Zur Berechnung von Fundamentallösungen[1]

Vortrag im Rahmen des Berufungsverfahrens für Angewandte Analysis

Peter Wagner, 10. 1. 2001

1) Der Euler-Bernoulli- und der Timoshenko-Operator. Der Begriff der Fundamentallösung.

a) Der Biegestab nach Euler-Bernoulli:

Wenn ein Stab von konstantem Querschnitt durch die Last $q(t,x)$ auf Biegung beansprucht wird, so gilt in der linearen Näherung (vgl. z.B. H. Parkus, Mechanik der festen Körper, Kap. XI):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M}{\epsilon J}, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = Q, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q$$

und daher

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\frac{1}{\epsilon J}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\frac{1}{\epsilon J}\Big(\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q\Big) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{\epsilon J} = f$$

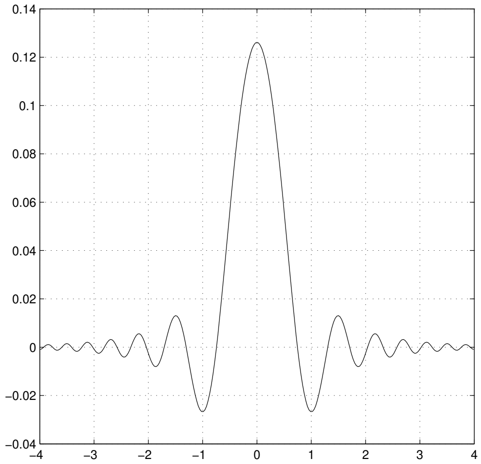
wobei w = Durchbiegung, t = Zeitvariable, x = Ortsvariable, M = Biegemoment, ϵ = Elastizitätsmodul, J = Trägheitsmoment, F = Querschnittsfläche, Q = Querkraft, q = Last, ρ = Dichte, $a = \sqrt{\frac{\rho F}{\epsilon J}}$. Wir erhalten als Operator des Euler-Bernoulli-Balkens:

$$P(\partial) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}.$$

Dieser Operator ist ein Evolutionsoperator, aber nicht hyperbolisch: Störungen breiten sich mit unendlicher Geschwindigkeit aus. Das sieht man an der **Fundamentallösung**. Dies ist eine Funktion $E(t,x)$, die $P(\partial)E = \delta$ erfüllt. E ist eindeutig, wenn zusätzlich $E = 0$ für $t < 0$ sowie eine Wachstumsbedingung gefordert wird. E beschreibt dann die Durchbiegung eines unendlich langen Balkens unter einer punktförmigen, instantanen Kraft ($f = \frac{q}{\epsilon J} = \delta = \delta(t)\delta(x)$.) Es gilt:

$$E(t,x) = \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \sin\Big(\frac{ax^2}{4\tau} + \frac{\pi}{4}\Big)\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\tau}},$$

für $t \geq 0$ und $E(t,x) = 0$ für $t < 0$. Man sieht aus der Formel, dass $E(t,x) \neq 0$ für jedes feste $t > 0$ und beliebig große x, d.h. die nur in $t = 0$, $x = 0$ gegebene Störung wirkt sich bereits nach beliebig kurzer Zeit in beliebig großer Entfernung aus. (Dies ist natürlich physikalisch falsch und nur eine Folge der idealisierenden Annahmen bei der Herleitung von P.)



E für $a = 1$ und $t = 0.1$

1) Weitere Information unter http://techmath.uibk.ac.at/mathematik/wagner/publwagner.html

E ist insofern “fundamental”, als daraus die Durchbiegung w zu einer beliebigen Last $q = \epsilon J f$ mittels “Faltung” gewonnen werden kann. Man denkt sich f durch eine Summe von $\delta-$Funktionen approximiert, d.h.

$$f \approx \sum_{i,j} f(t_i, x_j)\Delta t_i \Delta x_j \delta(t - t_i)\delta(x - x_j).$$

Da P konstante Koeffizienten hat, ist die Durchbiegung, die $f = \delta(t - t_i)\delta(x - x_j)$ entspricht, durch $E(t - t_i, x - x_j)$ gegeben; da P linear ist, gilt das “Superpositionsprinzip” und ein Grenzübergang, der von der Riemannsumme zum Integral führt, liefert

$$\begin{aligned} w &= \lim_{\Delta t_i, \Delta x_j \to 0} \sum_{i,j} f(t_i, x_j)\Delta t_i \Delta x_j E(t - t_i, x - x_j) \\ &= \iint f(\tau, \xi) E(t - \tau, x - \xi)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\xi = f * E. \end{aligned}$$

Unter geeigneten Bedingungen an f kann diese heuristische Überlegung im Rahmen der Distributionentheorie exakt durchgeführt werden.

E ist auch der Grundbaustein zur Konstruktion von **Green’schen Funktionen**, bei denen zusätzlich Randbedingungen gegeben sind. In einer Arbeit im Int. J. Solids Structures 1990 wurden die Green’schen Funktionen des eingespannten, halb-unendlichen Euler-Bernoulli-Balkens sowie von eingespannten, isotropen bzw. orthotropen Platten durch Integrale dargestellt und numerisch ausgewertet.

b) Die Balkengleichung nach Timoshenko:

Eine genauere Balkengleichung wurde von S. Timoshenko aufgestellt (Vibration Problems in Engineering, 1955^3, §52, (138), p. 334). Der zugehörige Operator ist

$$P(\partial) = \Big(\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\Big(\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) + a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

wobei $c_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}}$, $G =$ Schubmodul, $\kappa =$ Scherkoeffizient. P ist hyperbolisch, es treten zwei Wellen mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_1, c_2 auf. Die Fundamentallösung von $P(\partial)$ sowie die Green’schen Funktionen zu verschiedenen Anfangswertproblemen wurden mit einer Variante der Cagniard-deHoop’schen Methode in einer Arbeit im J. Elasticity 1996 bestimmt.

2) Das System der dynamischen linearen Thermoelastizität. Der Begriff der Fundamentalmatrix.

Wir betrachten die Verschiebungen $\mathbf{u}(t,x)$ und die Temperatur $T(t,x)$ in einem homogenen, isotropen Medium. Nach Duhamel-Neumann und Biot gelten die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \rho\partial_t^2\mathbf{u} - \mu\Delta_3\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\nabla\cdot\nabla^T\cdot\mathbf{u} + \beta\nabla T &= \mathbf{F} \\ \partial_t T - \kappa\Delta_3 T + \eta\partial_t\nabla^T\cdot\mathbf{u} &= Q, \end{aligned}$$

bzw. $A(\partial)\binom{\mathbf{u}}{T} = \binom{\mathbf{F}}{Q}$ mit einer $4\times 4-$Matrix $A(\partial)$ von Differentialoperatoren. (Hier ist $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, [$T$ im Exponenten] = Transposition, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T$, $\partial = (\partial_t, \nabla)$, $\Delta_3 = \nabla^T\cdot\nabla$, $\mathbf{F}$ = äußere Kraft, Q ist proportional der Wärmezufuhr, $\lambda,\mu,\beta,\kappa,\eta$ sind Konstante.) (Rechts-) **Fundamentalmatrix** nennt man eine $4\times 4-$Matrix M von Funktionen (genauer: Distributionen) mit $A(\partial)M = \delta I_4$, wobei I_4 die $4\times 4-$Einheitsmatrix bezeichnet. (Wieder erhält man Eindeutigkeit erst, wenn physikalisch motivierte Zusatzbedingungen an M gestellt werden. Bei $A(\partial)$ oben wäre es $M=0$ für $t<0$ und $M\in\mathcal{S}'$, d.h. eine Wachstumsbedingung.) Beispielsweise enthält dann die 3. Spalte der Fundamentalmatrix die Verschiebungen und die Temperatur, die einer Erregung des Mediums durch $\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\delta\\0\end{pmatrix}$ entsprechen. Die allgemeine Lösung ergibt sich wieder durch Faltung aus M :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}(t,x)\\ T(t,x)\end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^4} M(t-\tau, x-\xi)\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{F}(\tau,\xi)\\ Q(\tau,\xi)\end{pmatrix}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi = M * \begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ Q\end{pmatrix}.$$

Die Konstruktion der Fundamentalmatrix kann auf die Berechnung einer Fundamentallösung zurückgeführt werden, indem $M = A(\partial)^{\mathrm{ad}}E$, $E =$ [Fundamentallösung von $\det A(\partial)$] gesetzt wird. In zwei Arbeiten im J. Math. Analysis Appl. 1992 sowie im J. Thermal Stresses 1994 wurden E und M durch Integrale dargestellt und numerisch ausgewertet.

3) Zur Existenz von Fundamentallösungen.

Grundlegend dafür ist das

Theorem von Malgrange-Ehrenpreis. *Es sei* $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ *für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, *und* $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$ *nicht alle 0. Dann existiert eine Fundamentallösung* E *von* $P(\partial)$, *d.h.* $\exists E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : P(\partial)E = \delta$.

Lange vor der Aufstellung dieses Satzes im Jahr 1954 kannte man bereits die Fundamentallösungen wichtiger Operatoren der Physik, z.B. $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$ wenn $P(\partial) = \Delta_3 =$ Laplace-Operator im Raum (Coulomb), $E = Y(t)(4\pi t)^{-3/2} \mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)}$, wenn $P(\partial) = \partial_t - \Delta_3 =$ Wärmeleitungsoperator im Raum (Poisson), $E = \delta(t - |x|)/(4\pi t)$, wenn $P(\partial) = \partial_t^2 - \Delta_3 =$ Wellenoperator im Raum (Kirchhoff). Das obige Theorem von Malgrange-Ehrenpreis konnte aber erst im Rahmen der Distributionentheorie (L. Schwartz, 1948) formuliert und bewiesen werden. Die ursprünglichen Beweise waren indirekt und beruhten auf dem Satz von Hahn-Banach. Inspiriert durch eine Arbeit von H. König fand ich 1994 eine Formel, die m.E. den derzeit kürzesten Beweis liefert:

$$E = \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1} \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda \eta x} \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(\frac{\overline{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)}}{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)} \right) \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi \mathrm{i} \lambda}$$

ist eine Fundamentallösung von $P(\partial)$, wenn $P_m(\partial) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \partial^\alpha$ (d.h. P_m ist der Hauptteil von P), $\eta \in \mathbb{C}^n$ mit $P_m(\eta) \neq 0$, und $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation bezeichnet. Die Formel ist sinnvoll, da

$$\frac{\overline{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)}}{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi).$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
P(\partial)E &= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1} \lambda^m P(\partial) \left(\mathrm{e}^{\lambda\eta x} \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \Big(\frac{\overline{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)}}{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)} \Big) \right) \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi \mathrm{i}\lambda} \\
&= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1} \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda\eta x} \left(P(\partial + \lambda\eta)\, \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \Big(\frac{\overline{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)}}{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)} \Big) \right) \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi \mathrm{i}\lambda} \\
&= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1} \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda\eta x} \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \big(\overline{P(\mathrm{i}\xi + \lambda\eta)} \big) \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi \mathrm{i}\lambda} \\
&= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1} \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda\eta x} \overline{P(\partial + \lambda\eta)}\, \delta \, \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi \mathrm{i}\lambda} \\
&= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1} \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda\eta x} \Big[\overline{\lambda^m}\, \overline{P_m(\eta)}\, \delta + \sum_{k=0}^{m-1} \overline{\lambda^k}\, Q_k(\partial)\delta \Big] \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi \mathrm{i}\lambda} = \delta.
\end{aligned}$$

Weiteres dazu findet sich in 2 Arbeiten im Proceedingsband “Functional Analysis” 1996 sowie in Acta Appl. Math. 1997.

4) Fundamentallösungen von homogenen, hyperbolischen Operatoren.

Ein Operator $P(\partial)$ im $\mathbb{R}^n$ heißt **hyperbolisch** in Richtung $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wenn er eine (dann auch eindeutige) Fundamentallösung E besitzt, die außerhalb eines Kegels $\{x \in \mathbb{R}^n : a|x| \leq x \cdot N\}$, $a > 0$, verschwindet. (Wenn $N = (0, \dots, 0, 1)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $t = x_n$, so ist also $E = 0$ für $|x'| > ct$ mit geeignetem $c > 0$, d.h. die in $t = 0, x' = 0$ befindliche Störung δ breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit ($\leq c$) aus.) Hyperbolische Operatoren $P(\partial)$ lassen sich auch durch eine algebraische Bedingung an das Polynom $P(\xi)$ charakterisieren.

Petrovsky (1945) und Atiyah, Bott, Gårding (1970, 1973) stellten grundlegende Untersuchungen über E im Fall homogener hyperbolischer Operatoren $P(\partial)$ an. Darin wurden $E(x)$ bzw. Ableitungen $\partial^\alpha E(x)$ (falls $m \geq n$, $m = \operatorname{gr} P$, $|\alpha| > m - n$) durch $(n-2)-$fache Integrale über Zykeln z_x im komplexen projektiven Raum $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ dargestellt. Dies ermöglichte es ihnen, den **singulären Träger** von E, d.h.

$$\operatorname{sing\,supp} E = \{x \in \mathbb{R}^n : E \text{ ist nicht } \mathcal{C}^\infty \text{ bei } x\}$$

durch algebraische Bedingungen zu beschreiben. Speziell für nicht-singuläres P (d.h. $\nabla P(\xi) \neq 0$ für $\xi \neq 0, P(\xi) = 0$) ist $\operatorname{sing\,supp} E$ der im Halbraum $N \cdot x \geq 0$ gelegene Teil der zu $P = 0$ dualen Hyperfläche

$$W = \{\lambda \nabla P(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n, P(\xi) = 0, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

W ist eine algebraische Mannigfaltigkeit.

Beispielsweise für $P(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + 3a\xi_1\xi_2\xi_3$ ist

$$\begin{aligned} W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3a(a^3+4)x_1^2x_2^2x_3^2 + 4(a^3+1)(x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3) \\ + 6a^2x_1x_2x_3(x_1^3+x_2^3+x_3^3) - (x_1^3+x_2^3+x_3^3)^2 = 0\}. \end{aligned}$$

In 2 Arbeiten (in Acta Math. 1999 sowie Math. Scand. 2000) konnte ich E für den Operator $P(\partial)$ bestimmen. Dabei ist für $a < -1$ $P(\partial)$ hyperbolisch in Richtung $(1,1,1)$, für $a > -1$ ist die Theorie von ABG mit kleinen Änderungen zu verwenden. Der Operator $P(\partial)$ enthält modulo linearer Transformationen alle homogenen reellwertigen Operatoren 3. Grades in 3 Variablen. Es zeigt sich, dass zwar E selbst keine algebraische Funktion ist (sondern ein unvollständiges elliptisches Integral 1. Art), dass aber, ähnlich wie $\operatorname{sing\,supp} E$ durch W, die **Niveauflächen** von E wieder durch algebraische Flächen gegeben sind.

Physikalisch interessanter sind Operatoren 6. bzw. 4. Ordnung. Sie treten bei $3 \times 3-$Systemen 2. Ordnung als Determinanten bzw. als Faktoren davon auf. Z.B. ist eine explizite Darstellung der Fundamentalmatrix M für das System der Kristalloptik (d.h. für die Maxwell'schen Gleichungen in homogenen anisotropen Medien)

$$A(\partial)\mathbf{u} = \partial_t^2\mathbf{u} + \operatorname{rot}(d \cdot \operatorname{rot}\mathbf{u}), \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}, \qquad d_i > 0,$$

bis heute ausständig. Wenn $P(\partial) = \det A(\partial) = \partial_t^2 P_1(\partial)$, so ist die zu $P = 0$ bzw. $P_1 = 0$ duale Mannigfaltigkeit durch

$$W = \{(t,x) : |x|^2 \sum_{i=1}^3 d_i x_i^2 - t^2 \sum_{i=1}^3 (s - d_i)x_i^2 + t^4 d_1d_2d_3 = 0, s = d_1 + d_2 + d_3\}$$

gegeben. Wenn alle d_i verschieden sind, so ist W entlang zweier Geraden singulär; $\{x \in \mathbb{R}^3 : (1, x) \in W\}$ (die "Fresnel'sche Fläche") ist homöomorph zu zwei Kugeloberflächen, die an 4 paarweise gegenüberliegenden Punkten verheftet sind.

Nach den durch diese 4 Punkte verlaufenden 2 optischen Achsen nennt man solche Kristalle 2-achsig. Mit den aus der Form von W resultierenden physikalischen Eigenschaften solcher Kristalle befassten sich Huygens, Fresnel, Hamilton, Voigt; eine möglichst explizite Darstellung der Fundamentalmatrix M suchten Lamé, Kovalevskaya, Grünwald, Herglotz, Zeilon (Historische Übersicht: L. Gårding: History of the Mathematics of Double Refraction, Arch. Hist. Exact Sc. 40 (1989)). Es ist möglich, den singulären Anteil von M ($\delta-$Wellen mit Träger auf W) explizit zu bestimmen. Die Struktur der Niveauflächen der Komponenten von M im Innern von W ist derzeit unbekannt.

Eine ähnliche Struktur wie $A(\partial)$ hat das System der elastodynamischen Gleichungen in anisotropen Medien:

$$\big(B(\partial)\mathbf{u}\big)_k = \partial_t^2 u_k - \frac{1}{\rho} \sum_{i,j,l=1}^{3} c_{ijkl} \partial_j \partial_l u_i = f_k$$

Die Fundamentalmatrix M ist durch die "Grünwald'sche Formel"

$$M(t,x) = -\frac{Y(t)}{4\pi^2} \int_S \delta'(t + x\xi) \, \frac{B^{\mathrm{ad}}(1,\xi)}{(\partial_\tau \det B)(1,\xi)} \, |\gamma|(\xi)$$

gegeben, wobei $S = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \det B(1,\xi) = 0\}$, und $\gamma(\xi) = \xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2 \wedge \mathrm{d}\xi_3 - \xi_2 \, \mathrm{d}\xi_1 \wedge \mathrm{d}\xi_3 + \xi_3 \, \mathrm{d}\xi_1 \wedge \mathrm{d}\xi_2$ (Leray-Form). (Im Fall der Kristalloptik gilt diese Formel mit einer kleinen Abänderung aufgrund des Faktors ∂_t^2 in $\det A(\partial)$.) Eine Auswertung dieser Formel in Spezialfällen (hexagonale bzw. kubische Medien) ist im Augenblick der Gegenstand meiner gemeinsamen Forschung mit N. Ortner.