Skriptum zu

Fourier-Analysis und Partielle Differentialgleichungen

(Teil der Vorlesung „Höhere Analysis I“, SS 1998)

Dr. Peter Wagner

Inhaltsverzeichnis

I Fourier-Analysis **2**
1.1 Periodische Funktionen 2
1.2 Fourier-Reihen 8
1.3 Fourier-Integrale 17

II Partielle Differentialgleichungen **21**
2.1 Die schwingende Saite 22
2.1.1 Aufstellung der Gleichung 22
2.1.2 Lösung mit Separationsansatz 23
2.1.3 Zusammenhang mit der Musik 26
2.2 Membran und Torsion 27
2.2.1 Die Membrangleichung 27
2.2.2 Ruhende Membran über einem Rechteck 29
2.2.3 Torsion von Stäben mit rechteckigem Querschnitt . . . 31
2.3 Die Plattengleichung 34
2.3.1 Bezeichnungen und Beziehungen der Plattentheorie 34
2.3.2 Das Spiegelungsprinzip 36
2.3.3 Die $\delta-$„Funktion“ 38

5 Übungsblätter **40**

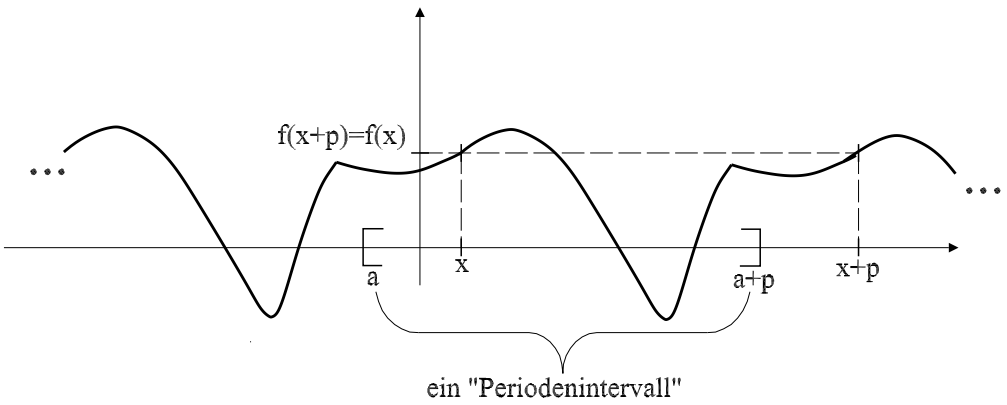
Kapitel I

Fourier-Analysis

(benannt nach Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830))

1.1 Periodische Funktionen

Definition
Es sei $p > 0$. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) **hat Periode p** (bzw. **ist periodisch mit Periode p**) $\Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} : f(x+p) = f(x)$.



Bemerkung:

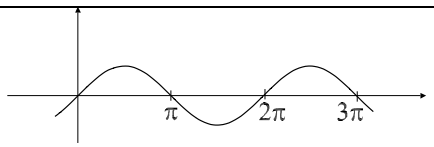
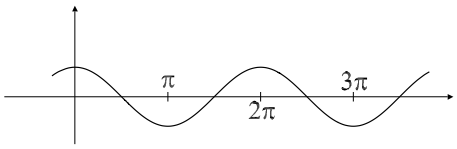
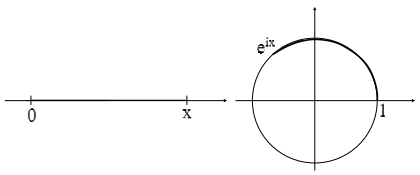
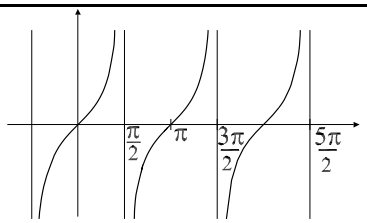
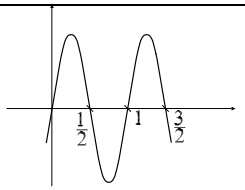
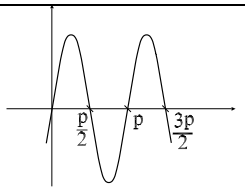
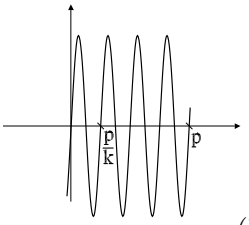
1. Wenn f Periode p hat, so genügt es, f auf einem Periodenintervall $[a, a+p\,]$ anzugeben.

2. f hat Periode $p \Longrightarrow f$ hat auch Periode np, $n \in \mathbb{N}$. Denn:

$$\begin{aligned} f(x+np) &= f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) \\ &= f(x+(n-2)p) = \cdots = f(x+p) = f(x) \end{aligned}$$

3. f, g haben Periode $p, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig $\Longrightarrow f \pm g,\ f \cdot g,\ f/g,\ h \circ f$ haben auch Periode p.

Beispiel:

	Funktion	**Bild**	**eine Periode**	**kleinste Periode**
	$\sin x$		2π	2π
	$\cos x$		2π	2π
	e^{ix}		2π	2π
	$\tan x$		2π	π
$*)$	$\sin(2\pi x)$		1	1
$*)$	$\sin\left(\dfrac{2\pi x}{p}\right)$		p	p
$*)$	$\sin\left(\dfrac{2\pi k x}{p}\right)$	 (hier k=4)	p	$\dfrac{p}{k}$

$*$) ebenso für $\cos(\cdots)$ und $\mathrm{e}^{i}\cdots$

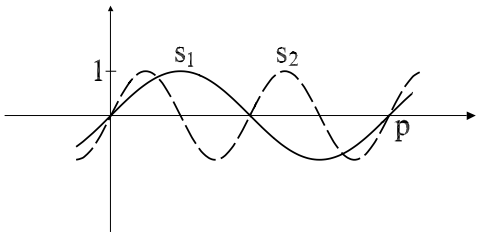
Im folgenden sei immer $p > 0$ fest und $k \in \mathbb{N}$ (oder manchmal, wenn ausdrücklich gesagt, ist auch $k = 0$ zugelassen). Rechnerische Kontrolle zum letzten Beispiel:

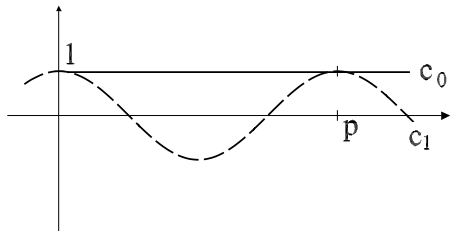
$$\sin\left(\frac{2\pi k(x+p)}{p}\right) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p} + 2\pi k\right) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) \text{ hat Periode } p$$

Definition

1. $F_p := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt und mit Periode $p\}$
2. $c_0(x) = 1$ (konstant), $c_k(x) = \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$, $s_k(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$. Dann gilt: $c_0,\ c_k,\ s_k \in F_p$.





Bemerkung: F_p ist ein Vektorraum: $f,\ g \in F_p,\ \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda f \in F_p \\ f + g \in F_p \end{cases}$

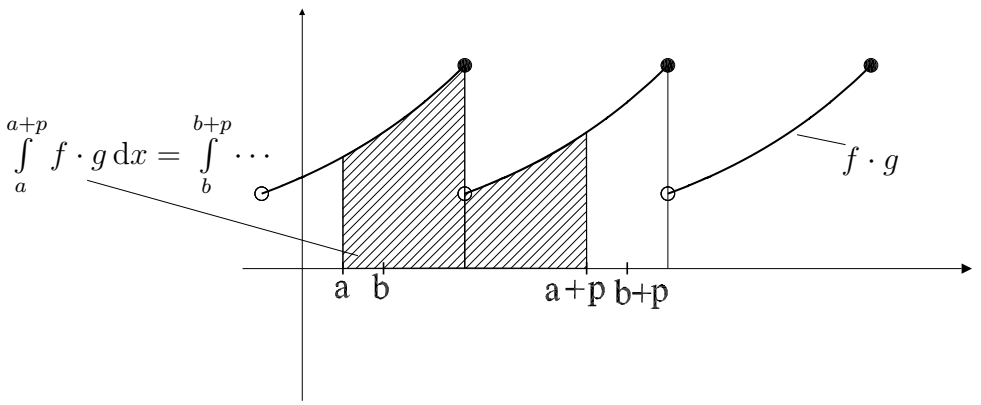
Definition
F_p wird mit dem inneren Produkt

$$\boxed{\langle f,\, g\rangle = \frac{1}{p}\int_a^{a+p} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}$$

versehen. $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ heißt **Norm** von f.

Bemerkungen:

1. $f \cdot g \in F_p$. Daher ist es egal, über **welches** Periodenintervall $[a, a+p\,]$ man integriert:



$$\left(\text{Exakt: } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\int_a^{a+p} (f\cdot g)(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\int_0^{a+p} - \int_0^{a} \cdots\right] \overset{\text{Hauptsatz der } \int\text{-Rechnung}}{=} (f\cdot g)(a+p) - (f\cdot g)(a) = 0\right)$$

2. $\langle , \rangle$ erfüllt die Axiome eines inneren Produktes:
   (a) $\langle \lambda f + g, h\rangle = \lambda\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$ (" linear in 1. Komp.")
   (b) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ (" symmetrisch")
   (c) $\langle f, f\rangle > 0$ außer für $f = 0$ fast überall ("positiv definit")

3. Bei komplexwertigen Funktionen setzt man

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{p}\int_a^{a+p} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

4. $\langle , \rangle$ entsteht aus $\langle , \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ durch Diskretisierung:

$$f \rightsquigarrow f_{[n]} := \begin{pmatrix} f(a+p/n) \\ f(a+2p/n) \\ \vdots \\ f(a+p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ ($f_{[n]}$ ist "ad hoc", d.h. keine übl. Notat.)

$$\Longrightarrow \langle f_{[n]}, g_{[n]} \rangle = \sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{jp}{n}\right) g\left(a + \frac{jp}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \langle f_{[n]}, g_{[n]} \rangle = \frac{1}{p} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{p}{n}}_{h} f\left(a + \frac{jp}{n}\right) g\left(a + \frac{jp}{n}\right)}_{\to \int_a^{a+p} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \text{ ("Rechtsregel")}} =$$

$$= \langle f, g \rangle$$

5. Offenbar ist immer $\langle f, f \rangle \geq 0$ (bei komplexwertigen Funktionen wegen Bemerkung 3). Weiters gilt $\langle f, f \rangle = 0$ genau dann, wenn f "fast überall" 0 ist, d.h. für $f \in F_p$, daß es in einem Periodenintervall nur in endlich vielen Punkten $\neq 0$ ist. Damit $\| \cdot \|$ eine Norm und nicht nur eine Halbnorm ist, d.h. damit $\|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0$ gilt, müßte man in F_p je 2 Funktionen identifizieren, die sich in einem Periodenintervall nur in endlich vielen Punkten unterscheiden. (Das bedeutet letztlich, daß man F_p als Teilmenge des Distributionenraumes $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ auffaßt.) Für das folgende ist das unerheblich.

Satz
Die Funktionen $c_0,\ \sqrt{2}\,c_k,\ \sqrt{2}\,s_k,\ k \in \mathbb{N}$, stehen in F_p paarweise aufeinander senkrecht und haben Länge 1. (Sie sind " orthonormal").

Beweis: Es seien $k, l \in \mathbb{N}$ oder $= 0 \Longrightarrow$

$$\langle c_k, c_l \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p \cos\left(\frac{2\pi k x}{p}\right) \cos\left(\frac{2\pi l x}{p}\right) \mathrm{d}x;$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\} +, : 2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big] = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\Longrightarrow \cos\left(\frac{2\pi k x}{p}\right) \cos\left(\frac{2\pi l x}{p}\right) = \frac{1}{2}(c_{k+l} + c_{k-l})$$

$$\Longrightarrow \langle c_k, c_l \rangle = \frac{1}{2p} \int_0^p \big(c_{k+l}(x) + c_{k-l}(x)\big)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^p c_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} p: & m = 0, \\ 0: & m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \langle c_k, c_l\rangle = \begin{cases} 0: & k \neq l, \\ \frac{1}{2}: & k = l \in \mathbb{N}, \\ 1: & k = l = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow c_k \perp c_l$ für $k \neq l$, $\|c_k\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ für $k \in \mathbb{N}$, und $\|c_0\| = 1$.

Nun bliebe noch zu zeigen $\langle c_k, s_l\rangle = 0$ und $\langle s_k, s_l\rangle = \begin{cases} 0: & k \neq l \\ \dfrac{1}{2}: & k = l \in \mathbb{N} \end{cases}$

Das geht ähnlich, s. Übung 41. □

Definition

1. Eine Funktion der Form $g(x) = a_0 + a_1c_1(x) + b_1s_1(x) + \cdots + a_nc_n(x) + b_ns_n(x) = a_0c_0 + \sum_{k=1}^{n}\big(a_kc_k(x) + b_ks_k(x)\big)$ mit $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ heißt **trigonometrisches Polynom der Ordnung** n.

2. $F_{p,n} :=\{g : g \text{ trigon. Pol. d. Ord. } n\} \subset F_p$.

Bemerkung: $F_{p,n}$ ist ein endlich dimensionaler Vektorraum und nach dem Satz auf Seite 6 ist $c_0,\ \sqrt{2}\,c_1,\ \sqrt{2}\,s_1, \cdots, \sqrt{2}\,c_n,\ \sqrt{2}\,s_n$ eine ONB in $F_{p,n}$. Speziell: $\dim F_{p,n} = 1 + 2n$. Für $g(x)$ wie oben gilt:

$$g(x) = a_0 \cdot c_0 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\,c_1(x) + \frac{b_1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\,s_1(x) + \cdots + \frac{b_n}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\,s_n(x)$$

$$\Longrightarrow \left(a_0, \frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{b_1}{\sqrt{2}}, \cdots, \frac{a_n}{\sqrt{2}}, \frac{b_n}{\sqrt{2}}\right) \text{ sind die Koordinaten von } g \text{ bzgl. der obigen ONB} \Longrightarrow a_0 = \langle g, c_0\rangle,\ \frac{a_k}{\sqrt{2}} = \langle g, \sqrt{2}\,c_k\rangle,\ \frac{b_k}{\sqrt{2}} = \langle g, \sqrt{2}\,s_k\rangle$$

Also: $\boxed{a_0 = \langle g, c_0\rangle,\ a_k = 2\langle g, c_k\rangle,\ b_k = 2\langle g, s_k\rangle}$

(Direkte Kontrolle:
Z.B. $\langle g, c_k\rangle = \langle a_0c_0 + a_1c_1 + b_1s_1 + \cdots + a_nc_n + b_ns_n, c_k\rangle$
$= a_0\underbrace{\langle c_0, c_k\rangle}_{0} + \cdots + a_k\langle c_k, c_k\rangle + b_k\underbrace{\langle s_k, c_k\rangle}_{0} + \cdots + a_n\underbrace{\langle c_n, c_k\rangle}_{0} + b_n\underbrace{\langle s_n, c_k\rangle}_{0}$
$= a_k\langle c_k, c_k\rangle = \dfrac{1}{2}a_k\surd$)

Weiters nach Pythagoras:

$$\|g\|^2 = \sum \text{Koordinaten}^2 = a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{b_1^2}{2} + \cdots + \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}$$

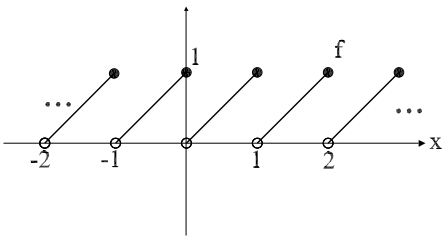
Also $$\boxed{\|g\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)}$$

(Direkte Kontrolle:

$$\begin{aligned}
\|g\|^2 &= \langle g, g\rangle = \langle g, a_0c_0 + \cdots + b_ns_n\rangle \\
&= a_0\underbrace{\langle g, c_0\rangle}_{a_0} + a_1\underbrace{\langle g, c_1\rangle}_{\frac{a_1}{2}} + b_1\underbrace{\langle g, s_1\rangle}_{\frac{b_1}{2}} + \cdots + b_n\underbrace{\langle g, s_n\rangle}_{\frac{b_n}{2}} \\
&= a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{b_1^2}{2} + \cdots + \frac{b_n^2}{2}\surd)
\end{aligned}$$

1.2 Fourier-Reihen

Beispiel: $p = 1,\ f \in F_p$ mit $f(x) = x$ für $0 < x \leq 1 \Longrightarrow$



Aufgabe: Läßt sich f als Linearkombination von c_0, c_k, s_k darstellen?
Beobachtung: f ist nicht stetig $\Longrightarrow$ f ist kein trigon. Pol $\Longrightarrow$ **mit n** $\in \mathbb{N}$ kann man f **nicht** in der Form $a_0 + \sum_{k=1}^{n}\big(a_kc_k(x) + b_ks_k(x)\big)$ schreiben. Vielleicht mit $n = \infty$, siehe später.
Idee: Approximiere f durch $g \in F_{p,n}$,
d.h. bestimme $g \in F_{p,n}$ mit $\|f - g\| = \min$.

Satz
Es seien $p > 0,\ f \in F_p,\ n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $g \in F_{p,n}$ mit $\|f - g\| = \min$. $(*)$ Und zwar ist $g = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\big(a_kc_k(x) + b_ks_k(x)\big)$ mit

$$\boxed{a_0 = \langle f, c_0\rangle,\ a_k = 2\langle f, c_k\rangle,\ b_k = 2\langle f, s_k\rangle}$$

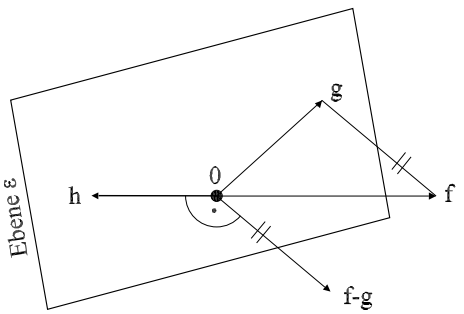
$(*)$ heißt exakt: $\|f - g\| = \min\{\|f - h\| : h \in F_{p,n}\}$)

Definition

1. a_0, a_k, b_k wie oben heißen **Fourierkoeffizienten** von f.
2. g wie oben heißt **n-te Fourierapproximation** zu f. Schreibweise für $g : f_n$.

Beweis des Satzes:

(a) Es gilt: $\|f - g\|$ wird minimal für **das** $g \in F_{p,n}$, das erfüllt $\forall h \in F_{p,n}$: $f - g \perp h$
Veranschaulichung im $\mathbb{R}^3$ ("$\hat{=}$"=entspricht)



$$\begin{array}{lcl} g \in \epsilon & \hat{=} & F_{p,n} \\ f \in \mathbb{R}^3 & \hat{=} & F_p \end{array}$$

(Rechnerischer Beweis: $\|f - g\| = \text{abs.min.} \iff \forall h \in F_{p,n} : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|f-(g+\lambda h)\|^2 \geq \|f-g\|^2$; $\|f-(g+\lambda h)\|^2 = \langle f-(g+\lambda h),\, f-(g+\lambda h)\rangle = \|f-g\|^2 - 2\lambda\langle f-g, h\rangle + \lambda^2\|h\|^2$. Diese Parabel in λ hat ihr Minimum für $\lambda = 0 \iff \langle f-g, h\rangle = 0$.)

(b) Es sei also $g = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$;
$\|f - g\|$ minimal $\overset{\text{(a)}}{\iff} \forall h \in F_{p,n} : \langle f - g, h\rangle = 0 \overset{(c_0,c_k,s_k \text{ Basis in } F_{p,n})}{\iff}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f-g, c_0\rangle = 0 \\ \langle f-g, c_k\rangle = 0 \\ \langle f-g, s_k\rangle = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \langle f, c_0\rangle = \langle g, c_0\rangle \overset{*}{=} a_0 \\ \langle f, c_k\rangle = \langle g, c_k\rangle \overset{*}{=} \frac{1}{2}a_k \\ \langle f, s_k\rangle = \langle g, s_k\rangle \overset{*}{=} \frac{1}{2}b_k \end{array} \right\} \text{ f. } 1 \leq k \leq n$$

$*$ siehe Seite 7 □

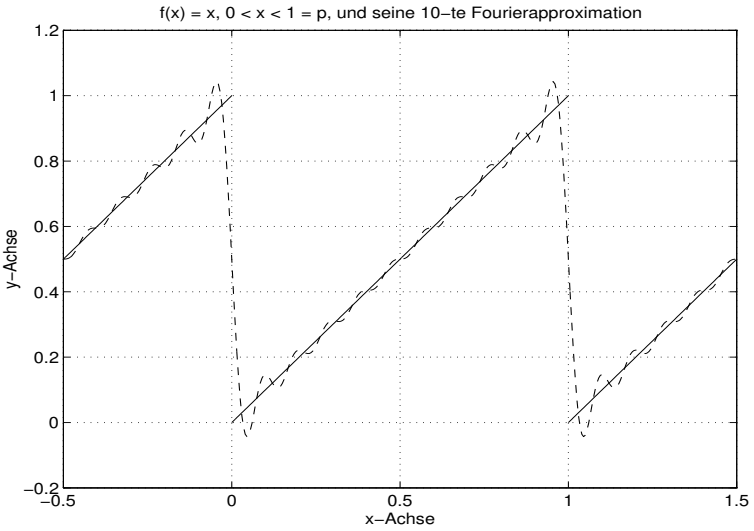
Zurück zum Beispiel: $f(x) = x,\ 0 < x \leq 1 = p$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow a_0 &= \langle f, c_o\rangle = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},\\
a_k &= 2\langle f, c_k\rangle = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(2\pi kx)}_{v'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{2x\frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k}\Big|_0^1}_{0} \underbrace{- 2\int_0^1 \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k}\,\mathrm{d}x}_{\frac{1}{2\pi k}\langle c_0, s_k\rangle} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= 2\langle f, s_k\rangle = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin(2\pi kx)}_{v'}\,\mathrm{d}x = -2x\frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k}\Big|_0^1 + \underbrace{2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k}\,\mathrm{d}x}_{\frac{1}{2\pi k}\langle c_0, c_k\rangle}\\
&= -2\cdot\frac{1}{2\pi k} = -\frac{1}{\pi k}
\end{aligned}$$

Also: $f_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k c_k + b_k s_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2\pi kx)}{k}$

Bild:



Problem: Was passiert für $n \to \infty$?
Konvergiert $\|f - f_n\|$ gegen 0?

Satz (über die Normkonvergenz)
Es seien $f \in F_p, a_0, a_k, b_k$ ihre Fourierkoeffizienten, $n \in \mathbb{N}$.

(a) $$\frac{1}{p}\int_0^p f(x)^2 \,\mathrm{d}x \overset{\boxed{A}}{=} \|f\|^2 \overset{\boxed{B}}{=} \|f - f_n\|^2 + \|f_n\|^2$$
$$\overset{\boxed{C}}{=} \|f - f_n\|^2 + a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

Speziell: $\|f\|^2 \geq a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$ "Besselsche Ungleichung"

(b) (ohne Beweis) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ und daher

$$\boxed{\|f\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)}$$ "Parsevalsche Gleichung"

Beweis von (a):
$\boxed{A}$=Definition der $\|.\|$
$\boxed{C}$: siehe Seite 8
$\boxed{B}$:
$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle f - f_n + f_n,\, f - f_n + f_n\rangle$$
$$= \underbrace{\langle f - f_n,\, f - f_n\rangle}_{\|f-f_n\|^2} + \underbrace{2\langle f - f_n,\, f_n\rangle}_{=0*)} + \underbrace{\langle f_n, f_n\rangle}_{\|f_n\|^2}$$

$*$) nach Seite 8: dort ist $g = f_n$ und man kann auch $h = f_n$ setzen, da $f_n \in F_{p,n}$.

□

Zurück zum Beispiel: $\|f\|^2 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Longrightarrow$ (Parseval; $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$, $b_k = \frac{-1}{\pi k}$) $\Longrightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 2\pi^2\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}_{1/12} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$$

Problem: Nach Satz auf Seite 11, (b) gilt $\|f - f_n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Gilt auch **für festes x** $f_n(x) \to f(x)$? D.h. konvergiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$ und $= f(x)$?

Definition Die Reihe $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k c_k(x) + b_k s_k(x)\big)$ heißt **Fourierreihe** von f im Punkt x.

Bemerkung:

1. Die Fourierreihe ist für jedes feste x eine Zahlenreihe (ähnlich wie bei der Taylorreihe).
2. Die Fourierreihe kann auch in manchen x divergieren (ähnlich wie bei der Taylorreihe). Das passiert aber nur in pathologischen Fällen sowie bei Distributionen (z.B. δ).

Definition
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt **Dirichlet-Punkt** von $f \Longleftrightarrow$

(a) $\underbrace{\lim_{x\nearrow x_0} f(x)}_{f(x_0-)}$ und $\underbrace{\lim_{x\searrow x_0} f(x)}_{f(x_0+)}$ existieren $(\neq \infty)$

(Schreibweise: $f(x_0-)$, $f(x_0+)$)

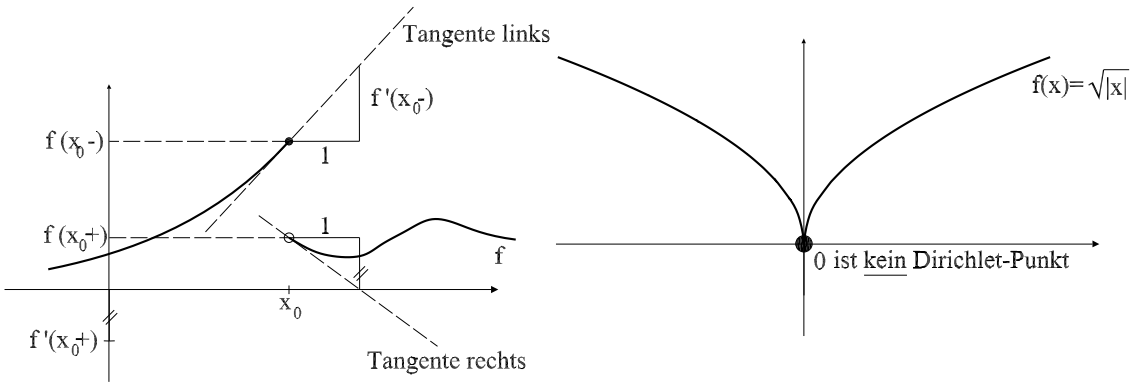
(b) $\underbrace{\lim_{x\nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0-)}{x-x_0}}_{f'(x_0-)}$ und $\underbrace{\lim_{x\searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0+)}{x-x_0}}_{f'(x_0+)}$ exist. $(\neq \infty)$

(Schreibweise: $f'(x_0-)$, $f'(x_0+)$)

Bemerkung:

1. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet: 1805-1859

2. Jeder Punkt, wo f differenzierbar ist, ist ein Dirichlet-Punkt von f. Genauer: f in x_0 differenzierbar
   $\Longleftrightarrow$ x_0 Dirichlet-Punkt $\wedge\, f(x_0-) = f(x_0+) \wedge f'(x_0-) = f'(x_0+)$.



Satz (über die punktweise Konvergenz, ohne Beweis)
$f \in F_p, a_0, a_k, b_k$ ihre Fourierkoeffizienten, x_0 Dirichlet-Punkt von f. Dann gilt: Die Fourierreihe von f in x_0 konvergiert gegen $\frac{1}{2}\big(f(x_0-)+f(x_0+)\big)$, d.h.

$$\boxed{\frac{1}{2}\big(f(x_0-) + f(x_0+)\big) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k c_k(x_0) + b_k s_k(x_0)\big)}$$

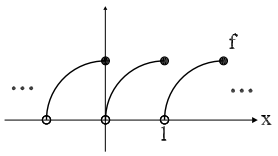
Bemerkungen:

1. Wenn f stetig in x_0 ist, so ist $\frac{1}{2}\big(f(x_0-) + f(x_0+)\big) = f(x_0)$, d.h. in allen Dirichlet-Punkten x, in denen f **stetig** ist (i.a. also fast immer), gilt

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k c_k(x) + b_k s_k(x)\big)}$$

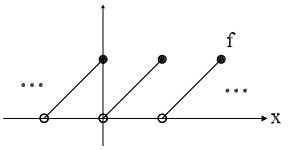
2. Die Fourierreihe konvergiert auch noch unter schwächeren Bedingungen, z. B. für

$f(x) = \sqrt{x},\ 0 < x \le 1 = p$, d.h.



(Die " Dini-Bedingung" ist in $x_0 = 0$ erfüllt.)

Zurück zum Beispiel:



$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_k = 0,\ b_k = -\frac{1}{\pi k}$$

(a) Z.B.: $x_0 = 0 : \dfrac{1}{2}\big(f(0-) + f(0+)\big) = \dfrac{1}{2}(1+0) = \dfrac{1}{2}$,

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k c_k(0) + b_k s_k(0)\big) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi k}\right)\underbrace{\sin(2\pi k \cdot 0)}_{0} = \frac{1}{2}\ \surd$$

(b) Z.B.: $x_0 = \frac{1}{4} :\ f\big(\frac{1}{4}\big) = \frac{1}{4}$,

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k c_k\big(\tfrac{1}{4}\big) + b_k s_k\big(\tfrac{1}{4}\big)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overbrace{\sin(2\pi k/4)}^{*)}}{k} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \qquad *)\ \begin{cases} 0 & : \ k \text{ gerade} \\ \pm 1 & : \ k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Kontrolle: $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + - \cdots$ für $|x| \le 1$

$$\left(\text{Denn: } \arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\ \surd$$

Problem: Gegeben sei h auf dem Intervall $]\,0, q]$. Läßt sich h nur durch Cosinusse bzw. nur durch Sinusse darstellen?
Lemma: Für $f \in F_p$ gilt:

(a) f gerade $\Longrightarrow \forall k : b_k = 0$

(b) f ungerade $\Longrightarrow a_0 = 0, \forall k : a_k = 0$

Beweis zu (a) ((b) geht analog)

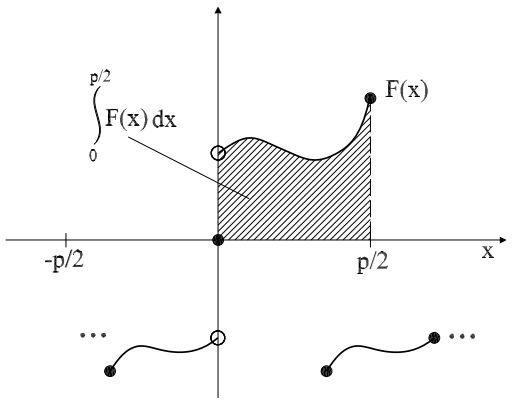
$$b_k = 2\langle f, s_k\rangle = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} \underbrace{f(x) \sin\left(\frac{2\pi k x}{p}\right)}_{F(x)} \,\mathrm{d}x$$

F ist ungerade, denn

$$F(-x) = f(-x)\sin\left(\frac{2\pi k(-x)}{p}\right) = f(x) \cdot \left(-\sin\left(\frac{2\pi k x}{p}\right)\right) = -F(x)$$

$$\Longrightarrow \int_{-p/2}^{0} F(x)\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} -\int_{0}^{p/2} F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int_{-p/2}^{p/2} F(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow b_k = 0$$



(Analytischer Beweis von $(*)$: $\int_{-p/2}^{0} F(x)\,\mathrm{d}x = [\,\text{Substitution } x = -t] =$

$\int_{t=p/2}^{0} \underbrace{F(-t)}_{-F(t)} \underbrace{\mathrm{d}(-t)}_{-\mathrm{d}t} = \int_{p/2}^{0} F(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{p/2} F(t)\,\mathrm{d}t)$ □

Daher verwenden wir folgende **Methode:**
$h :]\,0, q] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben;

1. Schritt: Setze $h \left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ zu $\left\{ \begin{array}{l} h_g \\ h_u \end{array} \right\}$ auf $[-q, q]$ fort.

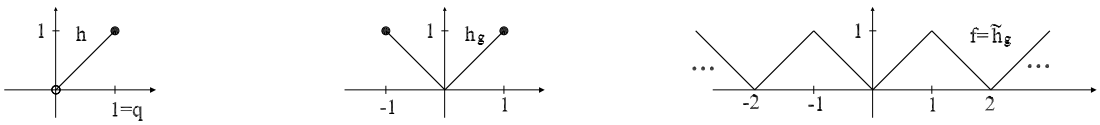
2. Schritt: Setze $\left\{ \begin{array}{l} h_g \\ h_u \end{array} \right\}$ periodisch fort zu $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_g \\ \tilde{h}_u \end{array} \right\} = f \in F_p$ mit $p = 2q$

Dann gilt nach dem Lemma für
$\begin{cases} \tilde{h}_g : \forall k : b_k = 0 \\ \tilde{h}_u : a_0 = 0,\ \forall k : a_k = 0 \end{cases}$

Definition
Die Fourierreihe von $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_g \\ \tilde{h}_u \end{array} \right\}$ heißt Fourier$\left\{ \begin{array}{l} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{array} \right\}$reihe von h.

Beispiel: $h(x) = x$ für $0 < x \leq 1$. Entwickle h z.B. in eine Fouriercosinusreihe!

Angabe: 1. Schritt: 2. Schritt:



$$p = 2!! \qquad \tilde{h}_g \text{ gerade} \Longrightarrow \forall k : b_k = 0$$

$$a_0 = \langle f, c_0 \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h_g(x)\,\mathrm{d}x \overset{h_g \text{ gerade}}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$a_k = 2\langle f, c_k \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h_g(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) \mathrm{d}x \overset{h_g \text{ gerade}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 \underbrace{\underbrace{h(x)}_{=x}}_{u} \cdot \underbrace{\cos(\pi k x)}_{v'}\,\mathrm{d}x =$$

$$2\Bigg[\underbrace{x\frac{\sin(\pi k x)}{\pi k}\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k}\,\mathrm{d}x\Bigg] \;=\; 2 \cdot \frac{\cos(\pi k x)}{\pi^2 k^2}\Big|_0^1 \;=\; \frac{2}{\pi^2 k^2}\left[(-1)^k - 1\right] =$$

$\begin{cases} 0 : k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi^2 k^2} : k \text{ ungerade} \end{cases}$

Also: $\tilde{h}_g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5\cdots} \dfrac{\cos(\pi k x)}{k^2}$
$\Big\downarrow$
(alle Punkte sind Dirichlet-Punkte)

Speziell: $x = 0 : 0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1,3,5,\cdots} \dfrac{1}{k^2} \Longrightarrow \sum_{k=1,3,5,\cdots} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

(Kontrolle: $\displaystyle\sum_{k=1,3,5,\cdots} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2,4,6,\cdots} \frac{1}{k^2} =$

$\dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$ $\surd$)

Beachte: Für $0 < x < 1$ erhalten wir **zwei** Darstellungen der Funktion $y = x$:

$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi kx)}{k}$ (Fourierreihe aus Seite 10)

$x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1,3,5,\cdots}\frac{\cos(\pi kx)}{k^2}$ (Fouriercosinusreihe siehe oben)

Diese Reihen stimmen überein in $0 < x < 1$, liefern aber etwas Verschiedenes in $-1 \le x \le 0,\ x \ne -\frac{1}{2}$.

1.3 Fourier-Integrale

Wiederholung: $f \in F_p,\ x$ Dirichlet-Punkt von f

$\Longrightarrow \frac{1}{2}\big(f(x-) + f(x+)\big) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k c_k(x) + b_k s_k(x)\big)$

wobei $c_k(x) = \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right),\ s_k(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$,

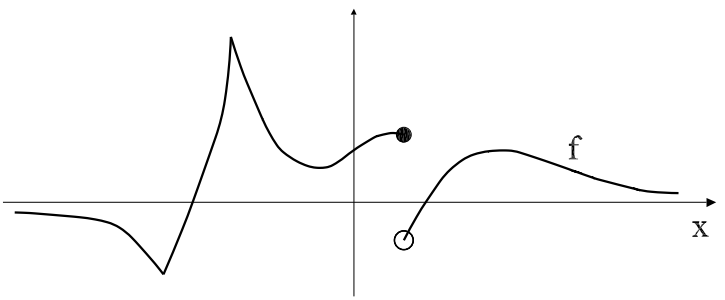
$a_0 = \langle f, c_0\rangle,\ a_k = 2\langle f, c_k\rangle,\ b_k = 2\langle f, s_k\rangle$,

$\langle f, g\rangle = \frac{1}{p}\int_a^{a+p} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

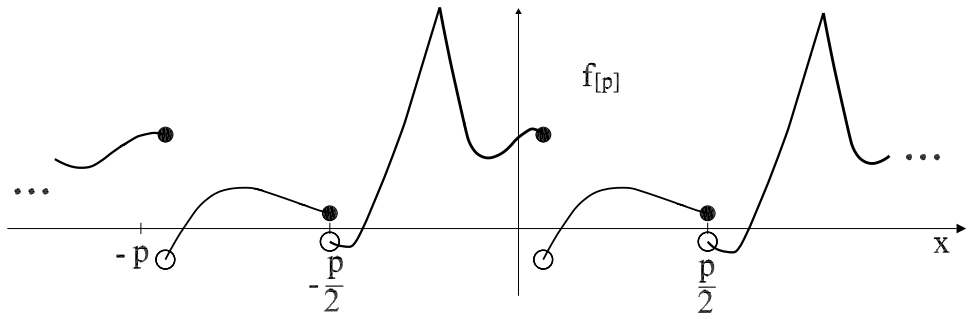
Problem Läßt sich auch ein **nicht** periodisches f in etwas der Fourierreihe Analoges entwickeln?

Heuristische Herleitung des Satzes auf Seite 19

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stückweise stetig und es gelte $\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x < \infty$



Für $p > 0$ sei $f_{[p]} \in F_p$ bestimmt durch $f_{[p]}(x) = f(x)$ für $-\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2}$.



Wir entwickeln $f_{[p]}$ in eine Fourierreihe $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k c_k + b_k s_k)$.

Vorsicht: a_0, a_k, b_k, c_k, s_k hängen von p ab! Was passiert für $p \to \infty$?

Z.B. $a_0 = \langle f_{[p]}, c_0 \rangle = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\downarrow 0} \underbrace{\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\downarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \infty} \to 0$

Es sei $h := \frac{2\pi}{p}$ und $\kappa := h \cdot k = \frac{2\pi k}{p} \Longrightarrow c_k(x) = \cos\left(\frac{2\pi k x}{p}\right) = \cos(\kappa x)$

und $a_k = 2\langle f_{[p]}, c_k \rangle = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) c_k(x)\,\mathrm{d}x = h \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\cos(\kappa x)\,\mathrm{d}x \approx$

$h \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\kappa x)\,\mathrm{d}x$ für großes p.

Definition

1. $F_\infty := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt und mit $\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x < \infty\}$
2. Für $f \in F_\infty$ und $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \geq 0$, heißen

$$\boxed{a(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\kappa x)\,\mathrm{d}x,\ b(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\kappa x)\,\mathrm{d}x}$$

die **Fourierkoeffizienten** von f.

3. Die Funktion $(\mathcal{F}f)(\kappa) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi\big(a(\kappa) - \mathrm{i}b(\kappa)\big)$ heißt **Fouriertransformation** von f.

Bemerkung: Da $-\big|f(x)\big| \le f(x)\cos(\kappa x) \le \big|f(x)\big|$ (und ebenso für sin), sind die Integrale für $a(\kappa)$, $b(\kappa)$ konvergent.

Nun sei x ein Dirichlet-Punkt von f und $|x| < \dfrac{p}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(f(x-) + f(x+)\big) &= \frac{1}{2}\big(f_{[p]}(x-) + f_{[p]}(x+)\big) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k c_k(x) + b_k s_k(x)\big) \\
\begin{pmatrix}\text{weil } a_k \approx h\cdot a(\kappa)\\ \text{und } b_k \approx h\cdot b(\kappa)\\ \text{und } a_0 \approx 0\end{pmatrix} &\overset{\nwarrow\,\searrow}{\approx} \sum_{\substack{\kappa = h\cdot k\\ k=1,2,\cdots}} h\cdot\big[a(\kappa)\cos(\kappa x) + b(\kappa)\sin(\kappa x)\big]
\end{aligned}$$

Diese Reihe ist eine Riemannsumme zu $\int\limits_0^{\infty}\big(a(\kappa)\cos(\kappa x) + b(\kappa)\sin(\kappa x)\big)\,\mathrm{d}\kappa$.

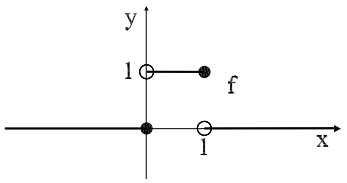
Für $p \to \infty$ gilt "Schrittweite" $h = \dfrac{2\pi}{p} \to 0$ und daher $\sum \to \int$. Das führt zum

Satz Es sei $f \in F_\infty$, $a(\kappa)$, $b(\kappa)$ die Fourierkoeffizienten von f, x Dirichlet-Punkt von f. Dann gilt

$$\boxed{\frac{1}{2}\big(f(x-) + f(x+)\big) = \int_0^{\infty}\big(a(\kappa)\cos(\kappa x) + b(\kappa)\sin(\kappa x)\big)\,\mathrm{d}\kappa}$$

Definition Dieses $\int$ heißt **Fourierintegral** von f in x.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1 & : \ 0 < x \le 1 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$



$$\Longrightarrow a(\kappa) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\kappa x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\kappa x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\kappa x)}{\kappa}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{\sin(\kappa)}{\pi\kappa},$$

$$b(\kappa) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\kappa x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\cos(\kappa x)}{\kappa}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1-\cos\kappa}{\pi\kappa}$$

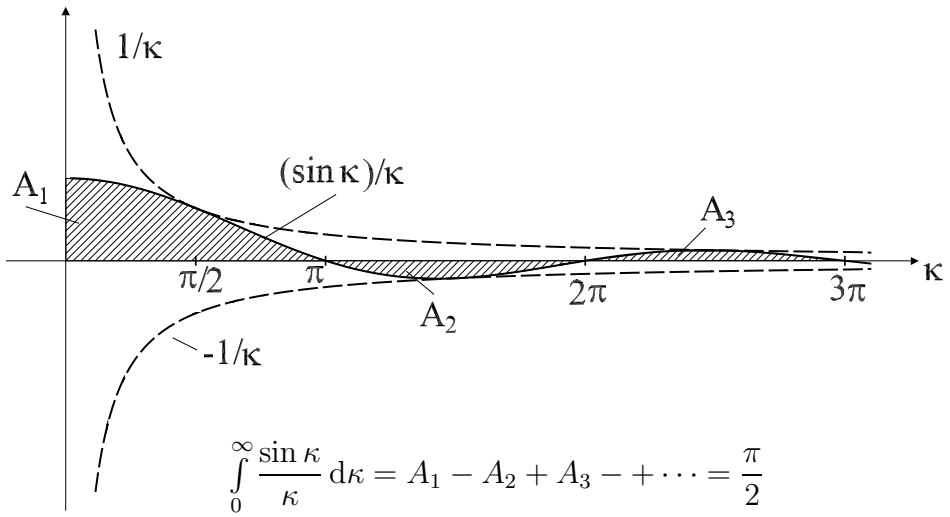
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\big(f(x-) + f(x+)\big) = \left\{\begin{array}{lcl} 1 & : & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & : & x = 0 \vee x = 1 \\ 0 & : & \text{sonst} \end{array}\right\} \underset{\text{(nach dem Satz)}}{=}$$

$$= \int_0^\infty \big(a(\kappa)\cos(\kappa x) + b(\kappa)\sin(\kappa x)\big)\,\mathrm{d}\kappa$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\sin\kappa}{\pi\kappa}\cos(\kappa x) + \frac{1-\cos\kappa}{\pi\kappa}\sin(\kappa x)\right)\mathrm{d}\kappa.$$

Speziell: $x = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\kappa}{\pi\kappa}\,\mathrm{d}\kappa \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\kappa}{\kappa}\,\mathrm{d}\kappa = \frac{\pi}{2}$

Bild zu $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\kappa}{\kappa}\,\mathrm{d}\kappa$:



$$\int_0^\infty \frac{\sin\kappa}{\kappa}\,\mathrm{d}\kappa = A_1 - A_2 + A_3 - + \cdots = \frac{\pi}{2}$$

Bemerkung: $h :]\,0, \infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ läßt sich analog zu Seite 16 in ein Fourier $\left\{ \begin{array}{l} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{array} \right\}$integral entwickeln, indem man h zu $f = \left\{ \begin{array}{l} h_g \text{ gerade} \\ h_u \text{ ungerade} \end{array} \right\}$ fortsetzt und f in ein Fourierintegral entwickelt.

Wenn $h_0(x) := \left\{ \begin{array}{lcl} h(x) & : & x > 0 \\ 0 & : & x \le 0 \end{array} \right\} = \displaystyle\int_0^\infty \big(a(\kappa)\cos(\kappa x) + b(\kappa)\sin(\kappa x)\big)\,\mathrm{d}\kappa$, so sind $\left\{ \begin{array}{l} h_g \\ h_u \end{array} \right\}(x) = 2\displaystyle\int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} a(\kappa)\cos(\kappa x) \\ b(\kappa)\sin(\kappa x) \end{array} \right\} \mathrm{d}\kappa$ das Fourier $\left\{ \begin{array}{l} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{array} \right\}$integral von h_0.

Kapitel II

Partielle Differentialgleichungen

Definition: Eine Gleichung in den Unbekannten $x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \cdots, \cdots$ heißt **partielle Differentialgleichung** in n Variablen. Eine Funktion $u(x_1, \cdots, x_n)$ heißt **Lösung**, wenn sie die Gleichung erfüllt. Der Grad der höchsten vorkommenden Ableitung von u heißt **Ordnung** der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung heißt **linear**, wenn sie in $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots$ linear ist, d.h. die Form $a(x) = b(x)u + c_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + c_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} + d_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots$ hat. Wenn $a = 0$, so heißt sie **homogen**, sonst **inhomogen**. Wenn $b(x)$, $c_1(x), \cdots$ konstant sind, so heißt sie linear **mit konstanten Koeffizienten**.
Beispiel: $z \ln\left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (y-1)\frac{\partial z}{\partial y}$ ist eine nicht-lineare Differentialgleichung in 2 Variablen der Ordnung 1 (mit $x \hat{=} x_1, y \hat{=} x_2, z \hat{=} u$). $z = x^y$ ist eine Lösung.
Bemerkung: Für **lineare** Differentialgleichungen gilt das **Superpositionsprinzip:**

(a) Differentialgleichung homogen $\Longrightarrow$ die Lösungen bilden einen Vektorraum

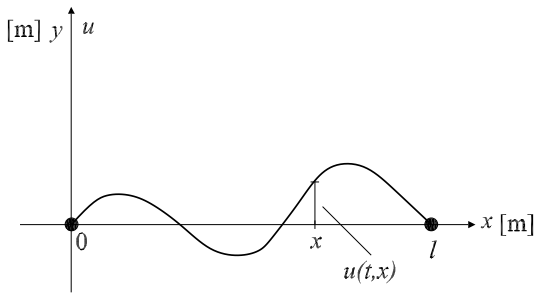
(b) u_1 Lösung zu a_1, u_2 Lösung zu $a_2, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow u_1 + \lambda u_2$ ist Lösung zu $a_1 + \lambda a_2$.

2.1 Die schwingende Saite

2.1.1 Aufstellung der Gleichung

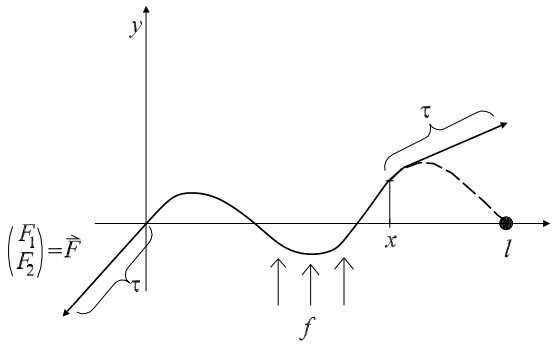
Eine elastische Saite, die in zwei Punkten eingespannt ist, ist aufgrund von Anfangsauslenkungen und/oder Kräften deformiert:

Bild zur Zeit t



Die Auslenkung zur Zeit t über x sei $u(t,x)$[m], die Schnittkraft in der Saite sei τ[N], die $\frac{\text{Masse}}{\text{Längeneinheit bzgl. } x}$ sei σ[kg/m], und es wirke in y-Richtung eine äußere Last mit Dichte $f(t,x)$ [N/m].

Annahme 1: σ und τ sind konstant $\Longrightarrow$ bei Schnitt über x zur Zeit t gilt:



Ersatzkraft: $\tau \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$

Newton ergibt in y-Richtung: $\forall x$:

$$\int_0^x f(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \;+\; \tau \cdot \frac{\partial u/\partial x}{\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}} \;+\; F_2 \;=\; \text{Masse} \;\times\; \text{Beschleunigung}$$

$$= \sigma \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Differenzieren nach x liefert:

$$f(t,x) + \tau \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u/\partial x}{\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}}\right)}_{\frac{\partial^2 u/\partial x^2}{\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}} - \frac{(\partial u/\partial x)^2 \cdot (\partial^2 u/\partial x^2)}{\left[1+(\partial u/\partial x)^2\right]^{3/2}}} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) \quad \left(= \frac{\partial^2 u/\partial x^2}{\left[1+(\partial u/\partial x)^2\right]^{3/2}} = \kappa = \text{Krümmung}\right)$$

$$\left[\textbf{Annahme 2: } \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 << 1\right] \Longrightarrow \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Definition Die partielle Differentialgleichung $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(t,x)}$ heißt **Differentialgleichung der schwingenden Saite** oder (eindimensionale) **Wellengleichung**. (Sie ist linear mit konstanten Koeffizienten, 2. Ordnung in 2 Variablen $t \hat{=} x_1, x \hat{=} x_2$).

Bemerkung: Oben ist $c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$[m/sec] und $a = \frac{f}{\sigma}$[m/sec^2].
Bei der Lösung verwenden wir die **Randbedingung** $\forall t : u(t,0) = u(t,l) = 0$ und 2 **Anfangsbedingungen**:

$$\forall x \in [0,l] : \begin{cases} u(0,x) &= h_0(x) \cdots \text{Anfangsauslenkung} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= h_1(x) \cdots \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{cases}$$

2.1.2 Lösung mit Separationsansatz

Wir betrachten nur den homogenen Fall, d.h. $a = 0$. Wir suchen zunächst Lösungen in Produktform, d.h. $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$.
Dann gilt $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{T} \cdot X$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \cdot X''$ und daher $0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$
$\ddot{T}(t) \cdot X(x) - c^2 T(t) \cdot X''(x) \Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab}} = \underbrace{c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{hängt nicht von } t \text{ ab}}$
$\Longrightarrow$ bei einer Änderung von t oder x bleiben **beide** Seiten unverändert
$\Longrightarrow$ beide Seiten sind überhaupt konstant.
Die Konstante heiße K, d.h. $\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = K$.

(a) $c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = K \Longrightarrow X'' - \frac{K}{c^2} \cdot X = 0$

Ansatz: $X(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \Longrightarrow \lambda^2 - \frac{K}{c^2} = 0$

1. Fall: $\frac{K}{c^2} = d^2 > 0 \Longrightarrow \lambda = \pm d$ reell $\Longrightarrow X(x) = C_1 \mathrm{e}^{dx} + C_2 \mathrm{e}^{-dx}$
Randbedingung:
$u(t,0) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0 \Longrightarrow C_1 + C_2 = 0$
$u(t,l) = 0 \Longrightarrow X(l) = 0 \Longrightarrow C_1 \mathrm{e}^{dl} + C_2 \mathrm{e}^{-dl} = 0 \Longrightarrow$
$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{dl} & \mathrm{e}^{-dl} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0;$$
$\det A = \mathrm{e}^{-dl} - \mathrm{e}^{dl} = -2\mathrm{sh}(dl) \neq 0 \Longrightarrow C_1 = C_2 = 0 \Longrightarrow X = 0 \Longrightarrow$ $u = 0$ uninteressant!

2. Fall: $\frac{K}{C^2} = -d^2$, $d \geq 0 \Longrightarrow \lambda = \pm \mathrm{i}d$ rein imaginär $\Longrightarrow X(x) = C_1 \cos(dx) + C_2 \sin(dx)$

Randbedingung: $X(0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$; $X(l) = 0 \Longrightarrow C_2 \sin(dl) = 0 \Longrightarrow dl = k\pi$, $k = 1, 2, \cdots$ ($k = 0$ gibt wieder $u = 0$, uninteressant)
$\Longrightarrow d = \frac{k\pi}{l}$, $X(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right)$ und $K = -c^2 d^2 = -\frac{k^2 \pi^2 c^2}{l^2}$

(b) $\frac{\ddot{T}}{T} = K = -\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} \Longrightarrow \ddot{T} + \frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} T = 0$
Ansatz: $T(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \Longrightarrow \lambda^2 + \frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} = 0$, $\lambda = \pm \mathrm{i}\frac{k\pi c}{l} \Longrightarrow T(t) = \tilde{C}_1 \cos\left(\frac{k\pi c}{l} t\right) + \tilde{C}_2 \sin\left(\frac{k\pi c}{l} t\right)$

Insgesamt erhalten wir die Lösungen

$$u_k(t,x) = T(t)X(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \left[\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi c}{l} t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi c}{l} t\right)\right]$$

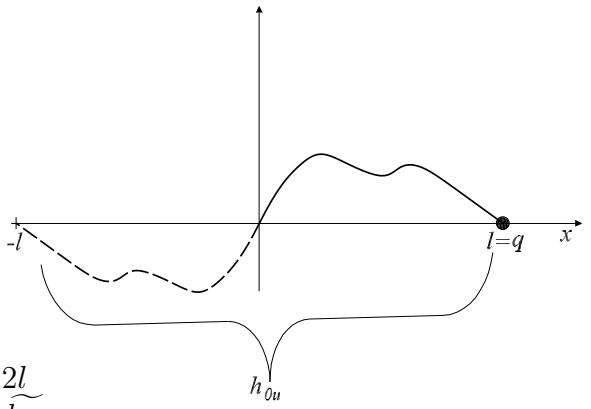
(wobei $\alpha_k = \tilde{C}_1 \cdot C_2$, $\beta_k = \tilde{C}_2 \cdot C_2$)
Nach dem Superpositionsprinzip ist auch

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \left[\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi c}{l} t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi c}{l} t\right)\right]}$$

eine Lösung der Wellengleichung.
α_k, β_k werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

1. $h_0(x) = u(0,x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)}$

$\Longrightarrow$ =Fouriersinusreihe von $h_0(x)$ am Intervall $[0,l]$
($l = q$ in Seite 16)



$p = 2l$
$f = \widetilde{h_{0u}} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \alpha_k = 2\langle f, s_k\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2l} \cdot \int_{-l}^{l} \underbrace{h_{0u}(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{2l}x\right)}_{\text{gerade}} \mathrm{d}x$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2l} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{l} h_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \mathrm{d}x$$

2. Ebenso ist $h_1(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left[-\alpha_k \cdot \frac{k\pi c}{l} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi c}{l} \cdot 0\right)}_{0} + \beta_k \cdot \frac{k\pi c}{l} \underbrace{\cos\left(\frac{k\pi c}{l} \cdot 0\right)}_{1} \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \frac{k\pi c}{l} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)}$$

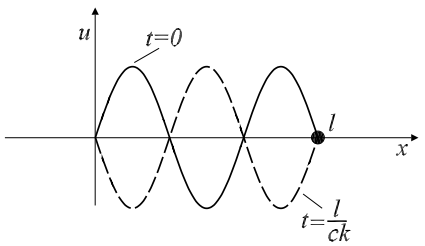
$\Longrightarrow$ = Fouriersinusreihe von
$h_1(x)$ am Intervall $[0,l]$

$$\Longrightarrow \beta_k \cdot \frac{k\pi c}{l} = 2 \cdot \frac{1}{2l} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{l} h_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \mathrm{d}x$$

2.1.3 Zusammenhang mit der Musik

$\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}\left(\frac{k\pi c}{l}t\right)$ sind sogenannte **stehende Wellen**

Bild für $k = 3$ und cos



Für festes x hat die Saite (und die umgebende Luft) die Frequenz
$\frac{kc}{2l}\frac{\text{Schwingungen}}{\text{Zeiteinheit}}\left[\frac{1}{\text{sec}} = \text{Hz}\right]$
Im allgemeinen ist die Amplitude $\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ maximal für $k = 1$. Dieser Hauptton hat daher die Frequenz $\gamma = \frac{c}{2l} = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}\cdot\frac{1}{2l}$ [Hz]. γ ist proportional zu $\sqrt{\text{Spannung}}$ und umkehrt proportional zur Saitenlänge und zu $\sqrt{\text{Dichte}}$. (Für die 3. Geigensaite (a′) ist z. B. $\gamma = 440$ [Hz], $l \approx 33$ [cm]. Falls $\sigma \approx \frac{1}{2}$ [g/m] folgt $\tau = \sigma \cdot 84332 \approx 42$ [N])

Tabelle zum Grundton a′:

Note	Intervall	reine Stimmung	temperierte Stimmung (Werckmeister)	Saitenlänge (für reine Stimmung)
a′	Prim	440 Hz	440 Hz	l
h′	Sekund	$\frac{9}{8}$a′=495	$2^{2/12}$a′≈493.9	$\frac{8}{9}l$
c″	kl. Terz	$\frac{6}{5}$a′=528	$2^{3/12}$a′≈523.3	$\frac{5}{6}l$
cis″	gr. Terz	$\frac{5}{4}$a′=550	$2^{4/12}$a′≈554.4	$\frac{4}{5}l$
d″	Quart	$\frac{4}{3}$a′=586.$\dot{6}$	$2^{5/12}$a′≈587.3	$\frac{3}{4}l$
e″	Quint	$\frac{3}{2}$a′=660	$2^{7/12}$a′≈659.3	$\frac{2}{3}l$
fis″	gr. Sext	$\frac{5}{3}$a′=733.$\dot{3}$	$2^{9/12}$a′≈740	$\frac{3}{5}l$
gis″	gr. Septim	$\frac{15}{8}$a′=825	$2^{11/12}$a′≈830.6	$\frac{8}{15}l$
a″	Oktav	2a′=880	2a′=880	$\frac{1}{2}l$
e‴	Quint d. Oktav	3a′=1320	$2^{19/12}$a′=1318.5	$\frac{1}{3}l$
a‴	2. Oktav	4a′=1760	4a′=1760	$\frac{1}{4}l$

2.2 Membran und Torsion

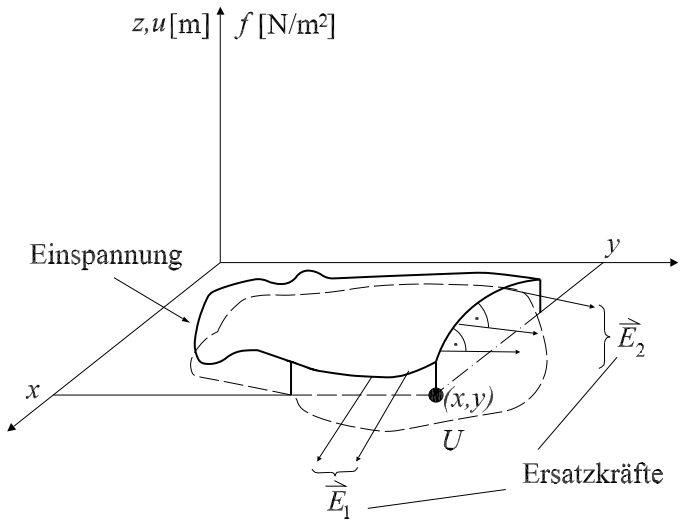
2.2.1 Die Membrangleichung

Eine dünne elastische Membran ist über dem Rand eines Gebietes $U \subset \mathbb{R}^2$ eingespannt und senkrecht dazu wirken Kräfte mit Dichte $f(t,x,y)$ [N/m^2]. Wieder seien

τ =Normalspannung [N/m] und $\sigma = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Flächeneinh.(in } x,y)}$[kg/m^2] konstant.

(Es wird Schubspannung = 0, d.h. der Spannungszustand in jedem Punkt isotrop angenommen.)

$$\vec{E}_2 \perp \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{E}_2 \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix},\ |\vec{E}_2| = \tau$$



$$\Longrightarrow \quad \vec{E}_2 \quad = \quad \frac{\tau}{\sqrt{(1+u_x^2)(1+u_x^2+u_y^2)}} \cdot \begin{pmatrix} -u_x u_y \\ 1+u_x^2 \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{E}_2 \, \mathrm{d}s \quad = \quad \frac{\tau \, \mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -u_x u_y \\ 1+u_x^2 \\ u_y \end{pmatrix}$$

Bei Schnitt über x =konstant und y =konstant gilt (Newton in z-Richtung):

$$\iint\limits_{\substack{(\xi,\eta)\in U \\ \xi\le x, \eta\le y}} f(t,\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta + \text{Randkräfte} + \underbrace{\int\limits_{\substack{(x,\eta)\in U \\ \eta\le y}} \tau \cdot \frac{\partial u/\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta}_{\text{von } \vec{E}_1}$$

$$+ \underbrace{\int\limits_{\substack{(\xi,y)\in U \\ \xi\le x}} \tau \cdot \frac{\partial u/\partial y}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}(t,\xi,y)\,\mathrm{d}\xi}_{\text{von } \vec{E}_2}$$

$$= \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \sigma \iint\limits_{\substack{(\xi,\eta)\in U \\ \xi\le x,\, \eta\le y}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

Differenzieren nach x und y liefert:

$$f(t,x,y)+\tau\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u/\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\right]+\tau\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u/\partial y}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\right] = \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Unter den Annahmen $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 << 1$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 << 1$, kommen wir zur

Definition Die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = a(t,x,y)}$$

heißt **Differentialgleichung der schwingenden Membran** oder (zweidimensionale) **Wellengleichung**.

Bemerkung:

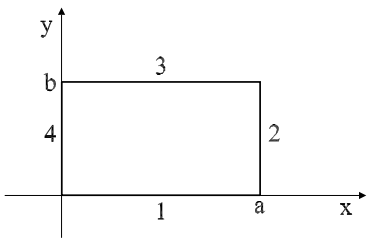
1. Statt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ schreibt man Δu oder genauer $\Delta_2 u$. (2 für 2 Variable)

2. Zur Differentialgleichung braucht man **eine Randbedingung**, in unserem Fall
   $\forall t : u(t,x,y) = v(x,y)$ für $(x,y) \in$ Rand von U, und **zwei Anfangsbedingungen**, nämlich $\forall (x,y) \in U : u(0,x,y) = h_0(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = h_1(x,y)$.

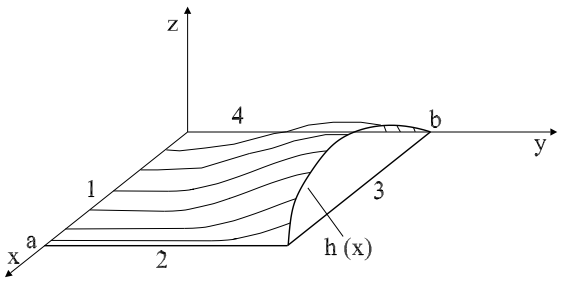
3. Im statischen Fall ist $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und f hängt nicht von t ab $\Longrightarrow \Delta u = -\frac{1}{\tau} f(x,y)$. Diese Differentialgleichung heißt **Poissongleichung**. Falls $f = 0$, ist u einzig durch die Einspannung am Rand von U bestimmt; $\Delta u = 0$ zusammen mit der Randbedingung $u(x,y) = v(x,y)$ für $(x,y) \in \partial U$ (=Schreibweise für "Rand von U") heißt **Dirichletproblem** der **Laplacegleichung**.

2.2.2 Ruhende Membran über einem Rechteck

$U = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$



Der Rand von U hat vier Teile. Dort ist u vorgegeben. Zunächst sei $u = 0$ auf den Seiten 1,2,4 und $u(x,b) = h(x)$:



Separationsansatz: $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$0 = \Delta u = X'' \cdot Y + X \cdot Y'' \Longrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K$$

a) $X'' - K \cdot X = 0$

Randbedingung: $u(0,y) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0$ (Rand 4)

$u(a,y) = 0 \Longrightarrow X(a) = 0$ (Rand 2)

$\Longrightarrow$ (wie in Seite 24) $X(x) = C_2 \sin(dx)$,

$da = k\pi, k = 1, 2, \cdots,\ K = -d^2 = -\dfrac{k^2\pi^2}{a^2}$

b) $-\dfrac{Y''}{Y} = -\dfrac{k^2\pi^2}{a^2} \Longrightarrow Y'' - \dfrac{k^2\pi^2}{a^2} Y = 0$

$$\Longrightarrow Y(y) = \tilde{C}_1 \mathrm{e}^{k\pi y/a} + \tilde{C}_2 \mathrm{e}^{-k\pi y/a} = \tilde{\tilde{C}}_1 \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a} y\right) + \tilde{\tilde{C}}_2 \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a} y\right)$$

Randbedingung: $u(x,0) = 0 \Longrightarrow Y(0) = 0 \Longrightarrow \tilde{\tilde{C}}_1 = 0$ (Rand 1)

$$\Longrightarrow Y(y) = \tilde{\tilde{C}}_2 \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a} y\right),\ u_k(x,y) = \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a} y\right)$$

Das Superpositionsprinzip liefert

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a} y\right)$$

Die Randbedingung am Rand 3 gibt

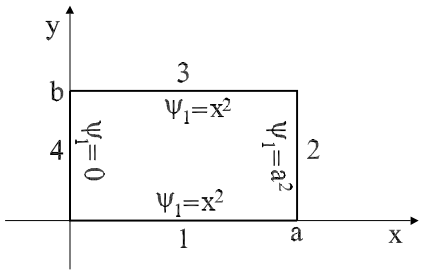
$h(x) = u(x,b) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\dfrac{k\pi}{a} x\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{k\pi}{a} b\right) \Longrightarrow \alpha_k \cdot \operatorname{sh}\left(\dfrac{k\pi}{a} b\right) =$ Fouriersi-

nuskoeffizient von $h = 2 \cdot \dfrac{1}{2a} \cdot 2 \cdot \int\limits_0^a h(x) \sin\left(\dfrac{k\pi}{a} x\right) \mathrm{d}x$

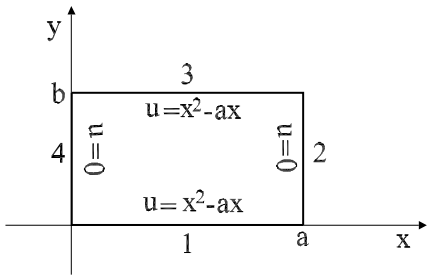
2.2.3 Torsion von Stäben mit rechteckigem Querschnitt

Die Torsionsfunktion ψ eines einfach zusammenhängenden Querschnittes U erfüllt $\Delta\psi = -2$ in U und $\psi = 0$ auf ∂U (Parkus, Mechanik der festen Körper, Seite 220). Das entspricht einer ruhenden, eben eingespannten Membran mit $\frac{f}{\tau} = 2$ ("Prandtlsches Membrangleichnis"). Die Funktion $-x^2$ erfüllt $\Delta(-x^2) = -2$, ist aber nicht 0 am Rand. Wir setzen daher $\psi(x, y) = -x^2 + \psi_1(x, y)$, wobei $\Delta\psi_1 = 0$ und $\psi_1(x, y) = x^2$ am Rand von U.
Speziell sei nun $U = [0, a] \times [0, b]$ wie auf Seite 29.

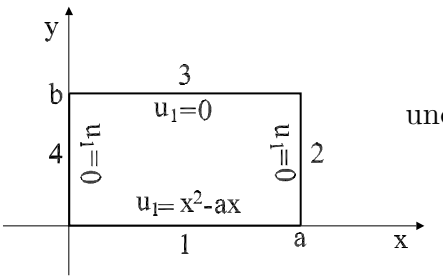
Dann ist auf ∂U :



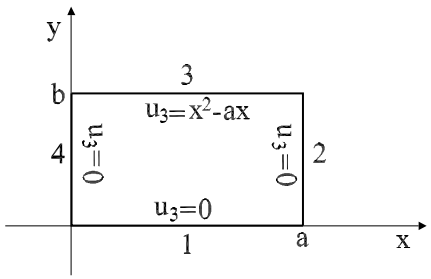
Wenn wir $\psi_1 = ax + u$ setzen, so ist $\Delta u = \Delta(\psi_1 - ax) = \Delta\psi_1 - a\Delta x = 0 - 0 = 0$ und auf ∂U gilt:



Daher ist $u = u_1 + u_3$, wobei $\Delta u_1 = \Delta u_3 = 0$,



und



Für u_3 folgt aus 2.2.2:

$$u_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \text{ mit } \alpha_k \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a (x^2 - ax)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x =$$

$$\cdots = \begin{cases} 0 & : \ k \text{ gerade} \\ -\dfrac{8a^2}{k^3\pi^3} & : \ k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also ist $u_3(x,y) = -\dfrac{8a^2}{\pi^3} \sum\limits_{k=1,3,\cdots} \dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)}{k^3 \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right)} \sin\left(\dfrac{k\pi}{a}x\right)$

Aus Symmetriegründen ist $u_1(x,y) = u_3(x, b-y)$

$$\Longrightarrow u(x,y) = -\frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\cdots} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)}{k^3} \cdot \frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right)} \underbrace{\left[\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) + \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}(b-y)\right)\right]}$$

$$\mathrm{sh}(\alpha) + \mathrm{sh}(\beta) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \Longrightarrow \underbrace{2\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{2a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{k\pi(2y-b)}{2a}\right)}$$

$$\mathrm{sh}(2\alpha) = 2\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha \Longrightarrow \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y - \tfrac{b}{2}\right)\right) / \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi b}{2a}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Somit folgt } \psi &= -x^2 + ax + u \\ &= -x^2 + ax - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\cdots} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)\right)}{k^3 \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi}{a} \cdot \frac{b}{2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \end{aligned}$$

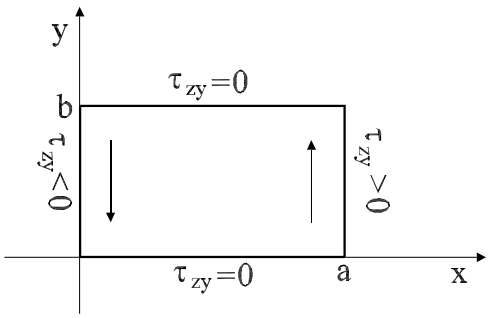
Aus ψ erhält man die Schubspannungen durch

$$\tau_{zx} = G\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial y}, \ \tau_{zy} = -G\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

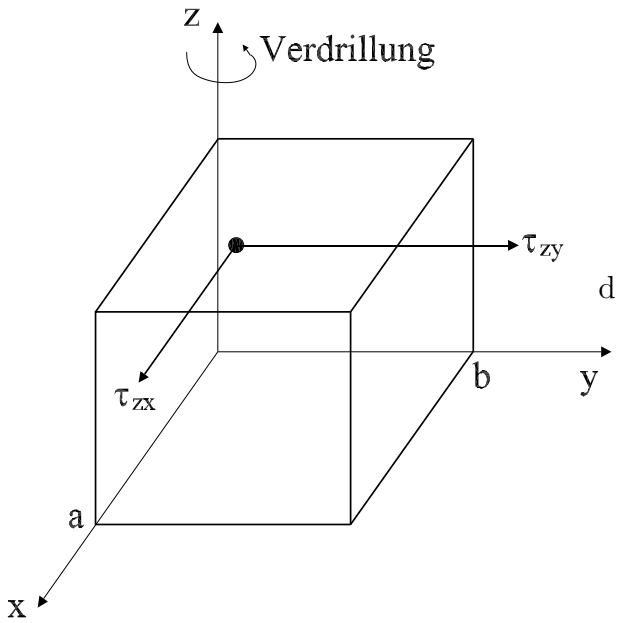
wobei $\vartheta = \dfrac{\text{Verdrillung}}{\text{Längeneinheit in z-Richtung}} [\mathrm{m}^{-1}]$,

G = Schubmodul $[\mathrm{N/m}^2]$.

Da harmonische Funktionen Extrema nur am Rand annehmen können, und da $\Delta\tau_{zx} = \Delta\tau_{yz} = 0$, werden die Schubspannungen am Rand maximal. Wegen $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ und weil $\tau_{yz} = 0$ am Rand $y = 0$ bzw. $y = b$



wobei



d.h. $\tau_{zy}(x,0) = \tau_{zy}(x,b) = 0$.

Aus der Formel für ψ folgt:

$$\tau_{zy} = G\vartheta\left[2x - a + \frac{8a}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y-\frac{b}{2}\right)\right)}{k^2\mathrm{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}\right)}\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \tau_{zy}(0,y) = G\vartheta\left[-a + \frac{8a}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y-\frac{b}{2}\right)\right)}{k^2\mathrm{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}\right)}\right]$$

Das muß 0 sein für $y = 0$ $\left(\text{Kontrolle: } \sum_{k=1,3,\cdots}\frac{1}{k^2} = \pi^2/8\right)$

Daher: $|\tau_{zy}(0,y)| = \max \Longleftrightarrow \sum$ möglichst klein $\Longleftrightarrow y = \frac{b}{2}$.

Also: $|\tau_{zy}|_{\max} = G\vartheta a\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}\frac{1}{k^2 \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi b}{2a}\right)}\right]$

Für $a \leq b$ ist dies die größte auftretende Schubspannung und für einen eventuellen Bruch verantwortlich.

Tabelle:

a/b	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{\tau_{\max}}{G\vartheta a}$	0.675	0.776	0.848	0.930	0.985

Bemerkung: Da $\mathrm{ch}(x)$ sehr schnell $\to \infty$ für $x \to \infty$, konvergiert die obige Reihe sehr schnell und gilt näherungsweise

$$a \leq b \Longrightarrow \tau_{\max} \approx G\vartheta a\left(1 - \frac{8}{\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi b}{2a}\right)}\right).$$

2.3 Die Plattengleichung

2.3.1 Bezeichnungen und Beziehungen der Plattentheorie

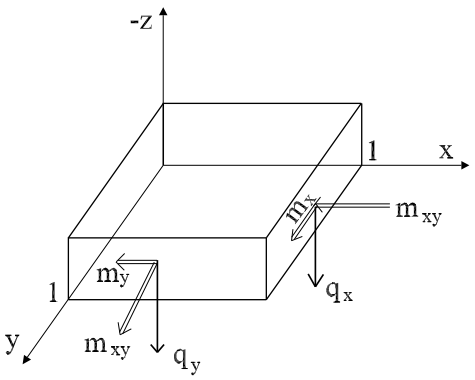
a) **Charakteristika der Platte**

h = Plattendicke [m]
E = Elastitizitätsmodul= $\frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}}$ [N/m^2]
μ = Querdehnungszahl = $-E \cdot \frac{\text{Querdehnung}}{\text{Spannung}}$ [1]
ϱ = Dichte [kg/m^3]
K = Biegesteifigkeit der Platte = $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ [N·m]

b) **Beobachtungsgrößen** (alle von von t, x, y abhängig)
w = Durchbiegung [m]
p = Last [N/m^2]

$q_x, q_y = \frac{\text{Scherkräfte}}{\text{Länge}}$[N/m]
$m_x, m_y = \frac{\text{Biegemomente}}{\text{Länge}}$[N]
$m_{xy} = \frac{\text{Drillmoment}}{\text{Länge}}$[N]

Bild:



c) **Gleichungen**

Plattengleichung $\boxed{\varrho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K\Delta_2^2 w = p}$

(wobei $\Delta_2^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$; $p \hat{=} f$, $\varrho h \hat{=} \sigma$ in 2.1 und 2.2),

$q_x = -K\frac{\partial}{\partial x}\Delta_2 w$, $m_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$, $m_{xy} = -(1-\mu)K\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

etc.

d) **Randbedingungen** (z.B. für $x = c$)

eingespannt: $w(t, c, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, c, y) = 0$

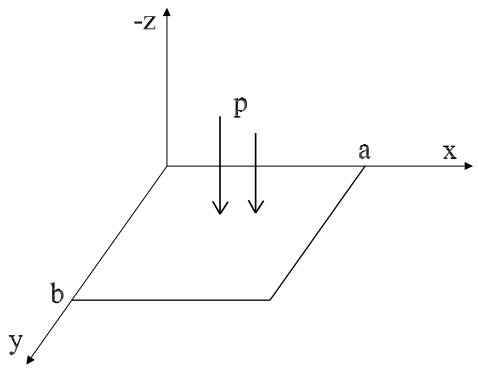
frei drehbar gelagert: $w(t, c, y) = 0$ und

$m_x(t, c, y) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, c, y) = 0$

freier Rand: $m_x(t, c, y) = 0$

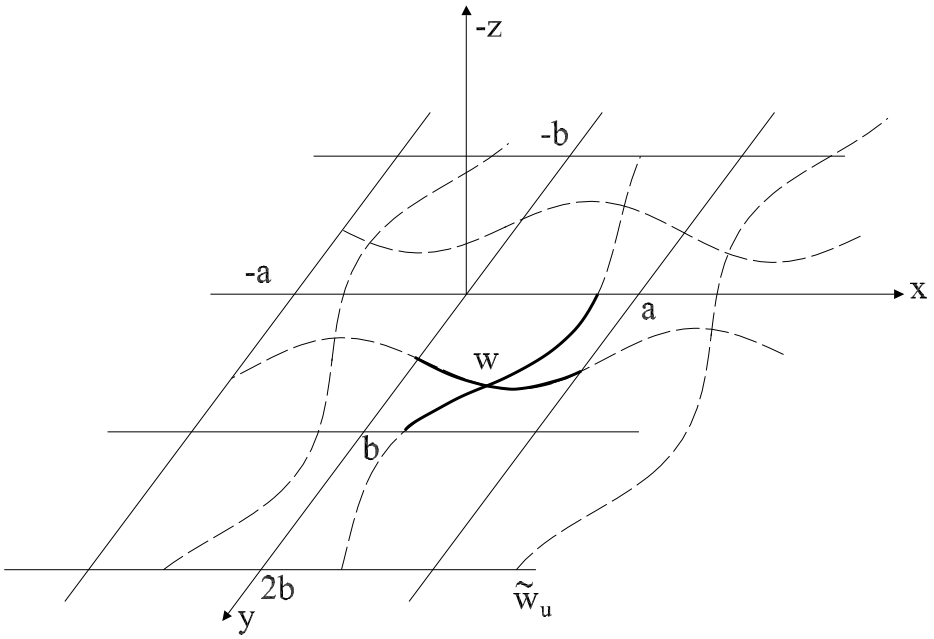
und (nach Kirchhoff) $q_x(t, c, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}(t, c, y) = 0$

Im folgenden betrachten wir **die frei drehbar gelagerte Rechteckplatte** $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$ **unter der statischen Last** $p(x, y)$:



2.3.2 Das Spiegelungsprinzip

a) Wir setzen w zunächst von $[0,a]\times[0,b]$ ungerade fort +) auf $[-a,a]\times[-b,b]$ und dann periodisch fort zu $\tilde{w}_u$ auf $\mathbb{R}^2$.
+) d.h. $w(-x,y)=w(x,-y)=-w(x,y),\forall x,y.$



Für jedes feste y ist $\tilde{w}_u(-,y)$ periodisch mit Periode $2a$ und ungerade
$\Longrightarrow \tilde{w}_u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(y)\sin\left(\frac{2k\pi x}{2a}\right),$

wobei $\alpha_k(y)=2\cdot\frac{1}{2a}\cdot 2\cdot\int_0^a \tilde{w}_u(x,y)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x;$

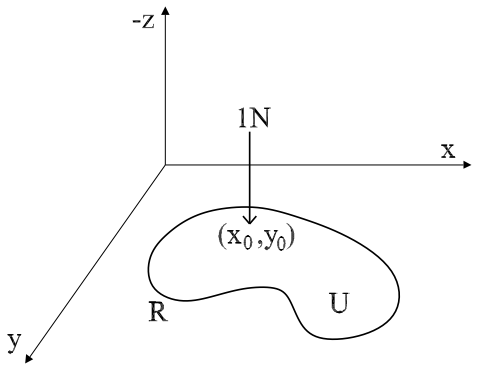
für festes x ist $\tilde{w}_u(x,-)$ periodisch mit Periode $2b$ und ungerade;

$\tilde{w}_u(x, y+2b) = \tilde{w}_u(x,y) \Longrightarrow \forall k : \alpha_k(y+2b) = \alpha_k(y)$
$\tilde{w}_u(x,-y) = -\tilde{w}_u(x,y) \Longrightarrow \forall k : \alpha_k(-y) = -\alpha_k(y)$
$$\Longrightarrow \alpha_k(y) = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{2l\pi y}{2b}\right),$$
$$\text{wobei } \alpha_{kl} = 2 \cdot \frac{1}{2b} \cdot 2 \cdot \int_0^b \alpha_k(y) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w(x,y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$
$$\text{Also: } \tilde{w}_u(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \ (*)$$
Das ist die Entwicklung von w in eine doppelte Fouriersinusreihe.
Beachte: $=$ in $(*)$ gilt nur dort, wo w stetig ist, vergleiche Seite 13.

b) Bisher wurden die Randbedingungen nicht verwendet.
(**Beachte:** Aus $(*)$ **folgt nicht**, daß z.B. $w(0,y) = 0$, denn
$$0 = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{k\pi 0}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \overset{(S.13)}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2}\Big[\tilde{w}_u(0+,y) + \tilde{w}_u(0-,y)\Big]).$$
Weil nun $w = 0$ am Rand und $\partial_x^2 w$ bzw. $\partial_y^2 w = 0$ an den Rändern $x =$const. bzw. $y =$const., ist $\tilde{w}_u$ bei $x = ka$ und $y = lb$ 3-mal stetig und ein 4. Mal links/rechtseitig differenzierbar;
$$\Delta_2^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$
$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) = \frac{k^4\pi^4}{a^4} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \text{ etc.}$$
$$\Longrightarrow \tilde{p}_u(x,y) = K\Delta_2^2 \tilde{w}_u(x,y)$$
$$= K\pi^4 \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right).$$
Also sind $K\pi^4 \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2$ die Fouriersinuskoeffizienten von $p(x,y) \Longrightarrow$
(siehe Seite 36 a) $\Longrightarrow K\pi^4 \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2 =$
$$= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$
Damit sind die α_{kl} bestimmt und daraus ergibt sich w mit $(*)$ siehe oben.

2.3.3 Die $\delta-$„Funktion“

Auf einer Platte mit Grundriß U und Randbedingungen R sei eine Punktlast der Größe 1[N] im Punkt (x_0, y_0) gegeben, d.h. $p = \delta_{(x_0,y_0)}$



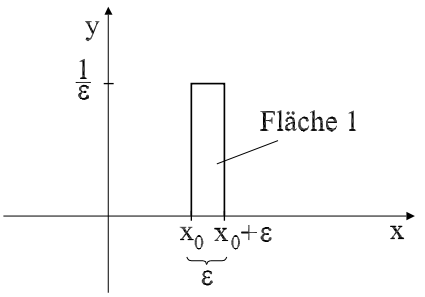
Die resultierende Durchbiegung w hängt von der Lage des Punktes (x_0, y_0) ab und ich schreibe dafür $w_{(x_0,y_0)}$.

Definition
$w_{(x_0,y_0)}(x, y)$ heißt **Greensche Funktion** (oder **Einflußgröße, Einflußfeld**) zu $K\Delta_2^2, U, R$.

Beachte: $\delta_{(x_0,y_0)}$ ist eigentlich keine Funktion, sondern eine “Distribution”. Im Eindimensionalen ist δ_{x_0} der distributionelle Grenzwert von

$$\delta^{\epsilon}_{x_0}(x) := \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{\epsilon} & : & x_0 < x < x_0 + \epsilon \\ 0 & : & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

für $\epsilon \searrow 0$.



Weiters ist $\delta_{(x_0,y_0)}(x, y) = \delta_{x_0}(x)\delta_{y_0}(y)$, was auch mit einem $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0}$ verstanden werden muß , da $\delta_{x_0}(x)$ keinen Sinn hat. Wenn auch $\delta_{x_0}(x)$ eigentlich sinnlos ist, so ist $\int f(x)\delta_{x_0}(x)\,\mathrm{d}x$ für stetiges f sinnvoll, nämlich

$$\int f(x)\delta_{x_0}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int f(x)\delta^{\epsilon}_{x_0}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x_0+\epsilon)-F(x_0)} \overset{\text{Haupts.d.}\int\text{-rechn.}}{\overset{\uparrow}{=}} f(x_0)$$

(F Stammfunktion von f)

So können wir auch $\delta_{x_0},\ 0 < x_0 < a$, in eine Fouriersinusreihe entwickeln (bzgl. $p = 2a$):

$$\begin{aligned}
\delta_{x_0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \\
\alpha_k &= 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot 2 \int_0^a \delta_{x_0}(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \\
\Longrightarrow \delta_{x_0}(x) &= \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)
\end{aligned}$$

Diese Reihe divergiert im üblichen Sinn, läßt sich aber distributionell interpretieren. Damit gelangen wir zur **Navierschen Darstellung** der Greenschen Funktion der frei drehbar gelagerten Rechteckplatte:

$$w_{(x_0,y_0)}(x,y) = \frac{4}{\pi^4 abK} \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y_0}{b}\right)}{\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right)$$

Beweis: Nach Seite 37 gilt für $0 < x < a,\ 0 < y < b$:

$$w(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right), \text{ wobei } K\pi^4 \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{4}{ab} \int_0^a \delta_{x_0}(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x \cdot \int_0^b \delta_{y_0}(y) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \mathrm{d}y = \frac{4}{ab} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y_0}{b}\right)$$

□

Bemerkung:

1. Die Reihe für $w_{(x_0,y_0)}(x,y)$ ist im üblichen Sinn konvergent nach dem Integralkriterium, da $\int_{x=1}^{\infty} \int_{y=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^3} = \frac{\pi}{4} < \infty.$

2. Diese Reihe konvergiert "langsam". Man kann aber $\sum_{l \in \mathbb{N}}$ aufsummieren und erhält dann eine schnell konvergente einfache Reihe:

$$0 < x < a,\ 0 < y < y_0 \Longrightarrow$$

$$w_{(x_0,y_0)}(x,y) = \frac{a^2}{\pi^3 K}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(b-y_0)}{a}\right)}{k^3\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)}\cdot$$

$$\left\{\left[1+\frac{k\pi b}{a}\mathrm{cth}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)-\frac{k\pi(b-y_0)}{a}\mathrm{cth}\left(\frac{k\pi(b-y_0)}{a}\right)\right]\right.$$

$$\left.\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right)-\frac{k\pi y}{a}\mathrm{ch}\left(\frac{k\pi y}{a}\right)\right\}$$

Tabelle einiger linearer, partieller Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten

$\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t},\ \partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2},\ \Delta_n = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2, \not\nabla = \gamma^\mu\partial_\mu,\ \gamma$ Diracmatrizen, $\lambda \in \mathbb{R}$

Operator	Name, Bedeutung	Typ
$\partial_1 + i\partial_2$	Cauchy-Riemann	elliptisch (statisch)
Δ_n	Laplace, Membran	
$\Delta_n - \lambda$	Helmholtz	
Δ_2^2	ruhende Platte	
$\Delta_2^2 + \lambda^2$	gebettete Platte	
$\partial_1^4 + 2(1-2\lambda^2)\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4$	orthotrope Platte	
$\Delta_2^2 - 4\lambda^2\partial_1^2$	gespannte Platte	
$\partial_t^2 - c^2\Delta_n$	Wellen	hyperbolisch, (dynamisch, endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)
$\partial_t^2 - c^2\Delta_n - \lambda$	Klein-Gordon	
$\mathrm{i}\not\nabla - \lambda I$	Dirac	
$\partial_t - \lambda^2\Delta_n$	Wärmeleitung	parabolisch (dynamisch, unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)
$\partial_t - \mathrm{i}\lambda\Delta_n$	Schrödinger	
$\partial_t^2 + \lambda^2\Delta_n^2$	schwingende(r) Balken, Platte	