

Skriptum zu

**Fourier-Analysis und  
Partielle  
Differentialgleichungen**

(Teil der Vorlesung „Höhere Analysis I“, SS 1998)

Dr. Peter Wagner

# Inhaltsverzeichnis

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Fourier-Analysis</b>                                       | <b>2</b>  |
| 1.1       | Periodische Funktionen . . . . .                              | 2         |
| 1.2       | Fourier-Reihen . . . . .                                      | 8         |
| 1.3       | Fourier-Integrale . . . . .                                   | 17        |
| <b>II</b> | <b>Partielle Differentialgleichungen</b>                      | <b>21</b> |
| 2.1       | Die schwingende Saite . . . . .                               | 22        |
| 2.1.1     | Aufstellung der Gleichung . . . . .                           | 22        |
| 2.1.2     | Lösung mit Separationsansatz . . . . .                        | 23        |
| 2.1.3     | Zusammenhang mit der Musik . . . . .                          | 26        |
| 2.2       | Membran und Torsion . . . . .                                 | 27        |
| 2.2.1     | Die Membrangleichung . . . . .                                | 27        |
| 2.2.2     | Ruhende Membran über einem Rechteck . . . . .                 | 29        |
| 2.2.3     | Torsion von Stäben mit rechteckigem Querschnitt . . . . .     | 31        |
| 2.3       | Die Plattengleichung . . . . .                                | 34        |
| 2.3.1     | Bezeichnungen und Beziehungen<br>der Plattentheorie . . . . . | 34        |
| 2.3.2     | Das Spiegelungsprinzip . . . . .                              | 36        |
| 2.3.3     | Die $\delta$ -„Funktion“ . . . . .                            | 38        |
| <b>5</b>  | <b>Übungsblätter</b>  | <b>40</b> |

# Kapitel I

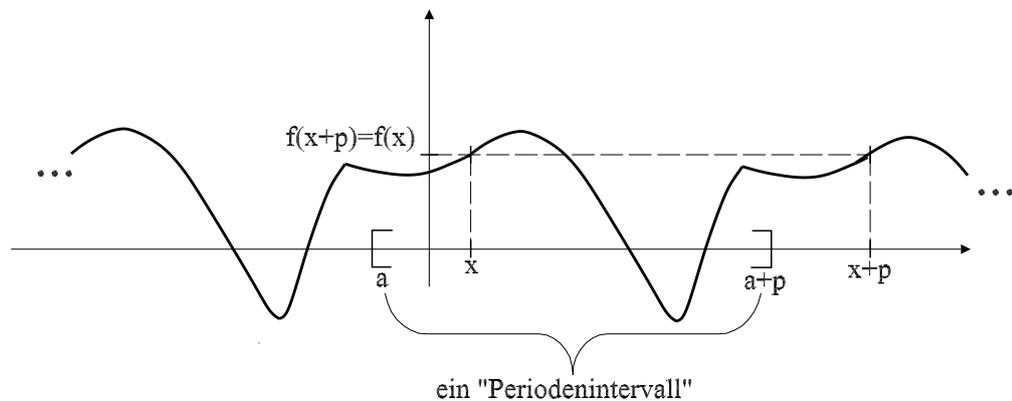
## Fourier-Analyse

(benannt nach Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830))

### 1.1 Periodische Funktionen

#### Definition

Es sei  $p > 0$ .  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) hat **Periode  $p$**  (bzw. **ist periodisch mit Periode  $p$** )  $\iff \forall x \in \mathbb{R} : f(x+p) = f(x)$ .



Bemerkung:

1. Wenn  $f$  Periode  $p$  hat, so genügt es,  $f$  auf einem Periodenintervall  $[a, a+p]$  anzugeben.
2.  $f$  hat Periode  $p \implies f$  hat auch Periode  $np$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Denn:

$$\begin{aligned} f(x+np) &= f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) \\ &= f(x+(n-2)p) = \dots = f(x+p) = f(x) \end{aligned}$$

3.  $f, g$  haben Periode  $p$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig  $\implies f \pm g, f \cdot g, f/g, h \circ f$  haben auch Periode  $p$ .

Beispiel:

| Funktion                                | Bild | eine Periode | kleinste Periode |
|---|------|--------------|------------------|
| $\sin x$                                |      | $2\pi$       | $2\pi$           |
| $\cos x$                                |      | $2\pi$       | $2\pi$           |
| $e^{ix}$                                |      | $2\pi$       | $2\pi$           |
| $\tan x$                                |      | $2\pi$       | $\pi$            |
| *) $\sin(2\pi x)$                       |      | 1            | 1                |
| *) $\sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right)$  |      | $p$          | $p$              |
| *) $\sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$ |      | $p$          | $\frac{p}{k}$    |

\*) ebenso für  $\cos(\dots)$  und  $e^i \dots$

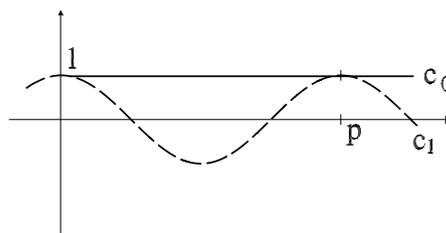
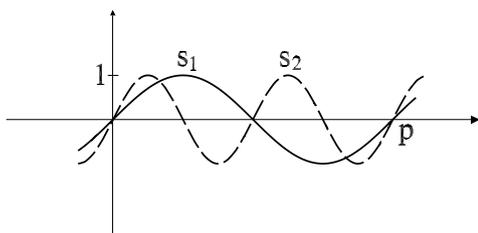
Im folgenden sei immer  $p > 0$  fest und  $k \in \mathbb{N}$  (oder manchmal, wenn ausdrücklich gesagt, ist auch  $k = 0$  zugelassen). Rechnerische Kontrolle zum letzten Beispiel:

$$\sin\left(\frac{2\pi k(x+p)}{p}\right) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p} + 2\pi k\right) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$$

$$\implies f(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) \text{ hat Periode } p$$

### Definition

1.  $F_p := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stückweise stetig, beschränkt und mit Periode } p\}$
2.  $c_0(x) = 1$  (konstant),  $c_k(x) = \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$ ,  $s_k(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)$ . Dann gilt:  $c_0, c_k, s_k \in F_p$ .



Bemerkung:  $F_p$  ist ein Vektorraum:  $f, g \in F_p, \lambda \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \lambda f \in F_p \\ f + g \in F_p \end{cases}$

### Definition

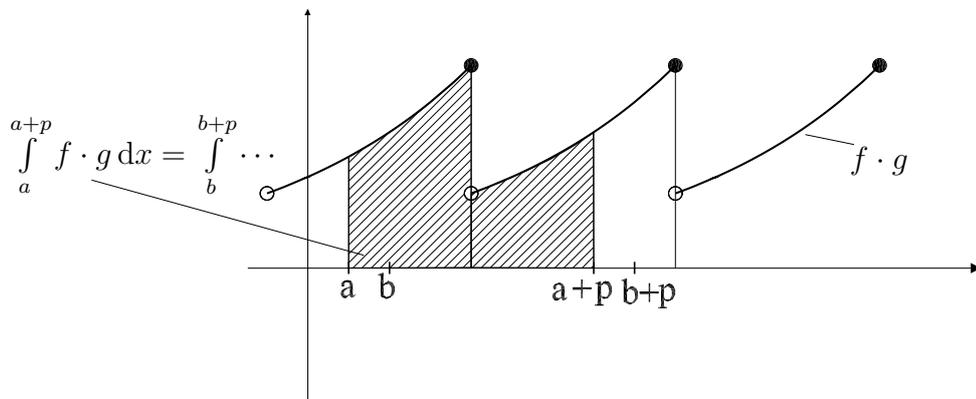
$F_p$  wird mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{p} \int_a^{a+p} f(x)g(x) dx$$

versehen.  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$  heißt **Norm** von  $f$ .

Bemerkungen:

1.  $f \cdot g \in F_p$ . Daher ist es egal, über **welches** Periodenintervall  $[a, a + p]$  man integriert:



$$\left( \text{Exakt: } \frac{d}{da} \left[ \int_a^{a+p} (f \cdot g)(x) dx \right] = \frac{d}{da} \left[ \int_0^{a+p} f \cdot g - \int_0^a f \cdot g \right] \stackrel{\text{Hauptsatz der } f\text{-Rechnung}}{=} (f \cdot g)(a+p) - (f \cdot g)(a) = 0 \right)$$

2.  $\langle, \rangle$  erfüllt die Axiome eines inneren Produktes:

- (a)  $\langle \lambda f + g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$  (“linear in 1. Komp.”)
- (b)  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$  (“symmetrisch”)
- (c)  $\langle f, f \rangle > 0$  außer für  $f = 0$  fast überall (“positiv definit”)

3. Bei komplexwertigen Funktionen setzt man

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{p} \int_a^{a+p} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

4.  $\langle, \rangle$  entsteht aus  $\langle, \rangle$  auf  $\mathbb{R}^n$  durch Diskretisierung:

$$f \rightsquigarrow f_{[n]} := \begin{pmatrix} f(a + p/n) \\ f(a + 2p/n) \\ \vdots \\ f(a + p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (f_{[n]} \text{ ist "ad hoc", d.h. keine \u00fcb.})$$

Notat.)

$$\begin{aligned} \implies \langle f_{[n]}, g_{[n]} \rangle &= \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{jp}{n}\right) g\left(a + \frac{jp}{n}\right) \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \langle f_{[n]}, g_{[n]} \rangle &= \frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{p}{n}}_h f\left(a + \frac{jp}{n}\right) g\left(a + \frac{jp}{n}\right)}_{\rightarrow \int_a^{a+p} f(x)g(x) dx \text{ ("Rechtsregel")}} = \\ &= \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

5. Offenbar ist immer  $\langle f, f \rangle \geq 0$  (bei komplexwertigen Funktionen wegen Bemerkung 3). Weiters gilt  $\langle f, f \rangle = 0$  genau dann, wenn  $f$  "fast \u00fcberall" 0 ist, d.h. f\u00fcr  $f \in F_p$ , da\u00df es in einem Periodenintervall nur in endlich vielen Punkten  $\neq 0$  ist. Damit  $\|\cdot\|$  eine Norm und nicht nur eine Halbnorm ist, d.h. damit  $\|f\| = 0 \implies f = 0$  gilt, m\u00fcsste man in  $F_p$  je 2 Funktionen identifizieren, die sich in einem Periodenintervall nur in endlich vielen Punkten unterscheiden. (Das bedeutet letztlich, da\u00df man  $F_p$  als Teilmenge des Distributionenraumes  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  auffa\u00df.) F\u00fcr das folgende ist das unerheblich.

### Satz

Die Funktionen  $c_0, \sqrt{2}c_k, \sqrt{2}s_k, k \in \mathbb{N}$ , stehen in  $F_p$  paarweise aufeinander senkrecht und haben L\u00e4nge 1. (Sie sind "orthonormal").

**Beweis:** Es seien  $k, l \in \mathbb{N}$  oder  $= 0 \implies$

$$\begin{aligned} \langle c_k, c_l \rangle &= \frac{1}{p} \int_0^p \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) \cos\left(\frac{2\pi lx}{p}\right) dx; \\ \left. \begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} +, : 2 \\ \implies \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] &= \cos \alpha \cos \beta \\ \implies \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) \cos\left(\frac{2\pi lx}{p}\right) &= \frac{1}{2} (c_{k+l} + c_{k-l}) \\ \implies \langle c_k, c_l \rangle &= \frac{1}{2p} \int_0^p (c_{k+l}(x) + c_{k-l}(x)) dx; \end{aligned}$$

$$\int_0^p c_m(x) dx = \begin{cases} p & m = 0, \\ 0 & m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\implies \langle c_k, c_l \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l, \\ \frac{1}{2} & k = l \in \mathbb{N}, \\ 1 & k = l = 0 \end{cases}$$

$$\implies c_k \perp c_l \text{ für } k \neq l, \|c_k\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ für } k \in \mathbb{N}, \text{ und } \|c_0\| = 1.$$

$$\text{Nun bliebe noch zu zeigen } \langle c_k, s_l \rangle = 0 \text{ und } \langle s_k, s_l \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Das geht ähnlich, s. Übung 41. □

### Definition

1. Eine Funktion der Form  $g(x) = a_0 + a_1 c_1(x) + b_1 s_1(x) + \dots + a_n c_n(x) + b_n s_n(x) = a_0 c_0 + \sum_{k=1}^n (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$  mit  $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$  heißt **trigonometrisches Polynom der Ordnung  $n$** .

2.  $F_{p,n} := \{g : g \text{ trigon. Pol. d. Ord. } n\} \subset F_p$ .

Bemerkung:  $F_{p,n}$  ist ein endlich dimensionaler Vektorraum und nach dem Satz auf Seite 6 ist  $c_0, \sqrt{2} c_1, \sqrt{2} s_1, \dots, \sqrt{2} c_n, \sqrt{2} s_n$  eine ONB in  $F_{p,n}$ . Speziell:  $\dim F_{p,n} = 1 + 2n$ . Für  $g(x)$  wie oben gilt:

$$g(x) = a_0 \cdot c_0 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} c_1(x) + \frac{b_1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} s_1(x) + \dots + \frac{b_n}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} s_n(x)$$

$\implies \left( a_0, \frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{b_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{2}}, \frac{b_n}{\sqrt{2}} \right)$  sind die Koordinaten von  $g$  bzgl. der obigen ONB  $\implies a_0 = \langle g, c_0 \rangle, \frac{a_k}{\sqrt{2}} = \langle g, \sqrt{2} c_k \rangle, \frac{b_k}{\sqrt{2}} = \langle g, \sqrt{2} s_k \rangle$

Also:

$$\boxed{a_0 = \langle g, c_0 \rangle, a_k = 2\langle g, c_k \rangle, b_k = 2\langle g, s_k \rangle}$$

(Direkte Kontrolle:

$$\begin{aligned} \text{Z.B. } \langle g, c_k \rangle &= \langle a_0 c_0 + a_1 c_1 + b_1 s_1 + \dots + a_n c_n + b_n s_n, c_k \rangle \\ &= a_0 \underbrace{\langle c_0, c_k \rangle}_0 + \dots + a_k \underbrace{\langle c_k, c_k \rangle}_0 + b_k \underbrace{\langle s_k, c_k \rangle}_0 + \dots + a_n \underbrace{\langle c_n, c_k \rangle}_0 + b_n \underbrace{\langle s_n, c_k \rangle}_0 \\ &= a_k \langle c_k, c_k \rangle = \frac{1}{2} a_k \sqrt{2} \end{aligned}$$

Weiters nach Pythagoras:

$$\|g\|^2 = \sum \text{Koordinaten}^2 = a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{b_1^2}{2} + \dots + \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}$$

Also

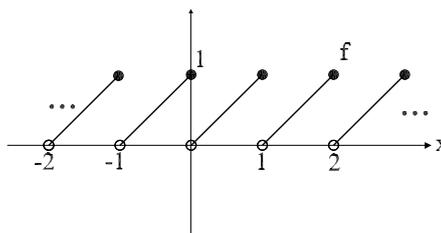
$$\|g\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

(Direkte Kontrolle:

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \langle g, g \rangle = \langle g, a_0 c_0 + \dots + b_n s_n \rangle \\ &= a_0 \underbrace{\langle g, c_0 \rangle}_{a_0} + a_1 \underbrace{\langle g, c_1 \rangle}_{\frac{a_1}{2}} + b_1 \underbrace{\langle g, s_1 \rangle}_{\frac{b_1}{2}} + \dots + b_n \underbrace{\langle g, s_n \rangle}_{\frac{b_n}{2}} \\ &= a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{b_1^2}{2} + \dots + \frac{b_n^2}{2} \checkmark \end{aligned}$$

## 1.2 Fourier-Reihen

**Beispiel:**  $p = 1$ ,  $f \in F_p$  mit  $f(x) = x$   
für  $0 < x \leq 1 \implies$



Aufgabe: Läßt sich  $f$  als Linearkombination von  $c_0, c_k, s_k$  darstellen?

Beobachtung:  $f$  ist nicht stetig  $\implies f$  ist kein trigon. Pol  $\implies$  **mit**  $n \in \mathbb{N}$

kann man  $f$  **nicht** in der Form  $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$  schreiben. Viel-

leicht mit  $n = \infty$ , siehe später.

Idee: Approximiere  $f$  durch  $g \in F_{p,n}$ ,

d.h. bestimme  $g \in F_{p,n}$  mit  $\|f - g\| = \min$ .

### Satz

Es seien  $p > 0$ ,  $f \in F_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau ein  $g \in F_{p,n}$  mit

$\|f - g\| = \min$ . (\*) Und zwar ist  $g = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$  mit

$$a_0 = \langle f, c_0 \rangle, \quad a_k = 2\langle f, c_k \rangle, \quad b_k = 2\langle f, s_k \rangle$$

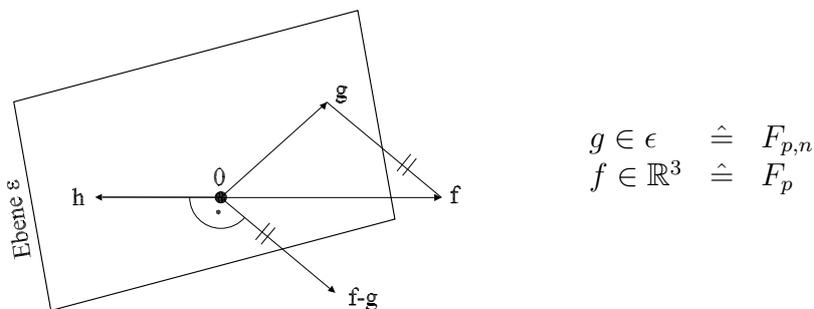
(\*) heißt exakt:  $\|f - g\| = \min\{\|f - h\| : h \in F_{p,n}\}$

## Definition

1.  $a_0, a_k, b_k$  wie oben heißen **Fourierkoeffizienten** von  $f$ .
2.  $g$  wie oben heißt **n-te Fourierapproximation** zu  $f$ . Schreibweise für  $g : f_n$ .

## Beweis des Satzes:

- (a) Es gilt:  $\|f - g\|$  wird minimal für **das**  $g \in F_{p,n}$ , das erfüllt  $\forall h \in F_{p,n} : f - g \perp h$   
 Veranschaulichung im  $\mathbb{R}^3$  (“ $\hat{=}$ ”=entspricht)



(Rechnerischer Beweis:  $\|f - g\| = \text{abs.min.} \iff \forall h \in F_{p,n} : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|f - (g + \lambda h)\|^2 \geq \|f - g\|^2$ ;  $\|f - (g + \lambda h)\|^2 = \langle f - (g + \lambda h), f - (g + \lambda h) \rangle = \|f - g\|^2 - 2\lambda \langle f - g, h \rangle + \lambda^2 \|h\|^2$ . Diese Parabel in  $\lambda$  hat ihr Minimum für  $\lambda = 0 \iff \langle f - g, h \rangle = 0$ .)

- (b) Es sei also  $g = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$ ;

$$\|f - g\| \text{ minimal} \stackrel{(a)}{\iff} \forall h \in F_{p,n} : \langle f - g, h \rangle = 0 \stackrel{(c_0, c_k, s_k \text{ Basis in } F_{p,n})}{\iff}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f - g, c_0 \rangle = 0 \\ \langle f - g, c_k \rangle = 0 \\ \langle f - g, s_k \rangle = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \langle f, c_0 \rangle = \langle g, c_0 \rangle \stackrel{*}{=} a_0 \\ \langle f, c_k \rangle = \langle g, c_k \rangle \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} a_k \\ \langle f, s_k \rangle = \langle g, s_k \rangle \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} b_k \end{array} \right\} \text{ f. } 1 \leq k \leq n$$

\* siehe Seite 7

□

**Zurück zum Beispiel:**  $f(x) = x$ ,  $0 < x \leq 1 = p$

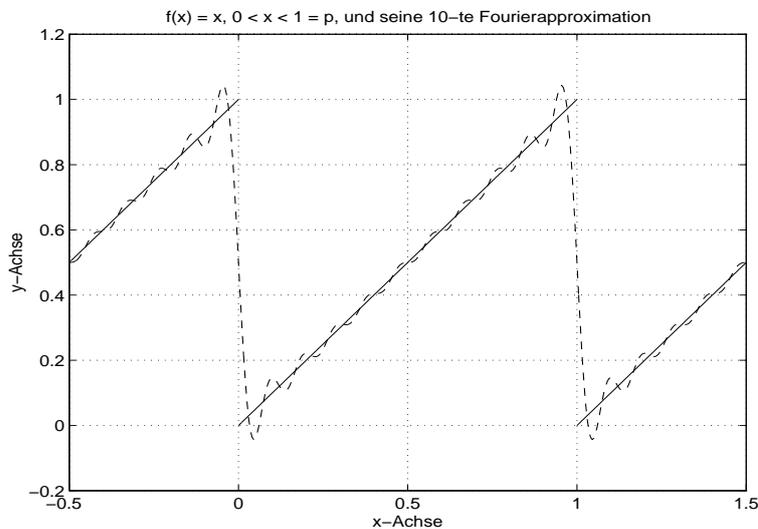
$$\implies a_0 = \langle f, c_0 \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \langle f, c_k \rangle = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \underbrace{x}_u \underbrace{\cos(2\pi kx)}_{v'} dx = \underbrace{2x \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k}}_0 \Big|_0^1 - \underbrace{2 \int_0^1 \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} dx}_{\frac{1}{2\pi k} \underbrace{\langle c_0, s_k \rangle}_{=0}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \langle f, s_k \rangle = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \underbrace{x}_u \underbrace{\sin(2\pi kx)}_{v'} dx = -2x \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + \underbrace{2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx}_{\frac{1}{2\pi k} \underbrace{\langle c_0, c_k \rangle}_{=0}} \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2\pi k} = -\frac{1}{\pi k} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } f_n = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k s_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

Bild:



**Problem:** Was passiert für  $n \rightarrow \infty$ ?  
Konvergiert  $\|f - f_n\|$  gegen 0?

**Satz (über die Normkonvergenz)**

Es seien  $f \in F_p$ ,  $a_0, a_k, b_k$  ihre Fourierkoeffizienten,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$(a) \quad \frac{1}{p} \int_0^p f(x)^2 dx \stackrel{\boxed{A}}{=} \|f\|^2 \stackrel{\boxed{B}}{=} \|f - f_n\|^2 + \|f_n\|^2$$

$$\stackrel{\boxed{C}}{=} \|f - f_n\|^2 + a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Speziell:  $\|f\|^2 \geq a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$  "Besselsche Ungleichung"

(b) (ohne Beweis) Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$  und daher

$$\boxed{\|f\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)} \quad \text{"Parsevalsche Gleichung"}$$

**Beweis von (a):**

$\boxed{A}$  = Definition der  $\|\cdot\|$

$\boxed{C}$ : siehe Seite 8

$$\boxed{B}: \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle f - f_n + f_n, f - f_n + f_n \rangle$$

$$= \underbrace{\langle f - f_n, f - f_n \rangle}_{\|f - f_n\|^2} + \underbrace{2\langle f - f_n, f_n \rangle}_{=0^*)} + \underbrace{\langle f_n, f_n \rangle}_{\|f_n\|^2}$$

\*) nach Seite 8: dort ist  $g = f_n$  und man kann auch  $h = f_n$  setzen, da  $f_n \in F_{p,n}$ . □

Zurück zum Beispiel:  $\|f\|^2 = \frac{1}{p} \int_0^p f(x)^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \implies$  (Parseval;  
 $a_0 = \frac{1}{2}, a_k = 0, b_k = \frac{-1}{\pi k}) \implies \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \implies$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2\pi^2 \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{1/12} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$$

**Problem:** Nach Satz auf Seite 11, (b) gilt  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Gilt auch für festes  $x$   $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ? D.h. konvergiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$  und  $= f(x)$ ?

**Definition** Die Reihe  $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$  heißt **Fourierreihe** von  $f$  im Punkt  $x$ .

Bemerkung:

1. Die Fourierreihe ist für jedes feste  $x$  eine Zahlenreihe (ähnlich wie bei der Taylorreihe).
2. Die Fourierreihe kann auch in manchen  $x$  divergieren (ähnlich wie bei der Taylorreihe). Das passiert aber nur in pathologischen Fällen sowie bei Distributionen (z.B.  $\delta$ ).

**Definition**

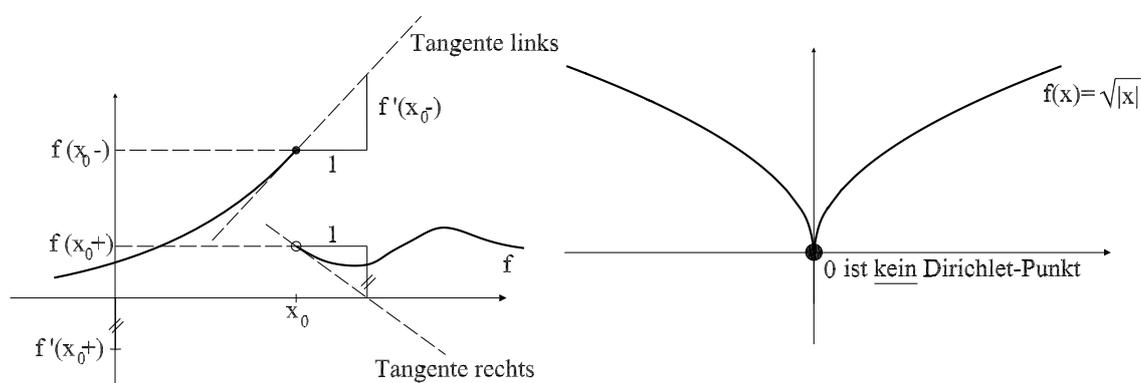
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  heißt **Dirichlet-Punkt** von  $f \iff$

(a)  $\underbrace{\lim_{x \nearrow x_0} f(x)}_{f(x_0-)} \text{ und } \underbrace{\lim_{x \searrow x_0} f(x)}_{f(x_0+)}$  existieren ( $\neq \infty$ )  
 (Schreibweise:  $f(x_0-)$   $f(x_0+)$ )

(b)  $\underbrace{\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0}}_{f'(x_0-)} \text{ und } \underbrace{\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0}}_{f'(x_0+)}$  exist. ( $\neq \infty$ )  
 (Schreibweise:  $f'(x_0-)$   $f'(x_0+)$ )

Bemerkung:

1. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet: 1805-1859
2. Jeder Punkt, wo  $f$  differenzierbar ist, ist ein Dirichlet-Punkt von  $f$ .  
Genauer:  $f$  in  $x_0$  differenzierbar  
 $\iff x_0$  Dirichlet-Punkt  $\wedge f(x_0-) = f(x_0+) \wedge f'(x_0-) = f'(x_0+)$ .



**Satz (über die punktweise Konvergenz, ohne Beweis)**

$f \in F_p, a_0, a_k, b_k$  ihre Fourierkoeffizienten,  $x_0$  Dirichlet-Punkt von  $f$ . Dann gilt: Die Fourierreihe von  $f$  in  $x_0$  konvergiert gegen  $\frac{1}{2}(f(x_0-) + f(x_0+))$ , d.h.

$$\frac{1}{2}(f(x_0-) + f(x_0+)) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(x_0) + b_k s_k(x_0))$$

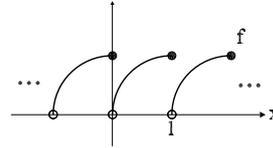
**Bemerkungen:**

1. Wenn  $f$  stetig in  $x_0$  ist, so ist  $\frac{1}{2}(f(x_0-) + f(x_0+)) = f(x_0)$ , d.h. in allen Dirichlet-Punkten  $x$ , in denen  $f$  **stetig** ist (i.a. also fast immer), gilt

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$$

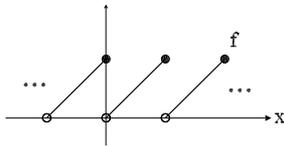
2. Die Fourierreihe konvergiert auch noch unter schwächeren Bedingungen, z. B. für

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 < x \leq 1 = p, \text{ d.h.}$$



(Die "Dini-Bedingung" ist in  $x_0 = 0$  erfüllt.)

**Zurück zum Beispiel:**



$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_k = 0, \quad b_k = -\frac{1}{\pi k}$$

(a) Z.B.:  $x_0 = 0 : \frac{1}{2}(f(0-) + f(0+)) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2},$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(0) + b_k s_k(0)) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\pi k} \right) \underbrace{\sin(2\pi k \cdot 0)}_0 = \frac{1}{2} \checkmark$$

(b) Z.B.:  $x_0 = \frac{1}{4} : f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k c_k\left(\frac{1}{4}\right) + b_k s_k\left(\frac{1}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{\frac{\sin(2\pi k/4)}{k}}^{*} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \quad *) \begin{cases} 0 & : k \text{ gerade} \\ \pm 1 & : k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Kontrolle:  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  für  $|x| \leq 1$

$$\left( \text{Denn: } \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

$$\implies 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \implies \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \checkmark$$

**Problem:** Gegeben sei  $h$  auf dem Intervall  $]0, q]$ . Läßt sich  $h$  nur durch Cosinuse bzw. nur durch Sinusse darstellen?

**Lemma:** Für  $f \in F_p$  gilt:

(a)  $f$  gerade  $\implies \forall k : b_k = 0$

(b)  $f$  ungerade  $\implies a_0 = 0, \forall k : a_k = 0$

**Beweis zu (a)** ((b) geht analog)

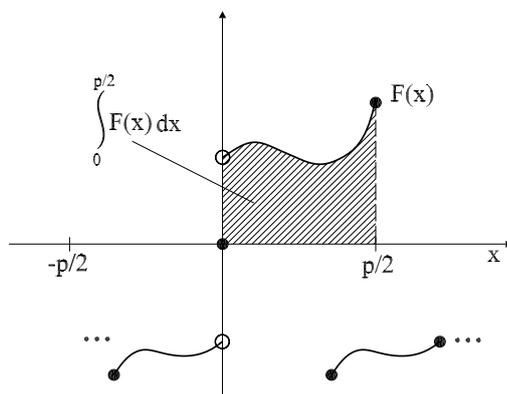
$$b_k = 2\langle f, s_k \rangle = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} \underbrace{f(x) \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)}_{F(x)} dx$$

$F$  ist ungerade, denn

$$F(-x) = f(-x) \sin\left(\frac{2\pi k(-x)}{p}\right) = f(x) \cdot \left(-\sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right)\right) = -F(x)$$

$$\implies \int_{-p/2}^0 F(x) dx \stackrel{(*)}{=} - \int_0^{p/2} F(x) dx$$

$$\implies \int_{-p/2}^{p/2} F(x) dx = 0 \implies b_k = 0$$



(Analytischer Beweis von  $(*)$ ) :  $\int_{-p/2}^0 F(x) dx = [\text{Substitution } x = -t] =$

$$\int_{t=p/2}^0 \underbrace{F(-t)}_{-F(t)} \underbrace{d(-t)}_{-dt} = \int_{p/2}^0 F(t) dt = - \int_0^{p/2} F(t) dt \quad \square$$

Daher verwenden wir folgende **Methode**:

$h : ]0, q] \longrightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben;

**1. Schritt:** Setze  $h \left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$  zu  $\left\{ \begin{array}{l} h_g \\ h_u \end{array} \right\}$  auf  $[-q, q]$  fort.

**2. Schritt:** Setze  $\left\{ \begin{array}{l} h_g \\ h_u \end{array} \right\}$  periodisch fort zu  $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_g \\ \tilde{h}_u \end{array} \right\} = f \in F_p$  mit  $p = 2q$

Dann gilt nach dem Lemma für

$$\begin{cases} \tilde{h}_g : \forall k : b_k = 0 \\ \tilde{h}_u : a_0 = 0, \forall k : a_k = 0 \end{cases}$$

**Definition**

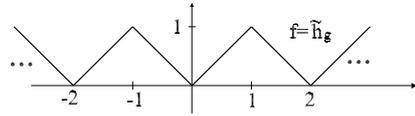
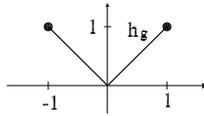
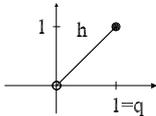
Die Fourierreihe von  $\left\{ \begin{matrix} \tilde{h}_g \\ \tilde{h}_u \end{matrix} \right\}$  heißt Fourier  $\left\{ \begin{matrix} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{matrix} \right\}$ reihe von  $h$ .

Beispiel:  $h(x) = x$  für  $0 < x \leq 1$ . Entwickle  $h$  z.B. in eine Fouriercosinusreihe!

Angabe:

1. Schritt:

2. Schritt:



$$p = 2!! \quad \tilde{h}_g \text{ gerade} \implies \forall k : b_k = 0$$

$$a_0 = \langle f, c_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_g(x) dx \stackrel{h_g \text{ gerade}}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$a_k = 2 \langle f, c_k \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_g(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{2}\right) dx \stackrel{h_g \text{ gerade}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 \underbrace{h(x)}_x \cdot \underbrace{\cos(\pi kx)}_{v'} dx =$$

$$2 \left[ \underbrace{x \frac{\sin(\pi kx)}{\pi k}}_0 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi kx)}{\pi k} dx \right] = 2 \cdot \frac{\cos(\pi kx)}{\pi^2 k^2} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2 k^2} [(-1)^k - 1] =$$

$$\begin{cases} 0 : k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi^2 k^2} : k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\text{Also: } \tilde{h}_g(x) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(\pi kx)}{k^2}$$

(alle Punkte sind Dirichlet-Punkte)

$$\text{Speziell: } x = 0 : 0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{(Kontrolle: } \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{1}{k^2} =$$

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \checkmark)$$

**Beachte:** Für  $0 < x < 1$  erhalten wir **zwei** Darstellungen der Funktion  $y = x$ :

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k} \quad (\text{Fourierreihe aus Seite 10})$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\cos(\pi kx)}{k^2} \quad (\text{Fouriercosinusreihe siehe oben})$$

Diese Reihen stimmen überein in  $0 < x < 1$ , liefern aber etwas Verschiedenes in  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $x \neq -\frac{1}{2}$ .

### 1.3 Fourier-Integrale

**Wiederholung:**  $f \in F_p$ ,  $x$  Dirichlet-Punkt von  $f$

$$\implies \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(x) + b_k s_k(x))$$

$$\text{wobei } c_k(x) = \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right), \quad s_k(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right),$$

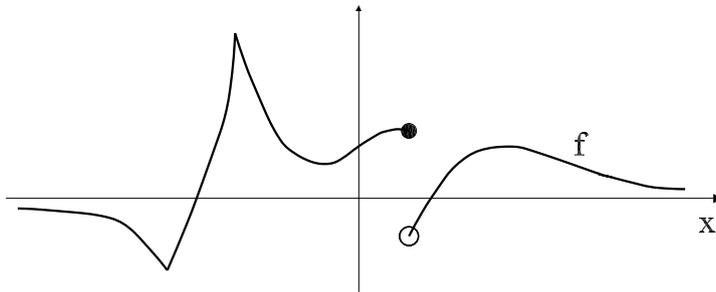
$$a_0 = \langle f, c_0 \rangle, \quad a_k = 2\langle f, c_k \rangle, \quad b_k = 2\langle f, s_k \rangle,$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{p} \int_a^{a+p} f(x)g(x) dx.$$

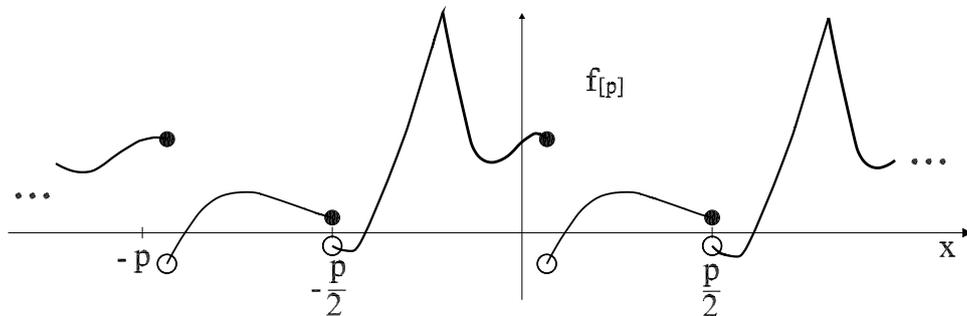
**Problem** Läßt sich auch ein **nicht** periodisches  $f$  in etwas der Fourierreihe Analoges entwickeln?

**Heuristische Herleitung des Satzes** auf Seite 19

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stückweise stetig und es gelte  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$



Für  $p > 0$  sei  $f_{[p]} \in F_p$  bestimmt durch  $f_{[p]}(x) = f(x)$  für  $-\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2}$ .



Wir entwickeln  $f_{[p]}$  in eine Fourierreihe  $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k + b_k s_k)$ .

**Vorsicht:**  $a_0, a_k, b_k, c_k, s_k$  hängen von  $p$  ab! Was passiert für  $p \rightarrow \infty$ ?

$$\text{Z.B. } a_0 = \langle f_{[p]}, c_0 \rangle = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\downarrow 0} \underbrace{\int_{-p/2}^{p/2} f(x) dx}_{\downarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \infty} \rightarrow 0$$

$$\text{Es sei } h := \frac{2\pi}{p} \text{ und } \kappa := h \cdot k = \frac{2\pi k}{p} \implies c_k(x) = \cos\left(\frac{2\pi k x}{p}\right) = \cos(\kappa x)$$

$$\text{und } a_k = 2 \langle f_{[p]}, c_k \rangle = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) c_k(x) dx = h \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) \cos(\kappa x) dx \approx$$

$$h \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\kappa x) dx \text{ für großes } p.$$

### Definition

1.  $F_{\infty} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stückweise stetig, beschränkt und mit } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty\}$
2. Für  $f \in F_{\infty}$  und  $\kappa \in \mathbb{R}, \kappa \geq 0$ , heißen

$$a(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\kappa x) dx, \quad b(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\kappa x) dx$$

die **Fourierkoeffizienten** von  $f$ .

3. Die Funktion  $(\mathcal{F}f)(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa x} f(x) dx = \pi(a(\kappa) - ib(\kappa))$  heißt **Fouriertransformation** von  $f$ .

Bemerkung: Da  $-|f(x)| \leq f(x) \cos(\kappa x) \leq |f(x)|$  (und ebenso für sin), sind die Integrale für  $a(\kappa)$ ,  $b(\kappa)$  konvergent.

Nun sei  $x$  ein Dirichlet-Punkt von  $f$  und  $|x| < \frac{p}{2}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) &= \frac{1}{2}(f_{[p]}(x-) + f_{[p]}(x+)) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k(x) + b_k s_k(x)) \\ \left( \begin{array}{l} \text{weil } a_k \approx h \cdot a(\kappa) \\ \text{und } b_k \approx h \cdot b(\kappa) \\ \text{und } a_0 \approx 0 \end{array} \right) &\approx \sum_{\substack{\kappa=h \cdot k \\ k=1,2,\dots}} h \cdot [a(\kappa) \cos(\kappa x) + b(\kappa) \sin(\kappa x)] \end{aligned}$$

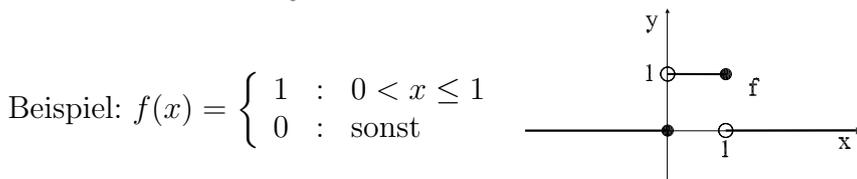
Diese Reihe ist eine Riemannsumme zu  $\int_0^{\infty} (a(\kappa) \cos(\kappa x) + b(\kappa) \sin(\kappa x)) d\kappa$ .

Für  $p \rightarrow \infty$  gilt "Schrittweite"  $h = \frac{2\pi}{p} \rightarrow 0$  und daher  $\sum \rightarrow \int$ . Das führt zum

**Satz** Es sei  $f \in F_{\infty}$ ,  $a(\kappa)$ ,  $b(\kappa)$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ ,  $x$  Dirichlet-Punkt von  $f$ . Dann gilt

$$\boxed{\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = \int_0^{\infty} (a(\kappa) \cos(\kappa x) + b(\kappa) \sin(\kappa x)) d\kappa}$$

**Definition** Dieses  $\int$  heißt **Fourierintegral** von  $f$  in  $x$ .



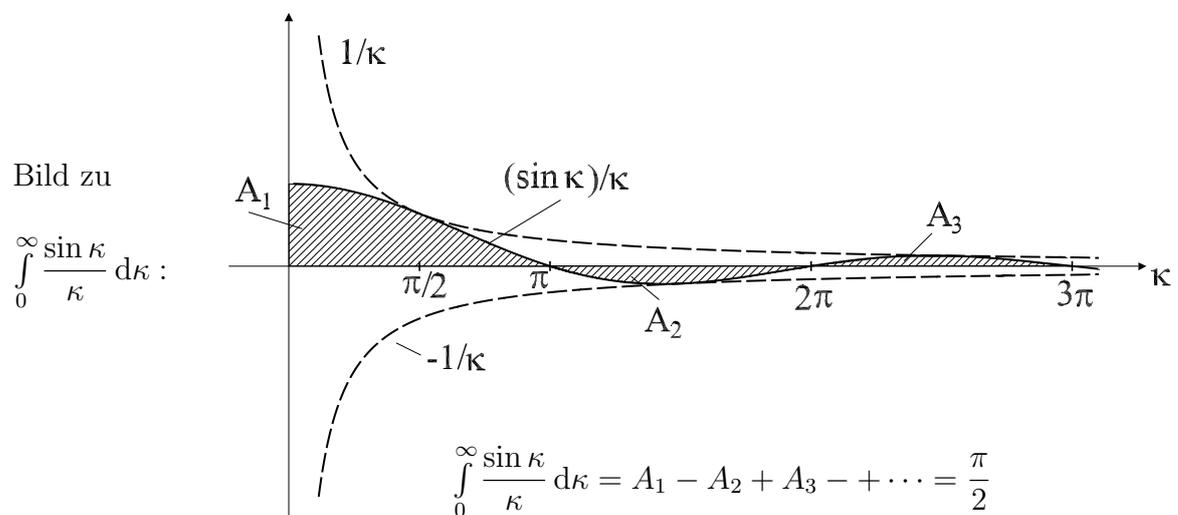
$$\implies a(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\kappa x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\kappa x) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\kappa x)}{\kappa} \Big|_{x=0}^1 = \frac{\sin(\kappa)}{\pi \kappa},$$

$$b(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\kappa x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-\cos(\kappa x)}{\kappa} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1 - \cos \kappa}{\pi \kappa}$$

$$\implies \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = \left\{ \begin{array}{l} 1 : 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} : x = 0 \vee x = 1 \\ 0 : \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (\text{nach dem Satz}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} (a(\kappa) \cos(\kappa x) + b(\kappa) \sin(\kappa x)) \, d\kappa \\
&= \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \kappa}{\pi \kappa} \cos(\kappa x) + \frac{1 - \cos \kappa}{\pi \kappa} \sin(\kappa x) \right) \, d\kappa.
\end{aligned}$$

**Speziell:**  $x = 0 \implies \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa}{\pi \kappa} \, d\kappa \implies \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa}{\kappa} \, d\kappa = \frac{\pi}{2}$



Bemerkung:  $h : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  läßt sich analog zu Seite 16 in ein Fourier  $\left\{ \begin{array}{l} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{array} \right\}$  integral

entwickeln, indem man  $h$  zu  $f = \left\{ \begin{array}{l} h_g \text{ gerade} \\ h_u \text{ ungerade} \end{array} \right\}$  fortsetzt und  $f$  in ein Fourierintegral entwickelt.

Wenn  $h_0(x) := \left\{ \begin{array}{l} h(x) : x > 0 \\ 0 : x \leq 0 \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} (a(\kappa) \cos(\kappa x) + b(\kappa) \sin(\kappa x)) \, d\kappa$ , so

sind  $\left\{ \begin{array}{l} h_g \\ h_u \end{array} \right\} (x) = 2 \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} a(\kappa) \cos(\kappa x) \\ b(\kappa) \sin(\kappa x) \end{array} \right\} \, d\kappa$  das Fourier  $\left\{ \begin{array}{l} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \end{array} \right\}$  integral von  $h_0$ .

# Kapitel II

## Partielle Differentialgleichungen

**Definition:** Eine Gleichung in den Unbekannten  $x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \dots, \dots$  heißt **partielle Differentialgleichung** in  $n$  Variablen. Eine Funktion  $u(x_1, \dots, x_n)$  heißt **Lösung**, wenn sie die Gleichung erfüllt. Der Grad der höchsten vorkommenden Ableitung von  $u$  heißt **Ordnung** der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung heißt **linear**, wenn sie in  $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots$  linear ist, d.h. die Form  $a(x) = b(x)u + c_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + c_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} + d_1(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots$  hat. Wenn  $a = 0$ , so heißt sie **homogen**, sonst **inhomogen**. Wenn  $b(x), c_1(x), \dots$  konstant sind, so heißt sie linear **mit konstanten Koeffizienten**.

Beispiel:  $z \ln\left(\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) = (y-1) \frac{\partial z}{\partial y}$  ist eine nicht-lineare Differentialgleichung in 2 Variablen der Ordnung 1 (mit  $x \hat{=} x_1, y \hat{=} x_2, z \hat{=} u$ ).  $z = x^y$  ist eine Lösung.

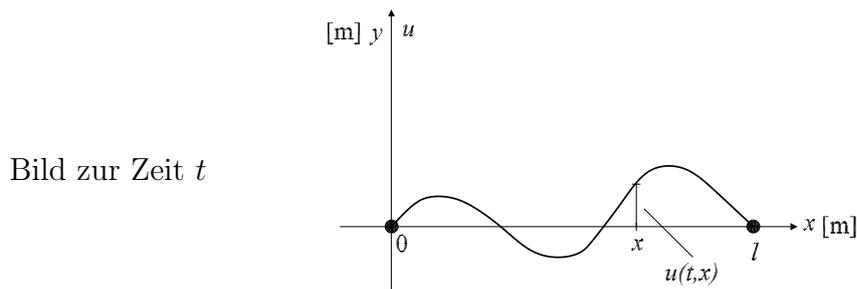
Bemerkung: Für **lineare** Differentialgleichungen gilt das **Superpositionsprinzip**:

- (a) Differentialgleichung homogen  $\implies$  die Lösungen bilden einen Vektorraum
- (b)  $u_1$  Lösung zu  $a_1, u_2$  Lösung zu  $a_2, \lambda \in \mathbb{R} \implies u_1 + \lambda u_2$  ist Lösung zu  $a_1 + \lambda a_2$ .

## 2.1 Die schwingende Saite

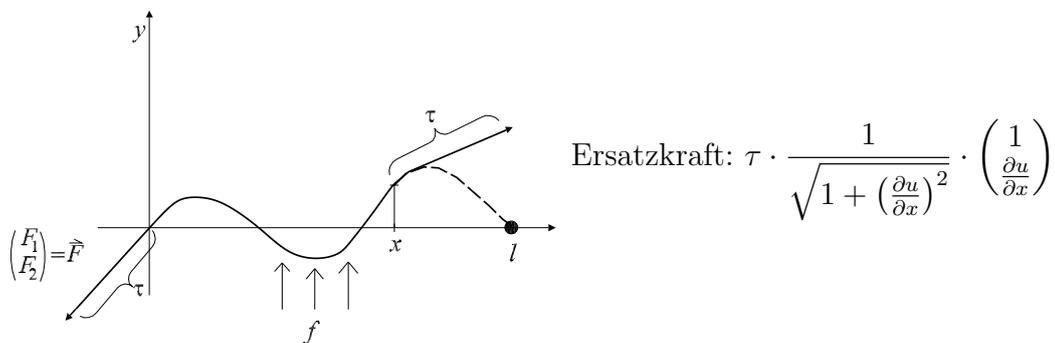
### 2.1.1 Aufstellung der Gleichung

Eine elastische Saite, die in zwei Punkten eingespannt ist, ist aufgrund von Anfangsauslenkungen und/oder Kräften deformiert:



Die Auslenkung zur Zeit  $t$  über  $x$  sei  $u(t, x)$  [m], die Schnittkraft in der Saite sei  $\tau$  [N], die  $\frac{\text{Masse}}{\text{Längeneinheit bzgl. } x}$  sei  $\sigma$  [kg/m], und es wirke in  $y$ -Richtung eine äußere Last mit Dichte  $f(t, x)$  [N/m].

**Annahme 1:**  $\sigma$  und  $\tau$  sind konstant  $\implies$  bei Schnitt über  $x$  zur Zeit  $t$  gilt:



Newton ergibt in  $y$ -Richtung:  $\forall x$  :

$$\int_0^x f(t, \xi) d\xi + \tau \cdot \frac{\partial u / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}} + F_2 = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

$$= \sigma \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \xi) d\xi.$$

Differenzieren nach  $x$  liefert:

$$f(t, x) + \tau \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}} \right) = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u / \partial x^2}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}} - \frac{(\partial u / \partial x)^2 \cdot (\partial^2 u / \partial x^2)}{[1 + (\partial u / \partial x)^2]^{3/2}}}_{\left( = \frac{\partial^2 u / \partial x^2}{[1 + (\partial u / \partial x)^2]^{3/2}} = \kappa = \text{Krümmung} \right)}$$

$$\left[ \text{Annahme 2: } \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \ll 1 \right] \implies \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Definition** Die partielle Differentialgleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(t, x)$  heißt **Differentialgleichung der schwingenden Saite** oder (eindimensionale) **Wellengleichung**. (Sie ist linear mit konstanten Koeffizienten, 2. Ordnung in 2 Variablen  $t \hat{=} x_1, x \hat{=} x_2$ ).

Bemerkung: Oben ist  $c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$  [m/sec] und  $a = \frac{f}{\sigma}$  [m/sec<sup>2</sup>].

Bei der Lösung verwenden wir die **Randbedingung**  $\forall t : u(t, 0) = u(t, l) = 0$  und 2 **Anfangsbedingungen**:

$$\forall x \in [0, l] : \begin{cases} u(0, x) &= h_0(x) \cdots \text{Anfangsauslenkung} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= h_1(x) \cdots \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{cases}$$

## 2.1.2 Lösung mit Separationsansatz

Wir betrachten nur den homogenen Fall, d.h.  $a = 0$ . Wir suchen zunächst Lösungen in Produktform, d.h.  $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$ .

Dann gilt  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{T} \cdot X$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \cdot X''$  und daher  $0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$$\ddot{T}(t) \cdot X(x) - c^2 T(t) \cdot X''(x) \implies \underbrace{\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab}} = \underbrace{c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{hängt nicht von } t \text{ ab}}$$

$\implies$  bei einer Änderung von  $t$  oder  $x$  bleiben **beide** Seiten unverändert  
 $\implies$  beide Seiten sind überhaupt konstant.

Die Konstante heiße  $K$ , d.h.  $\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = K$ .

$$(a) \quad c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = K \implies X'' - \frac{K}{c^2} \cdot X = 0$$

$$\text{Ansatz: } X(x) = e^{\lambda x} \implies \lambda^2 - \frac{K}{c^2} = 0$$

**1. Fall:**  $\frac{K}{c^2} = d^2 > 0 \implies \lambda = \pm d$  reell  $\implies X(x) = C_1 e^{dx} + C_2 e^{-dx}$

Randbedingung:

$$u(t, 0) = 0 \implies X(0) = 0 \implies C_1 + C_2 = 0$$

$$u(t, l) = 0 \implies X(l) = 0 \implies C_1 e^{dl} + C_2 e^{-dl} = 0 \implies$$

$$\implies \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{dl} & e^{-dl} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$\det A = e^{-dl} - e^{dl} = -2\text{sh}(dl) \neq 0 \implies C_1 = C_2 = 0 \implies X = 0 \implies u = 0$  uninteressant!

**2. Fall:**  $\frac{K}{c^2} = -d^2, d \geq 0 \implies \lambda = \pm id$  rein imaginär  $\implies X(x) = C_1 \cos(dx) + C_2 \sin(dx)$

Randbedingung:  $X(0) = 0 \implies C_1 = 0$ ;  $X(l) = 0 \implies C_2 \sin(dl) = 0 \implies dl = k\pi, k = 1, 2, \dots$  ( $k = 0$  gibt wieder  $u = 0$ , uninteressant)

$$\implies d = \frac{k\pi}{l}, X(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \text{ und } K = -c^2 d^2 = -\frac{k^2 \pi^2 c^2}{l^2}$$

$$(b) \frac{\ddot{T}}{T} = K = -\frac{k^2 \pi^2 c^2}{l^2} \implies \ddot{T} + \frac{k^2 \pi^2 c^2}{l^2} T = 0$$

$$\text{Ansatz: } T(t) = e^{\lambda t} \implies \lambda^2 + \frac{k^2 \pi^2 c^2}{l^2} = 0, \lambda = \pm i \frac{k\pi c}{l} \implies T(t) =$$

$$\tilde{C}_1 \cos\left(\frac{k\pi c}{l}t\right) + \tilde{C}_2 \sin\left(\frac{k\pi c}{l}t\right)$$

Insgesamt erhalten wir die Lösungen

$$u_k(t, x) = T(t)X(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left[ \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi c}{l}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi c}{l}t\right) \right]$$

(wobei  $\alpha_k = \tilde{C}_1 \cdot C_2, \beta_k = \tilde{C}_2 \cdot C_2$ )

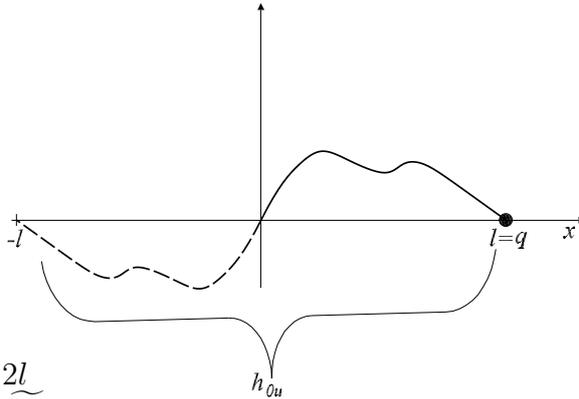
Nach dem Superpositionsprinzip ist auch

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left[ \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi c}{l}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi c}{l}t\right) \right]$$

eine Lösung der Wellengleichung.

$\alpha_k, \beta_k$  werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
1. \quad h_0(x) = u(0, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \\
\implies &= \text{Fouriersinusreihe von } h_0(x) \text{ am Intervall } [0, l] \\
&\quad (l = q \text{ in Seite 16})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
p &= 2l \\
f &= \widetilde{h_{0u}} \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \alpha_k = 2\langle f, s_k \rangle &= 2 \cdot \frac{1}{2l} \cdot \underbrace{\int_{-l}^l h_{0u}(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{2l}x\right) dx}_{\text{gerade}} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2l} \cdot 2 \cdot \int_0^l h_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx
\end{aligned}$$

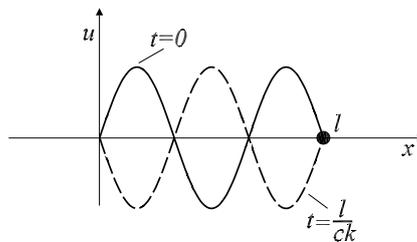
$$\begin{aligned}
2. \quad \text{Ebenso ist } h_1(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left[ \underbrace{-\alpha_k \cdot \frac{k\pi c}{l} \cdot \sin\left(\frac{k\pi c}{l} \cdot 0\right)}_0 + \underbrace{\beta_k \cdot \frac{k\pi c}{l} \cos\left(\frac{k\pi c}{l} \cdot 0\right)}_1 \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\beta_k \cdot \frac{k\pi c}{l} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)} \\
\implies &= \text{Fouriersinusreihe von } h_1(x) \text{ am Intervall } [0, l]
\end{aligned}$$

$$\implies \beta_k \cdot \frac{k\pi c}{l} = 2 \cdot \frac{1}{2l} \cdot 2 \cdot \int_0^l h_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx$$

### 2.1.3 Zusammenhang mit der Musik

$\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left(\frac{k\pi c}{l}t\right)$  sind sogenannte **stehende Wellen**

Bild für  $k = 3$  und  $\cos$



Für festes  $x$  hat die Saite (und die umgebende Luft) die Frequenz

$$\frac{kc}{2l} \frac{\text{Schwingungen}}{\text{Zeiteinheit}} \left[ \frac{1}{\text{sec}} = \text{Hz} \right]$$

Im allgemeinen ist die Amplitude  $\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$  maximal für  $k = 1$ . Dieser Hauptton hat daher die Frequenz  $\gamma = \frac{c}{2l} = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \cdot \frac{1}{2l}$  [Hz].  $\gamma$  ist proportional zu  $\sqrt{\text{Spannung}}$  und umkehrt proportional zur Saitenlänge und zu  $\sqrt{\text{Dichte}}$ . (Für die 3. Geigensaiten (a') ist z. B.  $\gamma = 440$  [Hz],  $l \approx 33$  [cm]. Falls  $\sigma \approx \frac{1}{2}$  [g/m] folgt  $\tau = \sigma \cdot 84332 \approx 42$  [N])

Tabelle zum Grundton  $a'$ :

| Note    | Intervall      | reine Stimmung              | temperierte Stimmung (Werckmeister) | Saitenlänge (für reine Stimmung) |
|---------|----------------|-----------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| $a'$    | Prim           | 440 Hz                      | 440 Hz                              | $l$                              |
| $h'$    | Sekund         | $\frac{9}{8}a'=495$         | $2^{2/12}a' \approx 493.9$          | $\frac{8}{9}l$                   |
| $c''$   | kl. Terz       | $\frac{6}{5}a'=528$         | $2^{3/12}a' \approx 523.3$          | $\frac{5}{6}l$                   |
| $cis''$ | gr. Terz       | $\frac{5}{4}a'=550$         | $2^{4/12}a' \approx 554.4$          | $\frac{4}{5}l$                   |
| $d''$   | Quart          | $\frac{4}{3}a'=586.\dot{6}$ | $2^{5/12}a' \approx 587.3$          | $\frac{3}{4}l$                   |
| $e''$   | Quint          | $\frac{3}{2}a'=660$         | $2^{7/12}a' \approx 659.3$          | $\frac{2}{3}l$                   |
| $fis''$ | gr. Sext       | $\frac{5}{3}a'=733.\dot{3}$ | $2^{9/12}a' \approx 740$            | $\frac{3}{5}l$                   |
| $gis''$ | gr. Septim     | $\frac{15}{8}a'=825$        | $2^{11/12}a' \approx 830.6$         | $\frac{8}{15}l$                  |
| $a''$   | Oktav          | $2a'=880$                   | $2a'=880$                           | $\frac{1}{2}l$                   |
| $e'''$  | Quint d. Oktav | $3a'=1320$                  | $2^{19/12}a'=1318.5$                | $\frac{1}{3}l$                   |
| $a'''$  | 2. Oktav       | $4a'=1760$                  | $4a'=1760$                          | $\frac{1}{4}l$                   |

## 2.2 Membran und Torsion

### 2.2.1 Die Membrangleichung

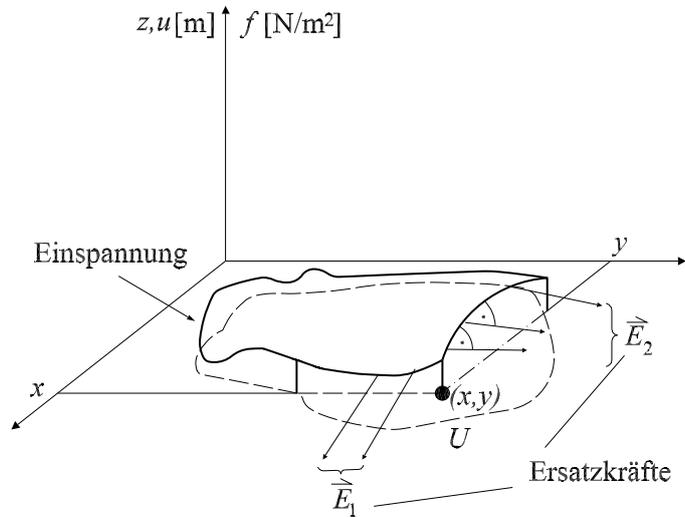
Eine dünne elastische Membran ist über dem Rand eines Gebietes  $U \subset \mathbb{R}^2$  eingespannt und senkrecht dazu wirken Kräfte mit Dichte  $f(t, x, y)$  [ $\text{N/m}^2$ ].

Wieder seien

$\tau$  = Normalspannung [ $\text{N/m}$ ] und  $\sigma = \frac{\text{Masse}}{\text{Flächeneinh. (in } x, y)}$  [ $\text{kg/m}^2$ ] konstant.

(Es wird Schubspannung = 0, d.h. der Spannungszustand in jedem Punkt isotrop angenommen.)

$$\vec{E}_2 \perp \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix}, \quad |\vec{E}_2| = \tau$$



$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\tau}{\sqrt{(1+u_x^2)(1+u_x^2+u_y^2)}} \cdot \begin{pmatrix} -u_x u_y \\ 1+u_x^2 \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 ds = \frac{\tau d\xi}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -u_x u_y \\ 1+u_x^2 \\ u_y \end{pmatrix}$$

Bei Schnitt über  $x = \text{konstant}$  und  $y = \text{konstant}$  gilt (Newton in  $z$ -Richtung):

$$\iint_{\substack{(\xi, \eta) \in U \\ \xi \leq x, \eta \leq y}} f(t, \xi, \eta) d\xi d\eta + \text{Randkräfte} + \underbrace{\int_{\substack{(x, \eta) \in U \\ \eta \leq y}} \tau \cdot \frac{\partial u / \partial x}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}}(t, x, \eta) d\eta}_{\text{von } \vec{E}_1}$$

$$+ \underbrace{\int_{\substack{(\xi, y) \in U \\ \xi \leq x}} \tau \cdot \frac{\partial u / \partial y}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}}(t, \xi, y) d\xi}_{\text{von } \vec{E}_2}$$

$$= \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \sigma \iint_{\substack{(\xi, \eta) \in U \\ \xi \leq x, \eta \leq y}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Differenzieren nach  $x$  und  $y$  liefert:

$$f(t, x, y) + \tau \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u / \partial x}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}} \right] + \tau \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u / \partial y}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}} \right] = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Unter den Annahmen  $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \ll 1$ ,  $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \ll 1$ , kommen wir zur

**Definition** Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = a(t, x, y)$$

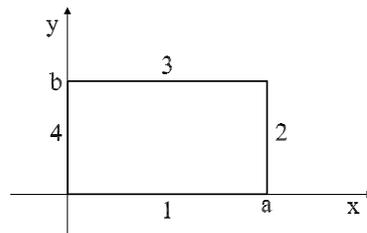
heißt **Differentialgleichung der schwingenden Membran** oder (zweidimensionale) **Wellengleichung**.

Bemerkung:

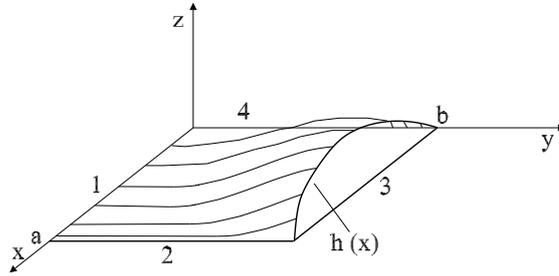
1. Statt  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  schreibt man  $\Delta u$  oder genauer  $\Delta_2 u$ . (2 für 2 Variable)
2. Zur Differentialgleichung braucht man **eine Randbedingung**, in unserem Fall  
 $\forall t : u(t, x, y) = v(x, y)$  für  $(x, y) \in \text{Rand von } U$ , und **zwei Anfangsbedingungen**, nämlich  $\forall (x, y) \in U : u(0, x, y) = h_0(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) = h_1(x, y)$ .
3. Im statischen Fall ist  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  und  $f$  hängt nicht von  $t$  ab  $\implies \Delta u = -\frac{1}{\tau} f(x, y)$ . Diese Differentialgleichung heißt **Poissongleichung**. Falls  $f = 0$ , ist  $u$  einzig durch die Einspannung am Rand von  $U$  bestimmt;  $\Delta u = 0$  zusammen mit der Randbedingung  $u(x, y) = v(x, y)$  für  $(x, y) \in \partial U$  (=Schreibweise für "Rand von U") heißt **Dirichletproblem der Laplacegleichung**.

### 2.2.2 Ruhende Membran über einem Rechteck

$$U = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$



Der Rand von  $U$  hat vier Teile. Dort ist  $u$  vorgegeben. Zunächst sei  $u = 0$  auf den Seiten 1,2,4 und  $u(x, b) = h(x)$  :



**Separationsansatz:**  $u(x, y) = X(x)Y(y)$

$$0 = \Delta u = X'' \cdot Y + X \cdot Y'' \implies \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K$$

a)  $X'' - K \cdot X = 0$

Randbedingung:  $u(0, y) = 0 \implies X(0) = 0$  (Rand 4)

$u(a, y) = 0 \implies X(a) = 0$  (Rand 2)

$\implies$  (wie in Seite 24)  $X(x) = C_2 \sin(dx)$ ,

$da = k\pi, k = 1, 2, \dots, K = -d^2 = -\frac{k^2\pi^2}{a^2}$

b)  $-\frac{Y''}{Y} = -\frac{k^2\pi^2}{a^2} \implies Y'' - \frac{k^2\pi^2}{a^2}Y = 0$

$\implies Y(y) = \tilde{C}_1 e^{k\pi y/a} + \tilde{C}_2 e^{-k\pi y/a} = \tilde{C}_1 \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) + \tilde{C}_2 \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$

Randbedingung:  $u(x, 0) = 0 \implies Y(0) = 0 \implies \tilde{C}_1 = 0$  (Rand 1)

$\implies Y(y) = \tilde{C}_2 \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right), u_k(x, y) = \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$

Das Superpositionsprinzip liefert

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

Die Randbedingung am Rand 3 gibt

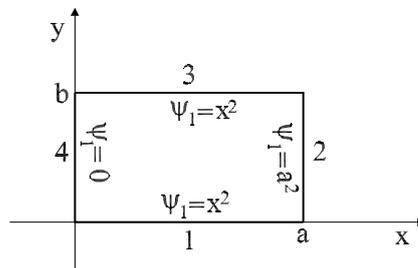
$$h(x) = u(x, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right) \implies \alpha_k \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right) = \text{Fouriersi-}$$

nuskoeffizient von  $h = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot 2 \cdot \int_0^a h(x) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx$

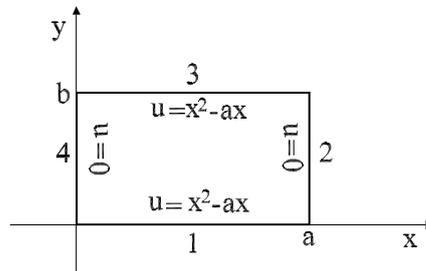
### 2.2.3 Torsion von Stäben mit rechteckigem Querschnitt

Die Torsionsfunktion  $\psi$  eines einfach zusammenhängenden Querschnittes  $U$  erfüllt  $\Delta\psi = -2$  in  $U$  und  $\psi = 0$  auf  $\partial U$  (Parkus, Mechanik der festen Körper, Seite 220). Das entspricht einer ruhenden, eben eingespannten Membran mit  $\frac{f}{\tau} = 2$  ("Prandtl'sches Membrangleichnis"). Die Funktion  $-x^2$  erfüllt  $\Delta(-x^2) = -2$ , ist aber nicht 0 am Rand. Wir setzen daher  $\psi(x, y) = -x^2 + \psi_1(x, y)$ , wobei  $\Delta\psi_1 = 0$  und  $\psi_1(x, y) = x^2$  am Rand von  $U$ . Speziell sei nun  $U = [0, a] \times [0, b]$  wie auf Seite 29.

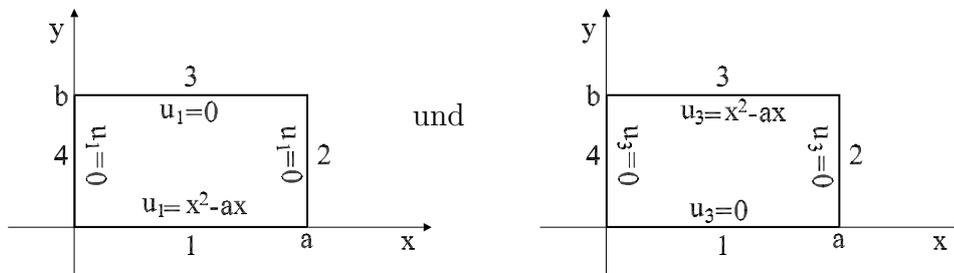
Dann ist auf  $\partial U$  :



Wenn wir  $\psi_1 = ax + u$  setzen, so ist  $\Delta u = \Delta(\psi_1 - ax) = \Delta\psi_1 - a\Delta x = 0 - 0 = 0$  und auf  $\partial U$  gilt:



Daher ist  $u = u_1 + u_3$ , wobei  $\Delta u_1 = \Delta u_3 = 0$ ,



Für  $u_3$  folgt aus 2.2.2:

$$u_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \text{ mit } \alpha_k \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a (x^2 - ax) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx =$$

$$\dots = \begin{cases} 0 & : k \text{ gerade} \\ -\frac{8a^2}{k^3\pi^3} & : k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\text{Also ist } u_3(x, y) = -\frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)}{k^3 \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

Aus Symmetriegründen ist  $u_1(x, y) = u_3(x, b - y)$

$$\Rightarrow u(x, y) = -\frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)}{k^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right)} \underbrace{\left[ \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}(b - y)\right) \right]}$$

$$\operatorname{sh}(\alpha) + \operatorname{sh}(\beta) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \Rightarrow 2\operatorname{sh}\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi(2y - b)}{2a}\right)$$

$$\operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha \Rightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)\right) / \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi b}{2a}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Somit folgt } \psi &= -x^2 + ax + u \\ &= -x^2 + ax - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)\right)}{k^3 \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a} \cdot \frac{b}{2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \end{aligned}$$

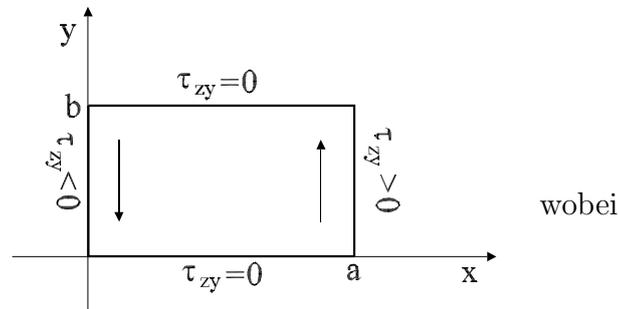
Aus  $\psi$  erhält man die Schubspannungen durch

$$\tau_{zx} = G\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -G\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

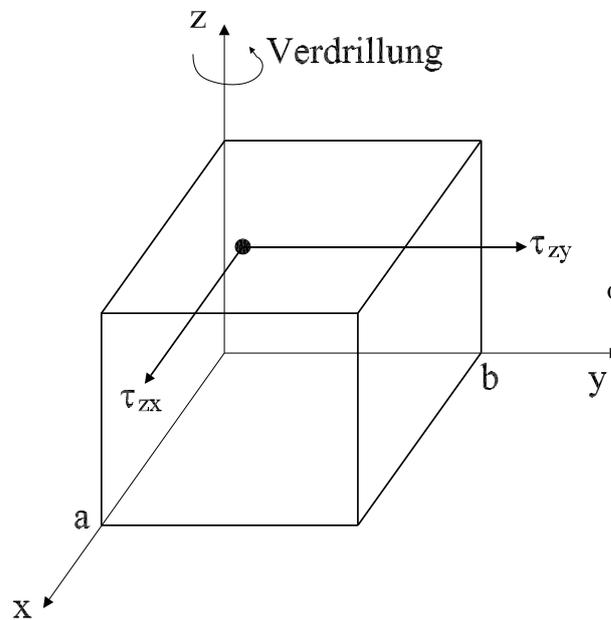
wobei  $\vartheta = \frac{\text{Verdrillung}}{\text{Längeneinheit in } z\text{-Richtung}} [\text{m}^{-1}]$ ,

$G = \text{Schubmodul } [\text{N}/\text{m}^2]$ .

Da harmonische Funktionen Extrema nur am Rand annehmen können, und da  $\Delta\tau_{zx} = \Delta\tau_{yz} = 0$ , werden die Schubspannungen am Rand maximal. Wegen  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  und weil  $\tau_{yz} = 0$  am Rand  $y = 0$  bzw.  $y = b$



wobei



d.h.  $\tau_{zy}(x, 0) = \tau_{zy}(x, b) = 0$ .

Aus der Formel für  $\psi$  folgt:

$$\tau_{zy} = G\vartheta \left[ 2x - a + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)\right)}{k^2 \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a} \cdot \frac{b}{2}\right)} \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right]$$

$$\implies \tau_{zy}(0, y) = G\vartheta \left[ -a + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)\right)}{k^2 \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a} \cdot \frac{b}{2}\right)} \right]$$

Das muß 0 sein für  $y = 0$  (Kontrolle:  $\sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{k^2} = \pi^2/8$ )

Daher:  $|\tau_{zy}(0, y)| = \max \iff \sum$  möglichst klein  $\iff y = \frac{b}{2}$ .

$$\text{Also: } |\tau_{zy}|_{\max} = G\vartheta a \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{k^2 \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi b}{2a}\right)} \right]$$

Für  $a \leq b$  ist dies die größte auftretende Schubspannung und für einen eventuellen Bruch verantwortlich.

Tabelle:

|                                    |       |               |               |               |               |
|------------------------------------|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $a/b$                              | 1     | $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $\frac{\tau_{\max}}{G\vartheta a}$ | 0.675 | 0.776         | 0.848         | 0.930         | 0.985         |

Bemerkung: Da  $\operatorname{ch}(x)$  sehr schnell  $\rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , konvergiert die obige Reihe sehr schnell und gilt näherungsweise

$$a \leq b \implies \tau_{\max} \approx G\vartheta a \left( 1 - \frac{8}{\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi b}{2a}\right)} \right).$$

## 2.3 Die Plattengleichung

### 2.3.1 Bezeichnungen und Beziehungen der Plattentheorie

#### a) Charakteristika der Platte

$$h = \text{Plattendicke [m]}$$

$$E = \text{Elastizitätsmodul} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$\mu = \text{Querdehnungszahl} = -E \cdot \frac{\text{Querdehnung}}{\text{Spannung}} \text{ [1]}$$

$$\varrho = \text{Dichte [kg/m}^3\text{]}$$

$$K = \text{Biegesteifigkeit der Platte} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

#### b) Beobachtungsgrößen (alle von $t, x, y$ abhängig)

$$w = \text{Durchbiegung [m]}$$

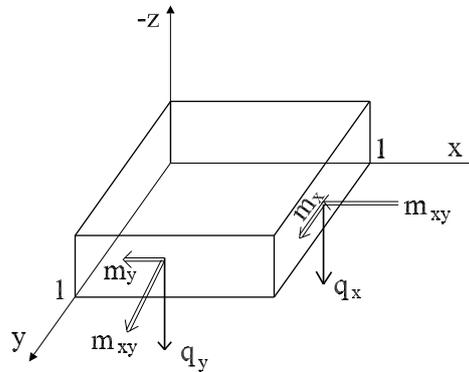
$$p = \text{Last [N/m}^2\text{]}$$

$$q_x, q_y = \frac{\text{Scherkräfte}}{\text{Länge}} \text{ [N/m]}$$

$$m_x, m_y = \frac{\text{Biegemomente}}{\text{Länge}} \text{ [N]}$$

$$m_{xy} = \frac{\text{Drillmoment}}{\text{Länge}} \text{ [N]}$$

Bild:



c) **Gleichungen**

Plattengleichung  $\boxed{\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K \Delta_2^2 w = p}$

(wobei  $\Delta_2^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$ ;  $p \hat{=} f$ ,  $\rho h \hat{=} \sigma$  in 2.1 und 2.2),

$$q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 w, \quad m_x = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_{xy} = -(1 - \mu) K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

etc.

d) **Randbedingungen** (z.B. für  $x = c$ )

eingespannt:  $w(t, c, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, c, y) = 0$

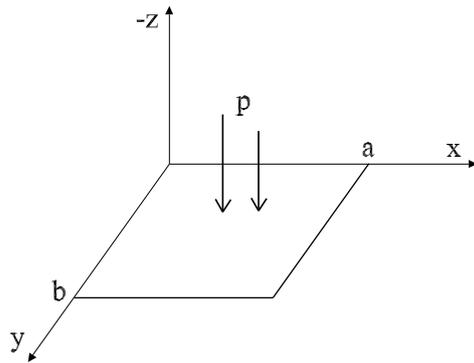
frei drehbar gelagert:  $w(t, c, y) = 0$  und

$$m_x(t, c, y) = 0 \iff \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, c, y) = 0$$

freier Rand:  $m_x(t, c, y) = 0$

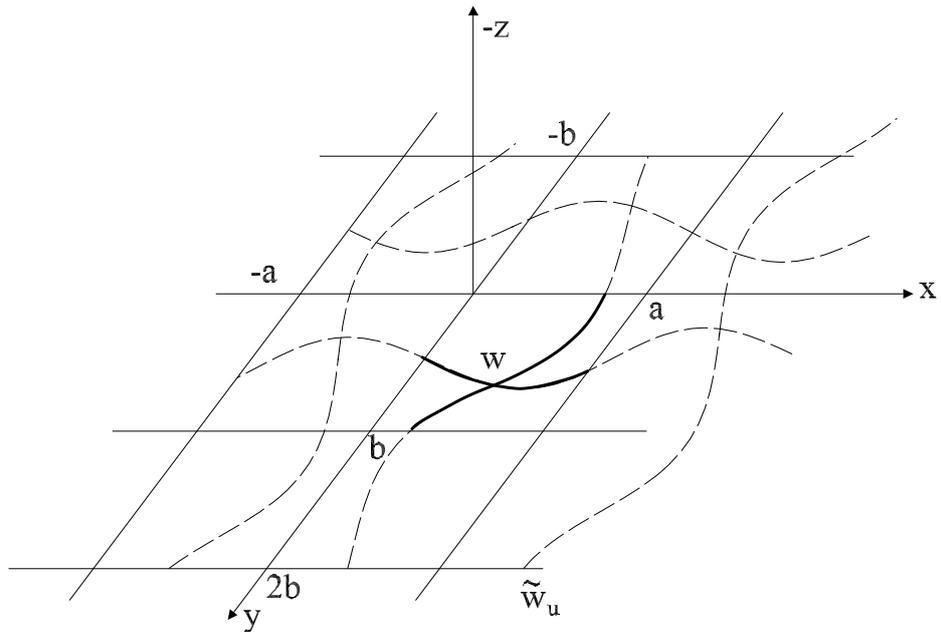
und (nach Kirchhoff)  $q_x(t, c, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}(t, c, y) = 0$

Im folgenden betrachten wir **die frei drehbar gelagerte Rechteckplatte**  
 $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  **unter der statischen Last**  $p(x, y)$  :



### 2.3.2 Das Spiegelungsprinzip

- a) Wir setzen  $w$  zunächst von  $[0, a] \times [0, b]$  ungerade fort  $+$ ) auf  $[-a, a] \times [-b, b]$  und dann periodisch fort zu  $\tilde{w}_u$  auf  $\mathbb{R}^2$ .  
 $+$ ) d.h.  $w(-x, y) = w(x, -y) = -w(x, y), \forall x, y$ .



Für jedes feste  $y$  ist  $\tilde{w}_u(-, y)$  periodisch mit Periode  $2a$  und ungerade

$$\implies \tilde{w}_u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(y) \sin\left(\frac{2k\pi x}{2a}\right),$$

$$\text{wobei } \alpha_k(y) = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot 2 \cdot \int_0^a \tilde{w}_u(x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx;$$

für festes  $x$  ist  $\tilde{w}_u(x, -)$  periodisch mit Periode  $2b$  und ungerade;

$$\begin{aligned}\tilde{w}_u(x, y + 2b) &= \tilde{w}_u(x, y) \implies \forall k : \alpha_k(y + 2b) = \alpha_k(y) \\ \tilde{w}_u(x, -y) &= -\tilde{w}_u(x, y) \implies \forall k : \alpha_k(-y) = -\alpha_k(y) \\ \implies \alpha_k(y) &= \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{2l\pi y}{2b}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{wobei } \alpha_{kl} &= 2 \cdot \frac{1}{2b} \cdot 2 \cdot \int_0^b \alpha_k(y) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dy \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w(x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dx dy\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \tilde{w}_u(x, y) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \quad (*)$$

Das ist die Entwicklung von  $w$  in eine doppelte Fouriersinusreihe.

**Beachte:** = in (\*) gilt nur dort, wo  $w$  stetig ist, vergleiche Seite 13.

b) Bisher wurden die Randbedingungen nicht verwendet.

(**Beachte:** Aus (\*) **folgt nicht**, daß z.B.  $w(0, y) = 0$ , denn

$$0 = \sum_{k, l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{k\pi 0}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \stackrel{(S.13)}{\stackrel{\downarrow}{=}} \frac{1}{2} \left[ \tilde{w}_u(0+, y) + \tilde{w}_u(0-, y) \right].$$

Weil nun  $w = 0$  am Rand und  $\partial_x^2 w$  bzw.  $\partial_y^2 w = 0$  an den Rändern  $x = \text{const.}$  bzw.  $y = \text{const.}$ , ist  $\tilde{w}_u$  bei  $x = ka$  und  $y = lb$  3-mal stetig und ein 4. Mal links/rechtseitig differenzierbar;

$$\begin{aligned}\Delta_2^2 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) &= \frac{k^4 \pi^4}{a^4} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \text{ etc.} \\ \implies \tilde{p}_u(x, y) &= K \Delta_2^2 \tilde{w}_u(x, y) \\ &= K \pi^4 \sum_{k, l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right).\end{aligned}$$

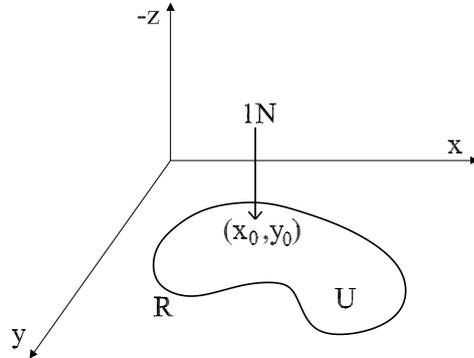
Also sind  $K \pi^4 \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2$  die Fouriersinuskoeffizienten von  $p(x, y) \implies$

$$\begin{aligned}(\text{siehe Seite 36 a}) \implies K \pi^4 \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2 &= \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dx dy.\end{aligned}$$

Damit sind die  $\alpha_{kl}$  bestimmt und daraus ergibt sich  $w$  mit (\*) siehe oben.

### 2.3.3 Die $\delta$ -„Funktion“

Auf einer Platte mit Grundriß  $U$  und Randbedingungen  $R$  sei eine Punktlast der Größe  $1[\text{N}]$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  gegeben, d.h.  $p = \delta_{(x_0, y_0)}$



Die resultierende Durchbiegung  $w$  hängt von der Lage des Punktes  $(x_0, y_0)$  ab und ich schreibe dafür  $w_{(x_0, y_0)}$ .

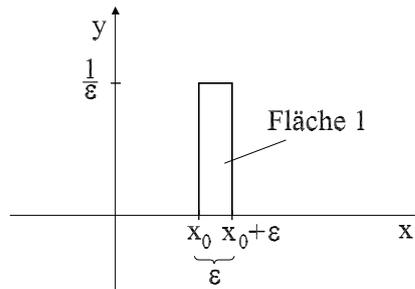
#### Definition

$w_{(x_0, y_0)}(x, y)$  heißt **Greensche Funktion** (oder **Einflußgröße**, **Einflußfeld**) zu  $K\Delta_2^2, U, R$ .

**Beachte:**  $\delta_{(x_0, y_0)}$  ist eigentlich keine Funktion, sondern eine „Distribution“. Im Eindimensionalen ist  $\delta_{x_0}$  der distributionelle Grenzwert von

$$\delta_{x_0}^\epsilon(x) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\epsilon} & : x_0 < x < x_0 + \epsilon \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\}$$

für  $\epsilon \searrow 0$ .



Weiters ist  $\delta_{(x_0, y_0)}(x, y) = \delta_{x_0}(x)\delta_{y_0}(y)$ , was auch mit einem  $\lim_{\epsilon \searrow 0}$  verstanden werden muß, da  $\delta_{x_0}(x)$  keinen Sinn hat. Wenn auch  $\delta_{x_0}(x)$  eigentlich sinnlos ist, so ist  $\int f(x)\delta_{x_0}(x) dx$  für stetiges  $f$  sinnvoll, nämlich

$$\int f(x)\delta_{x_0}(x) dx = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int f(x)\delta_{x_0}^\epsilon(x) dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} f(x) dx \stackrel{\text{Haupts.d.f-rechn.}}{=} f(x_0)$$

$\underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\epsilon} f(x) dx}_{F(x_0+\epsilon)-F(x_0)}$   
 ( $F$  Stammfunktion von  $f$ )

So können wir auch  $\delta_{x_0}$ ,  $0 < x_0 < a$ , in eine Fouriersinusreihe entwickeln (bzgl.  $p = 2a$ ):

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \\ \alpha_k &= 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot 2 \int_0^a \delta_{x_0}(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \\ \implies \delta_{x_0}(x) &= \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \end{aligned}$$

Diese Reihe divergiert im üblichen Sinn, läßt sich aber distributionell interpretieren. Damit gelangen wir zur **Navierschen Darstellung** der Greenschen Funktion der frei drehbar gelagerten Rechteckplatte:

$$w_{(x_0, y_0)}(x, y) = \frac{4}{\pi^4 abK} \sum_{k, l \in \mathbb{N}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y_0}{b}\right)}{\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right)$$

**Beweis:** Nach Seite 37 gilt für  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ :

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{k, l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right), \text{ wobei } K\pi^4 \alpha_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)^2 = \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dx dy = \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \delta_{x_0}(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx \cdot \int_0^b \delta_{y_0}(y) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dy = \frac{4}{ab} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y_0}{b}\right) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:**

- Die Reihe für  $w_{(x_0, y_0)}(x, y)$  ist im üblichen Sinn konvergent nach dem Integralkriterium, da  $\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{\pi}{4} < \infty$ .
- Diese Reihe konvergiert "langsam". Man kann aber  $\sum_{l \in \mathbb{N}}$  aufsummieren und erhält dann eine schnell konvergente einfache Reihe:

$$0 < x < a, 0 < y < y_0 \implies$$

$$w_{(x_0, y_0)}(x, y) = \frac{a^2}{\pi^3 K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi(b-y_0)}{a}\right)}{k^3 \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)}$$

$$\left\{ \left[ 1 + \frac{k\pi b}{a} \operatorname{cth}\left(\frac{k\pi b}{a}\right) - \frac{k\pi(b-y_0)}{a} \operatorname{cth}\left(\frac{k\pi(b-y_0)}{a}\right) \right] \right.$$

$$\left. \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) - \frac{k\pi y}{a} \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \right\}$$

**Tabelle einiger linearer, partieller Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten**

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $\Delta_n = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ ,  $\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ ,  $\gamma$  Diracmatrizen,  $\lambda \in \mathbb{R}$

| Operator  | Name, Bedeutung               | Typ   |
|---|-------------------------------|---|
| $\partial_1 + i\partial_2$  | Cauchy-Riemann                | elliptisch (statisch)   |
| $\Delta_n$  | Laplace, Membran              |   |
| $\Delta_n - \lambda$  | Helmholtz                     |   |
| $\Delta_2^2$  | ruhende Platte                |   |
| $\Delta_2^2 + \lambda^2$  | gebettete Platte              |   |
| $\partial_1^4 + 2(1 - 2\lambda^2)\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4$ | orthotrope Platte             |   |
| $\Delta_2^2 - 4\lambda^2\partial_1^2$                                     | gespannte Platte              |   |
| $\partial_t^2 - c^2\Delta_n$  | Wellen                        | hyperbolisch, (dynamisch, endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit) |
| $\partial_t^2 - c^2\Delta_n - \lambda$                                    | Klein-Gordon                  |   |
| $i\not\partial - \lambda I$   | Dirac                         |   |
| $\partial_t - \lambda^2\Delta_n$  | Wärmeleitung                  | parabolisch (dynamisch, unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit) |
| $\partial_t - i\lambda\Delta_n$   | Schrödinger                   |   |
| $\partial_t^2 + \lambda^2\Delta_n^2$                                      | schwingende(r) Balken, Platte |   |