lambda I)$ nach λ. Es seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ die Spalten von A und $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die Standardbasis $\implies$ $A+\lambda I$ hat die Spalten $\vec{v}_1 + \lambda\vec{e}_1, \dots, \vec{v}_n + \lambda\vec{e}_n$ $\implies$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\det(A + \lambda I) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\det(\overbrace{\vec{v}_1 + \lambda\vec{e}_1}^{\vec{v}_1(\lambda)}, \dots, \overbrace{\vec{v}_n + \lambda\vec{e}_n}^{\vec{v}_n(\lambda)}) =$$

$$= \lim_{\mu\to\lambda} \frac{1}{\mu - \lambda}\Big[\det\big(\vec{v}_1(\mu), \dots, \vec{v}_n(\mu)\big) - \det\big(\vec{v}_1(\lambda), \dots, \vec{v}_n(\lambda)\big)\Big] =$$

$$= \lim_{\mu\to\lambda}\Bigg\{\det\Bigg(\underbrace{\frac{\vec{v}_1(\mu) - \vec{v}_1(\lambda)}{\mu - \lambda}}_{\vec{e}_1}, \vec{v}_2(\mu), \dots\Bigg) + \det\Bigg(\vec{v}_1(\lambda), \underbrace{\frac{\vec{v}_2(\mu) - \vec{v}_2(\lambda)}{\mu - \lambda}}_{\vec{e}_2}, \vec{v}_3(\mu), \dots\Bigg) +$$

$$\cdots + \det\Bigg(\vec{v}_1(\lambda), \dots, \underbrace{\frac{\vec{v}_n(\mu) - \vec{v}_n(\lambda)}{\mu - \lambda}}_{\vec{e}_n}\Bigg)\Bigg\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det\big(\vec{v}_1(\lambda), \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{v}_n(\lambda)\big) = (\text{Entwicklung nach } i\text{-ter Spalte}) =$$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \det\big((A + \lambda I)_{\cancel{i}\,\cancel{i}}\big)$. Wenn man das iteriert, folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^k \det(A + \lambda I) &= \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_1,\dots,i_k \text{ verschieden}}}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \det\Big((A + \lambda I)_{\cancel{i_1}\cancel{i_1},\dots,\cancel{i_k}\cancel{i_k}}\Big) \\ &= k! \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \det\Big((A + \lambda I)_{\cancel{i_1}\cancel{i_1},\dots,\cancel{i_k}\cancel{i_k}}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{und daher } c_k &= \frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^k \det(A+\lambda I)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \det(A_{\not i_1 \not i_1, \ldots, \not i_k \not i_k}).
\end{aligned}
$$

$\square$

Bemerkung: Wenn $P(\lambda)$ die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ hat (mit Vielfachheit gezählt), so hat $P(-\lambda)$ die Nullstellen $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n \implies P(-\lambda) = (\lambda + \lambda_1)\cdots(\lambda+\lambda_n)$ und Ausmultiplizieren liefert

$$
P(-\lambda) = \lambda^n + \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i\Big)}_{c_{n-1}} \cdot \lambda^{n-1} + \underbrace{\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\Big)}_{c_{n-2}} \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + (\underbrace{\lambda_1\cdots\lambda_n}_{c_0}),
$$

d.h. $$\boxed{c_{n-l} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_l\le n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_l}}$$

Speziell gilt $\operatorname{sp} A = c_{n-1} =$ [Summe der Eigenwerte] und
$\det A = \ c_0 \ =$ [Produkt der Eigenwerte].

Die Eigenwerte werden hier mit ihrer „algebraischen Vielfachheit“ genommen.

Def.: 1) Wenn ein Faktor $\lambda - \lambda_i$ in der Linearfaktorzerlegung von $P(\lambda)$ r-mal auftritt, d.h. $P(\lambda)$ die Nullstelle λ_i mit Vielfachheit (Multiplizität) r hat, so heißt r **algebraische Vielfachheit** (a.V.) des Eigenwerts λ_i.
2) Die Dimension des Eigenraums zu λ_i heißt **geometrische Vielfachheit** (g.V.) von λ_i.

Bsp. 4 (nochmals): Wenn $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so ist

$$
\begin{aligned}
P(-\lambda) &= \lambda^3 + \operatorname{sp} A \cdot \lambda^2 + c_1\lambda + \det A &&= (\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)(\lambda+\lambda_3), \\
P(\lambda) &= -\lambda^3 + \operatorname{sp} A \cdot \lambda^2 - c_1\lambda + \det A &&= (-\lambda+\lambda_1)(-\lambda+\lambda_2)(-\lambda+\lambda_3) = \\
& &&= -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3), \\
\operatorname{sp} A &= c_2 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ c_1 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3,\ \det A = c_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.
\end{aligned}
$$

Speziell für $A = S$ wie in Bsp. 1,2 ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (a.V. 2) und $\lambda_3 = 5$ (a.V. 1) und $\operatorname{sp} A = -1-1+5 = 3\surd,\ c_1 = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 5 + (-1)\cdot 5 = -9\surd,\ \det A = c_0 = $ $= (-1)\cdot(-1)\cdot 5 = 5\surd$.
Der Eigenraum zu $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ist eine Ebene und hat also Dimension 2, der Eigenraum zu $\lambda_3 = 5$ ist eine Gerade, $\dim = 1$, und daher stimmen bei dieser Matrix a.V. und g.V. überein.

Bemerkung: Die a.V. von λ_i stimmt mit der Dimension des „verallgemeinerten Eigenraumes" zu λ_i, d.h. von $\left\{\vec{x} : (A - \lambda_i I)^n \vec{x} = \vec{0}\right\}$ überein. Daher gilt immer g.V. $\leq$ a.V. Für symmetrische Matrizen ist $\forall$ EWe g.V. = a.V., vgl. Seite 93.

Bsp. 5: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei eine (z.B. obere) Dreiecksmatrix $\Longrightarrow$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ & \cdots & & \end{pmatrix} \overset{(\S\ 5,\ \text{Satz } 4)}{=}$$

$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \Longrightarrow$ A hat als EWe die Diagonalelemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Speziell sei z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)^3 \Longrightarrow$ der EW 1 hat a.V. 3;

Eigenraum zu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 : A - 1\cdot I = \begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 4} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow 4x_3 = 0,\ 2x_2 + 3x_3 =$ $0 \Longrightarrow x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = \mu \Longrightarrow \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das ist eine Gerade, d.h. $\lambda = 1$ hat g.V. 1. Hier ist also g.V. $\neq$ a.V.

D) Basiswechsel

Es sei V ein Vektorraum und $\vec{a} \in V$. Wenn $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis von V ist, so lässt sich $\vec{a}$ eindeutig als Linearkombination von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ darstellen: $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \vec{e}_i x_i$, wobei x_i die Koordinaten von $\vec{a}$ bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sind. Bezüglich einer anderen Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ hat $\vec{a}$ andere Koordinaten: $\vec{a} = \vec{f}_j y_j$.

Problem 1: Wie hängen x_i und y_j zusammen?

Nun sei weiters $f : V \longrightarrow V$ linear. Dann lässt sich f durch eine Matrix A bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ darstellen (vgl. Satz 2, wo wir $V = W$ setzen und beidesmal die Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ nehmen). Dabei enthält die j-te Spalte von A die Koordinaten von $f(\vec{e}_j)$ bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, d.h. $f(\vec{e}_j) = \vec{e}_i a_{ij}$. Bzgl. einer anderen Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ (d.h. Satz 2 mit $V = W$ und beidesmal Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$) erhalten wir eine Matrix B mit $f(\vec{f}_j) = \vec{f}_i b_{ij}$.

Problem 2: Wie hängen A und B zusammen?

Def.: $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ seien 2 Basen im Vektorraum V. Es gelte $\vec{f}_j = \vec{e}_i t_{ij}$, d.h. die Spalten von T sind die Koordinaten der (neuen) Basiselemente $\vec{f}_j$ bzgl. der (alten) Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Dann heißt T **Transformationsmatrix** von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zu $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$.

Satz 7 V sei ein Vektorraum mit den Basen $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. T sei die Transformationsmatrix von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zu $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$.

1) Wenn $\vec{a} = \vec{e}_i x_i = \vec{f}_j y_j$, so gilt $\boxed{\vec{y} = T^{-1}\vec{x}}$.

2) Wenn $f : V \longrightarrow V$ linear und bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ die Matrix A, bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ die Matrix B hat, so ist $\boxed{B = T^{-1}AT}$.

Bsp. 6: $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ Standardbasis, $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\vec{f}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2,\ \vec{f}_2 = 3 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2 \implies T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 \implies x_1 = 5,\ x_2 = 6,\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$$\vec{a} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 \iff \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 3y_2 \\ 2y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{array}{rrcrcr} \text{I:} & 5 & = & y_1 & + & 3y_2 \\ \text{II:} & 6 & = & 2y_1 & + & 4y_2 \\ \hline \text{II-2I:} & -4 & = & -2y_2 & & \end{array} \implies y_2 = 2,\ y_1 = -1,\ \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kontrolle von 1) im Satz: $T^{-1}\vec{x} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(vgl. S. 60, 2. Zeile von unten)}}}{=} -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{y}\surd$$

2) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \longmapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, vgl. § 4, Bsp. 2 $\implies A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Um B zu bestimmen, müssen wir $f(\vec{f}_1)$ und $f(\vec{f}_2)$ durch $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ darstellen.

$$f(\vec{f}_1) = f(1,2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = b_{11}\vec{f}_1 + b_{21}\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} b_{11} + 3b_{21} \\ 2b_{11} + 4b_{21} \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{array}{rrcrcr} \text{I:} & -2 & = & b_{11} & + & 3b_{21} \\ \text{II:} & 1 & = & 2b_{11} & + & 4b_{21} \\ \hline \text{II-2I:} & 5 & = & -2b_{21} & & \end{array} \implies b_{21} = -5/2,\ b_{11} = -2 + \tfrac{15}{2} = \tfrac{11}{2},$$

ebenso ist $f(\vec{f}_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{f}_i b_{i2} \implies$

$$\implies \begin{array}{rrcrcr} \text{I:} & -4 & = & b_{12} & + & 3b_{22} \\ \text{II:} & 3 & = & 2b_{12} & + & 4b_{22} \\ \hline \text{II-2I:} & 11 & = & -2b_{22} & & \end{array} \implies b_{22} = -11/2,\ b_{12} = -4 + \tfrac{33}{2} = \tfrac{25}{2}$$

und somit $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ -5 & -11 \end{pmatrix}$.

Kontrolle von 2) im Satz: $T^{-1}AT = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} =$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -25 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = B\checkmark$$

Beweis von Satz 7

1) $\vec{a} = \underline{\underline{\vec{e}_i x_i}} = \vec{f}_j y_j \underset{\substack{\downarrow \\ (\text{Def. von } T)}}{=} \underline{\underline{\vec{e}_i t_{ij} y_j}} \overset{\substack{\text{Eindeutigkeit} \\ \text{der Koord.}}}{\Longrightarrow} x_i = t_{ij} y_j \Longrightarrow \vec{x} = T\vec{y} \Longrightarrow \vec{y} = T^{-1}\vec{x}.$

2) $f(\vec{f}_j) = \vec{f}_k b_{kj}, \vec{f}_k = \vec{e}_i t_{ik} \Longrightarrow f(\vec{f}_j) = \vec{e}_i \underbrace{t_{ik} b_{kj}}_{(T\cdot B)_{ij}}$ und andererseits

$f(\vec{f}_j) = f(\vec{e}_k t_{kj}) = f(\vec{e}_k) t_{kj} = \vec{e}_i \underbrace{a_{ik} t_{kj}}_{(A\cdot T)_{ij}}.$

Also ist $TB = AT$ und $/ \cdot T^{-1}$ von links gibt $B = T^{-1}AT$. □

Bemerkung: In der Physik und im Bauingenieurwesen werden Vektoren und allgemein Tensoren oft als auf Basen bezogene Koordinaten $(x_i, a_{ij}, \dots)$ betrachtet, die sich bei Basiswechsel „richtig" transformieren. Die Transformationsgesetze in Satz 7, d.h. $\vec{y} = T^{-1}\vec{x}$ bzw. $y_i = (T^{-1})_{ij} x_j$ sowie $B = T^{-1}AT$ bzw. $b_{ij} = (T^{-1})_{ik} a_{kl} t_{lj}$ gehören dann zu „kontravarianten Tensoren 1. Stufe" sowie zu „einfach kontravarianten, einfach kovarianten Tensoren 2. Stufe". Ein ***r*-fach kontravarianter, *s*-fach kovarianter Tensor (*r* + *s*)-ter Stufe** wäre $a_{i_1\cdots i_r j_1 \cdots j_s}$ mit dem Transformationsgesetz $b_{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_s} = a_{k_1\cdots k_r l_1 \cdots l_s} (T^{-1})_{i_1 k_1} \cdots (T^{-1})_{i_r k_r} t_{l_1 j_1} \cdots t_{l_s j_s}$. In der Physik schreibt man kontravariante Indizes oben, d.h. $x^i, a^i_j, a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ statt $x_i, a_{ij}, a_{i_1\cdots i_r j_1 \cdots j_s}$.

Satz 8 $f : V \longrightarrow V$ sei linear und A bzw. B seien die Matrizen von f bzgl. der Basen $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bzw. $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ von V. Dann gilt

$$\det A = \det B \text{ und } \forall \lambda: \ \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I).$$

Beweis: $B = T^{-1}AT \Longrightarrow \det B = \det(T^{-1}AT) \overset{(\S\ 5,\ \text{Satz } 6)}{=} \underbrace{\det(T^{-1})}_{=1/\det T} \cdot \det A \cdot \det T =$

$= \det A$ und ebenso

$\det(\underbrace{B}_{T^{-1}AT} - \lambda \underbrace{I}_{T^{-1}IT}) = \det\big(T^{-1}(A - \lambda I)T\big) = \det(A - \lambda I)$. □

Bemerkung: Wegen Satz 8 kann man $\det A$ sowie $\det(A - \lambda I)$ auch **Determinante von**

$\boldsymbol{f}$ sowie **charakteristisches Polynom von $\boldsymbol{f}$** nennen. Der anschauliche Grund, dass $\det f$ nicht von der Basiswahl abhängt, ist wie in § 5 E, dass $|\det f| =$ Volumsveränderungsfaktor von f und $\operatorname{sign}(\det f) = \pm 1 \Longleftrightarrow f \left\{ \begin{array}{c} \text{lässt} \\ \text{kehrt} \end{array} \right\}$ Orientierungen $\left\{ \begin{array}{c} \text{gleich} \\ \text{um} \end{array} \right\}$.
Auch der Name Hauptinvarianten für die Koeffizienten von $P(-\lambda)$ ist nun klarer, denn mit $P(\lambda)$ bleiben auch $P(-\lambda)$ und seine Koeffizienten $c_{n-1} = \operatorname{sp} A, \ldots, c_0 = \det A$ bei Basiswechsel invariant, d.h. unverändert. Natürlich sind auch die Eigenwerte, d.h. die Nullstellen von $P(\lambda)$ invariant, aber dies gilt schon nach Definition, da sie ohne Basis definiert sind (siehe Seite 83).

Bsp. 6: (nochmals) $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$,

$\det B = \det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ -5 & -11 \end{pmatrix} \overset{\text{(S. 51 oben)}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 25 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(-121 + 125) = 1 \checkmark$
Hauptinvarianten: $c_1 = \operatorname{sp} A = 0 = \operatorname{sp} B$, $c_0 = \det A = 1 = \det B$;
$P(\lambda) = \lambda^2 - c_1 \lambda + c_0 = \lambda^2 + 1$

Def.: V sei ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ mit $\dim V < \infty$.
$f : V \longrightarrow V$ linear heißt **diagonalisierbar** $\Longleftrightarrow \exists$ Basis von V sodass die Matrix von f bzgl. dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

Satz 9 f diagonalisierbar $\Longleftrightarrow \exists$ Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ von V bestehend aus Eigenvektoren von f.

Wenn $\vec{f}_j$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_j sind, so ist $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
die Matrix von f bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$.

Beweis: f hat die Diagonalmatrix $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f(\vec{f}_j) = \vec{f}_i \underbrace{b_{ij}}_{= \left\{ \begin{array}{ll} 0: & i \neq j \\ \lambda_j: & i = j \end{array} \right.} = \lambda_j \vec{f}_j$ (nicht summieren) $\Longleftrightarrow \vec{f}_j$ sind Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten λ_j. $\square$

Bsp. 7: 1) Es sei $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ wie in Bsp. 1/2. Dann bilden die Eigenvektoren $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und bzgl. dieser Basis hat f die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Wie wir in E) sehen werden, können wir hier sogar eine **ONB aus EVen** bilden.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wie in Bsp. 3 ist über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, da A keine reellen Eigenwerte hat.

Wenn wir f über $\mathbb{C}$ betrachten, d.h. $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 : \ \vec{z} \longmapsto A\vec{z} = \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}$, so sind $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ und f hat bzgl. $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ die Diagonalmatrix $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$. f ist also über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Schlussbemerkung: Auch über $\mathbb{C}$ ist nicht jede lineare Abbildung diagonalisierbar (siehe etwa Bsp. 5, wo zu wenig EVen da sind). Mittels Verwendung von verallgemeinerten EVen lässt sich f über $\mathbb{C}$ aber immer in **Jordan'sche Normalform** bringen, d.h. eine Basis finden bzgl. der f die Matrix $B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix}$ hat, wobei

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j} \text{ und } n_1 + \cdots + n_k = n.$$

f ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar $\iff \forall j : \ n_j = 1 \iff \forall$ Eigenwerte $\lambda_j \in \mathbb{C}$: a.V.=g.V.

E) Symmetrische Matrizen

Hier betrachten wir einen euklidischen Vektorraum V, d.h. in V ist ein Skalarprodukt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ definiert (siehe § 6 D). V sei endlich-dimensional.

In V existieren ONBen: Wenn $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ eine beliebige Basis von V ist, so kann daraus mit dem „Gram-Schmidt'schen Orthonormierungsverfahren" eine ONB $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ kon-

struiert werden. (Dazu setzt man $\vec{e}_1 = (\vec{f}_1)_0 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$,
$\vec{e}_2$ = (auf $\vec{e}_1$ senkrechter Anteil von $\vec{f}_2)_0 = (\vec{f}_2 - \langle \vec{f}_2, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1)_0$,
$\vec{e}_3$ = (auf $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ senkrechter Anteil von $\vec{f}_3)_0 = (\vec{f}_3 - \langle \vec{f}_3, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{f}_3, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2)_0$ etc.)
Wenn $f : V \longrightarrow V$ linear ist und bzgl. der ONB $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ die Matrix A hat, d.h. $f(\vec{e}_j) = \vec{e}_i a_{ij}$, so ist f symmetrisch $\Longleftrightarrow$ A symmetrisch (siehe Satz 2).

Satz 10 (über Eigenwerte, Eigenvektoren von symmetrischen Matrizen)
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch. Dann gilt

1) A hat nur reelle Eigenwerte, d.h. alle Nullstellen von $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ sind reell.

2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen aufeinander senkrecht.

3) In $\mathbb{R}^n$ $\exists$ ONB $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ von Eigenvektoren von A. (Insbesondere ist f diagonalisierbar.)

Bsp. 8: Es sei wieder $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ wie in Bsp. 1/2.

1) $P(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda - 5)$ hat tatsächlich nur reelle Wurzeln.

2) Die Eigenvektoren zu -1 sind $\epsilon : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, die Eigenvektoren zu 5 sind $g : \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalvektor von ϵ ist (siehe § 6 B) sind die Eigenvektoren zu -1 und zu 5 tatsächlich aufeinander senkrecht.

3) Wir setzen $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \epsilon$ und $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in g$
und nehmen $\vec{f}_2 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Dann ist $\vec{f}_2 \perp \vec{f}_3 \implies \vec{f}_2 \in \epsilon \implies \vec{f}_2$ ist Eigenvektor zu $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (Probe: $-1 - 2\cdot 2 + 5 = 0\surd$) und $\|\vec{f}_2\| \underset{(\S\ 6,\ \text{Satz } 4)}{\overset{}{=}} \underbrace{\|\vec{f}_1\|}_{1} \cdot \underbrace{\|\vec{f}_3\|}_{1} \cdot \sin \underbrace{\measuredangle(\vec{f}_1, \vec{f}_3)}_{90^\circ} = 1$ (Probe: 1+4+25=30). Also ist $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ eine ONB aus Eigenvektoren von S. Der Spannungstensor f hat bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. ($\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ist

eine negativ orientierte Basis, da $\det(\vec{f}_1, \vec{f}_1 \times \vec{f}_3, \vec{f}_3) = -\det(\vec{f}_1, \vec{f}_3, \vec{f}_1 \times \vec{f}_3) < 0$ nach § 6, Satz 4,c. Will man eine positiv orientierte ONB, so kann man z. B. $\vec{f}_1, \vec{f}_3 \times \vec{f}_1, \vec{f}_3$ oder $\vec{f}_1, \vec{f}_3, \vec{f}_1 \times \vec{f}_3$ etc. nehmen.)

Beweis von Satz 10: 1) Hier schreibe ich (wie vielfach üblich) Vektoren ohne Pfeil, d.h. $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Es sei $\overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert zum Eigenvektor $z \in \mathbb{C}^n$, d.h. $Az = \lambda z \implies A\overline{z} \overset{\overset{A \text{ reell}}{\downarrow}}{=} \overline{Az} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} \implies z^T \cdot A \cdot \overline{z} = z^T \overline{\lambda} z = \overline{\lambda}(z^T \cdot \overline{z}) = \overline{\lambda}(z_1\overline{z}_1 + \cdots + z_n\overline{z}_n) = \overline{\lambda}\big(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\big)$ und andererseits wegen $A = A^T$

$$\underbrace{\underset{1\times n}{z^T} \cdot \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\overline{z}}}_{1\times 1, \text{ d.h. Zahl in } \mathbb{C}} = z^T \cdot A^T \cdot \overline{z} = (Az)^T \cdot \overline{z} = (\lambda z)^T \cdot \overline{z} = \lambda z^T \cdot \overline{z} = \lambda\big(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\big).$$

Weil $z \neq \vec{0}$ ist, gilt $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \neq 0 \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$. Also hat A nur reelle Eigenwerte.

2) Nun schreibe ich wieder Pfeile auf die Vektoren. Wenn $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$ und $A\vec{w} = \lambda_2\vec{w}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so folgt $\lambda_1\vec{v}^T \cdot \vec{w} = (\lambda_1\vec{v})^T \cdot \vec{w} = (A\vec{v})^T \cdot \vec{w} = \vec{v}^T A^T \vec{w} \underset{\underset{A \text{ symmetr.}}{\uparrow}}{=} \vec{v}^T A\vec{w} = \vec{v}^T \lambda_2 \vec{w} = \lambda_2 \vec{v}^T \cdot \vec{w} \implies (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\neq 0})\vec{v}^T \cdot \vec{w} = 0 \implies \vec{v}^T \cdot \vec{w} = 0 \implies \vec{v} \perp \vec{w}$.

3) Es seien $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_r}$ die verschiedenen (nach 1) alle reellen) Nullstellen von $P(\lambda)$ und $W_{i_1}, \ldots, W_{i_r}$ ihre Eigenräume. Z.B. in Bsp. 8 wäre $i_1 = 1,\ i_2 = 3,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_3 = 5,\ W_1 = \epsilon = \{\vec{x} : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\},\ W_3 = g = = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}$. Nach 2) stehen die W's aufeinander senkrecht. Wenn wir in jedem W_{i_j} eine ONB nehmen und diese zusammengeben, erhalten wir $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$. Dies ist eine ONB in $W = \sum_{j=1}^{r} W_{i_j} = \{\vec{x} = \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_r : \vec{v}_j \in W_{i_j}\} \subset \mathbb{R}^n$.

In Bsp. 8 wäre $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ eine ONB in $W_1 = \epsilon$, $\vec{f}_3$ eine ONB in $W_3 = g$ und $W = \mathbb{R}^3$ und daher $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ eine ONB in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^n$. Wir müssen noch überlegen, dass allgemein $W = \mathbb{R}^n$ gilt, d.h. dass $W^\perp = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \forall \vec{x} \in W : \vec{x} \perp \vec{y}\}$ nur aus dem Nullvektor besteht. (§ 3 Satz 5 besagt, dass $\dim W^\perp = n - \dim W$.) Für $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ gilt $f : W_{i_j} \longrightarrow W_{i_j} \implies f : W \longrightarrow W \implies f : W^\perp \longrightarrow W^\perp$ (denn $\vec{y} \in W^\perp, \vec{x} \in W \implies \big\langle f(\vec{y}), \vec{x} \big\rangle \overset{\overset{A \text{ symmetr.}}{\downarrow}}{=} \big\langle \vec{y}, \underbrace{f(\vec{x})}_{\in W} \big\rangle = 0$).

$f : W^\perp \longrightarrow W^\perp$ ist auch symmetrisch. Wäre $W^\perp \neq \{\vec{0}\}$, so hätte $f : W^\perp \longrightarrow W^\perp$ nach

1) (zumindest) einen reellen Eigenwert λ_0, d.h. $\exists\, \vec{y} \in W^\perp$ mit $\vec{y} \neq \vec{0}$ und $A\vec{y} = \lambda_0 \vec{y} \Longrightarrow$ $\vec{y} \in W_{i_j}$ für ein $j \implies \vec{y} \in W \implies \|\vec{y}\|^2 = \langle \underbrace{\vec{y}}_{\in W^\perp}, \underbrace{\vec{y}}_{\in W} \rangle = 0 \implies \vec{y} = \vec{0}$ $\lightning$

Also muss $W^\perp = \{\vec{0}\}$ gelten. $\square$

Zum Schluss betrachten wir noch den Basiswechsel von der ursprünglichen ONB $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, bzgl. der f die symmetrische Matrix A hat, zur ONB $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, bzgl. der f die Diagonalmatrix $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ hat.

Satz 11 Äquivalent sind:

1) T ist Transformationsmatrix von einer ONB zu einer ONB.
2) Die Spalten von T sind paarweise aufeinander senkrechte Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und haben Länge 1.
3) $T^{-1} = T^T$ bzw. $T^T \cdot T = I$.

Def.: Eine Matrix mit $1), 2), 3)$ heißt **orthogonal**.
(Die Bezeichnung „orthonormiert“ wäre vielleicht treffender, ist aber ungebräuchlich.)

Bsp. 8: (nochmals) $T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & -5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ ist die Transformationsmatrix von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ zu $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Die Spalten von T sind gerade die ONB $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ und daher ist 2) in Satz 11 erfüllt. Auch 3) gilt , denn

$$T^T \cdot T = \begin{array}{c} \vec{f}_1 \searrow \\ \vec{f}_2 \nearrow \\ \vec{f}_3 \nearrow \end{array} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f}_1 \searrow & \vec{f}_2 \searrow & \vec{f}_3 \searrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & -5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \vec{f}_1, \vec{f}_1 \rangle & \langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle & \langle \vec{f}_1, \vec{f}_3 \rangle \\ & \text{etc.} & \\ & & \end{pmatrix} = I.$$

Beweis von Satz 11. 1) $\Longrightarrow$ 2): Die Spalten von T bilden die ONB $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ (in Koordinaten bzgl. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$) und sind daher $\perp$ und haben Länge 1.

2) $\Longrightarrow$ 3): $T^T \cdot T = \begin{pmatrix} \vec{f}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{f}_n^{\,T} \end{pmatrix} \cdot (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n) = \begin{pmatrix} \langle \vec{f}_1, \vec{f}_1 \rangle & \langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle & \cdots \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{pmatrix} = I \Longleftrightarrow T^{-1} = T^T.$

3) $\Longrightarrow$ 2): ebenso
2) $\Longrightarrow$ 1): Wenn wir für $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die Standardbasis und für $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ die Spalten von T nehmen, so sind $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ nach 2) eine ONB in $\mathbb{R}^n$ und T ist die Transformationsmatrix von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ zu $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$. $\square$

Bemerkungen: 1) T orthogonal $\Longrightarrow$ $T^{-1} = T^T \quad \Big|^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{T}_{=(T^T)^T} = (T^T)^{-1} \quad \Longrightarrow$ T^T orthogonal. Also stehen auch die Zeilen von T aufeinander $\perp$ und haben Länge 1. (Übung: Kontrolliere das in Bsp. 8!)
2) Bei ONBwechsel vereinfachen sich die Transformationsgesetze in Seite 90:
$\vec{y} = T^{-1}\vec{x} = T^T\vec{x}$ bzw. $y_i = (T^T)_{ij}x_j = t_{ji}x_j$ und $B = T^{-1}AT = T^TAT$ bzw. $b_{ij} = \underbrace{(T^T)_{ik}}_{t_{ki}} a_{kl}t_{lj} = t_{ki}t_{lj}a_{kl}$.

(Die Gleichung $y_i = t_{ji}x_j$ ist die TSW für § 6, Satz 6, denn $y_i \widehat{=} \lambda_i$ dort und $\begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sind die Koordinaten von $\vec{f}_i$ bzw. $\vec{v}$ bzgl. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \Longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle = t_{ji}x_j$.)
3) Orthogonale Matrizen treten auch in einem anderen Zusammenhang auf: Wenn $f : V \longrightarrow V$ Längen erhält (d.h. $\forall \vec{v} \in V : \big\|f(\vec{v})\big\| = \|\vec{v}\|\big)$, so heißt f **orthogonal**. Bzgl. einer ONB hat f dann eine orthogonale Matrix A, d.h. $A^{-1} = A^T$. Z.B. sind Spiegelungen und Drehungen orthogonal.

F) Quadratische Formen, Quadriken

Bei spröden Werkstoffen ist meist die maximale Normalspannung $\sigma_{\max}$ für den Bruch maßgeblich. Daher (vgl. Seite 79) stellen wir das **Problem** „Was ist der maximale bzw. minimale Wert von $\sigma = \big\langle \vec{a}, f(\vec{a}) \big\rangle$ wenn $\|\vec{a}\| = 1$?“
Wir identifizieren V mit $\mathbb{R}^3$ mittels einer ONB $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Dann ist σ eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$.

Def.: Eine **quadratische Form** auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Form

$$g(\vec{x}) = \vec{x}^T \underbrace{A\vec{x}}_{(a_{ij}x_j)_i} = x_i a_{ij} x_j = \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle$$

mit einer symmetrischen Matrix A.

Speziell für $n = 2:\ g(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$,
für $n = 3:\ g(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$.

Lösung des Problems: Allgemeiner sei V euklidisch, $f : V \longrightarrow V$ symmetrisch, $g(\vec{a}) = \langle \vec{a}, f(\vec{a}) \rangle \implies$ bzgl. einer ONB $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ hat f eine symmetrische Matrix A und $\vec{a} = \vec{e}_i x_i,\ g(\vec{a}) = \vec{x}^T A \vec{x}$. Mittels Satz 10 wechseln wir zu einer ONB $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ von Eigenvektoren von A mit Eigenwerten λ_i. Die Nummerierung sei so, dass $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$. Dann ist $\vec{a} = \vec{f}_i y_i,\ g(\vec{a}) = \vec{y}^T \cdot B \cdot \vec{y}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies B\vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix},$$

$g(\vec{a}) = \vec{y}^T \cdot B \cdot \vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$

Wegen $\lambda_1 y_i^2 \le \lambda_i y_i^2 \le \lambda_n y_i^2 \ *)$ folgt $\lambda_1(y_1^2 + \dots + y_n^2) \le \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = g(\vec{a}) \le \lambda_n(y_1^2 + \dots + y_n^2)$.

Für $1 = \|\vec{a}\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^n \vec{f}_i y_i \right\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pythagoras}}}{=} \sum\limits_{i=1}^n \underbrace{\|\vec{f}_i y_i\|^2}_{|y_i|^2 \cdot \underbrace{\|\vec{f}_i\|^2}_{1}} = \sum\limits_{i=1}^n y_i^2$ erhalten wir $\lambda_1 \le g(\vec{a}) \le \lambda_n$.

Gleichheit gilt dann, wenn in $*)$ $=$ gilt, d.h. $y_i = 0$ oder $\lambda_i = \lambda_1$ bzw. $\lambda_i = \lambda_n$, d.h. $\vec{a} \in$ Eigenraum von λ_1 bzw. $\vec{a} \in$ Eigenraum von λ_n.

Speziell: $\left\{ \begin{array}{c} \text{max.} \\ \text{min.} \end{array} \right\}$ Normalspannung $= \left\{ \begin{array}{c} \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{größter} \\ \text{kleinster} \end{array} \right\}$ Eigenwert von f; diese wird angenommen, wenn $\vec{a} \in$ Eigenraum von $\left\{ \begin{array}{c} \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{array} \right\}$, wobei $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$.

Bemerkung: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißen daher auch **Hauptnormalspannungen** und $\mathbb{R}\vec{f}_1, \mathbb{R}\vec{f}_2, \mathbb{R}\vec{f}_3$ **Spannungshauptachsen**. Statt λ_i schreibt man oft σ_i.

Bsp. 8: (nochmals) Für $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\sigma_1 = \sigma_2 = -1,\ \sigma_3 = 5$ und daher $\left\{ \begin{array}{c} \text{max.} \\ \text{min.} \end{array} \right\}$ Normalspannung $= \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ -1 \end{array} \right\}$ und diese wird erreicht für $\vec{a} \in \left\{ \begin{array}{c} g \\ \epsilon \end{array} \right\}$.

Bzgl. der neuen Koordinaten $\vec{y}$ gilt $g(\vec{a}) = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$.

Bezgl. des ursprünglichen Koordinatensystems wäre $\sigma = \langle \vec{a}, f(\vec{a}) \rangle = \vec{x}^T S \vec{x} = 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = g(x_1, x_2, x_3)$ und es ist also für $\|\vec{x}\| = 1$ $g_{\max} = 5$ bzw. $g_{\min} = -1$ und dies wird angenommen für $\vec{x} \in g$ bzw. $\vec{x} \in \epsilon$.

Probe: $\vec{x} \in g,\ \|\vec{x}\| = 1 \implies \vec{x} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies g(\vec{x}) = \dfrac{1}{6}\big(3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) +$

$2 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1\big) = \dfrac{30}{6} = 5\surd$

Bemerkungen: 1) Bei zähplastischen Werkstoffen tritt oft der Bruch infolge zu hoher Schubspannung ein („Anstrengungshypothese von Tresca"). Es zeigt sich, dass $\tau_{\max} = \dfrac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$ und zwar tritt $\tau_{\max}$ auf bzgl. $\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\pm \vec{f_1} \pm \vec{f_3})$, d.h. wenn $\vec{a} \perp \vec{f_2}$ und $\measuredangle 45°$ zu den Spannungshauptachsen hat.
2) $g(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ bzw. A (mit $A = A^T$) heißen $\left\{ \begin{array}{c} \textbf{positiv} \\ \textbf{negativ} \end{array} \right\}$ **definit** $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \vec{x} \neq \vec{0} \,:\, g(\vec{x}) > 0 \\ \forall \vec{x} \neq \vec{0} \,:\, g(\vec{x}) < 0. \end{array} \right.$

Dieselbe Überlegung wie oben zeigt, dass g bzw.

$$A \left\{ \begin{array}{c} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\} \text{definit} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{alle EWe von } A \text{ sind } > 0 \\ \text{alle EWe von } A \text{ sind } < 0 \end{array} \right\}.$$

Das **Jacobi'sche Kriterium** besagt, dass $A = A^T$ positiv definit $\Longleftrightarrow a_{11} > 0$,
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det A > 0.$
(Daraus ergibt sich, dass A negativ definit $\Longleftrightarrow -A$ pos. def. $\Longleftrightarrow -a_{11} > 0$,
$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Longleftrightarrow a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$
$, \ldots, (-1)^n \det A > 0.$)
3) Wie in der Lösung des Problems können wir jede Quadrik auf Hauptachsenform bringen.

Def.: 1) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$, so heißt $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \cdot \vec{x} = c\}$ **Quadrik**.
2) Quadriken mit der Gleichung $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 1$ oder $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 0$ oder $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 = x_n$ heißen in **Hauptachsenform**.
3) Im $\mathbb{R}^3$ heißen die Quadriken mit den Gleichungen
a) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$: Ellipsoid: alle $\lambda > 0$
1-schaliges Hyperboloid: ein $\lambda < 0$, zwei $\lambda > 0$
2-schaliges Hyperboloid: zwei $\lambda < 0$, ein $\lambda > 0$
elliptischer Zylinder: ein $\lambda = 0$, zwei $\lambda > 0$
hyperbolischer Zylinder: ein $\lambda = 0$, ein $\lambda > 0$, ein $\lambda < 0$

b) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$: Kegel: [zwei $\lambda > 0$, ein $\lambda < 0$] oder [ein $\lambda > 0$, zwei $\lambda < 0$]

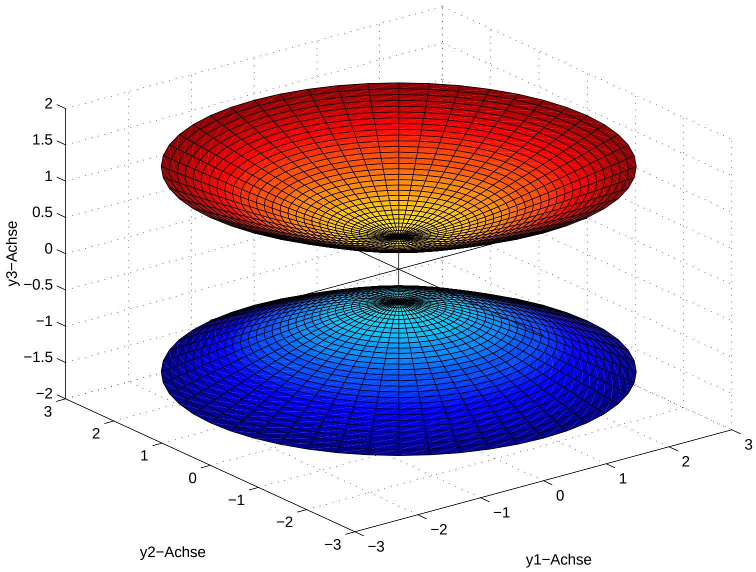
c) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = x_3$: elliptisches Paraboloid: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$
hyperbolisches Paraboloid: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
parabolischer Zylinder: ein $\lambda = 0$, ein $\lambda \neq 0$

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^2$ ist jede Quadrik eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel oder ein Ausartungsfall ($\{\}$, 1 Punkt, 1 oder 2 Geraden, $\mathbb{R}^2$); im $\mathbb{R}^3$ ist jede Quadrik eine der Typen aus 3) oder ein Ausartungsfall ($\{\}$, 1 Punkt, 1 Gerade, 1 oder 2 Ebenen, $\mathbb{R}^3$).

Bsp. 9: 1) Es sei $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x}^T S \vec{x} = 1\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 1\}$. Mit der ONB $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ von Eigenvektoren (siehe Bsp. 8) und den entsprechenden Koordinaten y_1, y_2, y_3 gilt $\vec{x}^T S \vec{x} = \vec{y}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{y} = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$, d.h.

$Q: \ -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2 = 1$ ist ein 2-schaliges Hyperboloid: Wegen $\lambda_1 = \lambda_2$ ist Q sogar rotationssymmetrisch um die y_3-Achse, die in Richtung

$$\vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geht.}$$



2) Nun sei noch ein linearer Term $2\vec{b}^T \cdot \vec{x}$ dabei, z.B. für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -5 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\tilde{Q}: \ \underbrace{3x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3}_{\vec{x}^T A \vec{x} = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2} + \underbrace{14x_1 - 28x_2 - 10x_3}_{2\vec{b}^T \cdot \vec{x}} = 1$$

Mit der Transformationsmatrix T (s. Bsp. 8) verwandeln wir $2\vec{b}^T \vec{x}$ in y : $\vec{y} = T^{-1}\vec{x} \implies \vec{x} = T\vec{y} \implies 2\vec{b}^T \vec{x} = 2\vec{b}^T \cdot T \cdot \vec{y} =$

$$= \underbrace{(14,-28,-10)\cdot\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & -5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}}_{\left(0,\frac{120}{\sqrt{30}},\frac{60}{\sqrt{6}}\right)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{pmatrix} = 4\sqrt{30}\,y_2 + 10\sqrt{6}\,y_3 \implies$$

$\implies \tilde{Q}:\ -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2 + 4\sqrt{30}\,y_2 + 10\sqrt{6}\,y_3 = 1.$
Nun folgt „quadratisches Ergänzen":

$\tilde{Q}\ :\ -y_1^2 \underbrace{-(y_2-2\sqrt{30})^2}_{-y_2^2+4\sqrt{30}\,y_2-120} + \underbrace{5(y_3+\sqrt{6})^2}_{5y_3^2+10\sqrt{6}\,y_3+30} +120 - 30 = 1 \implies -z_1^2 - z_2^2 + 5z_3^2 = -89,$

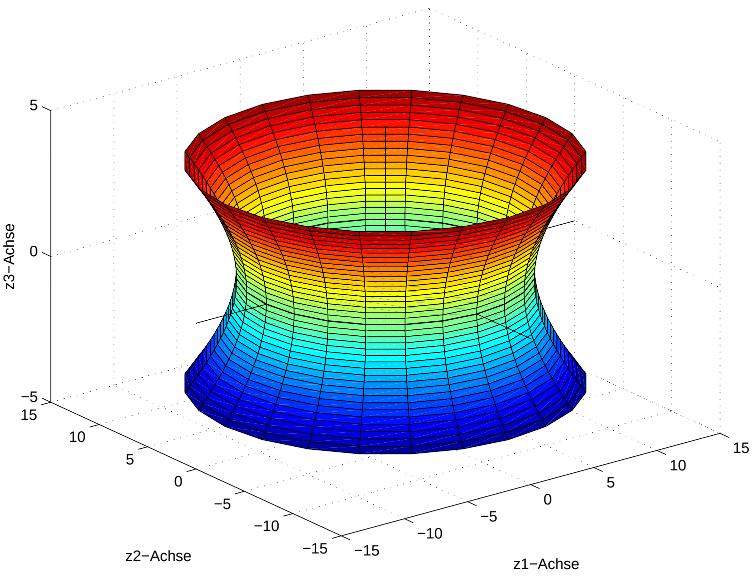
wobei $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - 2\sqrt{30}$, $z_3 = y_3 + \sqrt{6}$ (das ist ein gegenüber $\vec{y}$ verschobenes Koordinatensystem)

$\implies \tilde{Q}:\ \frac{z_1^2}{89} + \frac{z_2^2}{89} - \frac{5}{89}z_3^2 = 1,$
ein 1-schaliges Hyperboloid:
Der Mittelpunkt M ist bei $\vec{z} = \vec{0}$, d.h.

$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{30} \\ -\sqrt{6}\end{pmatrix} \implies \vec{x} = T\vec{y} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -11\end{pmatrix}$, d.h.

$M = \big(1/-2/-11\big).$



Bemerkung: Die Bestimmung von Typ und Mittelpunkt der Quadrik ist auch möglich, wenn man nur die Vorzeichen der Eigenwerte von A kennt. Denn falls $\det A = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 \neq 0$, so setzt man $\vec{m} = -A^{-1}\vec{b}$ und erhält

$$(\vec{x}-\vec{m})^T\cdot A\cdot(\vec{x}-\vec{m}) = \vec{x}^TA\vec{x} \underbrace{-2(A\vec{m})^T}_{2\vec{b}^T}\cdot\vec{x} + \vec{m}^TA\vec{m},$$

d.h. $Q:\ (\vec{x}-\vec{m})^TA(\vec{x}-\vec{m}) = c - \vec{m}^TA\vec{m}$ (wenn Q wie in Def. 1) ist). Weil hier keine linearen Terme mehr da sind, muss $\vec{m} = -A^{-1}\vec{b}$ der Ortsvektor des Mittelpunktes sein.

(In Bsp. 9 ist $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 5\end{pmatrix} = 2\sqrt{30}\vec{f}_2 + 5\sqrt{6}\vec{f}_3 \implies$

$$\Longrightarrow \vec{m} = -S^{-1}\vec{b} = -2\sqrt{30}\,\underbrace{S^{-1}\vec{f}_2}_{-\vec{f}_2} - 5\sqrt{6}\,\underbrace{S^{-1}\vec{f}_3}_{\frac{1}{5}\vec{f}_3} = 2\sqrt{30}\,\vec{f}_2 - \sqrt{6}\,\vec{f}_3 =$$

$$(\text{weil } S\vec{f}_2 = -\vec{f}_2) \qquad\qquad (\text{weil } S\vec{f}_3 = 5\vec{f}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} \checkmark)$$

Für $\det A = 0$ erhält man einen elliptischen oder hyperbolischen Zylinder (Def. 3a), wenn $A\vec{m} = -\vec{b}$ lösbar ist, ein Paraboloid oder einen parabolischen Zylinder (Def. 3c), wenn $A\vec{m} = -\vec{b}$ nicht lösbar ist.

Übungen zur linearen Algebra im WS 2000/01

(1) Geben Sie für die Gerade g im $\mathbb{R}^2$ durch $A = (3/1)$, $B = (2/4)$

(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ an!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(2) Geben Sie für die Ebene ϵ im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/2/3)$, $B = (1/0/-1)$, und $C = (-2/1/-1)$

(a) eine Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$,

(b) eine Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$ an!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(3) Bestimmen Sie die Gerade h im $\mathbb{R}^3$ durch $A = (1/-1/2)$, $B = (3/1/-2)$

(a) durch eine Parameterdarstellung,

(b) als Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. durch 2 Gleichungen!

Leiten Sie (b) aus (a) her! Inwiefern sind die Ergebnisse eindeutig?

(Z1) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene ϵ aus Übung 2 mit der Geraden h aus Übung 3 !

Lösen Sie die folgenden 4 linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Algorithmus:

(14)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_5 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(15)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -5 \\ -3x_1 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= -9 \end{aligned}$$

(16)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(Z3)
$$\begin{aligned} x + y + az &= 0 \\ ax - 2y + 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
für festes $a \in \mathbb{R}$ (Eine Fallunterscheidung ist nötig.)

(22) Wir betrachten nochmals das inhomogene Gleichungssystem aus Übung 15. Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{hom}}$ und überprüfen Sie, dass $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \vec{x}_{\text{hom}}$, d.h. $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$ (s. S. 13 im Skriptum). Überprüfen Sie auch die Gleichung $k = n -$ Anzahl der Pivotzeilen (S. 12). Warum ist L_{hom} ein Vektorraum, L_{inh} aber nicht? Geben Sie eine Basis und die Dimension von L_{hom} an!

(23) Welche Polynome vom Grad ≤ 3 gehen durch $(-1/0)$ und $(1/0)$? Warum ist das ein Unterraum U von P_3? Geben Sie eine Basis von U an! Was ist $\dim U$?

(24) Zeigen Sie, dass $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist!

Zeigen Sie dazu, dass sich jedes $\vec{b}$ eindeutig als LK $\vec{b} = \lambda_1 \vec{f_1} + \lambda_2 \vec{f_2} + \lambda_3 \vec{f_3}$ schreiben lässt, indem Sie das Gleichungssystem $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b_1$, $2\lambda_1 + 2\lambda_3 = b_2$, $3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = b_3$ lösen. Was sind die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis?

(Z4) Bestimmen Sie die Parabel $y = a + bx + cx^2$ durch $(-1/9)$, $(1/3)$, $(2/6)$. Versuchen Sie, sich diese Parabel als Schnittpunkt von 3 Ebenen in P_2 vorzustellen!

(25) Es seien $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} = \vec{0}$? (Gauß) Sind $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ linear unabhängig? Sind $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Satz 4, 3b)

(26) Es seien $\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w_3} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ gilt $\lambda_1 \vec{w_1} + \lambda_2 \vec{w_2} + \lambda_3 \vec{w_3} = \vec{0}$? (Gauß; setze $\lambda_3 = \mu$) Sind $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ linear unabhängig? Was bedeutet das geometrisch? Sind $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(27) (a) Sind $\vec{v_1} = 1 + x$, $\vec{v_2} = x + x^2$, $\vec{v_3} = 1 + 2x + x^2 \in P_2$ linear unabhängig?

(b) Sind $\vec{w_1} = 1 - x + x^2$, $\vec{w_2} = 3 + x - x^2$, $\vec{w_3} = 1 - 4x + 2x^2 \in P_2$ linear unabhängig? Sind $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ eine Basis von P_2?

(28) (a) Drehen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ um 73° im Gegenuhrzeigersinn!

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der Geraden $y = -x$. Warum ist diese Abbildung linear? Was ist die Matrix von f?

(Z5) Es seien $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. (a) Für welche $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^4$ gilt $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} + \lambda_4 \vec{v_4} = \vec{0}$? (Gauß) (b) Sind $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ linear unabhängig? (a oder Satz 4, 1b) (c) Sind $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ linear unabhängig?

(a mit $\lambda_4 = 0$) (d) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? (Satz 4, 3b) (e) Was sind die Koordinaten von $\vec{v}_4$ bezüglich $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$? (verwende a).

(32) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & -3 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & x \\ -1 & c & 3 & f \\ -1 & -2 & b & 1 \end{pmatrix}$$

(mit $a, b, c, f, x \in \mathbb{R}$). Welche der Produkte AB, BA, AD, DA, CD, DC sind sinnvoll? Berechnen Sie diese!

(33) Es seien f bzw. g bzw. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehungen um die Winkel α bzw. β bzw. $\alpha + \beta$ im Gegenuhrzeigersinn.

a) Welche Matrizen A, B, C entsprechen f, g, h?

b) Überlegen Sie, dass $h = f \circ g$ und daher $C = A \cdot B$ (§4, Satz 2).

c) Folgern Sie aus (a,b) die Summensätze für Sinus und Cosinus.

(34) a) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$, $A + BC = D$, $B \cdot (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{z} = \vec{u}$, $ABC = D$ in Tensorschreibweise!

b) Alle Indizes seien 1 oder 2. Schreiben Sie $c_{kr} - a_{ki}b_{ir} = d_{kj}e_{jr}$ als Matrixgleichung sowie als 4 Gleichungen (für $k, r = 1, 2$) an!

(Z6) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $AB, BA; (AB)C, A(BC); (A+B)C, AC+BC$! Wie nennt man das Gesetz, das bei Matrizen nicht erfüllt ist, und die 2 Gesetze, die bei Matrizen erfüllt sind?

(40) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1} wie in §4, Bsp. 10, S. 40 des Skriptums! Kontrollieren Sie $A \cdot A^{-1} = I$! Was ist die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = (1, 3, 5)^T$?

(41) Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$ sowie $\operatorname{rg} A^T$! ($\operatorname{rg} A$ bzw. $\operatorname{rg} A^T$ ergeben sich als Anzahl der Pivotzeilen beim Gauß'schen Algorithmus angewendet auf $A\vec{x} = \vec{0}$ bzw. $A^T\vec{x} = \vec{0}$.) Ist A invertierbar?

(42) a) Bestimmen Sie die Fläche F des Vierecks im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $A = (2/1)$, $B = (1/3)$, $C = (3/2)$, $D = (4/4)$. Zeichnen Sie das Viereck, und überlegen Sie, dass hier gilt $F = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| + \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$. Erklären Sie die Vorzeichen der 2 Determinanten!

b) Berechnen Sie $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ mit der Regel von Sarrus! Machen Sie eine Skizze,

die zeigt, warum diese Determinante negativ ist!

(Z7) Es sei A wie in Übung 41, $\vec{b} = (1, -1, 2)^T$ und $\tilde{A} = (A, \vec{b})$ die erweiterte Matrix. Berechnen Sie $\operatorname{rg} \tilde{A}$! Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

(48) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, indem Sie $A \cdot A^{-1} = I$ überprüfen!

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie mit a) A^{-1} und die Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$.

(49) Bestimmen Sie $\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0 & -7 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -5 \end{vmatrix}$ so wie in §5, Bsp. 3 des Skriptums.

(50) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(Z8) Was ergibt sich, wenn in der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$ zuerst I'=I, II'=II, III'=III-a_1II und dann I"=I', II"=II'-a_1I', III"=III' gemacht wird? Warum ändert sich die Determinante nicht? Warum erhält man $\det A = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$? Wie lässt sich das auf $A = (a_j^{i-1})_{i,j=1,\ldots,n}$ verallgemeinern?

(56) Es seien $a, b > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei Streckung bzw. Stauchung (für $a, b > 1$ bzw. < 1) mit dem Faktor a in x_1–Richtung, mit dem Faktor b in x_2–Richtung.

a) Was ist $\vec{y} = f(\vec{x})$? Was ist die Matrix A von f?

b) Was ist der Flächenveränderungsfaktor von f?

c) Was ist das Bild des Vollkreises $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ unter f? (Skizze für $a = 2, b = 3$)

d) Welche Formel gilt daher für die Fläche der Ellipse $\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} \leq 1$?

e) Was ist das Volumen des Ellipsoides $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$? (Hier stehen x, y, z anstelle von y_1, y_2, y_3 entsprechend d; Einheitskugelvolumen $= 4\pi/3$.)

(57) Es sei A wie in Übung 40. Bestimmen Sie A^{-1} mit Streichungsdeterminanten.

(58) Wir betrachten das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ aus Übung 16.

a) Berechnen Sie $\det A$ durch Entwicklung nach der 2. Spalte!

b) Berechnen Sie x_2 mit der Cramer'schen Regel!

(Z9) Die Ausbiegung eines axial mit Kraft F zentrisch gedrückten Stabes, der bei $x = 0$ mit dem Einspannmoment λ_1 eingespannt ist und bei $x = l$ frei drehbar gelagert ist, erfüllt die Differentialgleichung $w'' + \alpha^2 w = \dfrac{\lambda_1}{EJ}\big(1 - \dfrac{x}{l}\big)$, wobei $\alpha = \sqrt{\dfrac{F}{EJ}}$. Dann gilt

$$w(x) = \frac{\lambda_1}{F}\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \lambda_2 \cos \alpha x + \lambda_3 \sin \alpha x \quad \text{und} \quad w(0) = w'(0) = w(l) = 0.$$

Schreiben Sie die letzten 3 Gleichungen als lineares Gleichungssystem in $\vec{\lambda}$ an und ermitteln Sie das kleinste positive F (= Knicklast), für das eine Lösung $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$ existiert, durch Berechnung einer Determinante!

(64) ϵ, A, B, C seien wie in Übung 2. Bestimmen Sie die Längen und Winkel im Dreieck ABC sowie mittels des Kreuzprodukts eine Gleichung für ϵ.

(65) Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. a) Was ist der Abstand des Punktes $Q = (1/2/3)$ von der Ebene $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 9$? b) Was ist die Matrix der Spiegelung s_H an der Ebene $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

(66) Zeigen Sie durch Ausrechnen, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. (Merkregel: "baz minus zab") Was ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$? Ist $\times$ assoziativ?

(67) Auf zwei windschiefen (d.h. nicht parallelen und nicht schneidenden) Geraden $g_i : \vec{x} = \vec{p}_i + \lambda\vec{r}_i$, $i = 1, 2$, im $\mathbb{R}^3$ seien F_i die Fußpunkte, d.h. so, dass $\|\overrightarrow{F_1F_2}\|$ der Minimalabstand D zwischen g_1 und g_2 ist. Skizze! Überlegen Sie: a) $\overrightarrow{F_1F_2} \perp \vec{r}_1, \vec{r}_2$; b) $\overrightarrow{F_1F_2} \parallel \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$; c) $\overrightarrow{F_1F_2} = \vec{p}_2 + \lambda_2\vec{r}_2 - \vec{p}_1 - \lambda_1\vec{r}_1$; d) $D = \|\overrightarrow{F_1F_2}\| = \dfrac{|\langle\overrightarrow{F_1F_2}, \vec{r}_1 \times \vec{r}_2\rangle|}{\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\|} = \dfrac{|\langle\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{r}_1 \times \vec{r}_2\rangle|}{\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\|}$. e) Berechnen Sie den Abstand D zwischen $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$!

(Z10) Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ und H die Ebene $\langle\vec{a}, \vec{x}\rangle = 0$. Weiters seien $\vec{b}_H = \mathrm{pr}_H(\vec{b})$ bzw.$\vec{c}_H = \mathrm{pr}_H(\vec{c})$ die senkrechten Projektionen von $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ in die Ebene H und $\vec{b} = \vec{b}_H + \lambda\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{c}_H + \mu\vec{a}$. Skizze! Überlegen Sie: a) $\lambda\vec{a} = k\vec{a}_0 = k\vec{a}/\|\vec{a}\|$, $\lambda = k/\|\vec{a}\|$, $\langle\vec{b}, \vec{a}\rangle = k\|\vec{a}\|$ und somit $\lambda = \dfrac{\langle\vec{b}, \vec{a}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ und ebenso $\mu = \dfrac{\langle\vec{c}, \vec{a}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}$; b) $\vec{b}_H \times \vec{c}_H \parallel \vec{a}$; c) $\vec{a} \times (\vec{b}_H \times \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2\vec{b}_H$, $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c}_H) = -\|\vec{a}\|^2\vec{c}_H$; d) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}_H\times\mu\vec{a}+\lambda\vec{a}\times\vec{c}_H) = \mu\|\vec{a}\|^2\vec{b}_H - \lambda\|\vec{a}\|^2\vec{c}_H = \mu\|\vec{a}\|^2(\vec{b}-\lambda\vec{a}) - \lambda\|\vec{a}\|^2(\vec{c}-\mu\vec{a}) = \vec{b}\mu\|\vec{a}\|^2 - \vec{c}\lambda\|\vec{a}\|^2 = \vec{b}\cdot\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c}\cdot\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$.

(72) Berechnen (und vergleichen) Sie die Winkel a) zwischen den Vektoren $\vec{v} = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ und $\vec{w} = (0, 0.5, 1, 1.5, 2)^T$ im $\mathbb{R}^5$; b) zwischen den Funktionen $f, g \in \mathcal{C}([0, 2])$, die durch $f(x) = 1$ und $g(x) = x$ gegeben sind.

<u>Hinweis:</u> In b) ist $\cos\alpha = \dfrac{\langle f, g\rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}$ und α hat nichts mit dem Winkel 45° zu tun, unter dem sich die Graphen von f, g schneiden.

(73) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 2 & 1\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}$!

(74) Für einen dreiachsigen Spannungszustand gelte $\sigma_x = 2.3$, $\sigma_y = -1.4$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 1.5$, $\tau_{xz} = 0.7$, $\tau_{yz} = 0$ (in [N/m^2]). Ermitteln Sie näherungsweise (mit dem Newton-Verfahren) die Größe der maximalen Normalspannung, d.h. den größten Eigenwert der Spannungsmatrix!

(Z11) Es seien $s_k(x) = \sin(kx) \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\|s_k\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und dass die s_k paarweise aufeinander senkrecht stehen, d.h. $\langle s_k, s_l\rangle = 0$ für $k \neq l$.

(79) A sei die Matrix aus Übung 73. a) Schreiben Sie $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda + c_0$ an! b) Überprüfen Sie, dass $c_0 = \det A$, $c_1 = \sum_{i=1}^{3} \det(A_{\cancel{i}\cancel{i}})$ und $c_2 = \mathrm{sp}\, A$. c) Überprüfen Sie, dass $c_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $c_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ und $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$!

(80) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ sind schon 2 Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -6$ bekannt. a) Bestimmen Sie aus $\operatorname{sp} A$ den dritten Eigenwert! b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den 3 Eigenwerten. Was sind hier a.V. und g.V.?

(81) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ sei die Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Übung 24. A sei wie in Übung 80. a) Was ist die Transformationsmatrix T von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ zu $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$? b) Bestimmen Sie T^{-1}! c) Berechnen Sie mit b) die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$! d) Welche Matrix B hat $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$? Warum ist B nicht symmetrisch?

(Z12) Bei einem eingespannten Kragträger $(0 \leq x \leq l,\ -b \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq h,\ l^2 \geq 2b^2)$ unter der Endlast P (in y–Richtung) ist $S = a \begin{pmatrix} 2(l-x)y & y^2 - b^2 \\ y^2 - b^2 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \dfrac{3P}{4hb^3}$. Wie groß ist die maximale Normalspannung, und bei welchen x, y tritt sie auf?

(B6) Es sei $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und A wie in Übung 80 zu Mathematik A.
a) Geben Sie eine ONB $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ aus Eigenvektoren von A an!
b) Was ist die Matrix B von f bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$? Kontrollieren Sie, dass $B = T^{-1}AT$ gilt.

(B7) Es sei T die Transformationsmatrix der vorigen Aufgabe. Überprüfen Sie mit jeder der 3 Bedingungen aus Satz 11, §7 der Vorlesung, dass T orthogonal ist!

(B8) Bringen Sie die Quadrik $g(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1$ in Hauptachsenform! Welchen Typ hat die Quadrik? Skizze!

(B-Z1) Es sei $y = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$ wie in Übung 69 zu Mathematik A. a) Setzen Sie $x_1 = x, x_2 = y$ und zeigen Sie, dass $x_1^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0$ gilt! b) Bringen Sie diese Quadrik in Hauptachsenform!

Klausuren zu den Übungen Mathematik A im WS 2000/01

1. Klausur

(1) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -5x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & -3 \\ -3x_1 & - & x_2 & & & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & -17 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & -13 \end{array}$$

Schreiben Sie die Lösung in der Form $\vec{x}_{\text{inh}} = \vec{p} + \underbrace{\lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k}_{\vec{x}_{\text{hom}}}$ an! Machen Sie eine Probe, indem Sie überprüfen, dass $\vec{p}$ das obige inhomogene Gleichungssystem löst, und $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ das zugehörige homogene Gleichungssystem lösen!

(2) Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für welche $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^4$ gilt $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 = \vec{0}$? Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ linear unabhängig? Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(3) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Drehung um $60°$ im Gegenuhrzeigersinn und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der Geraden $x_2 = x_1$ (vulgo $y = x$). Bestimmen Sie die Matrizen C von $f \circ g$ sowie D von $g \circ f$. Ermitteln Sie $\cos 60°, \sin 60°$ durch Überlegungen am Einheitskreis! ($\sqrt{3} \approx 1.7$)

(4) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x - x^2$$

injektiv bzw. surjektiv ist. Falls dies nicht gilt, schränken Sie Definitions- und Zielbereich so ein, dass die Funktion bijektiv wird.

(5) Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, $|z|$ und $\arg_H z$

$$z = \frac{-2}{1+i}, \qquad z = 3\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}.$$

(6) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen, die der folgenden Ungleichung genügen:

$$\frac{|4 - x^2|}{2x + 1} < 1.$$

2. Klausur

(1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1} mit dem Gauß'schen Algorithmus und überprüfen Sie $A \cdot A^{-1} = I$!

(2) Es sei A wie in Aufgabe 1. Bestimmen Sie A^{-1} mit Streichungsdeterminanten!

(3) Es sei A wie in Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A! Welche a.V. bzw. g.V. haben die verschiedenen Eigenwerte?

(4) (a) Berechnen Sie die erste Ableitung von $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, und geben Sie den Wert $g'(1)$ an.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \sin x}{\cos 2x - 1}$.

(5) Diskutieren Sie die Funktion (Nullstellen, Extrema, Monotonie,...)

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1},$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

(6) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-3)}.$$

Prüfungen zur Vorlesung Mathematik A, WS 2000/01

PROBEEXEMPLAR

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.
Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.
Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 2, 3, 4, 7, 11, 13, 14 möglich.)
Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an! Beantworten Sie bitte die Fragen

zu Linearer Algebra (1–7) und die zu Analysis (8–15) auf verschiedenen Blättern. (In diesem Probeexemplar wurden die Fragen zum Stoff bis Weihnachten gestellt. In den Prüfungen wird natürlich auch der Stoff des Jänners abgefragt.)

(1) (a) Was ist ein k–dimensionaler affiner Raum (AR)?

(b) Ein wieviel dim. AR ist durch $\vec{x} = \binom{2}{1} + \lambda_1\binom{-1}{-2} + \lambda_2\binom{5}{10}$ gegeben?

(2) (a) Welcher Zusammenhang besteht bei linearen Gleichungssystemen zwischen L_{inh}, L_{hom} und einer partikulären Lösung $\vec{p}$ (falls diese existiert)?

(b) Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{inh}}$, $\vec{x}_{\text{hom}}$ sowie 2 partikuläre Lösungen zum Gleichungssystem $3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12,\ x_1 - x_2 + x_5 = 5$.

(3) (a) Z sei der Zeilenraum und L der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Unbekannten. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen n, $\dim L$, $\dim Z$, und der Anzahl der Pivotzeilen im Gauß'schen Algorithmus?

(b) Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem ergaben sich die Pivotzeilen $\boxed{1\ 2\ 3}$ und $\boxed{0\ 3\ 4}$. Was sind $\dim L$, $\dim Z$? Ist $(3, 0, 2) \in Z$?

(4) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Unter welchen Bedingungen hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y}$ genau eine Lösung $\vec{x}$?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ist $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y}$ eindeutig lösbar? Wenn ja, was ist die Lösung $\vec{x}$?

(5) (a) Was sind die Grundeigenschaften von $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ für $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$?

(b) Was ist $\det(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b})$, wenn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 5$?

(6) (a) Was ist die anschauliche Bedeutung von $\det f$ für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear?

(b) Es sei $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Welche Fläche hat $f(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 5,\ 2 \leq x_2 \leq 7\})$?

(7) (a) Was ist die Matrix der senkrechten Projektion pr_H auf $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

(b) Was ergibt sich für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

(8) (a) Wie erhält man den Graph von $y = 3f(x + 2)$ aus dem von $y = f(x)$?

(b) Drücken Sie $\cos 3x$ durch $\cos x$ aus.

(9) (a) Wie lautet die Definition von injektiv?

(b) Beweisen Sie die Injektivität von $g(x) = x^3$.

(10) (a) Geben Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d}$ an.

(b) Berechnen Sie die 4-ten Wurzeln von -4.

(11) (a) Was besagt die Konvergenz durch Einschließung?

(b) Berechnen Sie damit $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \cos 2n}{n}$.

(12) (a) Wie ist $f'(x_0)$ definiert?

(b) Berechnen Sie damit $(\sqrt{x})'(3)$.

(13) (a) Wie lautet die Kettenregel?

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = (\sin x)^x$ bei $x = \frac{\pi}{2}$.

(14) (a) Wie lauten die de l'Hospital'schen Regeln?

(b) Sind die Voraussetzungen im Fall $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \cos x}{x}$ erfüllt? Welchen Wert hat dieser Limes?

(15) (a) Wie bestimmt man Kandidaten für lokale Extrema und Wendepunkte einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

(b) Ist $x = 0$ ein Wendepunkt von $f(x) = x^4$?

LÖSUNGEN

(1) (a) Eine Menge von Vektoren der Form $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k$, die nicht mit weniger als k Richtungsvektoren dargestellt werden kann.

(b) $\vec{x} = \binom{2}{1} + (\lambda_1 - 5\lambda_2)\binom{-1}{-2}$; das ist ein 1–dim. AR, d.h. eine Gerade.

(2) (a) $L_{\text{inh}} = \{\}$ oder $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$

(b)

$$\begin{array}{llllll|l}
\text{I:} & 3 & -3 & 1 & 1 & 0 & 12 \\
\text{II:} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\text{I-3II:} & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -3
\end{array}$$

$k = 5 - 2 = 3$, $x_3 + x_4 - 3x_5 = -3$, $x_4 = \lambda_1$, $x_5 = \lambda_2$, $x_3 = -3 - \lambda_1 + 3\lambda_2$,

$$x_1 - x_2 + x_5 = 5,\ x_2 = \lambda_3,\ x_1 = 5 + \lambda_3 - \lambda_2 \Longrightarrow \vec{x}_{\text{inh}} = \begin{pmatrix} 5 + \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -3 - \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$\vec{p}+\vec{x}_{\text{hom}} = \vec{p}+\lambda_1\vec{r}_1+\lambda_2\vec{r}_2+\lambda_3\vec{r}_3 \text{ wobei } \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ eine andere partikuläre Lösung ist z.B. } \vec{p} + \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) $\dim Z =$ Anzahl der Pivotzeilen; $\dim L = n - \dim Z = n -$ [Anzahl der Pivotzeilen]

(b) $\dim Z =$ Anzahl der Pivotzeilen $= 2 \Longrightarrow \dim L = 3{-}2 = 1$; $Z = \{\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(0,3,4) : \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^2\}$; $(3,0,2) \in Z \Longleftrightarrow (3,0,2) = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,3,4) \Longleftrightarrow 3 = \lambda_1,\ 0 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2,\ 2 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2$. Die ersten zwei Gleichungen geben $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$; in der dritten Gleichung eingesetzt folgt ein Widerspruch: $2 = 3 \times 3 + 4 \times (-2)$. Also ist $(3,0,2) \notin Z$.

(4) (a) Hier müsste eine der Bedingungen von §4, Satz 4 angegeben werden, z.B. "A ist invertierbar" oder "A hat Rang n" etc. Auch "$\det A \neq 0$" (§5, Satz 7) wäre richtig.

(b) $\det A = 4{-}6 = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ ja; $\vec{x} = A^{-1}\vec{y} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\vec{y} = \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 \\ \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{pmatrix}$

(5) (a) det ist linear in $\vec{v}_1$, d.h. $\det(\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) + \lambda\det(\vec{v}_1', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$; det ist alternierend, d.h. det(2 Vektoren $\vec{v}_i$ vertauscht) $= -\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$; det ist normiert, d.h. $\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$ für die Standardbasis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

(b) $\det(\vec{a}{-}\vec{b}{+}2\vec{c}, \vec{c}{-}3\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{c}{-}3\vec{a}, \vec{b}) - \underbrace{\det(\vec{b}, \vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b})}_{0} + 2\det(\vec{c}, \vec{c}{-}3\vec{a}, \vec{b}) =$

$\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) - 3\underbrace{\det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b})}_{0} + 2\underbrace{\det(\vec{c}, \vec{c}, \vec{b})}_{0} - 6\det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) +$

$+6\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -7\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -35$

(6) (a) $\det f = \pm \mathbb{R}^n$ −Volumsveränderungsfaktor, wobei $\pm$ je nachdem f die Orientierung erhält oder umkehrt.

(b) Flächenveränderungsfaktor $= |\det f| = |4-6| = 2 \Longrightarrow f(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 5,\ 2 \leq x_2 \leq 7\})$ ist ein Parallelogramm mit Fläche $2 \cdot (5-1) \cdot (7-2) = 40$ Flächeneinheiten.

(7) (a) pr_H hat die Matrix $A = I - \dfrac{1}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a} \cdot \vec{a}^T$.

(b) $A = I - \dfrac{1}{1+4+9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1,2,3) = I - \dfrac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

(8) (a) Durch Verschiebung um 2 Einheiten nach links und Streckung um den Faktor 3 in y– Richtung.

(b) Aufgrund der Summensätze für Sinus $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ und Cosinus $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ gilt

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. (Man könnte das Beispiel auch mit den Formeln von Moivre lösen; siehe Übungen.)

(9) (a) Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt injektiv $:\Leftrightarrow$

$$\text{für alle } x_1,\ x_2 \in X \text{ gilt: } \Big(f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2 \Big).$$

(b) Aus $g(a) = g(b)$, d.h. $a^3 = b^3$ folgt: $0 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
1.Fall: $a - b = 0$, d.h. $a = b$;
2.Fall: $0 = a^2 + ab + b^2 = (a + b/2)^2 + 3b^2/4$. Das ist nur möglich für $a = b = 0$.
Insgesamt also $a = b$.

(10) (a) $\operatorname{Re} z = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad \operatorname{Im} z = \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$.

(b) In Polarkoordinaten gilt $-4 = 4\,\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}$.
Somit ist $\sqrt[4]{-4} = \{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}\} = \{\pm 1 \pm \mathrm{i}\}$, da $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})$, $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{i})$, etc. (Skizze!)

(11) (a) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$;
(ii) Es gibt einen Index N, sodass für alle $n \geq N:\ a_n \leq b_n \leq c_n$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

(b) Wegen $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ gilt: $0 \leq \dfrac{1+\cos 2n}{n} \leq \dfrac{2}{n}$. Man setzt $a_n := 0$ und $c_n := 2/n$. Dann ergibt sich wegen $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ der gesuchte Grenzwert $\beta = 0$.

(12) (a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(b) $(\sqrt{x})'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$
$= (\sqrt{x}$ ist stetig$) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(13) (a) Es sei $h(x) = f(g(x))$. Falls f und g differenzierbar sind, so ist auch h differenzierbar und es gilt $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

(b) Für $0 < x < \pi$ gilt die Identität $(\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}$. Somit erhält man durch zweimaliger Anwendung der Kettenregel (und der Produktregel)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)}\cdot\Big(\ln(\sin x)+x\frac{\cos x}{\sin x}\Big) = \big(\ln(\sin x)+x\cot x\big)\cdot(\sin x)^x.$$

Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ ergibt sich $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(14) (a) Seien $f,\, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte für alle $x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$. Gelte weiters (i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to b^-$ (oder $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to b^-$); (ii) $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. Dann gilt $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b) Man hat $f(x) = x + \cos x$, $g(x) = x$ und wählt $b = \infty$. Beide Funktionen sind differenzierbar, $g'(x) = 1$ und $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Allerdings existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\sin x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$ nicht. Somit ist Voraussetzung (ii) nicht erfüllt und die Regel ist nicht anwendbar. Nach dem Einschließungssatz gilt jedoch $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 1$.

(15) (a) Die Kandidaten für lokale Extrema sind (i) die Randpunkte des Definitionsintervalls, also a und b; (ii) alle Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist; (iii) die stationären Punkte (d.h. die Punkte x mit Ableitung $f'(x) = 0$). Kandidaten für Wendepunkte sind (i) alle Punkte, in den f nicht zweimal differenzierbar ist; (ii) alle Punkte x mit $f''(x) = 0$.

(b) Nein. Der Graph der Funktion ist überall konvex, er liegt stets oberhalb der Tangente (Skizze!).

BEISPIELE VON UNZUREICHENDEN ANTWORTEN

(1) (a) $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{r}_k$ A

(1) (b) 1 B

(3) (b) 1, 2, nein C

(4) (a) Wenn L_{inh} für jedes $\vec{y}$ aus genau einem Element besteht. D

(8) (a) Durch Verschiebung und Streckung. E

(9) (a) Eine Funktion ist injektiv, wenn ihr Graph jede Parallele zur x-Achse höchstens einmal schneidet. F

(10) (b) $\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{-1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$. G

(12) (a) $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente. H

(15) (a) Kandidat für Extremum, falls $f'(x) = 0$;
Kandidat für Wendepunkt, falls $f''(x) = 0$. I

KOMMENTAR: A, B, C, E sind zu wenig ausführlich. D ist zwar wahr, aber in einer sehr trivialen, d.h. offensichtlichen Weise, die man in der Logik "Tautologie" nennt. F ist nur für reelle Funktionen zutreffend. G ist unvollständig, es waren alle 4-ten Wurzeln gefragt. H ist nicht die in der Vorlesung gegebene Definition von $f'(x_0)$, sondern eine Folgerung daraus. Zudem müsste man hier genauer sagen: $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. I ist unvollständig.

BEISPIELE VON ZUSATZPUNKTEN

(2) (a) Beweis von $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$ wenn $\vec{p}$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$ ist (in Matrixnotation):

(α) $\vec{v} \in L_{\text{hom}} \Longrightarrow A\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow A(\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{p} + A\vec{v} = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y} \Longrightarrow \vec{p} + \vec{v} \in L_{\text{inh}}$.

(β) $\vec{x} \in L_{\text{inh}} \Longrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$; $\vec{v} = \vec{x} - \vec{p} \Longrightarrow A\vec{v} = A(\vec{x} - \vec{p}) = A\vec{x} - A\vec{p} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v} \in L_{\text{hom}}$ und $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$

(13) (a) Beweis der Kettenregel:

Man verwendet: $$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

(α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$, da g differenzierbar.

(β) Sei $y = g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$. Dann ist
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = f'(y_0) = f'(g(x_0))$, da g stetig und f differenzierbar.

Somit ist h differenzierbar, und es gilt $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ nach den Rechenregeln für Grenzwerte.

1. PRÜFUNG (2001 – 02 – 02)

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.
Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.
Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 2, 3, 4, 7, 9, 12–15 möglich.)
Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an! Beantworten Sie bitte die Fragen zu Linearer Algebra (1–7) und die zu Analysis (8–15) auf verschiedenen Blättern.

(1) (a) Wie ist der Begriff „Koordinaten bzgl. einer Basis“ definiert?

(b) Was sind die Koordinaten von $\binom{-5}{7}$ bzgl. der Basis $\vec{f_1} = \binom{1}{1}$, $\vec{f_2} = \binom{2}{-1}$ im $\mathbb{R}^2$?

(2) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und L der Lösungsraum von $A\vec{x} = \vec{0}$. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen n, $\dim L$, $\mathrm{rg}A$, und der Anzahl der Pivotzeilen im Gauß'schen Algorithmus?

(b) Was sind $\mathrm{rg}A$ bzw. $\dim L$, wenn $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$?

(3) (a) Es seien $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, $g(\vec{x}) = B\vec{x}$, $f\big(g(\vec{x})\big) = C\vec{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Wie sind c_{ij} durch A, B bestimmt?

(b) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A^T \cdot B = D$ in Tensorschreibweise an!

(4) (a) Was besagt die Cramer'sche Regel?

(b) Bestimmen Sie damit x_2, wenn $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$, $-2x_1 - x_3 = 2$, $2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 3$.

(5) (a) Wie ist $\vec{v} \times \vec{w}$ durch die Determinante und $\langle\ ,\ \rangle$ definiert?

(b) Welche Fläche hat das von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm?

(6) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $P(-\lambda) = \det(A + \lambda I) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$. Wie erhält man c_0, c_1, c_2 aus A?

(b) Bestimmen Sie so das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ von $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$!

(7) (a) Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix A?

(b) Überprüfen Sie die Aussagen in (a) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$!

(8) (a) Wie lautet die Definition von $|x|$?

(b) Welche $x \in \mathbb{R}$ genügen der Ungleichung $|x - 1| < x + 3$?

(9) (a) Wie lautet die geometrische Summenformel?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$.

(10) (a) Skizzieren Sie die Funktionen $y = \arcsin x$ und $y = \ln x$.

(b) Schreiben Sie die Zahlen $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}$ und $3\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}$ in der Form $a + \mathrm{i}\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(11) (a) Was besagt der Zwischenwertsatz?

(b) Ist er auf $\operatorname{sign} 2x$ am Intervall $[-1, 1]$ anwendbar? Warum bzw. warum nicht?

(12) (a) Wie lautet die Produktregel?

(b) Berechnen Sie damit die zweite Ableitung von $\sin x \cdot \cos x$.

(13) (a) Was bedeutet *quadratische Konvergenz* beim Newtonverfahren?

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newtonverfahrens zur Lösung von $x^2 = 3$ durch. Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 1$.

(14) (a) Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{6-2x}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

(15) (a) Wie lautet der Satz von Taylor?

(b) Berechnen Sie die ersten 3 Terme des Taylorpolynoms von $g(x) = \sqrt{2x+1}$ mit Entwicklungspunkt 0.

2. PRÜFUNG (2001 – 03 – 30)

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.
Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.
Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 1–7, 9, 11–15 möglich.)
Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an! Beantworten Sie bitte die Fragen zu Linearer Algebra (1–7) und die zu Analysis (8–15) auf verschiedenen Blättern.

(1) (a) V sei ein VR, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sei eine Basis von V und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m \in V$. Was sagt der Basissatz jeweils über m, wenn $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ l.u. bzw. ein Erz.system bzw. eine Basis sind?

(b) Es seien $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ l.u.? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ ein Erz.system von $\mathbb{R}^3$? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(2) (a) Bei der Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, mit Gauß ergaben sich j Pivotzeilen und die Lösungsmenge $L = \{\lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$. Wie hängen j und k zusammen?

(b) Was sind j, k, L für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$?

(3) (a) Wann heißt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar? Wie lässt sich das mit der Determinante feststellen?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar?

(4) (a) Was gilt für $\det A$ (α) bei Zeilenvertauschungen, (β) bei Gauß-Schritten?

(b) Es sei A wie in (3b). Bestimmen Sie $\det A$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

(5) (a) Was ist die Hessesche Normalform von $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b$?

(b) Was ist der Abstand von $Q = (1/1/1/1)$ von der Hyperebene $-3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 6$?

(6) (a) Die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ habe bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ Matrix A, bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ Matrix B, und T sei die Transformationsmatrix von der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zur Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Wie hängen A und B zusammen?

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$, $\vec{f}_1 = \binom{1}{2}$, $\vec{f}_2 = \binom{3}{4}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Was sind T und B?

(7) (a) Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix A?

(b) Überprüfen Sie die Aussagen in (a) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$!

(8) (a) Es sei $f : D \to Y$ und $B \subseteq Y$. Definieren Sie das Urbild von B.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5$. Geben Sie $f^{-1}(\{-4\})$ und $f^{-1}([-1, 4))$ an.

(9) (a) Wie lautet die Umrechnungsformel von kartesischen in Polarkoordinaten?

(b) Rechnen Sie die Punkte $(3, 4)$, $(-2, -2)$ und $(-4, 3)$ in Polarkoordinaten um.

(10) (a) Wie ist der Grenzwert von Funktionen definiert?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - x - 2x^2}{3x^2 - 4}$.

(11) (a) Wie lautet das Bisektionsverfahren? Unter welchen Voraussetzungen liefert es eine Nullstelle?

(b) Machen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens für die Funktion $f(x) = x^4 - x - 3$ auf dem Intervall $[0, 2]$.

(12) (a) Wie lautet die Quotientenregel?

(b) Berechnen Sie damit die Ableitung von $\dfrac{x}{\log x}$.

(13) (a) Wie lautet die Formel für partielle Integration?

(b) Berechnen Sie $\int_0^b x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Was ergibt sich für $b \to \infty$?

(14) (a) Wie lautet die Formel für das Volumen eines Drehkörpers?

(b) Berechnen Sie das durch Rotation des Parabelstücks $y = (2-x)^2,\ 0 \leq x \leq 1$ um die x-Achse entstehende Volumen.

(15) (a) Wie lautet der Satz von Taylor?

(b) Geben Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion mit Entwicklungspunkt 0 an.