Skriptum zur Vorlesung FUNKTIONALANALYSIS

Peter Wagner

VO 4 WS 2004/05

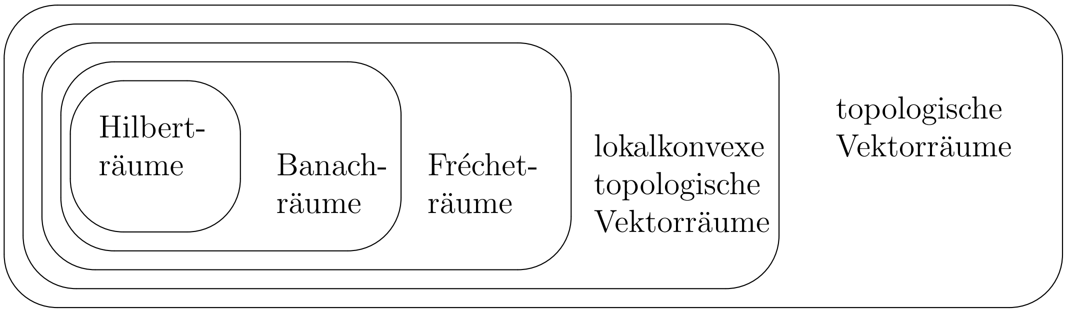
http://techmath.uibk.ac.at/wagner/lehre/

Institut für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften
Arbeitsbereich Technische Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

Funktionalanalysis = Lineare Algebra $\cap$ Topologie = Theorie der topologischen Vektorräume (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Entsprechend der vorhandenen Struktur sind topologische Vektorräume so geschachtelt:



Die konkreten Beispiele sind meist ∞-dimensionale Folgen- oder Funktionenräume und sind im Allgemeinen „lokalkonvex“. Es gibt 3 Richtungen in der Theorie:

A) Allgemeine Sätze für lokalkonvexe topologische Vektorräume, insbesondere

   a) Satz von Hahn-Banach,

   b) Satz von Banach-Steinhaus,

   c) Graphensatz.

B) Nähere Untersuchung von Hilberträumen, insbesondere der Spektralsatz, der die Diagonalisierung von $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verallgemeinert.

C) Distributionentheorie.

Diese Vorlesung basiert auf H. Triebel: Höhere Analysis, Kap. I, II, IV, VII und zielt in Richtung B), C).

Kapitel 1

Banachräume und Distributionen

§ 1 Banachräume

Ich wiederhole zunächst aus Analysis 2.

Def.:
X Menge, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall x, y, z \in X$:

(M1) $d(x,x) = 0$ und $x \neq y \implies d(x,y) > 0$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ heißt **Metrik** und (X,d) **metrischer Raum**.

Def.:
X Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

(N1) $|0| = 0$ und $x \neq 0 \implies |x| > 0$

(N2) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

(N3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ heißt **Norm** und $\big(X, |\cdot|\big)$ **normierter Raum**.

Bemerkung: 1) $\big(X, |\cdot|\big)$ normiert $\implies d(x,y) = |x - y|$ Metrik.
2) (X,d) metrischer Raum, $M \subset X \implies \big(M, d|_{M \times M}\big)$ ist auch ein metrischer Raum.
3) $|\cdot|$ Norm $\implies |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y|$ und ebenso $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y| \implies \underbrace{\big||x| - |y|\big|}_{\text{Betrag in } \mathbb{R}} \leq |x - y|$.

Def.:
(X,d) metrischer Raum, $a, x_1, x_2, \dots \in X$.

1) $x_k \longrightarrow a$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \iff d(x_k, a) \longrightarrow 0$.

2) (x_k) C-**Folge** (=Fundamentalfolge) $\iff$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j, k \geq N : d(x_j, x_k) \leq \varepsilon$.

3) (X, d) **vollständig** $\iff$ jede C-Folge konvergiert.

4) Der normierte Raum $\big(X, |\cdot|\big)$ heißt **Banachraum** $\iff$
$\big(X, |\cdot|\big)$ vollständig, d.h. (X, d) vollständig, wenn $d(x, y) = |x - y|$.

Bemerkung: $x_k \to a$ in $\big(X, |\cdot|\big) \implies |x_k| \longrightarrow |a|$ nach Bemerkung 3), d.h.
$|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Def.:
2 Normen $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ auf X heißen **äquivalent** $\iff$
$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} : \forall x \in X : \|x\| \leq C_1 |x|$ und $|x| \leq C_2 \|x\|$.

Bemerkung: $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ liefern dann dieselbe Topologie und dieselben C-Folgen.

Satz 1.1
${}_{\mathbb{K}}X$ endlich-dimensional $\implies$ alle Normen auf X sind äquivalent.

Beweis: a) Nach Wahl einer Basis ist $X \cong \mathbb{K}^n$.
Es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $|x|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ und $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ noch eine Norm. Wegen der Transitivität der Normenäquivalenz genügt es zu zeigen, dass $|\cdot|_1$ und $\|\cdot\|$ äquivalent sind.
b) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, e_i Standardbasis $\implies$
$\implies \|x\| = \big\|\sum x_i e_i\big\| \leq \sum \|x_i e_i\| = \sum |x_i| \, \|e_i\| \leq$
$\leq C_1 \cdot \sum |x_i| = C_1 \cdot |x|_1$ mit $C_1 = \max\limits_{i=1,\cdots,n} \|e_i\|$.
c) Es sei $M := \big\{x \in \mathbb{K}^n ; |x|_1 = 1\big\} \implies M \subset \mathbb{K}^n$ ist abgeschlossen und beschränkt (bzgl. der üblichen Topologie) $\implies M \subset \mathbb{K}^n$ ist kompakt;
$f : M \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \|x\|$ ist stetig (bzgl. der üblichen Topologie auf $M \subset \mathbb{K}^n$), denn $\big|f(x) - f(y)\big| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \overset{\text{b)}}{\leq} C_1 |x - y|_1$ (d.h. f ist sogar lipschitzstetig)
$\underset{(\text{Anal. } 2, \boxed{30})}{\implies}$ f nimmt das Minimum an
$\implies \exists x_0 \in M : \|x_0\| = \min\limits_{x \in M} \|x\|$; $x_0 \in M \implies \|x_0\| > 0$; setze $C_2 = \dfrac{1}{\|x_0\|} \implies$

$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : \dfrac{x}{|x|_1} \in M$ und $\|x\| = \left\| |x|_1 \cdot \dfrac{x}{|x|_1} \right\| = |x|_1 \cdot \left\| \dfrac{x}{|x|_1} \right\| \geq |x|_1 \cdot \|x_0\| = \dfrac{|x|_1}{C_2} \implies$
$\forall x \in \mathbb{K}^n : |x|_1 \leq C_2 \|x\|$. $\square$

Satz 1.2
$(X, |\cdot|)$ endlichdimensionaler normierter Raum $\implies$ $(X, |\cdot|)$ Banachraum.

Beweis: $(\mathbb{K}^n, |\cdot|_\infty)$ ist vollständig (vgl. Analysis 2), $(X, |\cdot|)$ äquivalent dazu nach Satz 1.1 $\implies$ $(X, |\cdot|)$ vollständig. $\square$

Bemerkung: Für ∞-dimensionale Vektorräume gelten die Sätze 1.1 und 1.2 **NICHT**. Wenn z.B. $l^1 = \left\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N};\ |x|_1 := \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\right\}$ (vgl. auch § 2) und $l^\infty = \left\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N};\ |x|_\infty := \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\right\}$, so ist $l^1 \subset l^\infty$ und daher $|\cdot|_\infty : l^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ auch eine Norm auf l^1. Dann gilt:

a) $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_\infty$ sind nicht äquivalent auf l^1;

b) $(l^1, |\cdot|_\infty)$ ist nicht vollständig, s. Übung 1.

Der nächste Satz sagt, dass wir, wenn $(X, |\cdot|)$ nicht vollständig ist, X „vervollständigen“ können. Z.B. wäre $\left(c_0 = \left\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N};\ \lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0\right\},\ |\cdot|_\infty\right)$ die Vervollständigung von $(l^1, |\cdot|_\infty)$, s. Übung 2.

Def.:
Y topologischer Raum, $X \subset Y$. X heißt **dicht** in $Y \iff \overline{X} = Y$.

Bemerkung: $(Y, |\cdot|)$ normierter Raum. Dann ist $X \subset Y$ dicht $\iff$
$\forall y \in Y : \exists (x_k) \in X^\mathbb{N} : x_k \longrightarrow y$ in Y, d.h. $|x_k - y| \to 0$ (weil in metrischen Räumen $\overline{X} = \left\{\lim\limits_{k\to\infty} x_k;\ (x_k) \in X^\mathbb{N} \text{ konvergiert in } Y\right\}$).

Satz 1.3 und **Def.:**

a) $(X, |\cdot|)$ normierter Raum $\implies \exists$ Banachraum $(Y, \|\cdot\|)$ mit $X \underset{\text{(d.h. UnterVR)}}{\leq} Y$ dicht und $\forall x \in X : \|x\| = |x|$.

b) Y ist im folgenden Sinn eindeutig: Wenn $(Z, |||\cdot|||)$ Banachraum mit $X \leq Z$ dicht und $\forall x \in X : |||x||| = |x|$, so $\exists_1 f : Y \longrightarrow Z$ linear, bijektiv mit $f\big|_X = \mathrm{id}_X$ und $\forall y \in Y : \big|\big|\big| f(y) \big|\big|\big| = \|y\|$, d.h. f ist ein Isomorphismus von $(Y, \|\cdot\|)$ und $(Z, |||\cdot|||)$, der X invariant lässt.

c) $(Y, \|\cdot\|)$ wie in a) heißt **Vervollständigung** von $(X, |\cdot|)$ und wird oft mit $\hat{X}$ bezeichnet.

Bemerkung: Die Vervollständigung von normierten Vektorräumen ist eine ähnliche Konstruktion wie der Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$.

Beweis: a) $V := \big\{(x_k) \in X^{\mathbb{N}};\ (x_k)\ C\text{-Folge}\big\}$ ist ein Untervektorraum von $X^{\mathbb{N}}$ (denn $(x_k), (x_k')$ C-Folgen $\implies$ $(\lambda x_k), (x_k + x_k')$ C-Folgen).
$W := \big\{(x_k) \in X^{\mathbb{N}};\ (x_k)\ 0\text{-Folge, d.h. } x_k \to 0\big\}$ ist ein Untervektorraum von $V \implies Y := V/W$ ist ein Vektorraum. $X \longrightarrow Y : x \longmapsto \overline{(x, x, x, \cdots)}$ ist linear und injektiv und wir identifizieren so $X \leq Y$. Weiters ist $\|\cdot\| : Y \longrightarrow \mathbb{R} : \overline{(x_k)} \longmapsto \lim\limits_{k\to\infty} |x_k|$ wohldefiniert (weil $|x_k|$ C-Folge in $\mathbb{R} \implies$ konvergent) und eine Norm auf Y.
$X \subset Y$ dicht, da $\overline{(x_k)} \in Y \implies x_n \hat{=} \overline{(x_n, x_n, \cdots)} \longrightarrow \overline{(x_k)}$ für $n \to \infty$, denn

$$\big\|\overline{(x_k)} - x_n\big\| = \big\|\overline{(x_k)} - \overline{(x_n, x_n, \cdots)}\big\| = \big\|\overline{(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \cdots)}\big\| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} |x_k - x_n| \leq \varepsilon \text{ für } n \geq N_\varepsilon, \text{ da } (x_k)\ C\text{-Folge.}$$

Y ist vollständig, denn: y_n C-Folge in Y, $X \subset Y$ dicht $\implies \exists u_n \in X$ mit
$\|y_n - u_n\| \to 0 \implies |u_n - u_m| = \|u_n - u_m\| \leq \|u_n - y_n\| + \|y_n - y_m\| + \|y_m - u_m\| \to 0$
für $n, m \to \infty \implies (u_n)$ C-Folge in $X \implies y := \overline{(u_k)} \in Y$ und
$\|y_n - y\| \leq \underbrace{\|y_n - u_n\|}_{\to 0} + \underbrace{\|u_n - y\|}_{\to 0 \text{ (s.o.)}} \to 0$ für $n \to \infty$.

b) folgt aus Satz 1.3' mit $h = \mathrm{id}_X,\ f = \hat{h}$. $\square$

Satz 1.3' *(„BLT-Theorem“)*
$\big(X, |\cdot|\big), \big(Y, \|\cdot\|\big)$ normierte Räume, $\big(Z, |||\cdot|||\big)$ Banachraum, $C > 0$, $X \leq Y$ dicht und $\forall x \in X : \|x\| = |x|$ (z.B. $Y = \hat{X}$), $h : X \longrightarrow Z$ linear mit $\forall x \in X : \big|\big|\big|h(x)\big|\big|\big| \leq C|x|$ (d.h. h ist „beschränkt“, vgl. § 6).
Dann gilt: $\exists_1 \hat{h} : Y \longrightarrow Z$ linear mit $\hat{h}\big|_X = h$ und $\forall y \in Y : \big|\big|\big|\hat{h}(y)\big|\big|\big| \leq C\|y\|$.

Beweis: $y \in Y,\ y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in X \implies \big|\big|\big|h(x_n) - h(x_m)\big|\big|\big| \leq C|x_n - x_m| \to 0$ für $n, m \to \infty \implies h(x_n)$ C-Folge $\overset{(Z \text{ vollst.})}{\implies}$ $h(x_n)$ konvergiert.

Definiere $\hat{h}(y) := \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$.
Das ist wohldefiniert, weil $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n' \implies x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots \longrightarrow y \implies h(x_1), h(x_1'), \cdots$ konvergiert $\implies \lim h(x_n) = \lim h(x_n')$. Weiters ist $\hat{h}\big|_X = h$.

$$\big|\big|\big|\hat{h}(y)\big|\big|\big| = \big|\big|\big|\lim h(x_n)\big|\big|\big| = \lim \big|\big|\big|h(x_n)\big|\big|\big| \leq \lim C \underbrace{|x_n|}_{=\|x_n\|} = C\|y\|$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\hat{h}$ linear ist. $\hat{h}$ ist eindeutig, weil $x_n \longrightarrow y$ in $Y \implies$
$\left|\left|\left|\tilde{\hat{h}}(y) - h(x_n)\right|\right|\right| \leq C\|y - x_n\| \to 0$ für $n \to \infty \implies \tilde{\hat{h}} = \hat{h}$. $\square$

Bemerkung: Ein normierter Raum $\big(X, |\cdot|\big)$ ist ein metrischer und damit topologischer Raum, und daher sind die Begriffe **offen**, **abgeschlossen**, **Umgebung**, **Rand**, **Inneres**, **Abschluss**, definiert.

$M \subset X$ heißt **beschränkt** $\iff \exists N > 0 : \forall x \in M : |x| \leq N$. Ein topologischer Raum heißt **kompakt** $\iff$ jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung. (Manche Leute verlangen noch „Hausdorff" dazu, aber das ist in dieser Vorlesung sowieso immer erfüllt.) Der Satz von Heine-Borel sagt, dass ein metrischer Raum kompakt ist $\iff$ jede Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Def.:

1) X topologischer Raum. $M \subset X$ heißt **relativ kompakt** $\iff \overline{M}$ kompakt.
2) $\big(X, |\cdot|\big)$ normiert. $M \subset X$ heißt **präkompakt** $\iff M \subset Y = \hat{X}$ relativ kompakt.

Bemerkung: $M \subset X$ präkompakt $\iff$ jede Folge in M hat eine in $\hat{X}$ konvergente Teilfolge.

Satz 1.4
M präkompakt $\implies M$ beschränkt.

Beweis: Annahme: M präkompakt und unbeschränkt $\implies$
$\forall k : \exists x_k \in M$ mit $|x_k| \geq k$; sei $(x_{k_j})_j$ eine in $\hat{X}$ konvergente Teilfolge $\implies$
$x_{k_j} \longrightarrow y \in \hat{X} \implies \underbrace{|x_{k_j}|}_{\geq k_j} = \|x_{k_j}\| \longrightarrow \|y\| < \infty \implies \lightning$ $\square$

Lemma 1.1 [1]
$\big(X, |\cdot|\big)$ normierter Raum, $Y \leq X$ abgeschlossener Untervektorraum mit $Y \neq X \implies \sup\limits_{\substack{x \in X \\ |x|=1}} \big(\inf\limits_{y \in Y} |x - y|\big) = 1$ (d.h. $\forall a < 1 : \exists x \in X$ mit $|x| = 1$ und $\inf\limits_{y \in Y} |x - y| \geq a$).

Bemerkung: Beachte, dass $\inf\limits_{y \in Y} |x - y| \leq |x - 0| = 1 \implies \sup(\cdots) \leq 1$.

Beweis: Es sei $0 < a < 1$ und $z \in X \setminus Y \implies d = \inf\limits_{y \in Y} |z - y| > 0$ (weil Y abgeschlossen); wenn $y_0 \in Y$ mit $|z - y_0| \leq \dfrac{d}{a}$, so setze $x := \dfrac{z - y_0}{|z - y_0|} \implies |x| = 1$ und $\forall y \in Y$ gilt $|x - y| = \dfrac{1}{|z - y_0|} \cdot \Big|z - \big(\underbrace{y_0 + y|z - y_0|}_{\in Y}\big)\Big| \geq \dfrac{1}{|z - y_0|} \cdot d \geq \dfrac{d}{\frac{d}{a}} = a$. $\square$

[1] oft „Riesz'sches Lemma" genannt

Satz 1.5
Für einen normierten Raum $\big(X, |\cdot|\big)$ gilt: $\dim X < \infty \iff$ jede beschränkte Menge ist präkompakt.

Beweis: „$\Longrightarrow$“ $\dim X < \infty \implies$ oEdA $X = \mathbb{K}^n$ mit $|\cdot|_\infty$ (vgl. Satz 1.1) und $X = \hat{X}$ (Satz 1.2). $M \subset X$ beschränkt $\implies \overline{M}$ abgeschlossen und beschränkt $\underset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\Longrightarrow}$ $\overline{M}$ kompakt $\implies M$ präkompakt.
„$\Longleftarrow$“ jede beschränkte Menge sei präkompakt $\implies S = \big\{x \in X; |x| = 1\big\}$ ist präkompakt.
Annahme: $\dim X = \infty$.
Es sei $x_1 \in S$ beliebig, $Y_1 := x_1 \cdot \mathbb{K} \neq X \implies$ (L. 1.1[2]) $\exists\, x_2 \in S$ mit $|x_1 - x_2| \geq \dfrac{1}{2} = a$,
$Y_2 := x_1 \cdot \mathbb{K} + x_2 \cdot \mathbb{K} \neq X \overset{\text{L. 1.1}^2}{\Longrightarrow} \exists\, x_3 \in S$ mit $|x_1 - x_3|,\ |x_2 - x_3| \geq \dfrac{1}{2}$ etc. $\implies \forall j \neq k:$ $|x_j - x_k| \geq \dfrac{1}{2} \implies (x_j)$ hat keine konvergente Teilfolge in $\hat{X} \implies \lightning$ zu S präkompakt.$\square$

In einem ∞-dimensionalen normierten Raum ist also die Einheitskugel **NICHT** präkompakt (obwohl sie beschränkt ist).

Als nächstes wollen wir präkompakte Mengen durch „ε-Netze“ charakterisieren.

Def.:
$\big(X, |\cdot|\big)$ normierter Raum, $M, N \subset X$.

1) Für $y \in X,\ R \geq 0$ sei $K_R(y) = \big\{x \in X;\ |x - y| \leq R\big\}$.
2) Für $\varepsilon > 0$ heißt N ε-**Netz** zu $M \iff M \subset \bigcup\limits_{y \in N} K_\varepsilon(y)$.

Satz 1.6
X normiert, $M \subset X$. Dann gilt: M präkompakt $\iff$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ endliches ε-Netz zu M (d.h. $\exists N = \{y_1, \cdots, y_l\} : M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l} K_\varepsilon(y_i)$).

Beweis: „$\Longrightarrow$“ Annahme: M präkompakt und $\exists \varepsilon_0 > 0 : \nexists$ endliches ε_0-Netz zu M.
Sei $x_1 \in M;\ M \not\subset K_{\varepsilon_0}(x_1) \implies \exists x_2 \in M : |x_1 - x_2| > \varepsilon_0$;
$M \not\subset K_{\varepsilon_0}(x_1) \cup K_{\varepsilon_0}(x_2) \implies \exists x_3 \in M : |x_1 - x_3|,\ |x_2 - x_3| > \varepsilon_0$ etc. $\implies (x_j)$ hat keine konvergente Teilfolge in $\hat{X} \implies \lightning$ zu M präkompakt.
„$\Longleftarrow$“ M besitze $\forall \varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz;
(x_j) sei eine Folge in M; $\varepsilon = 1 \implies \exists y_i^{(1)} \in X,\ i = 1, \cdots, l_1 : M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l_1} K_1(y_i^{(1)}) \implies \exists i_1 :$

[2] Beachte: $\dim Y_i < \infty \overset{\text{S. 1.2}}{\Longrightarrow} Y_i$ vollständig $\implies Y_i \subset X$ abgeschlossen

$\exists\infty$e Teilmenge $N_1 \subset \mathbb{N} : \{x_j;\ j \in N_1\} \subset K_1(y_{i_1}^{(1)});\ \varepsilon = \dfrac{1}{2} \implies$
$\exists y_i^{(2)} \in X,\ i = 1, \cdots, l_2 : M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l_2} K_{1/2}(y_i^{(2)}) \implies \exists i_2 : \exists\infty$e Teilmenge $N_2 \subset N_1$:
$\{x_j;\ j \in N_2\} \subset K_{1/2}(y_{i_2}^{(2)})$ etc. $\implies$ (induktiv) $\exists \mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ ∞e Mengen:
$\exists y_k (= y_{i_k}^{(k)}) \in X : \forall k : \{x_j; j \in N_k\} \subset K_{1/k}(y_k)$.
Es sei $j_k := \min\limits_{j \in N_k, j > j_{k-1}} j \implies x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots$ ist eine Teilfolge von x_j mit
$\{x_{j_i}; i \geq k\} \subset K_{1/k}(y_k) \implies \forall i, l \geq k : |x_{j_i} - x_{j_l}| \leq \dfrac{2}{k} \implies (x_{j_i})_i$ ist C-Folge $\implies$
(x_{j_i}) konvergiert in $\hat{X}$.
Also besitzt jede Folge in M eine in $\hat{X}$ konvergente Teilfolge, d.h. M ist präkompakt. $\square$

Satz 1.7
X normiert, $M \subset X$. Dann gilt:
M präkompakt $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists$ präkompaktes ε-Netz N zu M.

Beweis: „$\implies$“ klar, nehme $N = M$.
„$\impliedby$“ N präkompaktes $\dfrac{\varepsilon}{2}$-Netz zu $M \overset{\text{Satz 1.6}}{\implies} \exists$ endliches $\dfrac{\varepsilon}{2}$-Netz. N_1 zu $N \implies$
N_1 ist endliches ε-Netz zu $M \overset{\text{Satz 1.6}}{\implies} M$ ist präkompakt. $\square$

Def.:
$\big(X, |\cdot|\big)$ normierter Raum. $\big(X, |\cdot|\big)$ heißt **separabel** $\iff \exists M \subset X : M$ dicht und abzählbar.

Satz 1.8
X endlich dimensional $\implies X$ separabel.

Beweis: oEdA $X = \mathbb{K}^n$. Nehme $M = \mathbb{Q}^n$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})^n$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\square$

§ 2 Folgenräume

Lemma 2.1
$1 < p < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ a, b \geq 0 \implies ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ mit $=$ nur für $a^p = b^q$.

Beweis: Analysis 2, Übung 26.

Lemma 2.2 + Def.:
Es seien $x, y \in \mathbb{K}^n,\ 1 \leq p, q \leq \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. $|x|_p := \begin{cases} \big(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{1/p} & : \ 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{i=1,\cdots,n} |x_i| & : \ p = \infty. \end{cases}$

Dann gilt: $\begin{array}{lcll} \big|\sum\limits_{i=1}^n x_i y_i\big| & \leq & |x|_p \cdot |y|_q & \text{(Hölder)} \\ |x+y|_p & \leq & |x|_p + |y|_p & \text{(Minkowski)} \end{array}$

Beweis: Analysis 2

Def.:
Für $1 \leq p < \infty$ sei $l^p := \big\{(x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \sum\limits_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty\big\}$ und

$|x|_p := \big(\sum\limits_{i=1}^\infty |x_i|^p\big)^{1/p}$ für $x \in l^p$.

$$l^\infty := \big\{(x_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ |x|_\infty := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\big\}.$$

Satz 2.1
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist l^p ein Banachraum. Für $1 \leq p < \infty$ ist l^p separabel, l^∞ ist nicht separabel.

Beweis: a) Wegen Minkowski ist l^p ein Vektorraum und $|\cdot|_p$ eine Norm.
b) l^p ist vollständig: Analysis 2, Übung 27[3]
c) $p < \infty \implies \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \big\{(x_i) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}};$ nur endlich viele $\neq 0\big\}$ ist in l^p dicht falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und sonst $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})^{(\mathbb{N})}$.
d) $M_1 := \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset l^\infty$ ist überabzählbar;
wenn $M \subset l^\infty$ dicht ist $\implies \forall x \in M_1 : \exists y(x) \in M : \big|x - y(x)\big|_\infty < \dfrac{1}{2}$;

[3] x^j C-Folge in l^p $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j, k \geq N : \underbrace{|x^j - x^k|_p}_{\geq |x_i^j - x_i^k|} \leq \varepsilon \implies \forall i \in \mathbb{N} : (x_i^j)_j$ C-Folge in $\mathbb{K}$ $\implies \forall i : x_i^j \longrightarrow a_i \in \mathbb{K};\ |x^j - a|_p = \lim\limits_{n \to \infty} \left\| \begin{pmatrix} x_1^j - a_1 \\ \vdots \\ x_n^j - a_n \end{pmatrix} \right\|_p = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{k \to \infty} \left\| \begin{pmatrix} x_1^j - x_1^k \\ \vdots \\ x_n^j - x_n^k \end{pmatrix} \right\|_p \leq \varepsilon$ für $j \geq N \implies x^j - a \in l^p \implies a \in l^p$ und $x^j \to a$ in l^p

für $x \neq \tilde{x} \in M_1 : \exists i : x_i \neq \tilde{x}_i$; wenn z.B. $x_i = 0,\ \tilde{x}_i = 1 \implies$
$\big|y(x)_i\big| < \frac{1}{2},\ \big|y(\tilde{x})_i\big| > \frac{1}{2} \implies y(x) \neq y(\tilde{x}) \implies M$ ist überabzählbar
$\implies \nexists$ abzählbare dichte Teilmenge in $l^\infty \implies l^\infty$ ist nicht separabel. $\square$

§ 3 Funktionenräume

A) Die Räume $\overline{C}^{\,l}(\Omega)$

Def.:

1) Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ sei $C^l(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}\ l\text{-mal stetig differenzierbar}\}$; für $f \in C^l(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = |\alpha|_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq l$ sei $\partial^\alpha f := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

2) Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und **beschränkt** und $\underline{l \in \mathbb{N}_0}$ sei $\overline{C}^{\,l}(\Omega) := \big\{f \in C^l(\Omega);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq l : \partial^\alpha f$ lässt sich stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen$\big\}$;
$\|\cdot\| : \overline{C}^{\,l}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \sum\limits_{|\alpha| \leq l} \sup\limits_{x \in \Omega} \big|\partial^\alpha f(x)\big|$.

Bsp.: 1) $\overline{C}^{\,0}(\Omega) \cong C(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig$\}$ mit $\|f\| = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \big|f(x)\big| =: \|f\|_\infty$. Es ist $f_j \longrightarrow f$ in $C(\overline{\Omega}) \iff \|f_j - f\|_\infty \to 0 \iff f_j \longrightarrow f$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$.
2) $\forall l \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{x} \in C^l\big((0,1)\big) \setminus \overline{C}^{\,l}\big((0,1)\big)$.

Satz 3.1
$\overline{C}^{\,l}(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Beweis: a) Für $f \in \overline{C}^{\,l}(\Omega)$ sei g_α die stetige Fortsetzung von $\partial^\alpha f$ auf $\overline{\Omega}$; Ω beschränkt $\implies \overline{\Omega}$ kompakt $\implies \sup\limits_{x \in \Omega} \big|\partial^\alpha f(x)\big| = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \big|g_\alpha(x)\big| < \infty \implies \|\cdot\|$ ist wohldefiniert und offenbar eine Norm.
b) f_j sei eine C-Folge in $\overline{C}^{\,l}(\Omega)$, $g_{\alpha,j}$ die stetige Fortsetzung von $\partial^\alpha f_j$ auf $\overline{\Omega}$ für $|\alpha| \leq l$;
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall j,k \geq N : \sum\limits_{|\alpha| \leq l} \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \big|g_{\alpha,j}(x) - g_{\alpha,k}(x)\big| \leq \varepsilon \implies g_{\alpha,j}$ konvergiert gleichmäßig auf $\overline{\Omega} \implies g_{\alpha,j} \longrightarrow g_\alpha \in C(\overline{\Omega})$. Es sei $f = g_0$; weil die Ableitungen $\partial^\alpha f_j = g_{\alpha,j}$ in Ω **gleichmäßig** gegen g_α konvergieren, gilt dann, dass $f \in C^l(\Omega)$ und $\partial^\alpha f = g_\alpha$ in Ω (vgl. z.B. Walter I, 10.13 bzw. Beweis in c) mit εtik) $\implies f \in \overline{C}^{\,l}(\Omega)$ und $\forall x \in \overline{\Omega} : \forall j \geq N$:
$\big|g_{\alpha,j}(x) - g_\alpha(x)\big| = \lim\limits_{k \to \infty} \big|g_{\alpha,j}(x) - g_{\alpha,k}(x)\big| \leq \varepsilon \implies f_j \longrightarrow f$ in $\overline{C}^{\,l}(\Omega)$
c) $\big[$Direkter Beweis von $\partial^\alpha f = g_\alpha$ für $\alpha := (1, 0, \cdots, 0)$ (Rest folgt induktiv):

$(x_1+\vartheta h, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$ für $\vartheta \in [0,1] \implies \left|\dfrac{f(x_1+h,x_2,\cdots)-f(x)}{h} - g_\alpha(x)\right| =$

$$= \Bigg| \underbrace{\frac{f(x_1+h,x_2,\cdots)-f_j(x_1+h,x_2,\cdots)}{h}}_{\rightsquigarrow A} + \underbrace{\frac{f_j(x_1+h,x_2,\cdots)-f_j(x)}{h}}_{\overset{\text{MWS}}{=} \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_1+\vartheta h, x_2,\cdots)}_{\rightsquigarrow B}} + \underbrace{\frac{f_j(x)-f(x)}{h}}_{\rightsquigarrow A} -$$

$$\underbrace{-g_\alpha(x_1+\vartheta h,x_2,\cdots)}_{\rightsquigarrow B} + \underbrace{g_\alpha(x_1+\vartheta h,x_2,\cdots)-g_\alpha(x)}_{\rightsquigarrow C}\Bigg| \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{2}{h}\sup_{y\in\Omega}\big|f(y)-f_j(y)\big|}_{A} + \underbrace{\sup_{y\in\Omega}\big|g_{\alpha,j}(y)-g_\alpha(y)\big|}_{B} + \underbrace{\sup_{|x-y|\leq|h|}\big|g_\alpha(y)-g_\alpha(x)\big|}_{C}.$$

Für $\varepsilon > 0$ ist $C \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, wenn $|h| \leq \delta$ (da g_α stetig in x ist) und für $h \neq 0$ fest ist $A + B \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ wenn $j \geq N_h \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = g_\alpha$.] $\square$

Bemerkung: Der Satz von Arzelà-Ascoli besagt, dass jede „gleichmäßig beschränkte“ und „gleichgradig stetige“ Folge in $\overline{C}^0(\Omega) \simeq C(\overline{\Omega})$ eine darin konvergente Teilfolge, d.h. eine in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge hat. Wir formulieren das als Charakterisierung der präkompakten Mengen in $C(\overline{\Omega})$.

Def.:
X metrischer Raum, $M \subset \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}\}$.

1) M heißt **gleichmäßig beschränkt** $\iff$

$$\iff \exists C > 0 : \forall f \in M : \forall x \in X : \big|f(x)\big| \leq C.$$

2) M heißt **gleichgradig stetig** $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall f \in M : \forall x, y \in X \text{ mit } d(x,y) \leq \delta : \big|f(x) - f(y)\big| \leq \varepsilon$$

Beispiele: 1) Wenn M gleichgradig stetig (engl. “equicontinuous”) ist, so ist jedes $f \in M$ stetig und sogar gleichmäßig stetig.

2) Wenn z.B. $X = [0,1]$ und $M \subset \overline{C}^1\big((0,1)\big)$ und $\{f'; f \in M\}$ gleichmäßig beschränkt ist, so ist M gleichgradig stetig, denn $\big|f(x) - f(y)\big| \overset{\text{MWS}}{=} \underbrace{\big|f'(\vartheta)\big|}_{\leq C} \cdot |x-y| \leq \varepsilon$ wenn $|x-y| \leq \delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$.

Hingegen ist $\{f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^k;\ k \in \mathbb{N}\}$ nicht gleichgradig stetig, "weil" $f_k'(1) = k \to \infty$
[Genauer: $y = 1$, $\big|f_k(x) - f_k(y)\big| \le \varepsilon \Longleftrightarrow 1 - x^k \le \varepsilon \Longleftrightarrow x \ge \sqrt[k]{1-\varepsilon} \Longleftrightarrow$
$|x - y| \le 1 - \sqrt[k]{1-\varepsilon} =: \delta_k \to 0.$]

Satz 3.2 (Arzelà-Ascoli)
Für $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt gilt: $M \subset C(\overline{\Omega})$ präkompakt $\Longleftrightarrow$ M gleichmäßig beschränkt $\wedge$ M gleichgradig stetig.

Beweis: „$\Longrightarrow$“ a) M präkompakt $\overset{\text{Satz 1.4}}{\Longrightarrow}$ $M \subset C(\overline{\Omega})$ beschränkt $\Longrightarrow$ M gleichmäßig beschränkt.

b) M präkompakt $\overset{\text{Satz 1.6}}{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ endliches ε-Netz $\{f_1, \cdots, f_l\}$ zu M (d.h. $M \subset \bigcup_{j=1}^{l} K_\varepsilon(f_j)$);
f_j stetig auf $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}$ kompakt $\Longrightarrow$ f_j gleichmäßig stetig
$\Longrightarrow$ $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x - y| \le \delta : \forall j : \big|f_j(x) - f_j(y)\big| \le \varepsilon$
$\Longrightarrow$ $\forall f \in M : \forall x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x - y| \le \delta :$

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le \underbrace{\big|f(x) - f_j(x)\big|}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\big|f_j(x) - f_j(y)\big|}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\big|f_j(y) - f(y)\big|}_{\le\varepsilon}$$

wenn $f \in K_\varepsilon(f_j)$ $\Longrightarrow$ M gleichgradig stetig.

„$\Longleftarrow$“ a) $G = \mathbb{Q}^n \cap \Omega \subset \Omega$ dicht, G abzählbar $\Longrightarrow$ $G = \{x_1, x_2, \cdots\}$.
Es sei $f_1, f_2, \cdots$ eine Folge in M; wir müssen eine in $C(\overline{\Omega})$ konvergente (d.h. eine in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergente) Teilfolge finden.
$f_j(x_1)$ beschränkt $\Longrightarrow$ $\exists$ ∞-e Teilmenge $N_1 \subset \mathbb{N}$: die Folge $\big(f_j(x_1)\big)_{j \in N_1}$ konvergiert in $\mathbb{K}$;
$f_j(x_2)$ beschränkt $\Longrightarrow$ $\exists N_1 \supset N_2$ ∞-e Menge: $\big(f_j(x_2)\big)_{j \in N_2}$ konvergiert etc.
$\Longrightarrow$ $\exists \mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ ∞e Mengen: $\big(f_j(x_k)\big)_{j \in N_k}$ konvergiert.
Es sei $j_k := \min\{j; j \in N_k, j > j_{k-1}\}$ $\Longrightarrow$ $f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots$ ist Teilfolge von f_j mit $\forall i : f_{j_k}(x_i)$ konvergiert.
Es sei $f(x_i) := \lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x_i)$.
Zeige noch: f_{j_k} konvergiert in $C(\overline{\Omega})$.

b) M gleichgradig stetig, $\varepsilon > 0$ $\Longrightarrow$
$\exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x - y| \le \delta : \forall g \in M : \big|g(x) - g(y)\big| \le \dfrac{\varepsilon}{4}$;
es seien $y_1, \cdots, y_m \in G$ mit $\forall x \in \overline{\Omega} : \exists i : |x - y_i| \le \delta$;
wenn $K \in \mathbb{N} : \forall k \ge K : \forall i = 1, \cdots, m : \big|f_{j_k}(y_i) - f(y_i)\big| \le \dfrac{\varepsilon}{4}$, so folgt für $x \in \overline{\Omega}$ mit $|x - y_i| \le \delta : \forall k, l \ge K : \big|f_{j_k}(x) - f_{j_l}(x)\big| \le$

$\le \big|f_{j_k}(x) - f_{j_k}(y_i)\big| + \big|f_{j_k}(y_i) - f(y_i)\big| + \big|f(y_i) - f_{j_l}(y_i)\big| + \big|f_{j_l}(y_i) - f_{j_l}(x)\big| \le 4 \cdot \dfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$
$\Longrightarrow\ f_{j_k}(x)$ C-Folge; $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x) \Longrightarrow$
$\big|f_{j_k}(x) - f(x)\big| = \lim\limits_{l\to\infty} \big|f_{j_k}(x) - f_{j_l}(x)\big| \le \varepsilon$ für $k \ge K$
$\Longrightarrow\ f_{j_k} \longrightarrow f$ gleichmäßig $\Longrightarrow\ f \in C(\overline{\Omega})$ und $f_{j_k} \longrightarrow f$ in $C(\overline{\Omega})$, d.h. $\|f_{j_k} - f\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. $\square$

Exkurs: Der Satz von Peano

Wenn $\dot v = F(t,v),\ v \in \mathbb{R}^n$, ein Differentialgleichungssystem ist und F stetig und **bezüglich** v **lipschitzstetig** ist $\Longrightarrow$ $\exists$ lokal eindeutige Lösung. Wenn F bzgl. v nicht lipschitzstetig ist, so geht die **Eindeutigkeit** verloren, z.B. $\dot v = \sqrt{|v|},\ v \in \mathbb{R}^1$, hat zu $v(0) = 0$ die Lösungen $v_1 \equiv 0$ und $v_2(t) = \dfrac{t^2}{4} \operatorname{sign} t$. Aber die **Existenz** bleibt nach Peano für nur stetiges F erhalten.

Beweis: $F(t,v)$ sei im Zylinder $Q = \big\{\binom{t}{v} \in \mathbb{R}^{1+n};\ |t-t_0| \le a,\ |v-v_0|_2 \le b\big\}$ definiert und stetig, $F^j : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seien C^1 und $F^j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} F$ gleichmäßig in Q (z.B. $F_i^j = \tilde F_i * w_{1/j},\ \tilde F_i \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \tilde F_i|_Q = F_i,\ F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$, vgl. S. 20, c))
$\Longrightarrow\ M := \max\big\{\big|F^j(t,v)\big|;\ \binom{t}{v} \in Q,\ j \in \mathbb{N}\big\} < \infty$
$\Longrightarrow\ \exists_1$ Lösung $v^j(t) : [t_0 - T, t_0 + T] = \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $v^j(t_0) = v_0,\ \dot v^j(t) = F^j\big(t, v^j(t)\big)$, $T = \min\big\{a, \frac{b}{M}\big\}$; für $i = 1,\dots,n$ sind die Komponenten $v_i^j,\ j \in \mathbb{N}$, gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig, da $\big|v^j(t) - v_0\big| \le b$ und $\big|\dot v^j(t)\big| \le M$ (vgl. auch Bsp. 2), S. 11)
$\Longrightarrow$ $\exists$ gleichmäßige konvergente Teilfolge $v^{j_k}(t) \longrightarrow v(t)$

$$\Longrightarrow\ \forall t_1 \in [t_0 - T, t_0 + T] : \underset{\displaystyle v(t_1)}{\overset{\displaystyle v^{j_k}(t_1)}{\downarrow}} = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{F^{j_k}\big(t, v^{j_k}(t)\big)}_{\to F(t,v(t))\text{ glm.}} \,\mathrm{d}t \longrightarrow v_0 + \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, v(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

$\Longrightarrow\ v(t_0) = v_0$ und $\dot v(t_1) = F\big(t_1, v(t_1)\big)$. $\square$

B) Die Räume $L^p(X)$

Im Folgenden ist (X, Σ, μ) ein Maßraum.

Def.:
a) Für $1 \le p < \infty$ sei $\mathcal{L}^p(X) := \Big\{\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ messbar mit $\int\limits_X |\tilde{f}|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\Big\}$ und

$\mathcal{L}^\infty(X) := \Big\{\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ messbar mit $\exists a > 0 : \big\{x \in X; \big|\tilde{f}(x)\big| > a\big\}$ Nullmenge$\Big\}$.

b) $\tilde{f}, \tilde{g} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ messbar heißen **gleich fast überall** $\Longleftrightarrow$ $\big\{x \in X : \tilde{f}(x) \neq \tilde{g}(x)\big\}$ ist eine Nullmenge. Das ist eine Äquivalenzrelation. Für die Äquivalenzklasse $[\tilde{f}]$ schreibe ich f.
Vorsicht: Meist unterscheidet man nicht zwischen f und $\tilde{f}$ in der Notation.

c) $L^p(X) := \big\{[\tilde{f}];\ \tilde{f} \in \mathcal{L}^p(X)\big\}$ und

$\|\cdot\|_p : L^p(X) \longrightarrow \mathbb{R} : f = [\tilde{f}] \longmapsto \|f\|_p := \left(\int \big|\tilde{f}(x)\big|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}$ für $1 \le p < \infty$ und

$\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R} :\ f = [\tilde{f}] \longmapsto \min\limits_{\substack{\{x \in X; |\tilde{f}(x)| > a\} \\ \text{Nullmenge}}} a.$

Lemma 3.1
Es seien $1 \le p,\ q \le \infty$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
a) $f \in L^p(X),\ g \in L^q(X) \implies f \cdot g \in L^1(X)$ (d.h. eigentlich $f = [\tilde{f}], g = [\tilde{g}] \implies \tilde{f} \cdot \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(X)$ und $f \cdot g := [\tilde{f} \cdot \tilde{g}]$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $\tilde{f}, \tilde{g}$) und

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q \qquad \text{(Hölder)}$$

b) $f, g \in L^p(X) \implies f + g \in L^p(X)$ (d.h. eigentlich $f = [\tilde{f}], g = [\tilde{g}] \implies \tilde{f} + \tilde{g} \in \mathcal{L}^p(X)$ und $f + g := [\tilde{f} + \tilde{g}]$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $\tilde{f}, \tilde{g}$) und

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \text{(Minkowski)}$$

Insbesondere sind $\mathcal{L}^p(X), L^p(X)$ Vektorräume und $\|\cdot\|_p : L^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ Normen.

Beweis: Die Fälle $p = \infty$ oder $q = \infty$ sind leicht. Sei also $1 < p,\ q < \infty$ und $f = [\tilde{f}],\ g = [\tilde{g}]$.
a) **1. Fall** $\|f\|_p = 0 \implies |\tilde{f}|^p = 0$ fast überall $\implies \tilde{f} = 0$ fast überall $\implies \tilde{f} \cdot \tilde{g} = 0$ fast überall $\implies \|f \cdot g\|_1 = 0$.
2. Fall $\|g\|_q = 0$ ebenso
3. Fall $0 < \|f\|_p,\ \|g\|_q < \infty$; setze $f_1 = \dfrac{|\tilde{f}|}{\|f\|_p},\ g_1 = \dfrac{|\tilde{g}|}{\|g\|_q} \overset{\text{Lemma 2.1}}{\Longrightarrow}$

$$f_1 \cdot g_1 \le \frac{f_1^p}{p} + \frac{g_1^q}{q} = \frac{1}{p\|f\|_p^p}\,|\tilde f|^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\,|\tilde g|^q \qquad \Big|\int$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \underbrace{\int |\tilde f \cdot \tilde g| \,\mathrm{d}x}_{\|f\cdot g\|_1} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \surd$$

b) $\left|\tilde f(x) + \tilde g(x)\right| \le 2\max\Big\{\left|\tilde f(x)\right|, \left|\tilde g(x)\right|\Big\} \implies$
$|\tilde f + \tilde g|^p \le 2^p \cdot \big(|\tilde f|^p + |\tilde g|^p\big) \implies \tilde f + \tilde g \in \mathcal{L}^p(X)$;

$$\|f+g\|_p^p = \int |\tilde f + \tilde g| \cdot |\tilde f + \tilde g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \le$$

$$\le \int |\tilde f| \cdot |\tilde f + \tilde g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int |\tilde g| \cdot |\tilde f + \tilde g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\le} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \cdot \underbrace{\left(\int |\tilde f + \tilde g|^{\overbrace{(p-1)\cdot q}^{=p}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}}_{\|f+g\|_p^{p/q}}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_p^{\overbrace{p-\frac{p}{q}}^{=1}} \le \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \square$$

Satz 3.3
Für $1 \le p \le \infty$ sind $L^p(X)$ Banachräume.

Beweis: Für $p = 1$ siehe Analysis 4, (M19); für $1 < p < \infty$ ist der Beweis analog zu dem für $p = 1$, siehe Übung 9 in (M34/35).
Für $p = \infty$: $f_n = [\tilde f_n]$ sei eine C-Folge in $L^\infty(X)$
$\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \exists N_k : \forall n, m \ge N_k : \|f_n - f_m\|_\infty \le \dfrac{1}{k}$
$\Longrightarrow A := \Big\{x \in X; \exists k : \exists n, m \ge N_k : \left|\tilde f_n(x) - \tilde f_m(x)\right| > \frac{1}{k}\Big\}$ ist eine 0-Menge und $\tilde f_n(x)$ konvergiert in $X \setminus A$; sei $\tilde f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \tilde f_n(x) & : \ x \in X \setminus A, \\ 0 & : \ x \in A \end{cases}$
$\Longrightarrow \tilde f$ messbar und $\left|\tilde f_n(x) - \tilde f(x)\right| = \lim\limits_{m\to\infty} \left|\tilde f_n(x) - \tilde f_m(x)\right| \le \dfrac{1}{k}$ für
$x \in X \setminus A, n \ge N_k \implies \|f_n - f\|_\infty \le \dfrac{1}{k}$ für $n \ge N_k$ wenn
$f = [\tilde f] \implies f_n \longrightarrow f$ in $L^\infty(X)$. $\square$

Bemerkung: § 2 ist im obigen enthalten, wenn man $X = \mathbb{N}$ und $\mu =$ Zählmaß nimmt.
[Ab hier wird die lästige ˜ über f öfters weggelassen.]

Def.:
$f : X \longrightarrow [0, \infty]$ heißt **Elementarfunktion** $\Longleftrightarrow$ (i) f messbar; (ii) $f(X)$ ist eine endliche

Menge, d.h. $f = \sum\limits_{\text{endlich}} \alpha_i \chi_{A_i},\ A_i \in \Sigma,\ \dot{\bigcup} A_i = X,\ \alpha_i \in [0,\infty]$.
Wenn $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit (i),(ii) heißt f **Treppenfunktion**.

Lemma 3.2
Die Äquivalenzklassen von Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(X),\ 1 \le p \le \infty$.

Beweis: a) $f \in \mathcal{L}^p(X) \implies f_1 = \operatorname{Re} f,\ f_2 = \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^p(X)$ und es genügt daher f_i zu approximieren.
Z.B. $f_1 = (f_1)_+ + (f_1)_-$ mit $(f_1)_+(x) = \max\{f_1(x), 0\},\ (f_1)_-(x) = \min\{f_1(x), 0\} \implies (f_1)_\pm \in \mathcal{L}^p(X)$.
Somit oEdA $f : X \longrightarrow [0,\infty)$, d.h. $f \in \mathcal{L}_+(X)$.
b) Zuerst sei $1 \le p < \infty$; Maßtheorie $\implies \exists 0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ Elementarfunktionen mit $f = \sup\limits_k f_k = \lim\limits_{k\to\infty} f_k \implies f^p \ge (f - f_1)^p \ge \cdots \ge 0 \implies$

$$\implies \left(\text{Lebesgue, } \int\limits_X f^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\right) \implies \lim_{k\to\infty} \int (f - f_k)^p \,\mathrm{d}\mu = \int \underbrace{\lim_{k\to\infty} (f - f_k)^p}_{\equiv 0} \,\mathrm{d}\mu = 0 \implies$$

$[f_k] \longrightarrow [f]$ in $L^p(X)$.
c) Für $p = \infty$ und $f \in \mathcal{L}_+(X) \cap \mathcal{L}^\infty(X),\ \|f\|_\infty = a$,
sei $f_k(x) = \dfrac{a}{k} \sum\limits_{j=1}^{k-1} j \cdot \chi_{\left\{x \in X;\, \frac{ja}{k} \le f(x) < \frac{(j+1)a}{k}\right\}} \implies \|f - f_k\|_\infty \le \dfrac{a}{k} \to 0$ für $k \to \infty$. □

C) Die Räume $L^p(\Omega)$

Hier sei $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen (nicht notwendig beschränkt) und μ die Einschränkung des Lebesguemaßes $\overline{\lambda}$ auf Ω, d.h. $\Sigma = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \cap \mathcal{P}(\Omega),\ \mu : \Sigma \longrightarrow [0,\infty] : A \longmapsto \overline{\lambda}(A)$.
Für $\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ schreibt man $\int\limits_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$.

[Bemerkung: Letztlich ist es egal, ob man λ oder $\overline{\lambda}$ nimmt, denn zu $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $\overline{\lambda}$-messbar $\exists g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ λ-messbar mit $f = g$ fast überall, d.h. $L^p(\Omega)$ ist dasselbe.]

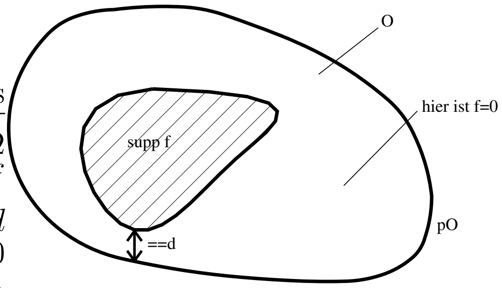
Def.:
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.
$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \ne 0\}}^{\text{in } \Omega} \subset \Omega$ heißt **Träger** von f (engl. "support").[4]
f heißt **finit** $\iff \operatorname{supp} f$ ist kompakt. $\mathcal{K}(\Omega) := \{f \in C(\Omega); f \text{ finit}\}$.

[4] **Vorsicht:** $\operatorname{supp} f$ hängt von der Funktion f ab, nicht von der Äquivalenzklasse!

Bemerkung: Wenn f finit ist, ist also $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Wegen $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ hat $\operatorname{supp} f$ dann positiven Abstand d zu $\partial\Omega$, d.h. $d = d(\operatorname{supp} f, \partial\Omega) = \inf\limits_{\substack{x \in \operatorname{supp} f \\ y \in \partial\Omega}} |x - y| > 0.$

Wir setzen f in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch 0 stetig fort, d.h.
$\mathcal{K}(\Omega) \cong \big\{ f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n); \operatorname{supp} f \subset \Omega \big\}.$

PSfrag replacements
Ω
$\operatorname{supp} f$
$\rightsquigarrow d$
hier ist $f = 0$
$\partial\Omega$



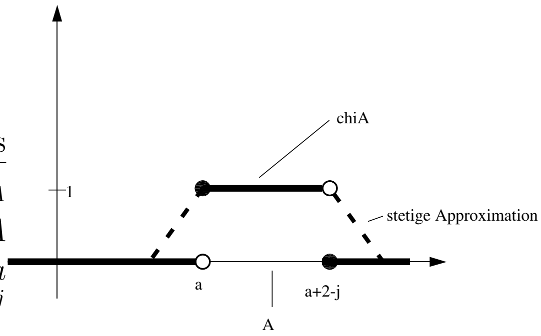
Lemma 3.3
Für $1 \le p < \infty$ ist $\mathcal{K}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht.

Beweis: a) Beachte, dass $\mathcal{K}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) : f \longmapsto [f]$ injektiv ist, denn $[f] = [g],\ f, g$ stetig $\Longrightarrow\ U = \big\{ x \in \Omega; f(x) \neq g(x) \big\}$ ist offen und eine Nullmenge $\Longrightarrow\ U = \emptyset \ \Longrightarrow\ f = g$.
b) Es sei $\Omega_j := \big\{ x \in \Omega; |x| < j,\ d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \big\} \ \Longrightarrow\ \Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j,\ \Omega_j$ offen und beschränkt, $\forall j \in \mathbb{N} : \overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$.
Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ sei $f_j(x) := f(x) \cdot \chi_{\Omega_j}(x) = \begin{cases} f(x) & : \ x \in \Omega_j, \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \quad \Longrightarrow$
$\|f - f_j\|_p^p = \int\limits_{\Omega} \big|f(x)\big|^p \big(1 - \chi_{\Omega_j}(x)\big)\, \mathrm{d}x \underset{\text{Lebesgue}}{\longrightarrow} 0.$
Also sind (Äquivalenzklassen von) finite(n) Funktionen in $L^p(\Omega)$ dicht. Nach Lemma 3.2 kann man diese durch finite Treppenfunktionen approximieren und es genügt daher $\chi_B,\ B \in \Sigma,\ B \subset \Omega_j$ für ein j, durch $g \in \mathcal{K}(\Omega)$ zu approximieren.

$\overline{\lambda}$ regulär $\Longrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 : \exists V \subset \Omega_j$ offen mit $B \subset V$ und $\overline{\lambda}(V \setminus B) \le \varepsilon \ \Longrightarrow\ \|\chi_B - \chi_V\|_p \le \varepsilon^{1/p}$. Somit bleibt χ_V zu approximieren.
c) $V = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} A_i$ wobei $A_i = \prod\limits_{l=1}^{n} [a_l^i, a_l^i + 2^{-j})$ mit gewissen $a_l^i \in \mathbb{Z} \cdot 2^{-j}$ (siehe Maßtheorie). Es genügt, diese χ_{A_i} stetig zu approximieren, und das ist leicht:

Z.B. im $\mathbb{R}^1$

PSfrag replacements
χ_A
A
a
$a + 2^{-j}$
stetige Approximation



Im Allgemeinen nehme $f_k(x) = 1 - \min\{1, kd(x, A_i)\}$. $\square$

Satz 3.4
Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\Omega)$ separabel.

Beweis: Nach dem Beweis von Lemma 3.3, c) ist (z.B. für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) $N = \Big\{\big[\sum\limits_{\text{endlich}} \varrho_i \chi_{A_i}\big];\ \varrho_i \in \mathbb{Q}$ und $A_i = \prod\limits_{l=1}^{n} [a_l, a_l + 2^{-j}], a_l \in \mathbb{Q}, j \in \mathbb{N}\Big\} \subset L^p(\Omega)$ dicht und N ist abzählbar. $\square$

Def.:
Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sei $\mathcal{D}(\Omega) := C^\infty(\Omega) \cap \mathcal{K}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}\ C^\infty \text{ mit } \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$.

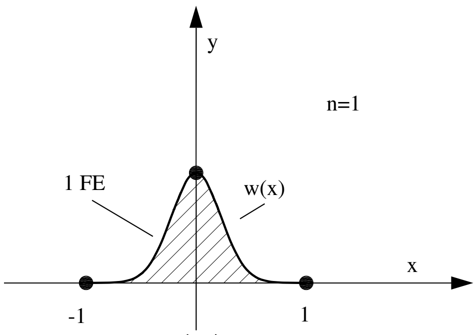
Wir werden zeigen, dass nicht nur $\mathcal{K}(\Omega)$, sondern sogar $\mathcal{D}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ dicht ist. Zunächst konstruieren wir $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$: Es sei

$$\psi(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t} & : \ t > 0, \\ 0 & : \ t \leq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \ \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$$

(weil $\psi \in C(\mathbb{R}),\ \psi'(0+) = \lim\limits_{h \searrow 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-1/h}}{h} = 0 \implies \psi'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-1/t} & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t \leq 0 \end{cases}$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ etc., induktiv $\psi^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{Pol.}(t)\, t^{-2k}\mathrm{e}^{-1/t} & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t \leq 0 \end{cases}$).

Setze $w(x) := c\psi\big(1 - |x|^2\big)$ mit $c > 0$ so, dass $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\,\mathrm{d}x = 1 \implies w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

PSfrag replacements
-1
1
1 FE
$w(x)$
$n=1$
x
y



Für $h>0$ sei $w_h(x) = h^{-n} w\left(\dfrac{x}{h}\right) \implies \operatorname{supp} w_h = \big\{x; |x| \le h\big\}$ und $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^p(\Omega),\ h>0$ sei

$$\begin{aligned} f_h(x) &:= (f * w_h)(x) = \int\limits_{\Omega} f(z) w_h(x-z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int f(z) h^{-n} w\left(\frac{x-z}{h}\right)\mathrm{d}z \qquad \left\| \begin{array}{l} \text{Subst. } y = \frac{x-z}{h}\,, \\ z = x - yh, \quad \left|\det\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right| = h^n \end{array} \right. \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-yh) w(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

wobei f in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch 0 fortgesetzt wird. Man nennt f_h oft eine **Regularisierung** von f.

Lemma 3.4
Für $f \in L^p(\Omega),\ 1 \le p < \infty$, gilt
$f_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f_h\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}$ und $\lim\limits_{h\searrow 0} \|f - f_h\|_{L^p(\Omega)} = 0.$

Beweis: a) $\dfrac{\partial f_h}{\partial x_1}(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{f_h(x_1+\delta,\cdots) - f_h(x)}{\delta} =$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int f(z) \underbrace{\frac{w_h(x_1+\delta-z_1, x_2-z_2,\cdots) - w_h(x-z)}{\delta}}_{\underset{\text{MWS}}{=} \frac{\partial w_h}{\partial x_1}(x_1+\vartheta\delta-z_1, x_2-z_2,\cdots)} \mathrm{d}z;$$

hier wird integriert über $K := \big\{z \in \mathbb{R}^n; |x-z| \le \delta + h\big\}$, weil für andere $z \underbrace{\qquad}$ 0 gibt;

$$\int\limits_K \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}z = \int\limits_K \big|f(z)\big| \cdot 1\,\mathrm{d}z \underset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_{L^p(K)} \underbrace{\underbrace{\|1\|_{L^q(K)}}_{\left(\int\limits_K 1\,\mathrm{d}z\right)^{1/q}}}_{<\infty} \implies f|_K \in L^1(K);$$

$\dfrac{\partial w_h}{\partial x_1}$ ist beschränkt (da $w_h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) $\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}$

$$\frac{\partial f_h}{\partial x_1}(x) = \int f(z) \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial w_h}{\partial x_1}(x_1 + \vartheta\delta - z_1, x_2 - z_2, \cdots)\,\mathrm{d}z = \int f(z) \frac{\partial w_h}{\partial x_1}(x - z)\,\mathrm{d}z$$

und ist stetig in x (wieder mit Lebesgue).

Mit Induktion folgt $f_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha f_h(x) = \int\limits_\Omega f(z)(\partial^\alpha w_h)(x - z)\,\mathrm{d}z$.

b) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \implies \left|f_h(x)\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|f(x - yh)\right| \cdot w^{\frac{1}{p}}(y)}_{\text{„}f\text{“}} \underbrace{w^{\frac{1}{q}}(y)}_{\text{„}g\text{“}}\,\mathrm{d}y$

$$\overset{\text{Hölder}}{\underset{\circledast}{\le}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(x - yh)\right|^p w(y)\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left(\int w(y)\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1}$$

$$\begin{aligned}
\implies \|f_h\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int\limits_\Omega \left|f_h(x)\right|^p \mathrm{d}x \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f_h(x)\right|^p \mathrm{d}x \\
&\underset{\circledast}{\le} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(x - yh)\right|^p w(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{\underset{\text{Tonelli}}{=}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(y) \underbrace{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(\underbrace{x - yh}_{u \text{ (Subst.)}})\big|^p \mathrm{d}x \right)}_{=\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \mathrm{d}y = \|f\|^p_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

c) Falls $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, so ist $f_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ für kleines h
(weil $\operatorname{supp} f_h \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists y \text{ mit } |y| \le 1,\ x - yh \in \operatorname{supp} f\right\}$) und $\left|f_h(x) - f(x)\right| =$

$$\left| \int f(x - yh) w(y)\,\mathrm{d}y - \int f(x) w(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \int \underbrace{\left|f(x - yh) - f(x)\right|}_{\substack{\le \varepsilon \text{ für } 0 \le h \le \delta \\ (\text{weil } f \in \mathcal{K}(\Omega) \implies f \text{ glm. stetig})}} w(y)\,\mathrm{d}y \le \varepsilon$$

$\implies f_h \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$;

für $h \in [0, 1]$ ist $\operatorname{supp} f_h \subset L := \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, \operatorname{supp} f) \le 1\right\} \implies$

$$\|f_h - f\|^p_{L^p(\Omega)} = \int\limits_{L \cap \Omega} \underbrace{\left|f_h(x) - f(x)\right|^p}_{\le \varepsilon^p \text{ für } 0 \le h \le \delta} \mathrm{d}x \longrightarrow 0 \text{ für } h \searrow 0.$$

d) Falls $f \in L^p(\Omega) \underset{\text{Lemma 3.3}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 : \exists g \in \mathcal{K}(\Omega) : \|f - g\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon \implies$

für $\varepsilon > 0$ und so ein g :

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f - g\| + \|g - g_h\| + \underbrace{\|g_h - f_h\|}_{=\|(g-f)_h\| \overset{\text{b)}}{\leq} \|g-f\|} \\ &\leq 2\varepsilon + \|g - g_h\| \leq 3\varepsilon \text{ für kleines } h. \end{aligned}$$

Also ist $f_h \longrightarrow f$ in $L^p(\Omega)$. □

Bemerkung: Nach c) gilt: $f \in \mathcal{K}(\Omega) \implies f_h \longrightarrow f$ gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$ für $h \searrow 0$.

Satz 3.5
Für $1 \leq p < \infty$ ist $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht.

Beweis $\mathcal{K}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht nach Lemma 3.3. Für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und h klein ist $f_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ (vgl. oben die Überlegung zu $\operatorname{supp} f_h$!) und $f_h \longrightarrow f$ für $h \searrow 0 \implies \mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht. □

§ 4 Distributionen

Im Folgenden sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Def.:

1) $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Longleftrightarrow$

   i) $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\forall k \in \mathbb{N} : \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$;

   ii) $\exists K \subset \Omega$ kompakt: $\forall k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K$;

   iii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha \varphi_k \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf Ω, d.h.
   $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : \forall x \in \Omega : \left|\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\right| \leq \varepsilon$.

2) $\mathcal{D}'(\Omega) := \big\{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear; $\forall (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ mit
   $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) : T(\varphi_k) \to 0$ (in $\mathbb{C}$)$\big\}$

3) $T_k \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : T_k(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$.

Bemerkungen: 1) $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nennt man oft **Testfunktion**, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt **Distribution**. $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist offenbar ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
[2) Man kann auf $\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega)$ Topologien einführen, sodass sich die Konvergenzbegriffe in Def. 1), 3) ergeben. Allerdings benötigt man überabzählbar viele Halbnormen, d.h. $\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega)$ sind lokalkonvexe topologische Vektorräume aber keine metrischen Räume, man braucht „Filter". In fast allen Anwendungen genügen die Definitionen oben.]
3) Oft schreibt man $\langle \varphi, T\rangle$ für $T(\varphi)$.

Def.:
$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \left\{[\tilde{f}];\ \tilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ messbar (bzgl. } \overline{\mathcal{B}(\Omega)}) \wedge \forall K \subset \Omega \text{ kompakt: } \int\limits_K \left|\tilde{f}(x)\right| \mathrm{d}x < \infty\right\}$.
$f = [\tilde{f}] \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ heißt **lokalintegrable Funktion**.

Bemerkung $\forall p \in [1, \infty] : L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, denn $f = [\tilde{f}] \in L^p(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt $\Longrightarrow$

$$\int\limits_K \left|\tilde{f}(x)\right| \mathrm{d}x = \int\limits_K \left|\tilde{f}(x)\right| \cdot 1 \,\mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int\limits_K \left|\tilde{f}(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_K 1 \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leq \|f\|_p \cdot |K|^{1/q} < \infty,$$

wenn $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ 1 \leq p < \infty$. (Für $p = \infty$ ist es trivial.)

Bsp.: $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \left\{\begin{array}{ccc} \frac{1}{x} & : & x \neq 0 \\ 0 & : & x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \int\limits_{[-1,1]} \left|\tilde{f}(x)\right| \mathrm{d}x = \infty \Longrightarrow [\tilde{f}] \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Aber $[\tilde{f}] \in L^1_{\text{loc}}\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ weil $\forall K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kompakt: $\displaystyle\int\limits_K \frac{1}{|x|} \,\mathrm{d}x < \infty$.

Aber $[\tilde{f}] \notin L^1\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \simeq L^1(\mathbb{R})$. Allgemein gilt

$$\mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathcal{K}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega) \subsetneq L^1_{\text{loc}}(\Omega) \overset{\text{s.u.}}{\subsetneq} \mathcal{D}'(\Omega)$$

Lemma 4.1 + Definition
Die Abbildung

$$i : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : f = [\tilde{f}] \longmapsto \underbrace{\left(\varphi \longmapsto \int \varphi(x)\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{=:T_f}$$

ist ein Vektorraum-Monomorphismus.
$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt **reguläre Distribution** $\iff \exists f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : T = T_f$.

Vorsicht: Man schreibt meist wieder f statt T_f.

Beweis a) *i ist wohldefiniert und linear:*

α) $[\tilde{f}] = [\tilde{g}] \iff \tilde{f} - \tilde{g} = 0$ fast überall $\implies \displaystyle\int \varphi(x)\big(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0$

β) $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \exists K \subset \Omega$ kompakt: $\forall k : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ und $\varphi_k \to 0$ gleichmäßig $\implies \exists M : \forall k : \forall x : \big|\varphi_k(x)\big| \leq M \implies$ (Lebesgue) $\implies T_f(\varphi_k) = \displaystyle\int\limits_K \varphi_k(x)\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \to 0$

(Die gleichmäßige Majorante $M \cdot \big|\tilde{f}(x)\big|$ ist in $\mathcal{L}^1(K)$, da $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.)

γ) Offenbar ist i linear.

b) *i ist injektiv:*

Es sei $T_f = 0$ für $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Wir haben $f = 0$, d.h. $\tilde{f} = 0$ fast überall zu zeigen.
Ω_j seien wie in S. 17. Es genügt $\tilde{f}|_{\Omega_j} = 0$ fast überall zu zeigen (denn abzählbare Vereinigungen von 0-Mengen sind 0-Mengen).
Es sei $g = \tilde{f} \cdot \chi_{\Omega_{j+1}} = \left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{f}(x) & : & x \in \Omega_{j+1} \\ 0 & : & \text{sonst} \end{array} \right\}$. $\overline{\Omega}_{j+1} \subset \Omega$ kompakt $\implies g \in \mathcal{L}^1(\Omega_{j+1}) \overset{\text{L. 3.4}}{\implies}$ $g_h = g * w_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ und $0 < h < d(\overline{\Omega}_j, \partial\Omega_{j+1}) =: d \implies T_{g_h}(\varphi) = \int\limits_{\Omega_j} g_h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$

$$\int\limits_{\Omega_j}\Bigg(\int\limits_{\Omega_{j+1}} \tilde{f}(z)w_h(x-z)\,\mathrm{d}z\Bigg)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \underset{w_h(-x)=w_h(x)}{\overset{\text{Fubini}}{=}} \int\limits_{\Omega_{j+1}} \tilde{f}(z)\Bigg(\int\limits_{\Omega_j} \varphi(x)w_h(z-x)\,\mathrm{d}x\Bigg)\,\mathrm{d}z =$$

$$\int\limits_{\Omega_{j+1}} \tilde{f}(z)\varphi_h(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\Omega} \tilde{f}(z)\varphi_h(z)\,\mathrm{d}z = T_f(\varphi_h) = 0$$

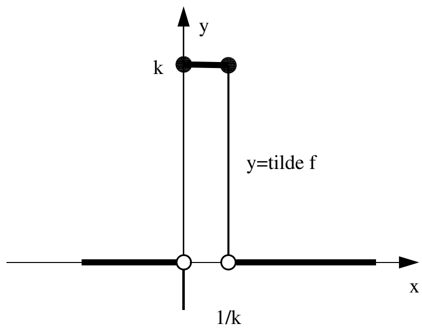
weil $\operatorname{supp}\varphi_h \subset \Omega_{j+1}$, vgl. S. 20.

Annahme:
$\exists x_0 \in \Omega_j : \exists h \in (0,d) : g_h(x_0) \neq 0$, z.B. $\operatorname{Re} g_h(x_0) > 0 \implies \exists \varepsilon > 0 : \forall x$ mit $|x - x_0| < \varepsilon : \operatorname{Re} g_h(x) > 0$; für ε klein genug ist $w_\varepsilon(x-x_0) \in \mathcal{D}(\Omega_j)$
$\implies 0 < \operatorname{Re}\left(\int g_h(x)w_\varepsilon(x-x_0)\,\mathrm{d}x\right) = \operatorname{Re}\Big(T_{g_h}\big(w_\varepsilon(x-x_0)\big)\Big) = 0$ ↯
Also folgt: $\forall h \in (0,d) : g_h|_{\Omega_j} = 0 \implies \|g\|_{L^1(\Omega_j)} = \|g - g_h\|_{L^1(\Omega_j)} \leq \|g - g_h\|_{L^1(\Omega_{j+1})} \overset{\text{L. 3.4}}{\longrightarrow} 0$ für $h \searrow 0 \implies g|_{\Omega_j} = 0$ fast überall $\implies \tilde{f}|_{\Omega_j} = 0$ fast überall. $\square$

Bsp.: 1) Für $a \in \Omega$ ist $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \varphi(a)$ eine Distribution (da $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D} \implies \varphi_k(a) \to 0$). δ_a heißt **δ-Distribution** mit Träger in a. δ_a ist nicht regulär [aber immerhin noch ein Maß; wie $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ kann man auch die Radonmaße $\mathcal{K}'(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ einbetten]. δ_a entspricht einer Einheitsmasse bzw. Einheitsladung in a. Es sei speziell $\Omega = \mathbb{R},\ a = 0$ und

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} k & : \ 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

PSfrag replacements
$\frac{1}{k}$
$y = \tilde{f}_k(x)$
k
x
y



Dann ist $\lim\limits_{k\to\infty} T_{f_k} = \delta_0 =: \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, denn

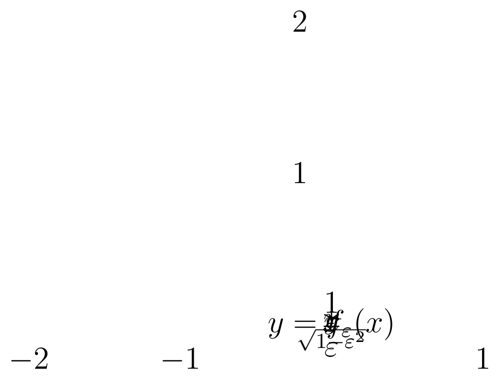
$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies T_{f_k}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\tilde{f}_k(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_0^{1/k} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\int\limits_0^{1/k} \varphi(x)\,\mathrm{d}x}{1/k}$$

$$\xrightarrow[\text{Diff./Int.rechn.}]{\text{Hauptsatz}} \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

2) Wenn $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \in C(\mathbb{R}),\ \varepsilon > 0$, so ist $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} T_{f_\varepsilon} = \pi\delta$, denn:

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\frac{\varepsilon\,\mathrm{d}x}{\varepsilon^2 + x^2} = \ (\text{Subst. } x = \varepsilon u)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon u)\,\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon\,\mathrm{d}u}{\varepsilon^2(1+u^2)} \ \xrightarrow[(\text{Major.} \frac{1}{1+u^2})]{\text{Lebesgue}} \ \varphi(0) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi\varphi(0) = \pi\delta(\varphi)$$



3) Wenn $a, v \in \mathbb{R}^n$, so definieren wir $T = -v^T \cdot \nabla\delta_a$ durch

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi(x) \longmapsto v^T \cdot \nabla\varphi(a).$$

T entspricht einem Dipol der Stärke v in a, denn

$$T(\varphi) = v^T \cdot \nabla\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\frac{\varphi(a + v\varepsilon) - \varphi(a)}{\varepsilon}}_{\frac{1}{\varepsilon}(\delta_{a+v\varepsilon} - \delta_a)(\varphi)}\ ,$$

d.h. $T = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon}(\delta_{a+v\varepsilon} - \delta_a)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. T ist kein Maß mehr. Ganz allgemein kann jede Distribution beliebig oft differenziert werden:

Def.:

1) $g \in C^\infty(\Omega),\ T \in \mathcal{D}'(\Omega) \implies g \cdot T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist definiert durch $(g \cdot T)(\varphi) := T(g \cdot \varphi)$.

2) $T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \implies \partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist definiert durch $(\partial^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi)$.

Bemerkungen 1) Dass $g \cdot T$ sowie $\partial^\alpha T$ Distributionen sind, folgt aus $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies g \cdot \varphi_k \to 0$ und $\partial^\alpha \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.
Beachte: $T_k \longrightarrow T \implies g \cdot T_k \longrightarrow g \cdot T,\ \partial^\alpha T_k \longrightarrow \partial^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2) Die Definitionen sind so, dass sich für Funktionen das Übliche ergibt:
a) $g \in C^\infty,\ f \in L^1_{\mathrm{loc}} \implies T_{g\cdot f}(\varphi) = \displaystyle\int g(x) f(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (g \cdot T_f)(\varphi)$, d.h. $T_{g\cdot f} = g \cdot T_f$
b) $f \in C^1(\Omega) \implies T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x =$ (partiell integrieren, $\varphi = 0$ außerhalb K kompakt, ersetze f durch $f \cdot \chi,\ \chi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \chi = 1$ auf K, und integriere über $[-N, N]^n,\ N$ groß) $= -\displaystyle\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{d}x = -T_f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} T_f\right)(\varphi)$, d.h. $T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \dfrac{\partial}{\partial x_1} T_f$ und ebenso induktiv für $f \in C^{|\alpha|}(\Omega) : T_{\partial^\alpha f} = \partial^\alpha T_f$.

Satz 4.1
$g \in C^\infty(\Omega),\ T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \implies \dfrac{\partial}{\partial x_j}(g \cdot T) = \dfrac{\partial g}{\partial x_j} \cdot T + g \cdot \dfrac{\partial T}{\partial x_j}$ und $\partial^{\alpha+\beta} T = \partial^\alpha(\partial^\beta T)$

Beweis Leichte Übung.

Bsp.: 1) $(\partial^\alpha \delta_a)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_a(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi)(a)$, vgl. den Dipol in S. 25.

2) $Y(t) := \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & : & 0 < t < \infty \\ 0 & : & t \le 0 \end{array} \right\}$ heißt **Heavisidefunktion**.
Es gilt $Y' = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, denn (wir identifizieren Y mit $T_{[Y]}$) : $Y'(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} -Y(\varphi') \overset{\text{L. 4.1}}{=} -\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) Y(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Haupts.}}{=} -\varphi\Big|_0^\infty = \varphi(0) = \delta_0(\varphi) = \delta(\varphi)$.

3) Es sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ mit $T' = 0$.
Wir zeigen, dass dann $T = c =$const. $\in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ sei $\varphi_1 := \varphi - \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \cdot w \implies \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (weil $\int w(t)\,\mathrm{d}t = 1$, s. S. 18)

$\implies \psi(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \varphi_1(s)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

$$0 = T'(\psi) = -T(\psi') = -T(\varphi_1) = -T(\varphi) + \underbrace{T(w)}_{=:c} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \implies$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : T(\varphi) = \displaystyle\int c \cdot \varphi(t)\,\mathrm{d}t \implies T = T_c$, wobei wir $c \in \mathbb{C}$ auffassen als L^1_{loc}-Funktion.
Kurz: $T' = 0 \implies T =$ konstant. Allgemeiner:

Satz 4.2
$\Omega \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
$T \in \mathcal{D}'(\Omega), T^{(k)} = 0 \implies T =$ Polynom vom Grad $\leq k-1$.

Beweis Induktiv: $T^{(k)} = T^{(k-1)\prime} = 0 \underset{\circledast}{\overset{\text{s.o.}}{\implies}} T^{(k-1)} = c \implies (T^{(k-2)} - cx)' = 0$
$\implies T^{(k-2)} = cx + d$ etc.
[Dabei wird beim Beweis von $\circledast$ statt w $w_h(x-x_0)$ mit $\operatorname{supp} w_h(x-x_0) \subset \Omega$ genommen.] $\square$

Bemerkung Wenn $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen sind, so können wir $\mathcal{D}(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\Omega_2)$ auffassen, indem wir $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ in $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ durch 0 fortsetzen, vgl. S. 17.
Daher ist für $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ $T|_{\Omega_1} := T|_{\mathcal{D}(\Omega_1)}$ wohldefiniert und gibt für $f \in L^1_{\text{loc}}$ das Übliche.
Der nächste Satz besagt, dass $\Omega \longmapsto \mathcal{D}'(\Omega)$ eine „Garbe" ist.

Satz 4.3
$\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ sei eine offene Überdeckung. Dann gilt:

a) $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\forall i \in I : S|_{\Omega_i} = T|_{\Omega_i} \implies S = T$;

b) wenn $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ mit $\forall i, j \in I : T_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = T_j|_{\Omega_i \cap \Omega_j}$
(falls $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$) $\implies \exists_1 T \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall i \in I : T_i = T|_{\Omega_i}$.

Beweis χ_i sei eine lokalendliche C^∞-Zerlegung der 1 zur Überdeckung (vgl. Differenzierbare Manigfaltigkeiten S. 59), $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
a) $\operatorname{supp}(\varphi \cdot \chi_i) \subset \operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\chi_i \subset \Omega_i \implies \varphi \cdot \chi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ und $\varphi \cdot \chi_i \equiv 0$ für fast alle i, da $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt $\implies S(\varphi) = S(\sum \varphi \cdot \chi_i) = \sum\limits_{\text{endl.}} S(\varphi \cdot \chi_i) = \sum T(\varphi \cdot \chi_i) = T(\varphi)$
b) Definiere $T(\varphi) := \sum\limits_{\varphi \cdot \chi_i \not\equiv 0} T_i(\varphi \cdot \chi_i)$;
$\varphi_k \to 0 \implies T(\varphi_k) \to 0 \implies T \in \mathcal{D}'(\Omega)$;
$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_j) \implies T(\varphi) = \sum\limits_i T_i(\varphi\chi_i) = \sum\limits_i T_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j}(\varphi \cdot \chi_i)$
$= \sum\limits_i T_j(\varphi \cdot \chi_i) = T_j(\sum \varphi \cdot \chi_i) = T_j(\varphi) \implies T|_{\Omega_j} = T_j$ $\square$

Def.:
Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sei der **Träger** von T

$$\operatorname{supp} T := \Omega \setminus \left\{ x_0 \in \Omega;\ \exists \varepsilon > 0 : T\Big|_{\{x \in \Omega;\, |x-x_0| < \varepsilon\}} = 0 \right\}.$$

Bemerkung Offenbar ist $\Omega \setminus \operatorname{supp} T$ offen und $\operatorname{supp} T \subset \Omega$ abgeschlossen. Wegen Satz 4.3 ist $T\big|_{\Omega\setminus \operatorname{supp} T} = 0$ und $\Omega \setminus \operatorname{supp} T$ ist die größte offene Menge auf der $T = 0$ ist.

Bsp.: 1) Für $f \in C(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ ist $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} T_f$. Für $f = [\tilde{f}] \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ hingegen ist i. A. $\operatorname{supp} \tilde{f} \neq \operatorname{supp} \tilde{f}_1$, wenn $[\tilde{f}] = [\tilde{f}_1]$. Aber $\operatorname{supp} T_f = \Omega \setminus \big\{x_0 \in \Omega;\ \exists \varepsilon > 0 : \tilde{f} = 0 \text{ fast überall auf } \{x \in \Omega;\ |x - x_0| < \varepsilon\}\big\}$ ist wohldefiniert.
2) $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\} = \operatorname{supp} \partial^\alpha \delta_a$, siehe auch Satz 4.5.

Def.:
$\mathcal{E}'(\Omega) := \big\{T \in \mathcal{D}'(\Omega);\ \operatorname{supp} T \text{ kompakt}\big\}$.

Bemerkung
Wie in S. 17 gilt, dass dann $d(\operatorname{supp} T, \partial\Omega) > 0$ und wir daher (nach Satz 4.3) $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ außerhalb von Ω durch 0 fortsetzen können, d.h. $\mathcal{E}'(\Omega) \simeq \big\{T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp} T \subset \Omega\big\}$.

Satz 4.4
$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ sei linear. Äquivalent sind

(i) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (d.h. $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_k) \to 0$);

(ii) $\forall K \subset \Omega$ kompakt: $\exists C > 0 : \exists m \in \mathbb{N}_0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset K$:

$$\big|T(\varphi)\big| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

[Interpretation: Wenn $\mathcal{D}(\Omega)$ als lokalkonvexer topologischer Vektorraum definiert wird, heißt (i), dass T folgenstetig ist und (ii), dass T stetig ist, und Satz 4.4 sagt, dass die zwei Aussagen äquivalent sind.]

Beweis: (ii) $\implies$ (i): $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \exists K \subset \Omega$ kompakt: $\forall k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ und $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \|\partial^\alpha \varphi_k\|_\infty \to 0 \overset{\text{(ii)}}{\implies} T(\varphi_k) \to 0$ für $k \to \infty$.

(i) $\implies$ (ii): Indirekt; Annahme: $\exists K \in \Omega$ kompakt: $\forall k \in \mathbb{N} : \exists \psi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \psi_k \subset K$ und $\big|T(\psi_k)\big| > k \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \psi_k\|_\infty =: a_k \in (0, \infty)$.
Setze $\varphi_k := \dfrac{1}{a_k}\, \psi_k \implies \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi_k\|_\infty = \dfrac{1}{k} \to 0 \implies \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$,
aber $\big|T(\varphi_k)\big| > 1 \implies \lightning$ $\square$

Satz 4.5
$T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ a \in \Omega,\ \operatorname{supp} T = \{a\} \implies T = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_a$ für geeignete $c_\alpha \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}$.

Beweis a) Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} T = \{a\}$;
$\mathbb{R}^n = \Omega \cup \big(\mathbb{R}^n \setminus \{a\}\big),\ T_1 = T,\ T_2 = 0 \overset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow}$ oEdA $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Betrachte $S(\varphi) := T\big(\varphi(x-a)\big) \implies \operatorname{supp} S = \{0\}$.
Wenn $S = \sum\limits_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ gezeigt ist, folgt $T = \sum\limits_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_a$. Also oEdA $a = 0$.

b) Nach Satz 4.4 $\exists C > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \big\{x; |x| \le 1\big\} : \big|T(\varphi)\big| \le C \sum\limits_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$.

Es sei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\chi \subset \big\{x; |x| \le 1\big\}$ und $\chi(x) = 1$ für $|x| \le \frac{1}{2}$;
für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0$ sei $\varphi_t(x) := \varphi(x)\cdot\chi(t\cdot x) \implies 0 \notin \operatorname{supp}(\varphi - \varphi_t) \implies T(\varphi) = T(\varphi_t)$.
$\psi(x) := \sum\limits_{|\alpha|\le m} \dfrac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha$ = Taylorpolynom von φ vom Grad $m \implies T(\varphi) = T(\varphi_t) =$

$$T(\psi_t) + T(\varphi_t - \psi_t) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} T\big(x^\alpha \cdot \chi(t\cdot x)\big) + T(\varphi_t - \psi_t)$$
$$= \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha \delta(\varphi) + T(\varphi_t - \psi_t),$$

wobei $c_\alpha := \dfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} T\big(x^\alpha \chi(tx)\big)$ (von t unabhängig, da $0 \notin \operatorname{supp}\big(x^\alpha\chi(t_1x) - x^\alpha\chi(t_2x)\big)$ für $t_1, t_2 > 0$).
Diese Darstellung von $T(\varphi)$ gilt $\forall t > 0$ und es genügt daher zu zeigen, dass $\lim\limits_{t\to\infty} T(\varphi_t - \psi_t) = 0$.

c) $f(x) := \varphi(x) - \psi(x) \overset{\overset{\text{Taylor}}{\downarrow}}{=} \sum\limits_{|\alpha|=m+1} \dfrac{\partial^\alpha\varphi(\vartheta x)}{\alpha!} x^\alpha,\ \vartheta = \vartheta_x \in (0,1)$
$\implies \exists C_1 > 0 : \forall x$ mit $|x| \le 1 : \big|f(x)\big| \le C_1 |x|^{m+1}$; ebenso für $\partial^\gamma f,\ |\gamma| \le m$, d.h.
$\exists C_1 > 0 : \forall \gamma \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\gamma| \le m : \forall x$ mit $|x| \le 1 : |\partial^\gamma f(x)\big| = \big|\partial^\gamma\varphi(x) - \partial^\gamma\psi(x)\big| \underset{\underset{\text{Taylor}}{\uparrow}}{\le}$
$C_1 |x|^{m+1-|\gamma|}$. Für $t \ge 1$ ist $\operatorname{supp}(\varphi_t - \psi_t) \subset \big\{x;\ |x| \le 1\big\}$

$$\implies \big|T(\varphi_t - \psi_t)\big| = \Big|T\big(f\cdot\chi(tx)\big)\Big| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \big\|\partial^\alpha\big(f\cdot\chi(tx)\big)\big\|_\infty$$
$$\overset{\circledast}{\le} C \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \max_{|x|\le\frac{1}{t}} \big|\partial^\beta f(x)\big| \cdot \Big\|\partial^{\alpha-\beta}\big(\chi(tx)\big)\Big\|_\infty$$
$$\le C\cdot C_1 \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} t^{|\beta|-m-1} \cdot t^{|\alpha-\beta|} \cdot \|\partial^{\alpha-\beta}\chi\|_\infty$$
$$\le C_2 \cdot t^{-1} \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

$\big[$ $^{\circledast}$Beachte, dass $\partial^\alpha(f\cdot g) = \sum\limits_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} g$ (Leibniz)$\big]$. $\square$

§ 5 Soboleväume

Wieder sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und $L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ entsprechend Definition und Lemma 4.1.

Def.:
$1 \leq p < \infty,\ k \in \mathbb{N}_0$.
Die Vektorräume $W^{p,k}(\Omega) := \left\{f \in \mathcal{D}'(\Omega);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\right\}$ heißen **Soboleväume**. Sie werden mit der Norm

$$\|f\|_{W^{p,k}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

versehen.

Satz 5.1
$W^{p,k}(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Beweis: a) Wenn wir $\left\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n;\ |\alpha| \leq k\right\} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ (mit $m = \binom{n+k}{k}$) irgendwie anordnen, so ist $\|f\|_{W^{p,k}} = |x^f|_p,\ x^f \in \mathbb{R}^m$ definiert durch $x^f_j := \|\partial^{\alpha_j} f\|_{L^p(\Omega)}$ für $j = 1, \cdots, m$. Minkowski $\implies \forall j : x^{f+g}_j \leq x^f_j + x^g_j \implies \|f+g\|_{W^{p,k}} = |x^{f+g}|_p \leq |x^f + x^g|_p \leq |x^f|_p + |x^g|_p = \|f\|_{W^{p,k}} + \|g\|_{W^{p,k}} \implies \|\cdot\|_{W^{p,k}}$ ist eine Norm.

b) f_j C-Folge in $W^{p,k} \implies \forall |\alpha| \leq k : \partial^\alpha f_j$ C-Folge in $L^p(\Omega) \implies \partial^\alpha f_j \longrightarrow g_\alpha$ in $L^p(\Omega)$; $g := g_0$;
$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies (\partial^\alpha f_j)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f_j(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int f_j \cdot \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\longrightarrow} (-1)^{|\alpha|} \int g \cdot \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x$
(weil $\left\|(f_j - g) \cdot \partial^\alpha \varphi\right\|_1 \leq \|f_j - g\|_p \cdot \|\partial^\alpha \varphi\|_q \longrightarrow 0,\ j \to \infty$) andererseits ist
$(\partial^\alpha f_j)(\varphi) = \int \partial^\alpha f_j \cdot \varphi \,\mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\longrightarrow} \int g_\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = g_\alpha(\varphi) \implies \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : (\partial^\alpha g)(\varphi) = g_\alpha(\varphi) \implies$
$\partial^\alpha g = g_\alpha \in L^p(\Omega) \implies g \in W^{p,k}(\Omega)$ und $f_j \longrightarrow g$ in $W^{p,k}(\Omega)$. □

Satz 5.2
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset W^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ dicht $(1 \leq p < \infty,\ k \in \mathbb{N}_0)$

Beweis a) Wenn $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $f \in W^{p,k}(\mathbb{R}^n) \implies$
$f_j := f(x) \cdot \eta\left(\frac{x}{j}\right) \longrightarrow f$ in $W^{p,k}$ für $j \to \infty$ und $\operatorname{supp} f_j$ ist kompakt.

b) Wenn $f \in W^{p,k}$ mit $\operatorname{supp} f$ kompakt, so ist für $h \searrow 0$ (nach Lemma 3.4) $f_h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $f_h \longrightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha(f_h) = (\partial^\alpha f)_h \longrightarrow \partial^\alpha f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq k \implies f_h \longrightarrow f$ in $W^{p,k}(\mathbb{R}^n)$. □

§ 6 Beschränkte Operatoren in Banachräumen

Nun sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Satz 6.1
X, Y normierte Räume, $A : X \longrightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent:

i) A stetig (d.h. $\forall U \subset Y$ offen: $A^{-1}(U) \subset X$ offen)

ii) A folgenstetig (d.h. $\forall x_n \longrightarrow x$ in X : $Ax_n \longrightarrow Ax$ in Y)

iii) A „beschränkt“, d.h. $\exists C > 0 : \forall x \in X : |Ax| \leq C|x|$.

Beweis: i) $\Longleftrightarrow$ ii) ist aus der Topologie bekannt. (Beachte, dass X, Y metrische Räume sind.)
Zu i) $\Longleftrightarrow$ iii) vgl. Analysis 2, 28.
[i) $\Longrightarrow$ iii): $0 \in A^{-1}\Big(\big\{y; |y| < 1\big\}\Big) \Longrightarrow$
$\exists \delta > 0 : \big\{x \in X; |x| < \delta\big\} \subset A^{-1}\big(\{y \in Y;\ |y| < 1\}\big)$,
d.h. $\exists \delta > 0 : \forall x$ mit $|x| < \delta : |Ax| < 1 \Longrightarrow \forall x \neq 0 :$

$$|Ax| = \left| A\left(\frac{2|x|}{\delta} \cdot \frac{\delta x}{2|x|}\right)\right| = \frac{2|x|}{\delta}\left|A\bigg(\underbrace{\frac{\delta x}{2|x|}}_{|\cdot|<\delta}\bigg)\right| < \frac{2|x|}{\delta} \cdot 1 = \frac{2}{\delta}\,|x| \Longrightarrow$$

$\forall x : |Ax| \leq \frac{2}{\delta}\,|x| = C|x|,\ C := \frac{2}{\delta}$.
iii) $\Longrightarrow$ i): $|Ax_1 - Ax_2| \leq C|x_1 - x_2| \Longrightarrow A$ lipschitzstetig $\Longrightarrow A$ stetig.]

Bsp.: 1) Wenn $\dim X < \infty$, so ist jede lineare Abbildung automatisch stetig. Aber z.B. für $X = C\big([0,1]\big)$ mit $|f| = \|f\|_1$ ist $A : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \longmapsto f(1)$ unstetig, da für $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n \to 0$ in X aber $Af_n \not\to 0$.

2) Wegen Satz 6.1 sind 2 Normen $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ auf X äquivalent $\Longleftrightarrow$ id : $\big(X, |\cdot|\big) \longrightarrow \big(X, \|\cdot\|\big)$ ist ein Homöomorphismus.

Def.:
X, Y normierte Räume.

1) $L(X, Y) := \{A : X \longrightarrow Y$ linear und stetig$\}$, $L(X) := L(X, X)$

2) $A \in L(X, Y)$ heißt **kompakt** $\Longleftrightarrow \forall M \subset X$ beschränkt: $A(M) \subset Y$ präkompakt.

Satz 6.2
Es gilt: A kompakt $\Longleftrightarrow \forall (x_n)$ beschränkte Folge in X : $\exists$ Teilfolge x_{n_j} : Ax_{n_j} C-Folge.

Beweis „$\Longrightarrow$“ $B = \{Ax_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ präkompakt $\Longrightarrow$ $\overline{B} \subset \hat{Y}$ kompakt $\Longrightarrow$ $\exists$ Teilfolge $Ax_{n_j} \longrightarrow y \in \hat{Y} \Longrightarrow Ax_{n_j}$ C-Folge in Y.
„$\Longleftarrow$“ Sei $M \subset X$ beschränkt.
Annahme: $A(M)$ nicht präkompakt $\overset{\text{Satz 1.6}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 : \nexists$ endliches ε-Netz zu $A(M) \Longrightarrow \exists x_n \in M$ mit $\forall n \neq m : |Ax_n - Ax_m| > \varepsilon \Longrightarrow \nexists$ Teilfolge $x_{n_j} : Ax_{n_j}$ C-Folge $\lightning$ $\square$

Def.:
Für $A \in L(X,Y)$ sei $\|A\| := \sup\limits_{\substack{x \in X \\ |x| \leq 1}} |Ax|$.
$\|\cdot\|$ heißt **Operatornorm**. (Sie hängt natürlich von den Normen auf X und Y ab.)

Bemerkungen 1) $\|A\|$ ist die kleinste Zahl C, für die gilt: $\forall x \in X : |Ax| \leq C|x|$.
2) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $L(X,Y)$, denn

$$\|A+B\| = \sup_{|x|\leq 1} |Ax + Bx| \leq \sup_{|x|\leq 1} \big(|Ax| + |Bx|\big) \leq \sup_{|x|\leq 1} |Ax| + \sup_{|x|\leq 1} |Bx| = \|A\| + \|B\|.$$

Aus Satz 1.3', Seite 5, erhalten wir:

Satz 6.3
$A \in L(X,Y),\ Y$ vollständig. Dann gilt:
$\exists_1 \hat{A} \in L(\hat{X}, Y) : \hat{A}|_X = A$ und es ist $\|\hat{A}\| = \|A\|$. $\square$

Satz 6.4
X normiert, Y Banachraum.

1) $L(X,Y)$ ist mit $\|\cdot\|$ ein Banachraum.

2) $\big\{A \in L(X,Y);\ A \text{ kompakt}\big\}$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $L(X,Y)$.

Beweis 1) A_j sei eine C-Folge in $L(X,Y)$; $x \in X \Longrightarrow |A_j x - A_k x| \leq \|A_j - A_k\| \cdot |x| \to 0 \Longrightarrow A_j x$ C-Folge in Y, Y vollständig $\Longrightarrow A_j x \longrightarrow y =: Ax$.
Offenbar ist $A : X \longrightarrow Y$ linear.
Weiters ist $|A_j x - Ax| = \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{|A_j x - A_k x|}_{\leq \|A_j - A_k\| \cdot |x|} \leq \varepsilon |x|$, wenn $j \geq N_\varepsilon \Longrightarrow A_j - A \in L(X,Y)$ und $\|A_j - A\| \leq \varepsilon$ für $j \geq N_\varepsilon \Longrightarrow A \in L(X,Y)$ und $A_j \longrightarrow A$ in $L(X,Y)$.

2) a) A_1, A_2 kompakt, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, x_n beschränkte Folge in $X \overset{\text{Satz 6.2}}{\Longrightarrow}$
$\exists$ Teilfolge $x_{n_j} : A_1 x_{n_j}$ C-Folge und $\exists$ Teilfolge $x_{n_{j_k}} : A_2 x_{n_{j_k}}$ C-Folge $\Longrightarrow$
$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) x_{n_{j_k}}$ C-Folge $\overset{\text{Satz 6.2}}{\Longrightarrow} \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ kompakt.
Also bilden die kompakten Operatoren einen Untervektorraum.

b) A_j kompakt, $A_j \longrightarrow A$ in $L(X,Y)$, $M \subset X$ beschränkt, $\forall x \in M : |x| \leq C$, $\varepsilon > 0 \implies \exists j : \|A_j - A\| \leq \dfrac{\varepsilon}{C} \implies \forall x \in M : |Ax - A_j x| \leq \dfrac{\varepsilon}{C} \cdot |x| \leq \varepsilon \implies A_j(M)$ ist ein präkompaktes ε-Netz zu $A(M) \overset{\text{Satz 1.7}}{\implies} A(M)$ ist präkompakt $\implies A$ kompakt. □

Bemerkung $L(X) := L(X,X)$ ist sogar eine Algebra und es gilt
$\|A \cdot B\| = \sup\limits_{|x| \leq 1} |ABx| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ⊛ d.h., falls X ein Banachraum ist, so ist $L(X)$ eine „Banachalgebra" (= Banachraum und Algebra mit ⊛). [Wie im $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist $A \cdot B := A \circ B$.]

Def.:
X normierter Raum.
$X' := L(X, \mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ linear und stetig$\}$ heißt **Dualraum** von X.

Bemerkungen 1) X' ist ein Banachraum (Satz 6.4).
2) Wenn $A \in X'$ und $X \leq Y$ mit $|x|_X = |x|_Y$, $\forall x \in X$, so lässt sich A (nach Satz 1.3') eindeutig stetig fortsetzen auf Y, falls $X \subset Y$ dicht ist. Der nächste Satz besagt, dass sich A in jedem Fall stetig und linear auf Y fortsetzen lässt (natürlich im Allgemeinen nicht eindeutig).

Satz 6.5 (Hahn-Banach)
$\big(X, |\cdot|_X\big)$, $\big(Y, |\cdot|_Y\big)$ normierte Räume, $X \leq Y$, $\forall x \in X : |x|_X = |x|_Y$ (d.h. X ist ein Untervektorraum von Y mit induzierter Norm), $A \in X'$. Dann gilt:

$$\exists \tilde{A} \in Y' \text{ mit } \tilde{A}|_X = A \text{ und } \|\tilde{A}\| = \|A\|.$$

Der **Beweis** wird ausgelassen.

Def.:
X Banachraum, $A \in L(X), I = \mathrm{id}_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$.

1) $\varrho(A) := \big\{\lambda \in \mathbb{K};\ A - \lambda I : X \longrightarrow X$ bijektiv und $(A - \lambda I)^{-1}$ ist stetig$\big\}$ heißt **Resolventenmenge** von A.

2) $\sigma(A) := \mathbb{K} \setminus \varrho(A)$ heißt **Spektrum** von A.

Bsp.: Wenn λ ein **Eigenwert** von A ist, d.h. $\ker(A - \lambda I) \neq 0$, so ist $\lambda \in \sigma(A)$. Für $\dim X < \infty$ ist $A - \lambda I$ bijektiv $\iff A - \lambda I$ injektiv und daher $\sigma(A)$ genau die Menge der Eigenwerte von A. Für $\dim X = \infty$ ist $\sigma(A)$ im Allgemeinen größer.

Satz 6.6
X Banachraum, $A \in L(X)$. Dann gilt

1) $\big\{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > \|A\|\big\} \subset \varrho(A)$;

2) $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|A\| \implies R_\lambda := -\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} A^j$ konvergiert in $L(X)$ und

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$.

Bemerkungen $A^0 := I$, $-\sum \lambda^{-j-1} A^j$ heißt „Neumannsche Reihe“ und R_λ wird oft „Resolventenoperator“ genannt.

Beweis Offenbar folgt 1) aus 2).

Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|A\|$ und $c := \dfrac{\|A\|}{|\lambda|}$; wenn $B_n := \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda^{-j-1} A^j$ und $m \leq n \implies$ $\|B_n - B_m\| = \Big\| \sum\limits_{j=m+1}^{n} \lambda^{-j-1} A^j \Big\| \leq \sum\limits_{j=m+1}^{n} |\lambda|^{-j-1} \|A\|^j \leq \dfrac{1}{|\lambda|} \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} c^j = \dfrac{c^{m+1}}{|\lambda|} \cdot \dfrac{1}{1-c} < \varepsilon$ für $m, n \geq N$, da $0 \leq c < 1 \implies B_n$ ist C-Folge in $L(X)$, $L(X)$ vollständig (Satz 6.4) $\implies$ die Neumannsche Reihe konvergiert. Weiters ist

$A \cdot R_\lambda = -A \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} A^j = -\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} A^{j+1} = -\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} A^j = -\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} A^j + I = \lambda R_\lambda + I \implies$ $(A - \lambda I) R_\lambda = I$ und ebenso $R_\lambda (A - \lambda I) = I \implies R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. $\square$

§ 7 Beschränkte Operatoren in Folgen- und Funktionenräumen

A) Operatoren in endlich-dimensionalen Räumen

Für $X = \mathbb{K}^n,\ Y = \mathbb{K}^m$ ist jede lineare Abbildung $A : X \longrightarrow Y$ auch stetig, d.h.

$$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{m\times n} : A \longmapsto (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$$

wobei $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^m a_{ij} f_i$ und $e_1, \cdots, e_n$ bzw. $f_1, \cdots, f_m$ Standardbasis in X bzw. Y.
Wenn wir auf $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$ jeweils die p-Norm nehmen, so erhalten wir die entsprechende Operatornorm $\|A\|_p = \max\limits_{|x|_p\le 1} |Ax|_p$.

Bsp.: 1) Wir wollen z.B. $\|A\|_1$ bestimmen.
$x \in \mathbb{K}^n$ mit $|x|_1 = \sum\limits_{j=1}^n |x_j| \le 1 \implies$

$|Ax|_1 = \sum\limits_{i=1}^m \big| \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j \big| \le \sum\limits_{j=1}^n \big(\sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|\big)|x_j| \le \max\limits_{j=1,\cdots,n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}| \cdot \sum\limits_{j=1}^n |x_j| \le \max\limits_{j=1,\cdots,n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|$

$\implies \|A\|_1 \le \max\limits_{j=1,\cdots,n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}| = \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij_0}|.$

Wenn $x_j = \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & : & j = j_0 \\ 0 & : & \text{sonst} \end{array} \right\}$, so ist $|Ax|_1 = \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij_0}|$ und daher folgt

$\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\cdots,n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}| =$ „maximale Spaltenbetragssumme", z.B. $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|_1 = 2 + 4 = 6.$

2) i fest $\implies \big|(Ax)_i\big| = \big| \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j \big| \le$ (Hölder) $\le \sqrt{\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \cdot |x|_2$

$\implies |Ax|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^m \big|(Ax)_i\big|^2 \le \sum\limits_{i=1}^m \big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^2\big) \cdot |x|_2^2$

$\implies \|A\|_2 = \max\limits_{|x|_2\le 1} |Ax|_2 \le \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^2} =: \|A\|_{\mathrm{HS}}$

Die letzte Norm $\big(= |\cdot|_2$ auf $\mathbb{K}^{m\times n}\big)$ heißt „Hilbert-Schmidt"-Norm.
Im Allgemeinen $\|A\|_2 < \|A\|_{\mathrm{HS}}$.
$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ sowie die „Operatornorm" $\|\cdot\|_2$ werden uns im Hilbertraum wiederbegegnen, $\|\cdot\|_1$ wie in Bsp. 1 spielt dort keine Rolle.

B) Der Dualraum von l^p

Satz 7.1
$1 \leq p < \infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ (d.h. $q = \infty$ für $p = 1$). Dann ist $F : l^q \longrightarrow (l^p)' : y \longmapsto \big(x \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i\big)$ ein Isomorphismus von Banachräumen.

Beweis a) $y \in l^q,\ x \in l^p \implies \big|F(y)(x)\big| = \big|\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i\big| \underset{\text{Hölder}}{\leq} |x|_p \cdot |y|_q \implies F(y) \in (l^p)'$ und $\big\|F(y)\big\| \leq |y|_q$. Also ist F wohldefiniert, linear und stetig.

b) Es sei $e_j = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{| \\ j}}{1}, 0, \cdots) \in l^p$.

$F(y) = 0 \implies \forall j : 0 = F(y)(e_j) = y_j \implies y = 0$. Also ist F injektiv.

Zur Surjektivität: Sei $f \in (l^p)'$ und $y_j := f(e_j)$.

1. Fall $p > 1$, d.h. $q < \infty$:
Für $N \in \mathbb{N}$ fest sei $x_j := \begin{cases} |y_j|^q / y_j & : \ y_j \neq 0,\ j \leq N \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$

$\implies \big|f(x)\big| = \big|f(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j e_j)\big| = \big|\sum\limits_{j=1}^{N} x_j y_j\big| = \sum\limits_{j=1}^{N} |y_j|^q;$

andererseits ist $\big|f(x)\big| \leq \|f\| \cdot |x|_p = \|f\| \cdot \Big(\sum\limits_{j=1}^{N} |y_j|^{\overbrace{(q-1)\cdot p}^{q}}\Big)^{1/p} \implies$

$\Big(\sum\limits_{j=1}^{N} \big|y_j\big|^q\Big)^{\overbrace{1-1/p}^{=1/q}} \leq \|f\|,\ \forall N \implies y \in l^q;$

für $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ ist $f(x) = F(y)(x)$; weil $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \big\{(x_1, x_2, \cdots);\ x_j = 0 \text{ für fast alle } j\big\} \leq l^p$ dicht ist, folgt $f = F(y)$ (vgl. Satz 6.3) und $|y|_q \leq \|f\| = \big\|F(y)\big\|$. Also ist F bijektiv und ein Isomorphismus von Banachräumen.

2. Fall $p = 1,\ q = \infty$:
$\forall j \in \mathbb{N} : |y_j| = \big|f(e_j)\big| \leq \|f\| \cdot |e_j|_1 = \|f\| \implies$
$\implies y \in l^\infty$ und $f(x) = F(y)(x)$ für $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \leq l^1$ dicht
$\implies f = F(y)$ und $|y|_\infty \leq \big\|F(y)\big\|$. $\square$

Bemerkung Es gilt $l^1 = \big(c_0, |\cdot|_\infty\big)'$, aber $l^1 \subsetneq (l^\infty)'$. Der Beweis oben versagt im Fall $p = \infty$, da $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ in c_0 aber nicht in l^∞ dicht ist.

C) Der Dualraum von $L^p(X)$

(X, Σ, μ) sei ein Maßraum.

Satz 7.2 (F. Riesz)
$1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dann ist

$$F : L^q(X) \longrightarrow \big(L^p(X)\big)' : f \longmapsto \left(g \longmapsto \int f \cdot g \,\mathrm{d}\mu\right)$$

ein Isomorphismus von Banachräumen.

Bemerkungen 1) Genaugenommen: $F : [\tilde{f}] \longmapsto \left([\tilde{g}] \mapsto \int \tilde{f}\tilde{g}\,\mathrm{d}\mu\right)$
2) Satz 7.2 $\supset$ Satz 7.1 für $p > 1$, wenn $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ Zählmaß.

[**Beweisskizze** a) Wie im Beweis von Satz 7.1 zeigt die Höldersche Ungleichung, dass F wohldefiniert, linear und stetig ist und $\big\|F(f)\big\| \leq \|f\|_q$.

b) Für $0 \neq f = [\tilde{f}] \in L^q(X)$ sei

$$\tilde{h}(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} \big|\tilde{f}(x)\big|^q / \tilde{f}(x) & : & \tilde{f}(x) \neq 0 \\ 0 & : & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_X |\tilde{h}|^p \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |\tilde{f}|^{(q-1)\cdot p} \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |\tilde{f}|^q \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_q^q$$

$\Longrightarrow$ $h = [\tilde{h}] \in L^p(X)$, $\|h\|_p = \|f\|_q^{q/p}$ und

$$F(f)(h) = \int \tilde{f} \cdot \tilde{h} \,\mathrm{d}\mu = \int |\tilde{f}|^q \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_q^q = \|f\|_q^{q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} = \|f\|_q^{1+q/p} = \|h\|_p \cdot \|f\|_q$$

$$\Longrightarrow \big\|F(f)\big\| = \sup_{g \neq 0} \frac{\big|F(f)(g)\big|}{\|g\|_p} \geq \|f\|_q.$$

Also ist $\big\|F(f)\big\| = \|f\|_q$ und $F : L^q \longrightarrow (L^p)'$ ein Isomorphismus auf einen Unterraum von $(L^p)'$.

c) Die Surjektivität von F ist schwieriger zu zeigen. Sie entspricht (15.11), p. 230, in Hewitt-Stromberg, Real & Abstract Analysis.]

Bemerkung $L^1(X)' \simeq L^\infty(X)$ gilt für „zerlegbare Maßräume", vgl. Hewitt-Stromberg, (20.20), p. 353.

D) $i : \overline{C}^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

Def.:
$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ m \in \mathbb{N}$. Ω **gehört zur Klasse** C^m (bzw. kurz „$\Omega \in C^m$“): $\Longleftrightarrow$ i) Ω offen und beschränkt, ii) $\forall x_0 \in \partial\Omega : \exists \varphi : W \longrightarrow V$ mit $V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in W,\ \varphi\ C^m,\ \varphi$ bijektiv, $\varphi^{-1}\ C^m$ (d.h. $\forall x \in W : \det \varphi'(x) \neq 0$) und $\varphi(W \cap \Omega) = \{x \in V;\ x_1 < 0\}$
[$\Longrightarrow\ \varphi(W \cap \partial\Omega) = \{x \in V;\ x_1 = 0\}$]

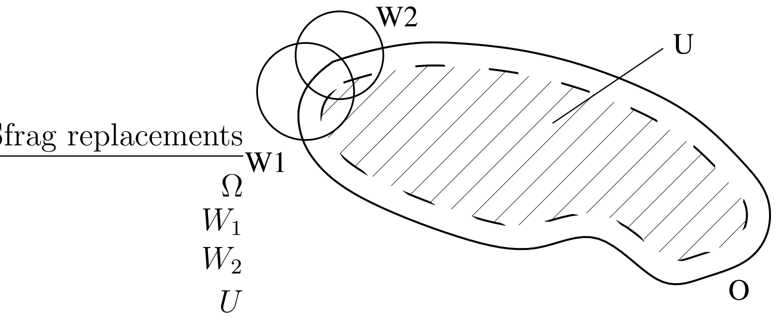
Bemerkung Die letzte Bedingung in $[\cdots]$ besagt, dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^m-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. ii) sagt, dass Ω „auf einer Seite“ von $\partial\Omega$ liegt, und das ist etwas mehr. Z.B. für $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1,\ |x| \neq \frac{1}{2}\right\}$ ist $\partial\Omega$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit, aber ii) für $|x_0| = \frac{1}{2}$ nicht erfüllt.

Satz 7.3
$\Omega \in C^1 \implies i : \overline{C}^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) : f \longmapsto f$ ist kompakt (wenn $\overline{C}^1(\Omega),\ C(\overline{\Omega}) = \overline{C}^0(\Omega)$ entsprechend S. 10 normiert sind).

Beweis a) Es genügt zu zeigen, dass $M := \left\{f \in \overline{C}^1(\Omega);\ \|f\|_{\overline{C}^1} \leq C\right\}$ in $C(\overline{\Omega})$ für $C > 0$ präkompakt ist. $\|f\|_{\overline{C}^1} = \|f\|_\infty + \sum\limits_{i=1}^{n} \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right\|_\infty$, vgl. S. 10 $\implies M$ ist in $C(\overline{\Omega})$ beschränkt. Wegen Satz 3.2 müssen wir dann nur mehr zeigen, dass M gleichgradig stetig ist.

b) $\forall x_0 \in \partial\Omega : \exists$ Karte $\varphi : W \longrightarrow V$ wie oben. Durch Einschränkung der Karten $\varphi : W \longrightarrow V$ können wir oEdA annehmen, dass $V = \left\{z \in \mathbb{R}^n;\ |z| < 1\right\}$, dass φ lipschitzstetig ist und $(\varphi^{-1})'$ beschränkt ist.
$\forall y \in \Omega : \exists \delta > 0 : K_\delta(y) \subset \Omega$; Ω beschränkt $\implies \overline{\Omega}$ kompakt $\implies \exists$ endlich viele W_i und endlich viele y_i mit $\overline{\Omega} \subset \underbrace{\bigcup\limits_{j=1}^{m} K_{\delta_j}(y_j)^0}_{U} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{N} W_i \implies \overline{U} \subset \Omega$ und $\overline{\Omega} \subset U \cup \bigcup\limits_{i=1}^{N} W_i$.

[$K_\delta(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta\right\}$, vgl. S. 7]



c) $U \cup \bigcup\limits_{i=1}^{N} (W_i \cap \overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$ ist eine offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$ kompakt $\implies \exists$ Lebesguezahl

$\delta > 0 \implies \forall x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x-y| < \delta : [x, y \in U] \vee [\exists i : x, y \in W_i]$. Es sei weiters $\delta < d(U, \partial\Omega)$.
Wenn dann $f \in M$ und $x, y \in \Omega$ mit $|x-y| < \delta \implies$

1. Fall $\quad x, y \in U \implies \big|f(x) - f(y)\big| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\underbrace{x + t(y-x)}_{\in \Omega}\big) \,\mathrm{d}t \right| \leq$

$$\leq \int\limits_0^1 |y-x| \cdot \Big|\nabla f\big(x + t(y-x)\big)\Big| \,\mathrm{d}t \leq \delta \cdot C \text{ oder}$$

2. Fall $\quad \exists i : x, y \in W_i \implies \big|f(x) - f(y)\big| = \Big|f \circ \varphi_i^{-1}\big(\varphi_i(x)\big) - f \circ \varphi_i^{-1}\big(\varphi_i(y)\big)\Big|$

$$= \left| \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[f \circ \varphi_i^{-1}\Big(\underbrace{\varphi_i(x) + t\big(\varphi_i(y) - \varphi_i(x)\big)}_{\in \{z \in \mathbb{R}^n; z_1 < 0, |z| < 1\}}\Big)\Big] \,\mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\big|\varphi_i(y) - \varphi_i(x)\big|}_{\leq C_1 \delta} \cdot \underbrace{\sup_{\substack{|z|<1 \\ z_1 < 0}} \big|\nabla(f \circ \varphi_i^{-1})(z)\big|}_{\leq C_2} \leq C_3 \delta$$

Also ist M gleichgradig stetig. $\square$

E) Integraloperatoren

Def.:
$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K = [\tilde{K}] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \Omega)$.
Dann heißt

$$K : \mathcal{K}(\Omega) \longrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : f \longmapsto \left[x \longmapsto \int\limits_\Omega \tilde{K}(x, y) f(y) \,\mathrm{d}y\right]$$

Integraloperator mit Kern $K(x, y)$.

[**Vorsicht:** Der Buchstabe K bezeichnet (je nach Kontext) sowohl den Kern als auch den Operator!]

Bemerkung $A \subset \Omega$ kompakt, $f \in \mathcal{K}(\Omega) \implies \tilde{K}(x, y) f(y) \chi_A(x) \in \mathcal{L}^1(\Omega \times \Omega) \implies$ (Fubini)
$x \longmapsto \chi_A(x) \int\limits_\Omega \tilde{K}(x, y) f(y) \,\mathrm{d}y \in \mathcal{L}^1(\Omega) \implies Kf \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
Wenn über Ω und $K(x, y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \Omega)$ mehr vorausgesetzt wird, lässt sich auch über den Operator K mehr sagen:

Satz 7.4
Wenn $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $K(x,y) \in C(\overline{\Omega \times \Omega})$, so ist $K \in L\big(C(\overline{\Omega})\big)$ kompakt.

Beweis a) $\overline{\Omega \times \Omega}$ kompakt, $K(x,y)$ stetig $\Longrightarrow$ $K(x,y)$ gleichmäßig stetig.
Wenn $f \in C(\overline{\Omega}),\ x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$

$$\Longrightarrow \ \big|Kf(x_1) - Kf(x_2)\big| \leq \int\limits_\Omega \underbrace{\big|K(x_1,y) - K(x_2,y)\big|}_{\leq \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_2| \leq \delta} \cdot \big|f(y)\big| \,\mathrm{d}y \leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon \cdot |\Omega|$$

$\Longrightarrow \ Kf \in C(\overline{\Omega}) \ \Longrightarrow \ K : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ ist wohldefiniert und linear.

Weiters ist $\|Kf\|_\infty = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \left| \int\limits_\Omega K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \|K\|_\infty \cdot |\Omega| \ \Longrightarrow \ K \in L\big(C(\overline{\Omega})\big)$.

b) $M = \big\{f \in C(\overline{\Omega});\ \|f\|_\infty \leq C\big\},\ C > 0$ fest $\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow}$ $\forall f \in M : \big|Kf(x_1) - Kf(x_2)\big| \leq C|\Omega|\varepsilon$ für $|x_1 - x_2| \leq \delta \ \Longrightarrow \ K(M)$ gleichgradig stetig (und beschränkt, weil K beschränkt) $\overset{\text{Arz. Ascoli}}{\Longrightarrow}$ $K(M)$ präkompakt. $\square$

Satz 7.5
Wenn $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $K(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$, so ist $K \in L\big(L^2(\Omega)\big)$ kompakt.

Beweis a) $K = [\tilde{K}] \in L^2(\Omega \times \Omega),\ f = [\tilde{f}] \in L^2(\Omega),\ A \subset \Omega$ kompakt
$\Longrightarrow \ \tilde{K}(x,y)\tilde{f}(y)\chi_A(x) \in \mathcal{L}^1(\Omega \times \Omega)$, denn

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \chi_A(x) \big|\tilde{K}(x,y)\big| \cdot \big|\tilde{f}(y)\big| \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\leq} \int\limits_A \big\|K(x,-)\big\|_2 \cdot \|f\|_2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \|f\|_2 \cdot \int\limits_\Omega \big\|K(x,-)\big\|_2 \cdot \chi_A(x) \,\mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \left[\int\limits_\Omega \big\|K(x,-)\big\|_2^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_A 1^2 \,\mathrm{d}x\right]^{1/2}$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \|f\|_2 \cdot \|K\|_2 \cdot \sqrt{|A|} < \infty \ \Longrightarrow \ \text{(Fubini)}$$

$\tilde{K}f = \left(x \longmapsto \int\limits_\Omega \tilde{K}(x,y)\tilde{f}(y) \,\mathrm{d}y\right)$ messbar (und $\in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$).

b) $Kf \in L^2(\Omega)$ denn $\|Kf\|_2^2 = \int\limits_\Omega \big|\tilde{K}f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \leq$

$$\leq \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \big|\tilde{K}(x,y)\big| \cdot \big|\tilde{f}(y)\big| \,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\leq} \int \big\|K(x,-)\big\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2 \,\mathrm{d}x$$

$\underset{\text{Fubini}}{=} \|K\|^2_{L^2(\Omega \times \Omega)} \cdot \|f\|_2^2$. Also ist $K \in L\big(L^2(\Omega)\big)$ und $\underbrace{\|K\|}_{\text{Operatornorm}} \leq \|K\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}$.

c) Nach Satz 3.6 ist $\mathcal{D}(\Omega \times \Omega) \subset L^2(\Omega \times \Omega)$ dicht.
$K_j \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega)$ mit $K_j \longrightarrow K$ in $L^2(\Omega \times \Omega) \underset{\text{b)}}{\Longrightarrow} K_j \longrightarrow K$ in $L\big(L^2(\Omega)\big)$. Nach Satz 6.4, 2) genügt es zu zeigen, dass die K_j kompakt sind.

Also oEdA $K(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega)$.

d) Es sei $K \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega)$, $\operatorname{supp} K \subset \Omega_1 \times \Omega_1$, $\Omega \supset \Omega_1$ offen, beschränkt, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $f \in M := \big\{ f \in L^2(\Omega);\ \|f\|_2 \le C \big\}$ ($C > 0$ fest)

$$\Longrightarrow \ \big|Kf(x_1)\big| \le \int\limits_{\Omega_1} \big|K(x_1,y)\big| \cdot \big|\tilde{f}(y)\big| \,\mathrm{d}y$$

$$\le \|K\|_\infty \cdot \int\limits_{\Omega_1} 1 \cdot \big|\tilde{f}(y)\big| \,\mathrm{d}y$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le} \|K\|_\infty \cdot \|f\|_2 \cdot \sqrt{|\Omega_1|} \le \|K\|_\infty \cdot C\sqrt{|\Omega_1|}$$

und $$\big|Kf(x_1) - Kf(x_2)\big| \le \int\limits_{\Omega_1} \underbrace{\big|K(x_1,y) - K(x_2,y)\big|}_{\le \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_2| \le \delta} \cdot \big|f(y)\big| \,\mathrm{d}y$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{\Omega_1} 1 \cdot \big|f(y)\big| \,\mathrm{d}y \underset{\text{Hölder}}{\le} \varepsilon \cdot C\sqrt{|\Omega_1|}$$

$\Longrightarrow$ $K(M) \subset C(\overline{\Omega}_1)$ ist beschränkt und gleichgradig stetig $\Longrightarrow$ $K(M) \subset C(\overline{\Omega}_1)$ präkompakt; $\overline{C}(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ stetig (da $\|f\|_2 \le \|f\|_\infty \cdot \sqrt{|\Omega_1|}$) $\Longrightarrow$ $K(M) \subset L^2(\Omega)$ präkompakt. Also ist K ein kompakter Operator. $\square$

F) Volterrasche Integralgleichungen 2. Art

i) Nun sei speziell $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Omega = (a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $K \in L^1_{\text{loc}}\big((a,b)^2\big)$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ fest heißt die Integralgleichung $Kf - \lambda f = g$ **Fredholmsche Integralgleichung** $\left\{ \begin{array}{lcl} 1. \text{ Art} & : & \lambda = 0 \\ 2. \text{ Art} & : & \lambda \ne 0 \end{array} \right\}$. Ausgeschrieben heißt das also $\int\limits_a^b K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x)$, wobei g gegeben ist und f gesucht.
Wenn $K(x,y) \in L^2\big((a,b)^2\big)$, so ist nach Satz 7.5 $K \in L\big(L^2(a,b)\big)$ und $\|K\| \le \|K\|_{L^2((a,b)^2)}$. Nach Satz 6.6 ist dann $(K - \lambda I)f = g$ eindeutig lösbar für $|\lambda| > \|K\|$, also jedenfalls für $|\lambda| > \|K\|_{L^2((a,b))}$. Z.B. hat

$$\int\limits_0^\pi \sin(x+y) f(y) \,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x)$$

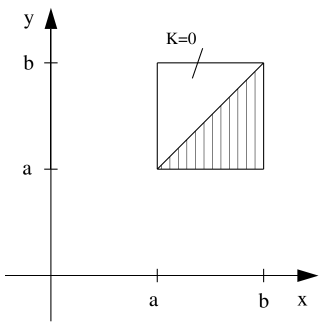
für alle $g \in L^2\big((0,\pi)\big)$ eine eindeutige Lösung

$$f = R_\lambda g \in L^2\big((0,\pi)\big),\ \text{falls } |\lambda| > \Bigg[\int\limits_0^\pi \underbrace{\int\limits_0^\pi \sin^2(x+y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}_{\pi/2}\Bigg]^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Für $|\lambda| \le \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ wissen wir zunächst nichts, erst eine nähere Untersuchung ergibt, dass $\sigma(K) = \big\{0, \pm\frac{\pi}{2}\big\}$, d.h. für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \big\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\big\}$ ist $(K-\lambda I)f = g$ eindeutig lösbar (s. Übung 32).

ii) Wenn $K(x,y) = 0$ für $y > x$, so nennt man $(K-\lambda I)f = g$ **Volterrasche Integralgleichung**. Ausgeschrieben heißt das also $\displaystyle\int\limits_a^x K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x)$.

PSfrag replacements
$K=0$
a
b
x
y



Wenn außerdem $K \in L^\infty\big((a,b)^2\big)$, so ist $\sigma(K) = \{0\}$:

Satz 7.6
Wenn $K(x,y) \in L^\infty\big((a,b)^2\big)$ und $K(x,y) = 0$ für $y > x$, so gilt für den $\int$-Operator $K \in L\Big(L^2\big((a,b)\big)\Big)$, dass $\sigma(K) = \{0\}$.

In Worten Jede Volterrasche Integralgleichung 2. Art mit beschränktem Kern ist in $L^2\big((a,b)\big)$ eindeutig lösbar.

Beweis a) $K_1, K_2 \in L^\infty\big((a,b)^2\big) \overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned}\big(K_1(K_2 f)\big)(x) &= \int\limits_a^b K_1(x,y)\Bigg(\int\limits_a^b K_2(y,z)f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg)\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_a^b f(z)\Bigg(\int\limits_a^b K_1(x,y)K_2(y,z)\,\mathrm{d}y\Bigg)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

denn $\|K_i\|_\infty \leq c,\ f \in L^2\big((a,b)\big) \subset L^1\big((a,b)\big) \implies \forall x : f(z) \cdot K_1(x,y) \cdot K_2(y,z) \in L^1\big((a,b)^2\big)$ [wobei wir uns hier die $\tilde{}$ und $[\cdots]$ ersparen].

Somit hat $K_1 \circ K_2$ den Kern $\hat{K}(x,z) = \int\limits_a^b K_1(x,y)K_2(y,z)\,\mathrm{d}y$.

Speziell, wenn $K_1 = K_2 = K$, so hat $K^2 := K \circ K$ den Kern $K^{(2)}(x,z) = \int\limits_a^b K(x,y)K(y,z)\,\mathrm{d}y$

und K^n hat den Kern $K^{(n)}(x,z) = \int\limits_a^b K(x,y)K^{(n-1)}(y,z)\,\mathrm{d}y$.

b) Nun sei $K(x,y) = 0$ für $y > x$ und $c = \|K\|_\infty < \infty$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$K^{(n)}(x,z) = 0 \text{ für } z > x \text{ und } \left|K^{(n)}(x,z)\right| \leq \frac{c^n}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} \text{ für } z \leq x.$$

Induktionsbeweis dafür: $n = 1\checkmark$

Schluss von n auf $n+1$:

$z > x \implies K^{(n+1)}(x,z) = \int\limits_a^b K(x,y)K^{(n)}(y,z)\,\mathrm{d}y = 0$, da $\big[y > x \implies K(x,y) = 0\big]$ bzw. $\big[y \leq x \implies z > y \implies K^{(n)}(y,z) = 0\big]$;

$z \leq x \implies \left|K^{(n+1)}(x,z)\right| \leq \int\limits_z^x \left|K(x,y)\right| \cdot \left|K^{(n)}(y,z)\right| \mathrm{d}y \leq \int\limits_z^x c \cdot \frac{c^n}{(n-1)!} \cdot (y-z)^{n-1}\,\mathrm{d}y =$
$\frac{c^{n+1}}{(n-1)!}\frac{(y-z)^n}{n}\Big|_{y=z}^{x} = \frac{c^{n+1}}{n!}(x-z)^n.$

c) $\left|K^n f(x)\right| \leq \int\limits_a^x \left|K^{(n)}(x,y)\right| \cdot \left|f(y)\right| \mathrm{d}y \leq \frac{c^n}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-y)^{n-1} \cdot \left|f(y)\right| \mathrm{d}y$

$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{c^n}{(n-1)!}\sqrt{\int\limits_a^x (x-y)^{2n-2}\,\mathrm{d}y} \cdot \|f\|_2 = \frac{c^n}{(n-1)!}\frac{(x-a)^{n-1/2}}{\sqrt{2n-1}}\|f\|_2$

$\implies \|K^n f\|_2 \leq \frac{c^n}{(n-1)!} \cdot \frac{\|f\|_2}{\sqrt{2n-1}} \cdot \underbrace{\left[\int\limits_a^b (x-a)^{2n-1}\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}}_{(b-a)^n/\sqrt{2n}} \implies \underbrace{\|K^n\|}_{\text{Operatornorm}} \leq \frac{\big(c(b-a)\big)^n}{n!}.$

Daher konvergiert die Neumannsche Reihe $R_\lambda = -\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{K^j}{\lambda^{j+1}}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\Longrightarrow \sigma(K) \subset \{0\}$, vgl. den Beweis von Satz 6.6.
Wäre auch $0 \in \varrho(K)$, so wäre $K^{-1} \in L\Big(L^2\big((a,b)\big)\Big) \implies \forall M \subset L^2\big((a,b)\big)$ beschränkt: $M = K\big(\underbrace{K^{-1}(M)}_{\text{beschränkt}}\big)$ präkompakt $\overset{\text{Satz 1.5}}{\Longrightarrow} \dim L^2\big((a,b)\big) < \infty \implies \lightning$ (denn z.B. $x^n,\ n \in \mathbb{N}$, sind linear unabhängig in $L^2\big((a,b)\big)$). $\square$

Kapitel 2

Hilberträume und Distributionen

§ 8 Hilberträume

Def.:
${}_{\mathbb{K}}H$ sei ein Vektorraum. $(\cdot\,,\,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** $\Longleftrightarrow$

a) $(\cdot\,,\,\cdot)$ ist linear in der vorderen Komponente, d.h.

$$\forall \lambda_i \in \mathbb{K} : \forall x_i \in H : (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_3) = \lambda_1 (x_1, x_3) + \lambda_2 (x_2, x_3);$$

b) $(\cdot\,,\,\cdot)$ ist symmetrisch ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesch ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), d.h.
$\forall x_i \in H : (x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$;

c) $(\cdot\,,\,\cdot)$ ist positiv definit, d.h. $\forall x \in H \setminus \{0\} : (x, x) > 0$.

Bemerkungen 1) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(\cdot\,,\,\cdot)$ bilinear, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hingegen in der 2. Komponente antilinear: $(x_3, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \overline{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_3)} = \overline{\lambda_1 (x_1, x_3) + \lambda_2 (x_2, x_3)} = \overline{\lambda}_1 (x_3, x_1) + \overline{\lambda}_2 (x_3, x_2)$. Man nennt $(\cdot\,,\,\cdot)$ dann auch „sesquilinear“. In der Physik wird oft die Linearität in der 2. Komponente vorausgesetzt, d.h. $(x, y)_{\text{Phys.}} = \overline{(x, y)_{\text{Mathe.}}} = (y, x)_{\text{Mathe.}}$.
2) $\big(H, (\cdot\,,\,\cdot)\big)$ nennt man auch „Prähilbertraum“.
3) Wir setzen $|x| := \sqrt{(x, x)} \in [0, \infty)$.

Lemma 8.1 (Cauchy-Schwarz)
$\big(H, (\cdot\,,\,\cdot)\big)$ Prähilbertraum.
Dann gilt $\forall x_1, x_2 \in H : \big|(x_1, x_2)\big| \leq |x_1| \cdot |x_2|$ und $=$ gilt genau dann, wenn x_1, x_2 linear abhängig sind.

[**Beweis** 1. Fall: $(x_1, x_2) = 0$ $\checkmark$
2. Fall: $(x_1, x_2) \neq 0, \lambda = \dfrac{|x_1|^2}{(x_2, x_1)} \implies 0 \leq |x_1 - \lambda x_2|^2 = (x_1 - \lambda x_2, x_1 - \lambda x_2) =$

$$|x_1|^2 - \lambda(x_2,x_1) - \overline{\lambda}(x_1,x_2) + |\lambda|^2|x_2|^2 = |x_1|^2 - |x_1|^2 - |x_1|^2 + \frac{|x_1|^4|x_2|^2}{\big|(x_1,x_2)\big|^2} \implies$$

$\big|(x_1,x_2)\big|^2 \leq |x_1|^2 \cdot |x_2|^2$ und $=$ nur wenn $x_1 - \lambda x_2 = 0 \implies x_1, x_2$ linear abhängig. $\square$]

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt, dass $|\cdot|$ eine Norm ist.

Def.:
$\big(H, (\cdot\,,\,\cdot)\big)$ heißt (reeller bzw. komplexer) **Hilbertraum** $\Longleftrightarrow$ $(\ ,\ )$ Skalarprodukt $\wedge \big(H, |\cdot|\big)$ vollständig.

Bemerkung Ein Hilbertraum ist also ein Banachraum, dessen Norm die Form $|x| = \sqrt{(x,x)}$ mit einem Skalarprodukt $(\cdot\,,\,\cdot)$ hat. Letzteres lässt sich durch die Norm darstellen:

$$(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\big] : \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\big[|x+y|^2 + \mathrm{i}|x+\mathrm{i}y|^2 - \big(|x|^2 + |y|^2\big)(1+\mathrm{i})\big] : \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

„Polarisierungsformel“.

Bsp.: 1) $H = \mathbb{K}^n$ mit $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$

2) $H = l^2$ mit $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$

3) (X, Σ, μ) Maßraum, $H = L^2(X), (f,g) = \int\limits_X f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$

Die ersten zwei Beispiele sind Spezialfälle des dritten mit $\mu =$ Zählmaß. Satz 8.1, S. 49, wird zeigen, dass wir mit dem Zählmaß schon alle Hilberträume (bis auf Isomorphie) erfassen. Wenn S eine Menge ist und $\mathcal{P}(S) =$ Potenzmenge von S, so ist

$$\mu = \text{ Zählmaß} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty] : A \longmapsto \#A.$$

Für $f : S \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, d.h. $f \in \mathcal{L}_+(S)$, ist $\int\limits_S f \,\mathrm{d}\mu = \sum\limits_{e \in S} f(e) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und daher
$f \in L^1(S) = \mathcal{L}^1(S) \Longleftrightarrow f : S \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\sum\limits_{e \in S} \big|f(e)\big| < \infty$.

Def.:
$\emptyset \neq S$ Menge. $l^2(S) := L^2(S)$ bzgl. Zählmaß, d.h. $l^2(S) = \Big\{f : S \longrightarrow \mathbb{K} : \sum\limits_{e \in S} \big|f(e)\big|^2 < \infty\Big\}$
mit $(f,g) = \sum\limits_{e \in S} f(e)\overline{g(e)}$.

Bsp.: $l^2\big(\{1,\cdots,n\}\big) \simeq \mathbb{K}^n : f \longmapsto \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$, $\; l^2(\mathbb{N}) \simeq l^2 : f \longmapsto \big(f(1), f(2), \cdots\big)$

Lemma 8.2
$(\cdot\,,\,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ ist stetig, d.h. $x_n \longrightarrow x,\; y_n \longrightarrow y \implies (x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$.

Beweis Polarisierung und Stetigkeit der Norm $\square$

Def.:
H Hilbertraum. Dann heißt
$S \subset H$ **Orthonormalsystem** $\iff \forall e, \tilde{e} \in S : (e, \tilde{e}) = \begin{cases} 0 & : \; e \neq \tilde{e} \\ 1 & : \; e = \tilde{e}. \end{cases}$
Für $x \in H$ heißen $\lambda_e = (x, e) \in \mathbb{K},\; e \in S$, **Fourierkoeffizienten** von x (bzgl. S).

Lemma 8.3
H Hilbertraum, $S \subset H$ Orthonormalsystem, $x \in H$. Dann gilt:

a) $\sum\limits_{e \in S} \big|(x, e)\big|^2 \leq |x|^2$ („Besselsche Ungleichung“)
Speziell: $S_x = \big\{e \in S; (x, e) \neq 0\big\}$ ist abzählbar.

b) $\sum\limits_{e \in S_x} (x, e) \cdot e$ konvergiert in jeder Summationsreihenfolge zum selben Vektor $y \in H$.

c) $\sum\limits_{e \in S_x} (x, e) \cdot e = x \iff \sum\limits_{e \in S} \big|(x, e)\big|^2 = |x|^2$.

(Die letzte Gleichung heißt „Parsevalsche Gleichung“, die linke Reihe heißt „Fourierreihe“ von x (bzgl. S).)

Beweis a) $S_1 \subset S$ endlich $\implies 0 \leq \big|x - \sum\limits_{e \in S_1} (x, e) \cdot e\big|^2 =$

$$= |x|^2 - 2\mathrm{Re}\, \underbrace{\Big(x, \sum_{e \in S_1} (x, e) \cdot e\Big)}_{\sum\limits_{e \in S_1} |(x,e)|^2} + \underbrace{\sum_{e \in S_1} \sum_{\tilde{e} \in S_1} (x, e)\overline{(x, \tilde{e})}\, \underbrace{(e, \tilde{e})}_{0 \text{ oder } 1}}_{\sum\limits_{e \in S_1} |(x,e)|^2}$$

$$= |x|^2 - \sum_{e \in S_1} \big|(x, e)\big|^2 \implies \sum_{e \in S} \big|(x, e)\big|^2 \leq |x|^2$$

Speziell: $\forall k \in \mathbb{N} : \Big\{e \in S; \big|(x, e)\big| \geq \frac{1}{k}\Big\} =: S_x^{(k)}$ endlich $\big($da $\#S_x^{(k)} \cdot \frac{1}{k^2} \leq |x|^2\big)$
$\implies S_x = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} S_x^{(k)}$ abzählbar

b) Wenn S_x endlich ist, sind wir fertig;

ansonsten sei $S_x = \{e_1, e_2, \cdots\}$; $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \big|(x, e_i)\big|^2 \overset{\text{a)}}{\leq} |x|^2 < \infty$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \Big| \sum\limits_{i=m}^{n} (x, e_i) e_i \Big|^2 = \sum\limits_{i=m}^{n} \big|(x, e_i)\big|^2 \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$ C-Folge, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i = y \in H$;

wenn auch $S_x = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots\}$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, \tilde{e}_i) \tilde{e}_i = z \in H$, und $\forall n \geq N$:

$\Big| \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i - y \Big| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\Big| \sum\limits_{i=1}^{n} (x, \tilde{e}_i) \tilde{e}_i - z \Big| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und $\{e_1, \cdots, e_N\} \subset \{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$ für ein $n \geq N$

$\Longrightarrow \Big| \sum\limits_{i=1}^{n} (x, \tilde{e}_i) \tilde{e}_i - \sum\limits_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i \Big|^2 \leq \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \big|(x, e_i)\big|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{9} \Longrightarrow |y - z| \leq \varepsilon$.

c) S_x endlich $\underset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \Big| x - \sum\limits_{e \in S_x} (x, e) e \Big|^2 = |x|^2 - \sum\limits_{e \in S_x} \big|(x, e)\big|^2$;

$S_x = \{e_1, e_2, \cdots\} \Longrightarrow \big| x - \sum\limits_{e \in S_x} (x, e) e \big|^2 = \lim\limits_{n \to \infty} \big| x - \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \big|^2 \underset{\text{a)}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \Big(|x|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \big|(x, e_i)\big|^2 \Big) =$
$|x|^2 - \sum\limits_{e \in S} \big|(x, e)\big|^2$. □

Def.:
Ein Orthonormalsystem S in H heißt **Orthonormalbasis** $\Longleftrightarrow \forall x \in H : |x|^2 = \sum\limits_{e \in S} \big|(x, e)\big|^2$
(Parsevalsche Gleichung)

Bsp.: Für $H = l^2(S)$ identifizieren wir $e \in S$ mit $\chi_{\{e\}} : S \longrightarrow \mathbb{K} : \tilde{e} \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & \tilde{e} = e \\ 0 & : & \tilde{e} \neq e \end{array} \right\} \Longrightarrow$

$S \subset H$ ist eine ONB, denn $\forall x \in H : x(e) = (x, \overbrace{\chi_{\{e\}}}^{\text{„}e\text{“} \in H}) \Longrightarrow |x|^2 = \sum\limits_{e \in S} \big|x(e)\big|^2 = \sum\limits_{e \in S} \big|(x, e)\big|^2$.

Wiederholung zur linearen Algebra

Wenn k ein Körper ist und ${}_kV$ ein Vektorraum, so heißt $B \subset V$ **Basis**: $\Longleftrightarrow \forall v \in V : \exists_1$ Darstellung $v = \sum\limits_{e \in B} \lambda_e \cdot e$ mit $\lambda_e \in k$ und $\lambda_e = 0$ für alle bis auf endlich viele $e \in S \Longleftrightarrow B$ linear unabhängig und Erzeugendensystem.

Beachte: $\sum\limits_{e \in B} \lambda_e \cdot e$ ist immer eine **endliche** Reihe.

Mit dem Zornschen Lemma zeigt man den **Struktursatz für Vektorräume**: In V $\exists$ Basis B und $V \overset{\text{VR-Iso.}}{\simeq} k^{(B)} := \big\{ f : B \longrightarrow k; f(e) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } e \big\}$
$v = \sum \lambda_e e \longmapsto (e \longmapsto \lambda_e)$

Weiters ist $\dim V = \operatorname{Card} B$ (=Kardinalität von B) eindeutig durch V bestimmt. Die Isomorphieklassen von Vektorräumen sind also durch die Dimension gegeben.

Vergleich mit unserer Situation Vorsicht: Außer für $\dim H < \infty$ ist eine Orthonormalbasis $S \subset H$ KEINE Basis im Vektorraum-Sinn. Zwar ist S linear unabhängig aber kein Erzeugendensystem, da wir unendliche Reihen haben. Dennoch gilt ein Analogon zum obigen Struktursatz auch für Hilberträume, siehe Satz 8.1.

Def.:
Für $M \subset H$ sei $M^\perp := \big\{x \in H; \forall y \in M : (x,y) = 0\big\}$

Bemerkung $M^\perp \leq H$ abgeschlossener Unterraum.

Lemma 8.4
S sei ein Orthonormalsystem. Dann gilt:

$$S \text{ Orthonormalbasis } \iff S^\perp = \{0\}.$$

Beweis „$\Longrightarrow$“ $x \in S^\perp \implies |x|^2 \overset{\overset{S \text{ ONB}}{\downarrow}}{=} \sum\limits_{e \in S} \big|(x,e)\big|^2 = 0 \implies x = 0$

„$\Longleftarrow$“ Es sei $x \in H$ und $y = \sum\limits_{e \in S_x} (x,e)e \implies \forall \tilde{e} \in S : (y, \tilde{e}) = \sum\limits_{e \in S_x} (x,e) \cdot (e, \tilde{e}) = (x, \tilde{e})$

$\implies x - y \in S^\perp = \{0\} \implies x = y \overset{\text{L. 8.3}}{\implies} \sum \big|(x,e)\big|^2 = |x|^2$ $\square$

Satz 8.1 (Struktursatz für Hilberträume)
In einem Hilbertraum $H \ \exists$ ONB S und dann ist $H \underset{\text{Hilb.iso.}}{\simeq} l^2(S) : x \longmapsto \big(e \longmapsto (x,e)\big)$. Weiters ist Card S eindeutig durch H bestimmt, und H durch Card S bis auf Isomorphie gegeben. Schließlich: H separabel $\iff \operatorname{Card} S \leq \aleph_0$, d.h. S endlich oder abzählbar unendlich.

Beweis a) Wenn $\{S_i;\, i \in I\}$ eine Menge von ONSystemen ist, sodass $\forall i,j \in I : S_i \subset S_j \vee S_j \subset S_i$ (d.h. $\{S_i;\, i \in I\}$ ist eine „Kette“ bzw. „total geordnet“), so ist $\bigcup\limits_{i \in I} S_i$ auch ein ONSystem $\implies$ (Zornsches Lemma) $\implies \exists$ maximales Element S in $\{S \subset H;\ S \text{ ONSystem}\}$. S ist eine ONB nach Lemma 8.4, denn $v \in H$ mit $\forall e \in S : (v,e) = 0,\ v \neq 0 \implies S \cup \{\frac{v}{|v|}\}$ ONSystem $\implies \lightning$

b) $F : H \longrightarrow l^2(S) : x \longmapsto \big(e \longmapsto (x,e)\big)$ ist wohldefiniert, da $\sum\limits_{e \in S} \big|(x,e)\big|^2 = |x|^2 < \infty$, injektiv und linear. Weiters ist $(x,y) = \big(\sum\limits_{e \in S}(x,e)e,\ \sum\limits_{e \in S}(y,e)e\big) \overset{\text{L. 8.2}}{=} \sum\limits_{e \in S}(x,e) \cdot \overline{(y,e)} = \big(F(x), F(y)\big)$. Also ist H isomorph zum Unterraum $F(H) \leq l^2(S)$ und nach Übung 1 ist $F(H)$ abgeschlossen. Andererseits ist $\mathbb{K}^{(S)} \subset F(H)$, $\mathbb{K}^{(S)} \subset l^2(S)$ dicht (L. 8.3) $\implies F(H) = l^2(S) \implies F$ ist ein Hilbertraumisomorphismus.

c) **1. Fall:** $\dim H < \infty \implies \operatorname{Card} S = \dim H$, da S eine Vektorraum-Basis ist.
2. Fall: $\dim H = \infty$: S, T seien Orthonormalbasen $\implies \forall e \in S : e = \sum\limits_{\tilde{e} \in T_e} (e, \tilde{e})\tilde{e}$, wobei $T_e = \big\{\tilde{e} \in T; (e, \tilde{e}) \neq 0\big\}$ abzählbar ist. Dann ist $T = \bigcup\limits_{e \in S} T_e$, denn Annahme: $\tilde{e} \in T \setminus \bigcup\limits_{e \in S} T_e \implies$ $\forall e \in S : (e, \tilde{e}) = 0 \overset{\text{L. 8.4}}{\implies} \tilde{e} = 0$ ↯
Daher ist $\operatorname{Card} T \leq \overbrace{\operatorname{Card} S}^{\geq \aleph_0} \cdot \overbrace{\operatorname{Card} \mathbb{N}}^{= \aleph_0} = \operatorname{Card} S$. Ebenso $\operatorname{Card} T \geq \operatorname{Card} S$.

d) Wenn $\operatorname{Card} S_1 = \operatorname{Card} S_2$, d.h. $\exists g : S_1 \longrightarrow S_2$ bijektiv $\implies l^2(S_2) \overset{\sim}{\longrightarrow} l^2(S_1) : f \longmapsto f \circ g$

e) H separabel, $M \subset H$ dicht und abzählbar, S Orthonormalbasis $\implies \forall e \in S : \exists x_e \in M$: $|e - x_e| \leq 0.7$; $e \neq \tilde{e} \in S \implies |e - \tilde{e}| = \sqrt{2} \implies x_e \neq x_{\tilde{e}} \implies S \longrightarrow M : e \longmapsto x_e$ injektiv $\implies S$ abzählbar.
Umgekehrt, wenn S abzählbar ist, so ist $H \simeq \mathbb{K}^n$ oder l^2 und daher separabel (Satz 1.8, 2.1).
$\square$

Bemerkung $\operatorname{Card} S$, S ONB von H, nennt man manchmal „Hilbertraumdimension“ von H. Speziell ist also ein ∞-dimensionaler separabler Hilbertraum immer isomorph zu $l^2 = l^2(\mathbb{N})$. (Das ist der wichtigste Fall in der Praxis.) In einem separablen Hilbertraum lässt sich eine ONB konstruktiv mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren gewinnen.

Exkurs: Fourierreihen im engeren Sinn

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $H = L^2\big((0, 2\pi)\big)$. Dann ist $S = \big\{e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt};\ k \in \mathbb{Z}\big\}$ ein Orthonormalsystem in H, denn $(e_j, e_k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)t}\, \mathrm{d}t = \delta_{jk}$.
Wir zeigen, dass S eine Orthonormalbasis ist, in 4 Schritten:

a) Wenn $f \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}) := \big\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ C^\infty;\ \forall t \in \mathbb{R} : f(t + 2\pi) = f(t)\big\}$ und $k \neq 0$, so ist
$$\lambda_k := (f, e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(t)}_{u}\, \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}_{v'}\, \mathrm{d}t = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}{-\mathrm{i}k}\bigg|_{t=0}^{2\pi}}_{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}{-\mathrm{i}k}\, \mathrm{d}t$$
$\implies |\lambda_k| \leq \sqrt{2\pi}\, \|f'\|_\infty \cdot \dfrac{1}{|k|} = \dfrac{c}{|k|}$ und ebenso
$\forall n \in \mathbb{N} : \exists C > 0 : \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : |\lambda_k| \leq \dfrac{C}{|k|^n}$. Speziell konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \text{ absolut gleichmäßig für } t \in \mathbb{R}.$$

b) $f \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H,\ f(\pi) = 0 \implies g(t) := \dfrac{f(t)}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \in C^\infty_{\mathrm{per}};\ \lambda_k := (f, e_k),$

$$\mu_k := (g, e_k) \implies \lambda_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(t)(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \mu_k + \mu_{k-1} \implies \sum_{|k|\le N} \lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}N\pi}(\lambda_N - \lambda_{N-1} + - \cdots + \lambda_{-N})$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}N\pi}(\mu_N + \mu_{N-1} - \mu_{N-1} - \mu_{N-2} + - \cdots + \mu_{-N} + \mu_{-N-1})$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}N\pi}(\mu_N + \mu_{-N-1}) \xrightarrow[\text{a)}]{} 0 \implies \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = 0 = f(\pi)$$

c) $f \in C^\infty_{\mathrm{per}}$ habe Fourierkoeffizienten $\lambda_k = (f, e_k) \implies \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e_k$ konvergiert gleichmäßig gegen f, denn $g(t) = f(t + t_0 - \pi) - f(t_0) \in C^\infty_{\mathrm{per}}$, $g(\pi) = 0$, g hat Fourierkoeffizienten

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \big[f(\underbrace{t+t_0-\pi}_{u}) - f(t_0)\big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(u-t_0+\pi)}\,\mathrm{d}u}_{\lambda_k\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t_0-\pi)}} - \sqrt{2\pi} f(t_0)\delta_{k0} \underset{\text{b)}}{\implies}$$
$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e_k(t_0) - f(t_0).$$

d) $f \in C^\infty_{\mathrm{per}} \implies \Big\| f - \sum\limits_{|k|\le N} (f, e_k)e_k \Big\|_\infty \to 0 \implies \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (f, e_k)e_k = f$ in H;

$g \in S^\perp \iff \forall k : (g, e_k) = 0 \overset{\text{L. 8.2}}{\implies} \forall f \in C^\infty_{\mathrm{per}} : (g, f) = 0;\ C^\infty_{\mathrm{per}} \subset H$ dicht (Satz 3.5) $\implies \forall f \in H : (g, f) = 0 \implies |g|^2 = 0 \implies g = 0 \implies S$ Orthonormalbasis. $\square$

Bemerkung Nach Lemma 8.3 konvergiert also für alle $f \in L^2\big((0, 2\pi)\big) = H$ die Fourierreihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (f, e_k)e_k$ (in jeder Summationsreihenfolge) in $\underline{L^2\big((0, 2\pi)\big)}$ gegen f.
Vorsicht: Das heißt NICHT, dass diese Reihe punktweise konvergiert.
Die Überlegung in b), c) zeigt aber, dass für $[\tilde f] \in L^1_{\mathrm{loc,per}}(\mathbb{R})$ gilt $\tilde f(t_0) =$

$\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\le N} (f, e_k) \cdot e_k(t_0) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\le N} \lambda_k \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt_0}}{\sqrt{2\pi}}$, wenn $\dfrac{\tilde f(t) - \tilde f(t_0)}{t - t_0} \in \mathcal{L}^1\big((t_0 - \pi, t_0 + \pi)\big)$ bzw. speziell wenn $\tilde f(t) = \tilde f(t_0) + O\big(|t - t_0|^\alpha\big),\ t \to t_0,\ \alpha > 0$ (die „Dini-Bedingung“). Wenn $\tilde f$ „in t_0 links- und rechtsseitig differenzierbar“ ist, d.h. $\exists a_\pm \in \mathbb{C} : \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \dfrac{1}{\varepsilon}\big(\tilde f(t_0 \pm \varepsilon) - a_\pm\big)$ existieren

(„Dirichlet-Bedingung“), ergibt sich ebenso, dass

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} (f,e_k)e_k(t_0) = \frac{1}{2}\big[\lim_{\varepsilon\searrow 0} \tilde{f}(t_0+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\searrow 0} \tilde{f}(t_0-\varepsilon)\big].$$

Def.:
${}_{\mathbb{R}}V$ Vektorraum; $M \subset V$ heißt **konvex** $\iff \forall x,y \in M: \ \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in M$.

Lemma 8.5
${}_{\mathbb{K}}H$ Hilbertraum, $\emptyset \neq M \subset H$ abgeschlossen und konvex $\implies \exists_1 x \in M : |x| = \min\limits_{y\in M} |y|$.

Beweis 1. Fall: $0 \in M \implies x = 0$ und wir sind fertig.
2. Fall: $0 \notin M \implies d := \inf\limits_{y\in M} |y| > 0$ (da M abgeschlossen)

a) **Existenz** Es seien $x_n \in M$ mit $d = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$;

$$0 \le |x_n - x_m|^2 = |x_n|^2 + |x_m|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x_n,x_m) = 2\big(|x_n|^2 + |x_m|^2\big) - |x_n + x_m|^2;$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n,m \ge N : 2\big(|x_n|^2 + |x_m|^2\big) \le 4d^2 + \varepsilon;$
$\dfrac{x_n + x_m}{2} \in M \implies |x_n + x_m|^2 \ge 4d^2$
$\implies 0 \le |x_n - x_m|^2 \le \varepsilon, \ \forall n,m \ge N \implies (x_n)$ C-Folge $\implies x_n \longrightarrow x \in M$ und $|x| = d$

b) **Eindeutigkeit** Es seien $x, x' \in M$ mit $|x| = |x'| = d$
$\implies x_1 = x, \ x_2 = x', \ x_3 = x, \ x_4 = x', \cdots$ ist eine Folge in M mit $d = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \underset{\text{a)}}{\implies} (x_n)$ C-Folge $\implies x = x'$ $\square$

Bemerkung Wenn X ein Banachraum ist mit $\dim X < \infty$, so ist $M \cap \big\{x \in X; \ |x| \le N\big\}$ kompakt und $\neq \emptyset$ für N groß (wenn $\emptyset \neq M \subset X$ abgeschlossen); $|\cdot|$ stetig $\implies \exists x \in M : |x| = \min\limits_{y\in M} |y|$. Aber die Eindeutigkeit gilt im Allgemeinen nicht und für $\dim X = \infty$ geht sogar die Existenz verloren (Übung 41).

Def.:
H_1, H_2 Hilberträume über $\mathbb{K}$. Dann wird der $\mathbb{K}$-Vektorraum $H_1 \oplus H_2 = H_1 \times H_2$ wieder ein Hilbertraum mit $\big((h_1;h_2),(\tilde{h}_1;\tilde{h}_2)\big) := (h_1,\tilde{h}_1) + (h_2,\tilde{h}_2)$. (Speziell $\big|(h_1;h_2)\big|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2$; ebenso für endlich viele H_i.)

Satz 8.2
H Hilbertraum, $H_1 \le H$ abgeschlossener Unterraum $\implies$
$F : H_1 \oplus H_1^\perp \simeq H : (x;y) \longmapsto x + y$ ist ein Hilbertraumisomorphismus.
(Speziell: $\forall z \in H : \exists_1 x \in H_1 : \exists_1 y \in H_1^\perp : z = x + y$ und $|z|^2 = |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ (Pythagoras))

Beweis a) Offenbar ist F linear und $\left|F(x;y)\right|^2 = |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\mathrm{Re}\,\underbrace{(x,y)}_{0} = \left|(x;y)\right|^2 \implies$ (Polarisierung) F Hilbertraumhomomorphismus und injektiv.

b) F ist surjektiv: $z \in H$, $M := H_1 + z$ ist konvex und abgeschlossen $\underset{\text{L. 8.5}}{\implies} \exists y \in M$: $|y| = \min\limits_{u \in M} |u|$; es gilt $y \in H_1^\perp$, denn wäre $x \in H_1$ mit $(x,y) \neq 0 \implies \Bigg|\underbrace{y - \frac{(y,x)}{|x|^2}\,x}_{\in M}\Bigg|^2 =$

$$|y|^2 + \frac{\left|(y,x)\right|^2}{|x|^4}|x|^2 - \frac{2}{|x|^2}\,\mathrm{Re}\,\underbrace{\big(y,(y,x)x\big)}_{\left|(y,x)\right|^2} = |y|^2 - \frac{\left|(y,x)\right|^2}{|x|^2} < |y|^2 \ \lightning$$

Schließlich ist $y \in M \implies \exists x \in H_1 : y = -x + z \implies z = x + y,\ x \in H_1,\ y \in H_1^\perp.$ $\square$

Bemerkung Speziell gilt $H_1 = (H_1^\perp)^\perp$.

§ 9 Beschränkte Operatoren in Hilberträumen

Im Folgenden sei ${}_{\mathbb{K}}H$ ein Hilbertraum.
In § 7 sahen wir, dass $l^2 \simeq (l^2)'$ und allgemein $L^2(X) \simeq L^2(X)'$. Koordinateninvariant lässt sich allgemein ein Antiisomorphismus $H \simeq H'$ definieren.

Satz 9.1 (F. Riesz)
$F : H \longrightarrow H' : x \longmapsto \big(y \longmapsto (y,x)\big)$ ist bijektiv, antilinear (d.h. $F(x_1 + \lambda x_2) = F(x_1) + \overline{\lambda}F(x_2)\big)$ und isometrisch (d.h. $\|F(x)\| = |x|$).
[Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist natürlich antilinear dasselbe wie linear.]

Beweis a) $\left|F(x)(y)\right| = \left|(y,x)\right| \leq |y| \cdot |x| \implies F$ ist wohldefiniert und $\|F(x)\| \leq |x|$; andererseits ist für $x \neq 0$ $\|F(x)\| = \sup\limits_{|y| \leq 1} \left|(y,x)\right| \geq \left|\left(\frac{x}{|x|}, x\right)\right| = |x| \implies F$ isometrisch und injektiv.

b) F ist surjektiv: Es sei $0 \neq f \in H' \implies \ker f \subsetneqq H$ abgeschlossener Unterraum $\underset{\text{Satz 8.2}}{\implies} \exists x \in (\ker f)^\perp \setminus \{0\} \underset{\text{Satz 8.2}}{\implies} f(x) \neq 0$ und $\forall y \in H : f\left(y - \frac{f(y)}{f(x)}\,x\right) = 0$
$\implies y - \frac{f(y)}{f(x)}\,x \in \ker f \implies$ (wegen $x \in (\ker f)^\perp$)

$$\Longrightarrow\ 0 = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}\,x, x\right) = (y,x) - \frac{f(y)}{f(x)}\,|x|^2$$

$$\Longrightarrow\ f(y) = \frac{f(x)}{|x|^2}(y,x) = \left(y, \frac{\overline{f(x)}}{|x|^2}\,x\right) \ \Longrightarrow\ f = F\left(\frac{\overline{f(x)}}{|x|^2}\,x\right). \qquad \square$$

Bemerkung Wenn $L : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ sesquilinear ist, so ist L stetig $\Longleftrightarrow$ L „beschränkt“, d.h.

$$\circledast \qquad \exists C > 0 : \forall x, y \in H : \big|L(x,y)\big| \le C|x| \cdot |y|$$

(Das zeigt man wie Satz 6.1.)
Wie in S. 32 setzen wir dann $\|L\| := \sup\limits_{|x|,|y|\le 1} \big|L(x,y)\big| = \inf\{C \text{ wie in } \circledast\}$.
Weiters sei $\mathrm{Sq}(H) := \big\{L : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ sesquilinear und stetig$\}$

Satz 9.2
$F_1 : L(H) \longrightarrow \mathrm{Sq}(H) : A \longmapsto \big((x;y) \longmapsto (Ax,y)\big)$ bzw.
$F_2 : L(H) \longrightarrow \mathrm{Sq}\,(H) : A \longmapsto \big((x;y) \longmapsto (x,Ay)\big)$ sind bijektiv, linear bzw. antilinear und isometrisch.

Beweis a) $\big|(Ax,y)\big| \le \|A\| \cdot |x| \cdot |y| \ \Longrightarrow\ F_1$ ist wohldefiniert und $\big\|F_1(A)\big\| \le \|A\|$;
andererseits ist für $A \ne 0$ $\big\|F_1(A)\big\| \ge \sup\limits_{|x|\le 1} F_1(A)\left(x; \dfrac{Ax}{\|A\|}\right) = \sup\limits_{|x|\le 1} \dfrac{|Ax|^2}{\|A\|} = \|A\| \ \Longrightarrow$
F_1 isometrisch und injektiv.

b) F_1 ist surjektiv: Es sei $L \in \mathrm{Sq}\,(H)$ und $x \in H \ \Longrightarrow\ \big(u \longmapsto \overline{L(x,u)}\,\big) \in H'$
$\overset{\text{Satz 9.1}}{\Longrightarrow} \exists_1 y =: Ax : \forall u \in H : \overline{L(x,u)} = (u,y) = \overline{(Ax,u)}$.
Offenbar ist $A : H \longrightarrow H$ linear und
$\forall u, x : \big|(Ax,u)\big| = \big|L(x,u)\big| \le \|L\| \cdot |x| \cdot |u| \ \Longrightarrow$ (wenn $u = Ax$) $\Longrightarrow$
$|Ax|^2 \le \|L\| \cdot |Ax| \cdot |x| \ \Longrightarrow\ |Ax| \le \|L\| \cdot |x| \ \Longrightarrow\ A \in L(H)$ und $L = F_1(A)$.

c) $G : \mathrm{Sq}(H) \longrightarrow \mathrm{Sq}(H) : L \longmapsto \big((x;y) \longmapsto \overline{L(y,x)}\,\big)$ ist bijektiv (da $G^2 = \mathrm{id}$), antilinear, isometrisch $\Longrightarrow$ auch $F_2 = G \circ F_1$ ist bijektiv, antilinear, isometrisch. $\square$

Def.:
Für $A \in L(H)$ heißt $A^* := F_2^{-1}\big(F_1(A)\big)$ zu A **adjungierter Operator**. Es gilt also

$$F_1(A) = F_2(A^*), \ \text{d.h.}\ \forall x, y \in H : (Ax,y) = (x, A^*y).$$

Satz 9.3
$* : L(H) \longrightarrow L(H)$ ist bijektiv, antilinear und isometrisch. Außerdem gilt $\forall A, B \in L(H)$: $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$, und $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ falls $A^{-1} \in L(H)$.

Beweis $* = F_2^{-1} \circ F_1$ ist bijektiv, antilinear, isometrisch;
$x, y \in H \implies (ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y) \implies (AB)^* = B^*A^*$;
$(A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay) \implies A^{**} = A$;
$A^{-1}A = AA^{-1} = I \implies A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = I^* = I \implies (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. $\square$

Betrachtung spezieller Operatoren

1) Projektionsoperatoren

$H_1 \leq H$ abgeschlossener Unterraum $\overset{\text{Satz 8.2}}{\implies} H \simeq H_1 \oplus H_1^\perp$;
es sei $P : H \xrightarrow{\sim} H_1 \oplus H_1^\perp \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} H_1 \hookrightarrow H$, d.h. $P(x_1 + x_2) = x_1$, wenn $x_1 \in H_1,\ x_2 \in H_1^\perp$.
Dann ist $P \in L(H),\ P^2 = P$ (P „idempotent") und
$(Px, y) = (x_1, \underset{\in H_1}{y_1} + \underset{\in H_1^\perp}{y_2}) = (x_1, y_1) = (x, y_1) = (x, Py)$, d.h. $P = P^*$ (P „selbstadjungiert")

Def.:
P heißt **Projektor** zu H_1.

Satz 9.4
$P \in L(H)$ ist Projektor $\iff P = P^*$ und $P = P^2$.

Beweis „$\implies$" siehe oben.
„$\impliedby$" Es sei $H_1 = \{x \in H; Px = x\} = \ker(P - I) \leq H$ abgeschlossen und
$P_1 =$ Projektor zu H_1;
$x \in H \implies x = Px + (x - Px)$;
$Px \in H_1$, da $PPx = Px$;
$x - Px \in H_1^\perp$, da $y \in H_1 \implies (x - Px, y) = (x, y) - (x, \overbrace{\overbrace{P^*y}^{=Py}}^{=y}) = 0$
$\implies P_1x = Px \implies P = P_1$. $\square$

Bemerkung Wenn $H_1 \leq H$ abgeschlossen, $x \in H,\ x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in H_1,\ x_2 \in H_1^\perp$ und $u \in H_1$, so ist (nach Satz 8.2) $|x - u| = \sqrt{|x_1 - u|^2 + |x_2|^2} \geq |x_2|$, d.h. $d(x, H_1) = |x_2|$ und $u = x_1 = Px$ ist der einzige Vektor in H_1 mit $|x - u| = d(x, H_1)$.

2) Unitäre Operatoren

Def.:

1) X, Y normierte Räume,
   $A : X \longrightarrow Y$ linear. A heißt **isometrisch** $\Longleftrightarrow \forall x \in X : |Ax| = |x|$.

2) H_1, H_2 Hilberträume,
   $A \in L(H_1, H_2)$. A heißt **unitär** $\Longleftrightarrow$ A bijektiv und isometrisch.

Bemerkung Wenn A isometrisch ist, so ist es stetig und injektiv, muss aber nicht surjektiv sein. A ist isometrisch $\Longleftrightarrow$ A ist eine lineare Isometrie der metrischen Räume (X, d), $\big(A(X) = \mathrm{im}(A), d\big)$ (mit $d(x, y) = |x - y|$).

Satz 9.5
A unitär $\Longleftrightarrow$ A Hilbertraumisomorphismus, d.h.
$A : H_1 \longrightarrow H_2$ Vektorraumisomorphismus und $\forall x_1, x_2 \in H_1 : (Ax_1, Ax_2) = (x_1, x_2)$.

Beweis Polarisierungsformel $\square$

3) Kompakte Operatoren

Def.:
$A \in L(H)$ hat **endlichen Rang** $\Longleftrightarrow \dim A(H) < \infty$.
$\mathrm{Fr}(H) := \big\{A \in L(H) \text{ mit endlichem Rang}\big\}$, $\mathrm{Com}(H) := \big\{A \in L(H) \text{ kompakt}\big\}$.

Lemma 9.1
Es sei $A \in \mathrm{Fr}(H)$. Dann $\exists e_j, \tilde{e}_j \in H$ mit $\forall x \in H : Ax = \sum\limits_{j=1}^{n} (x, \tilde{e}_j) e_j$ und $n = \dim A(H)$, $e_1, \cdots, e_n$ Orthonormalsystem. Weiters ist auch $A^* \in \mathrm{Fr}(H)$ und $\dim A^*(H) = \dim A(H)$.

Beweis a) $e_1, \cdots, e_n$ sei eine Orthonormalbasis in $A(H) \implies \forall x \in H : Ax = \sum\limits_{j=1}^{n} (Ax, e_j) e_j$ (nach Lemma 8.3); wenn $\tilde{e}_j := A^* e_j \implies (Ax, e_j) = (x, A^* e_j) = (x, \tilde{e}_j)$
$\implies \forall x \in H : Ax = \sum\limits_{j=1}^{n} (x, \tilde{e}_j) \cdot e_j$

b) $(Ax, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} (x, \tilde{e}_j)(e_j, y) = \Big(x, \sum\limits_{j=1}^{n} (y, e_j) \tilde{e}_j\Big) = (x, A^* y) \implies A^* y = \sum\limits_{j=1}^{n} (y, e_j) \tilde{e}_j$
$\implies A^* \in \mathrm{Fr}(H)$ und $\dim A^*(H) = \dim_{\mathbb{K}} \langle \tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n \rangle \le n$; $A = A^{**} \implies \dim A^*(H) = n$ $\square$

Satz 9.6

a) $\overline{\mathrm{Fr}(H)} = \mathrm{Com}(H)$

b) $A \in \mathrm{Com}(H) \implies A^* \in \mathrm{Com}(H)$.

Beweis a) Da endlich-dimensionale beschränkte Mengen präkompakt sind, ist $\mathrm{Fr}(H) \subset \mathrm{Com}(H)$. Weil $\mathrm{Com}(H) \subset L(H)$ abgeschlossen ist (Satz 6.4), ist auch $\overline{\mathrm{Fr}(H)} \subset \mathrm{Com}(H)$.

„$\supset$": Es sei $A \in \mathrm{Com}(H) \implies M := \big\{Ax;\ |x| \le 1\big\}$ ist präkompakt
$\implies \forall n \in \mathbb{N} : \exists$ endliches $\frac{1}{n}$-Netz $\{y_1, \cdots, y_l\}$ zu M. Es sei $H_1 := \sum\limits_{i=1}^{l} \mathbb{K} y_i$ und P der Projektor auf H_1 und $A_n := P \cdot A \implies A_n(H) \subset H_1 \implies A_n \in \mathrm{Fr}(H)$; weiters ist $\|A - A_n\| = \sup\limits_{|x|\le 1} \big|(A - A_n)(x)\big| = \sup\limits_{y \in M} |y - Py|;\ y \in M \implies \exists j : |y - y_j| \le \dfrac{1}{n} \implies$ (Bemerkung in S. 55) $\implies |y - Py| \le \dfrac{1}{n}$. Also ist $\|A - A_n\| \le \dfrac{1}{n}$ und folglich $A_n \longrightarrow A$ und $A \in \overline{\mathrm{Fr}(H)}$.

b) $A \in \mathrm{Com}\,(H),\ A_n \in \mathrm{Fr}(H)$ mit $A_n \longrightarrow A \implies A_n^* \longrightarrow A^*$ und $A_n^* \in \mathrm{Fr}(H)$ (Lemma 9.1) $\implies A^* \in \mathrm{Com}(H)$. $\square$

§ 10 Fouriertransformation in $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $W^{2,k}$

Wie immer bei konkreten Funktionen- und Distributionenräumen ist hier $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Def.:

1) $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\big\}$.
2) $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S} \iff \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : x^\alpha \partial^\beta (\varphi_k - \varphi) \to 0$ in L^∞.

Bemerkung $\mathcal{S}$ heißt auch **Raum der schnell fallenden C^∞-Funktionen**.

Bsp.: $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset C^\infty =: \mathcal{E};\ \mathrm{e}^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ (mit $|x| = |x|_2$),
$\dfrac{1}{1 + |x|^2} \in C^\infty \setminus \mathcal{S};\ \varphi \in \mathcal{S} \implies \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha \varphi,\ x^\alpha \cdot \varphi \in \mathcal{S}$.

Def.:
Für $\varphi \in \mathcal{S}$ heißt $(\mathcal{F}\varphi)(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ **Fouriertransformierte** von φ
(wobei $x \cdot \xi := x^T \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$).

Lemma 10.1
Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist auch $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$ und es gilt $\partial^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)$ und
$x^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)$ (wobei $|\alpha| = |\alpha|_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$).

Beweis a) Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist $C := \left\|\big(1+|x|\big)^{n+1}\varphi\right\|_\infty < \infty;\ f_x(\xi) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(\xi)$,
$g(\xi) := \dfrac{C}{\big(1+|\xi|\big)^{n+1}} \implies \forall x \in \mathbb{R}^n : \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \big|f_x(\xi)\big| \le g(\xi)$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\int g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = C\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}\xi}{\big(1+|\xi|\big)^{n+1}} = C\underbrace{|\mathbb{S}^{n-1}|}_{\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}\cdot\underbrace{\int\limits_0^\infty \underbrace{\frac{r^{n-1}}{(1+r)^{n+1}}}_{\le(1+r)^{-2}}\,\mathrm{d}r}_{\le 1} \le C\cdot\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \implies \text{(Lebesgue)}$$

$\forall x : f_x \in \mathcal{L}^1,\ \mathcal{F}\varphi(x) = \displaystyle\int f_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ ist stetig und $\forall x : \big|\mathcal{F}\varphi(x)\big| \le \displaystyle\int g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, d.h.
$\big\|\mathcal{F}\varphi\big\|_\infty \le \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left\|\big(1+|x|\big)^{n+1}\cdot\varphi\right\|_\infty.$ $\circledast$
Ebenso ist $\left\|\big(1+|x|\big)^{n+2}\varphi\right\|_\infty < \infty \implies$

$$\frac{\mathcal{F}\varphi(x_1+h, x_2, \cdots) - \mathcal{F}\varphi(x)}{h} = \int \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(x_1+h)\xi_1+\cdots]} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}}{h}}_{\text{MWS: } \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi})(x_1+\vartheta h, x_2, \cdots)} \cdot\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \int(-\mathrm{i}\xi_1)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(x_1+\vartheta h)\xi_1+\cdots]}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \underset{h\to 0}{\overset{\text{Lebesgue}}{\longrightarrow}} \int(-\mathrm{i}\xi_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\mathrm{i}\mathcal{F}(x_1\cdot\varphi) \implies \mathcal{F}\varphi$$

partiell differenzierbar, $(\mathcal{F}\varphi)'$ ist stetig $\implies \mathcal{F}\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
Analog durch Induktion $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \partial^\alpha\mathcal{F}\varphi = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)$.

b) [Bisher haben wir nur verwendet, dass φ selbst (nicht $\partial^\beta\varphi$) schnell fallend ist (d.h. $\forall\alpha$: $x^\alpha\varphi \in L^\infty$ bzw. $\forall m : \big(1+|x|\big)^m\varphi \in L^\infty$), und erhalten, dass $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty$. Ganz allgemein entspricht dem Abfallen von φ in ∞ die Regularität (=Differenzierbarkeit) von $\mathcal{F}\varphi$ und umgekehrt.]

$\varphi \in \mathcal{S} \implies \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \in \mathcal{S} \implies$ (Lebesgue & Fubini)

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'} \left(\int\limits_{\xi_1=-N}^{N} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1}\,\mathrm{d}\xi_1 \right) \mathrm{d}\xi$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'} \cdot \Bigg(\underbrace{\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1}\Big|_{\xi_1=-N}^{N}}_{|\cdot|\le\frac{2C}{1+N}(1+|\xi'|)^{-n}} + \mathrm{i}x_1 \int\limits_{-N}^{N} \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1}\,\mathrm{d}\xi_1 \Bigg) \mathrm{d}\xi$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{=} \mathrm{i}x_1(\mathcal{F}\varphi)(x) \implies \text{(induktiv)}$$

$\forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n : x^\alpha\mathcal{F}\varphi = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)$.

c) $x^\alpha\partial^\beta(\mathcal{F}\varphi) = (-\mathrm{i})^{|\alpha+\beta|}\mathcal{F}\big(\partial^\alpha(x^\beta\varphi)\big) \overset{\text{a)}}{\implies}$

$\big\|x^\alpha\partial^\beta(\mathcal{F}\varphi)\big\|_\infty \overset{\circledast}{\le} \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Big\|\big(1+|x|\big)^{n+1} \underbrace{\partial^\alpha(x^\beta\varphi)}_{\in\mathcal{S}}\Big\|_\infty < \infty \implies \mathcal{F}\varphi\in\mathcal{S}.$ □

Lemma 10.2
$\varphi_j \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S} \implies \mathcal{F}\varphi_j \longrightarrow \mathcal{F}\varphi$ in $\mathcal{S}$.

Beweis $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S} \implies x^\beta\varphi_j \longrightarrow x^\beta\varphi$ in $\mathcal{S} \implies$
$\big(1+|x|\big)^{n+1}\partial^\alpha\big(x^\beta(\varphi_j-\varphi)\big) \to 0$ in $L^\infty \overset{\circledast}{\implies} x^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}(\varphi_j-\varphi)\to 0$ in L^∞
$\implies \mathcal{F}\varphi_j \longrightarrow \mathcal{F}\varphi$ in $\mathcal{S}$. □

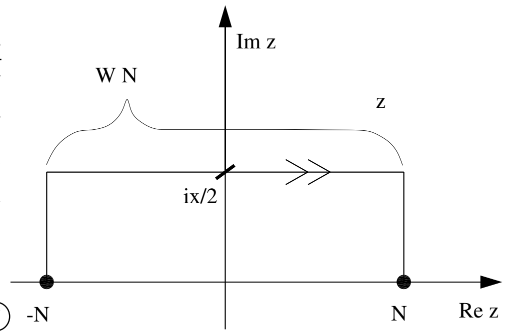
Lemma 10.3
$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|^2}) = \pi^{n/2}\cdot\mathrm{e}^{-|x|^2/4}$.

Beweis a) Im $\mathbb{R}^1$: $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-x^2}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\overbrace{\xi+\mathrm{i}x/2}^{z})^2 - x^2/4}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \mathrm{e}^{-x^2/4} \int\limits_{\operatorname{Im} z=\frac{x}{2}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z =$$

PSfrag replacements
$-N$
N
$\operatorname{Re} z$
$\operatorname{Im} z$
Γ_N
$\frac{\mathrm{i}x}{2}$
z



$$= \mathrm{e}^{-x^2/4} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Gamma_N} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \text{(Cauchyscher Integralsatz)}$$

$$= \mathrm{e}^{-x^2/4} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-x^2/4}\Bigl(\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi\Bigr)^{1/2} =$$

$$= \mathrm{e}^{-x^2/4} \cdot \Bigl(2\pi \int_0^{\infty} r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\Bigr)^{1/2} = \mathrm{e}^{-x^2/4}\Bigl(-\pi\,\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_{r=0}^{\infty}\Bigr)^{1/2} = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-x^2/4}.$$

b) Im $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|^2}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|\xi|^2 - \mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi \underset{\text{Fubini}}{=} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi_j^2 - \mathrm{i}x_j\xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j = \pi^{n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/4}.$ □

Lemma 10.4
$\varphi \in \mathcal{S},\ \varepsilon > 0 \implies \mathcal{F}\bigl(\varphi(\varepsilon x)\bigr) = \varepsilon^{-n}(\mathcal{F}\varphi)\bigl(\frac{x}{\varepsilon}\bigr).$

Beweis $\mathcal{F}\bigl(\varphi(\varepsilon x)\bigr) = \int \varphi(\underbrace{\varepsilon\xi}_{\eta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\eta/\varepsilon}\varepsilon^{-n}\,\mathrm{d}\eta = \varepsilon^{-n}(\mathcal{F}\varphi)\bigl(\frac{x}{\varepsilon}\bigr).$ □

Satz 10.1
$\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ ist ein Vektorraumisomorphismus und

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}\psi)(-x) = (2\pi)^{-n}\int \psi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Beweis a) Wir zeigen zuerst $\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)(x) = (2\pi)^n\varphi(-x)$, d.h.
$J = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\Bigl(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\eta}\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\Bigr)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^n\varphi(-x).$
Vorsicht: Auf das Doppelintegral J lässt sich der Satz von Fubini NICHT anwenden. Aber nach Lebesgue ist

$$J = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int \mathrm{e}^{-\varepsilon^2|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\Bigl(\overbrace{\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\eta}\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta}^{\mathcal{F}\varphi\in\mathcal{S}\subset L^1(\mathbb{R}^n)}\Bigr)\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int \varphi(\eta)\Bigl(\underbrace{\int \mathrm{e}^{-\varepsilon^2|\xi|^2 - \mathrm{i}x\xi - \mathrm{i}\xi\eta}\,\mathrm{d}\xi}_{\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2|x|^2})(x+\eta)}\Bigr)\,\mathrm{d}\eta$$

$$\text{Lemma 10.4:}\quad \underbrace{\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2|x|^2})(x+\eta)}_{\varepsilon^{-n}\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|^2})\left(\frac{x+\eta}{\varepsilon}\right)}$$

$$\text{Lemma 10.3:}\quad \underbrace{\varepsilon^{-n}\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|^2})\bigl(\tfrac{x+\eta}{\varepsilon}\bigr)}_{\varepsilon^{-n}\pi^{n/2}\mathrm{e}^{-|x+\eta|^2/(4\varepsilon^2)}}$$

$$= \pi^{n/2}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\eta)\mathrm{e}^{-|x+\eta|^2/(4\varepsilon^2)}\varepsilon^{-n}\,\mathrm{d}\eta = \Bigl(\text{Substitution } u = \tfrac{x+\eta}{2\varepsilon},\ \varepsilon^{-n}\,\mathrm{d}\eta = 2^n\,\mathrm{d}u\Bigr)$$

$$= 2^n\pi^{n/2}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int \varphi(2\varepsilon u - x)\mathrm{e}^{-|u|^2}\,\mathrm{d}u \overset{\text{Lebesgue}}{=} 2^n\pi^{n/2}\varphi(-x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|u|^2}\,\mathrm{d}u}_{\pi^{n/2}} = (2\pi)^n\varphi(-x).$$

b) Wenn also $\psi = \mathcal{F}\varphi$, so folgt $\mathcal{F}\psi(x) = (2\pi)^n \varphi(-x)$, d.h. $\varphi(x) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}\psi)(-x)$.
Wenn $\vee : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} : \varphi \longmapsto \big(\check{\varphi} : x \longmapsto \varphi(-x)\big)$, so ist also $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^n \vee$
$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ Vektorraumisomorphismus und $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}(\vee \circ \mathcal{F}) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F} \circ \vee)$. □

Def.:

1) $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \big\{T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear; $\forall (\varphi_k) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ mit $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$: $T(\varphi_k) \longrightarrow 0$ (in $\mathbb{C}$)$\big\}$.

2) $T_k \longrightarrow T$ in $\mathcal{S}' \Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{S} : T_k(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$.

Bemerkungen Die Inklusionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liefern $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Wenn z.B. $T \in \mathcal{S}'$ so ist $T\big|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}'$, da $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D} \implies \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$.
Distributionen in $\mathcal{S}'$ heißen auch **temperierte Distributionen**.

Satz 10.2
$T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei linear. Äquivalent sind:

(i) $T \in \mathcal{S}'$ (d.h. $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S} \implies T(\varphi_k) \to 0$)

(ii) $\exists C > 0 : \exists m \in \mathbb{N}_0 : \forall \varphi \in \mathcal{S} : \big|T(\varphi)\big| \leq C \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \big(1 + |x|\big)^m \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \big|\partial^\alpha \varphi(x)\big|$

Beweis Analog dem von Satz 4.4, (siehe S. 28). □

Bsp.: 1) $1 \leq p \leq \infty \implies L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, denn wenn $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \implies$

$$\big|f(\varphi)\big| = \left| \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \, \|\varphi\|_q$$

1. Fall $q = \infty \implies \|\varphi\|_q = \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \big|\varphi(x)\big| \implies$ (ii) ist erfüllt mit $m = 0,\ C = \|f\|_1$

2. Fall $q < \infty \implies \|\varphi\|_q = \left[\int \big(1 + |x|\big)^{-n-1} \Big(\big(1 + |x|\big)^{\frac{n+1}{q}} \big|\varphi(x)\big| \Big)^q \mathrm{d}x \right]^{1/q}$

$$\leq \max_{x \in \mathbb{R}^n} \big(1 + |x|\big)^{\frac{n+1}{q}} \big|\varphi(x)\big| \cdot \Bigg(\underbrace{\int \big(1 + |x|\big)^{-n-1} \mathrm{d}x}_{<\infty,\text{ s. S. 58}} \Bigg)^{1/q} \implies \text{(ii) ist erfüllt für } m \geq \frac{n+1}{q}.$$

2) $\mathbb{C} \subset \mathcal{S}'$, denn $\mathbb{C} \subset L^\infty$.
$T \in \mathcal{S}',\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \implies x^\alpha T \in \mathcal{S}'$, denn $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$
$\implies x^\alpha \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S} \implies (x^\alpha T)(\varphi_k) = T(x^\alpha \varphi_k) \to 0$.
Speziell: P Polynom $\implies P \in \mathcal{S}'$.

Ebenso gilt $T \in \mathcal{S}' \implies \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'$.

3) $\mathrm{e}^x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$: Übung.

Def.:
$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}' : T \longmapsto \big(\mathcal{F}T : \varphi \longmapsto T(\mathcal{F}\varphi)\big)$ heißt **Fouriertransformation**.

Satz 10.3
$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ ist wohldefiniert, ein Vektorraumisomorphismus und folgenstetig (d.h. $T_k \longrightarrow T \implies \mathcal{F}T_k \longrightarrow \mathcal{F}T$). Weiters ist $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^n \vee$, d.h. $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \vee \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-n} \mathcal{F} \circ \vee$ wobei $\vee : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}' : T \longmapsto \big(\check{T} : \varphi \longmapsto T(\check{\varphi})\big)$.

Beweis $\varphi \longmapsto T(\mathcal{F}\varphi)$ ist linear und $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S} \underset{\text{Lemma 10.2}}{\implies} \mathcal{F}\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S} \implies T(\mathcal{F}\varphi_k) \to 0$, d.h. $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$. Klarerweise ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ linear.
$\big(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T)\big)(\varphi) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}\varphi) = T(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}\varphi) = T\big((2\pi)^n \check{\varphi}\big) = (2\pi)^n \check{T}(\varphi) \implies$
$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^n \vee \implies \mathcal{F}$ Vektorraumisomorphismus und $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \vee \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-n} \mathcal{F} \circ \vee$.
$T_k \longrightarrow T \implies \forall \varphi \in \mathcal{S} : T_k(\mathcal{F}\varphi) \longrightarrow T(\mathcal{F}\varphi) \implies \mathcal{F}T_k \longrightarrow \mathcal{F}T$. □

Bsp.: 1) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $(\mathcal{F}_{\text{klassisch}} f)(x) = \int f(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi$; nach Lebesgue ist $\mathcal{F}_{\text{klass.}} f$ stetig und $\|\mathcal{F}_{\text{klass.}} f\|_\infty \le \|f\|_1$.
Andererseits ist $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ und $\varphi \in \mathcal{S} \implies (\mathcal{F}f)(\varphi) = f(\mathcal{F}\varphi) = \int f(x) \left(\int \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x$
$\overset{\text{Fubini}}{=} \int \varphi(\xi) \Bigg(\underbrace{\int f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}x}_{(\mathcal{F}_{\text{klass.}} f)(\xi)} \Bigg) \mathrm{d}\xi = (\mathcal{F}_{\text{klass.}} f)(\varphi)$, d.h. $\mathcal{F}f = \mathcal{F}_{\text{klass.}} f$.
Speziell: $\mathcal{F}_{\text{S. } 57} = \mathcal{F}_{\text{S. } 62}\big|_{\mathcal{S}}$.

2) Es sei $R > 0$ und $\delta_{R\mathbb{S}^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$\delta_{R\mathbb{S}^2}(\psi) = \int\limits_{|x|=R} \psi(x)\, \mathrm{d}s(x) = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \psi(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta, \sin\varphi,\ R\cos\vartheta) R^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Dann ist $\operatorname{supp} \delta_{R\mathbb{S}^2} = R\mathbb{S}^2 = \big\{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| = R\big\} \implies \delta_{R\mathbb{S}^2} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{S}'$. Für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ist

$$(\mathcal{F}\delta_{R\mathbb{S}^2})(\psi) = \delta_{R\mathbb{S}^2}(\mathcal{F}\psi) = \int\limits_{|x|=R} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}s(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int \psi(\xi) \underbrace{\left(\int\limits_{|x|=R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\, \mathrm{d}s(x) \right)}_{J(\xi)} \mathrm{d}\xi;$$

$J(\xi)$ ist rotationssymmetrisch [weil $J(A\xi) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot A\xi}\, \mathrm{d}s(x) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overbrace{A^T x}^{u} \cdot\xi}\, \mathrm{d}s(x) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\cdot\xi}\, \mathrm{d}s(u)$ für $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$]

$$\Longrightarrow\ J(\xi) = J\big(0,0,|\xi|\big) = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\cos\vartheta\cdot|\xi|} R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi =$$

$$2\pi R^2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\cos\vartheta\cdot|\xi|}}{\mathrm{i}R|\xi|}\Bigg|_{\vartheta=0}^{\pi} = 2\pi R \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}R|\xi|} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}R|\xi|}}{\mathrm{i}|\xi|} = \frac{4\pi R}{|\xi|}\sin\big(R|\xi|\big) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}\delta_{R\mathbb{S}^2} = \frac{4\pi R}{|x|}\sin\big(R|x|\big) \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

[$\mu = \delta_{R\mathbb{S}^2}$ ist ein endliches Radonmaß, d.h. $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^3)$, und allgemein gilt wie in Bsp. 1 für $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$, dass $\mathcal{F}\mu \in BC(\mathbb{R}^n)$ und $\|\mathcal{F}\mu\|_\infty \le \mu(\mathbb{R}^n)$. Andererseits ist $\mu = \delta_{R\mathbb{S}^2} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ und allgemein ist $\mathcal{F}T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.]

Satz 10.4
Wenn $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$, d.h. $T = \sum\limits_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha\delta$ (vgl. Satz 4.5), so ist $\mathcal{F}T = \sum\limits_{|\alpha|\le m} c_\alpha \mathrm{i}^{|\alpha|} x^\alpha$ ein Polynom.

Beweis $\mathcal{F}T = \sum c_\alpha \mathcal{F}(\partial^\alpha\delta) \underset{\text{Satz 10.5}}{=} \sum c_\alpha \mathrm{i}^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}\delta$ und

$$(\mathcal{F}\delta)(\varphi) = \delta(\mathcal{F}\varphi) = \delta\bigg(\int \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi\bigg) = \int \varphi(\xi)\cdot 1\,\mathrm{d}\xi = 1(\varphi), \text{ d.h. } \mathcal{F}\delta = 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \qquad \square$$

Satz 10.5
$T \in \mathcal{S}' \Longrightarrow \partial^\alpha \mathcal{F}T = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha T),\ x^\alpha \mathcal{F}T = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(\partial^\alpha T).$

Beweis $(\partial^\alpha \mathcal{F}T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}T(\partial^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(\mathcal{F}\partial^\alpha\varphi) \underset{\text{L. 10.1}}{=} (-1)^{|\alpha|}\mathrm{i}^{|\alpha|}T(x^\alpha\mathcal{F}\varphi) =$
$= (-\mathrm{i})^{|\alpha|}(x^\alpha\cdot T)(\mathcal{F}\varphi) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha T)(\varphi) \Longrightarrow \partial^\alpha\mathcal{F}T = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha T);$
analog die 2. Gleichung $\square$

Bemerkung Die Gleichungen in Lemma 10.1 und Satz 10.5 müssen auch deshalb übereinstimmen, weil $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ dicht ist (ohne Beweis).

Satz 10.6
$(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist wohldefiniert und unitär.

Beweis a) $\psi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \overline{\mathcal{F}\psi(x)} = \int \overline{\psi(\xi)}\cdot\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}\,\mathrm{d}\xi = \int \overline{\psi(\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Satz 10.1}}{=} (2\pi)^n\mathcal{F}^{-1}(\overline{\psi})(x);$

$\varphi,\psi \in \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow (\mathcal{F}\varphi,\mathcal{F}\psi) = \int \mathcal{F}\varphi(x)\overline{\mathcal{F}\psi(x)}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^n\int \mathcal{F}\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}(\overline{\psi})(x)\,\mathrm{d}x =$

$= (2\pi)^n(\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\overline{\psi}}_{\in\mathcal{S}\subset\mathcal{S}'})(\mathcal{F}\varphi) \overset{\text{Def. s.S. 62}}{=} (2\pi)^n\big(\underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\overline{\psi})}_{\overline{\psi}}\big)(\varphi) = (2\pi)^n\int\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^n(\varphi,\psi).$

b) Nach Satz 3.6 ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \exists \varphi_j \in \mathcal{D}$ mit $\varphi_j \longrightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$
$\big\|\mathcal{F}(\varphi_j - \varphi_k)\big\|_2^2 \underset{\text{a)}}{=} (2\pi)^n \|\varphi_j - \varphi_k\|_2^2 \leq \varepsilon$ für $j, k \geq N \Longrightarrow$
$\mathcal{F}\varphi_j$ C-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \exists g \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}\varphi_j \longrightarrow g$ in $L^2(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{F}\varphi_j \longrightarrow g$ in $\mathcal{S}'$;
andererseits ist $\mathcal{F}\varphi_j \longrightarrow \mathcal{F}f$ in $\mathcal{S}'$ (Satz 10.3), d.h. $\mathcal{F}f = g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Also ist $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, linear und injektiv. Wegen $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^n \vee$ ist es auch surjektiv. Schließlich gilt $\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \lim\limits_{j\to\infty} \|\mathcal{F}\varphi_j\|_2^2 = (2\pi)^n \lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2$, d.h. $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ ist unitär. □

Bemerkung $\|f\|_2 = \big\|(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}f\big\|_2$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ heißt auch „Plancherelsche Formel“.

Def.:
Für $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0,\infty)$ messbar sei $L_q^2 := \big\{[\tilde{f}];\ \tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar, $q \cdot \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)\big\}$ mit $(f,g)_{L_q^2} := (qf, qg)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int q(x)^2 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$
[wobei eigentlich $f = [\tilde{f}],\ qf := [q\tilde{f}],\ \int q(x)^2 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x := \int q(x)^2 \tilde{f}(x)\overline{\tilde{g}(x)}\,\mathrm{d}x$ etc.]

Lemma 10.5
L_q^2 ist ein separabler Hilbertraum.

Beweis $L_q^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : f \longmapsto qf$ ist bijektiv und isometrisch; $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist separabler Hilbertraum nach Satz 3.4. □

Bemerkung Wenn wir $W^{2,k}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $(f,g)_{W^{2,k}} := \sum\limits_{|\alpha|\leq k} \int\limits_{\Omega} \partial^\alpha f \cdot \overline{\partial^\alpha g}\,\mathrm{d}x$ versehen, so ist es nach Satz 5.1 vollständig, d.h. ein Hilbertraum.

Satz 10.7
$k \in \mathbb{N}_0,\ q(x) := (2\pi)^{-n/2}\Big(\sum\limits_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq k}} x^{2\alpha}\Big)^{1/2},\ q_1(x) := \big(1 + |x|\big)^k$. Dann gilt

a) $\mathcal{F} : W^{2,k}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_q^2$ ist unitär;

b) $L_q^2 = L_{q_1}^2$ und die entsprechenden Normen sind äquivalent.

Beweis a) $f \in W^{2,k}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \forall |\alpha| \leq k : \partial^\alpha f \in L^2 \underset{\text{S. 10.5/6}}{\Longleftrightarrow} \forall |\alpha| \leq k : x^\alpha \mathcal{F}f \in L^2$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{F}f \in L_q^2 \text{ und } \|\mathcal{F}f\|_{L_q^2}^2 = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha}\big|\mathcal{F}f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq k} \big\|(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}(\partial^\alpha f)\big\|_2^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f|^2\,\mathrm{d}x = \|f\|_{W^{2,k}}^2$$

b) $\exists\, C_1, C_2 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : C_1 q(x) \leq q_1(x) \leq C_2 q(x)$ $\square$

Bemerkung Für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ definiert man $W^{2,r}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}^{-1}(L^2_{(1+|x|)^r})$. Man erhält so eine kontinuierliche Skala von separablen Hilberträumen. Z.B. ist $\delta \in \bigcap\limits_{r<-\frac{n}{2}} W^{2,r} \setminus W^{2,-\frac{n}{2}}$. Für $T \in \mathcal{E}'$ misst $r(T) := \sup\big\{r \in \mathbb{R};\ T \in W^{2,r}(\mathbb{R}^n)\big\}$ die Regularität von T.

Satz 10.8
Es seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $l < k$. Dann gilt: $\exists c > 0 : \forall f \in W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$:
a) $\|f\|_{W^{2,l}} \leq c\|f\|^{l/k}_{W^{2,k}} \cdot \|f\|_2^{1-l/k}$ und
b) $\forall \varepsilon > 0 : \|f\|_{W^{2,l}} \leq \varepsilon\|f\|_{W^{2,k}} + c\,\varepsilon^{-\frac{l}{k-l}}\|f\|_2$.

Beweis a) Es sei $p = \dfrac{k}{l}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, d.h. $p' = \dfrac{k}{k-l} \overset{\text{Satz 10.7}}{\Longrightarrow} \|f\|^2_{W^{2,l}} \leq c_1\|\mathcal{F}f\|^2_{L^2_{(1+|x|)^l}} =$

$$= c_1 \int \underbrace{|\mathcal{F}f|^2}_{|\mathcal{F}f|^{2/p}\cdot|\mathcal{F}f|^{2/p'}} \big(1+|x|\big)^{2l}\,\mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\leq} c_1\bigg(\int |\mathcal{F}f|^2\big(1+|x|\big)^{\overbrace{2l\cdot p}^{2k}}\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/p} \cdot \bigg(\int |\mathcal{F}f|^2\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/p'}$$
$$\leq c_2\|f\|^{2l/k}_{W^{2,k}} \cdot \|f\|_2^{2(k-l)/k}$$

b) $\|f\|_{W^{2,l}} \underset{\text{a)}}{\leq} \underbrace{\Big(\varepsilon \cdot \dfrac{k}{l}\|f\|_{W^{2,k}}\Big)^{l/k}}_{a} \cdot \underbrace{\Big(c_3\,\varepsilon^{-\frac{l}{k-l}}\|f\|_2\Big)^{\frac{k-l}{k}}}_{b} \underset{\text{s.S. 9}}{\overset{\text{L. 2.1}}{\leq}} \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^{p'}}{p'} = \varepsilon\|f\|_{W^{2,k}} + c_4\,\varepsilon^{-\frac{l}{k-l}}\|f\|_2$ $\square$

Bemerkung Satz 10.8 ist ein „Interpolationssatz“: Die Norm von $W^{2,l}(\mathbb{R}^n)$ wird durch die Normen des kleineren bzw. größeren Raumes $W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $L^2(\mathbb{R}^n)$ interpoliert. Ebenso zeigt man

Satz 10.9
$0 \leq m < l < k \implies \exists\, c > 0 : \forall f \in W^{2,k} : \|f\|_{W^{2,l}} \leq c\|f\|^{\frac{l-m}{k-m}}_{W^{2,k}} \cdot \|f\|^{\frac{k-l}{k-m}}_{W^{2,m}}$.

Def.:
Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\overline{C}^k(\mathbb{R}^n) := \Big\{f \in C^k(\mathbb{R}^n);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k : \lim\limits_{|x|\to\infty} \partial^\alpha f(x) = 0\Big\}$ und $C_0(\mathbb{R}^n) := \overline{C}^0(\mathbb{R}^n)$.

[$\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = 0$ heißt $\forall \varepsilon \geq 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \text{ mit } |x| \geq N : \big|g(x)\big| \leq \varepsilon$]

Lemma 10.6
$\overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$ ist mit $\|f\|_{\overline{C}^k} := \sum\limits_{|\alpha|\leq k} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \big|\partial^\alpha f(x)\big|$ ein Banachraum.

Beweis Analog zu Satz 3.1

[**Bemerkung** $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist in $\overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$ dicht, denn $f \in \overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$ kann durch $g \in \overline{C}^k(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ approximiert werden, und g durch g_h, vgl. S. 20.]

Satz 10.10 (Sobolevscher Einbettungssatz)
Es seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $l > \dfrac{n}{2}$. Dann ist
$W^{2,k+l}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$ und $W^{2,k+l}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, d.h. $\exists\, c > 0 : \forall f \in W^{2,k+l}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{\overline{C}^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|\partial^\alpha f(x)\right| \le c\|f\|_{W^{2,k+l}} = c\Bigg[\sum_{|\alpha| \le k+l} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f|^2 \,\mathrm{d}x\Bigg]^{1/2}.$$

In Worten Wenn f und $\partial^\alpha f$ für $|\alpha| \le k + l$ (Ableitungen im distributionellen Sinn!) in $L^2(\mathbb{R}^n)$ sind, so ist $f \in \overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

Beweis a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| \le k \implies \left|\partial^\gamma \varphi(x)\right| =$

$$\underset{\text{Satz 10.1}}{=} \left|(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \underbrace{\big(\mathcal{F}(\partial^\gamma \varphi)\big)(\xi)}_{\mathrm{i}^\gamma \xi^\gamma \mathcal{F}\varphi(\xi)} \,\mathrm{d}\xi\right| \le (2\pi)^{-n} \int \frac{|\xi|^{|\gamma|}}{(1+|\xi|)^{k+l}} \cdot \left|\mathcal{F}\varphi(\xi)\right| \cdot \big(1+|\xi|\big)^{k+l} \,\mathrm{d}\xi$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \underbrace{(2\pi)^{-n}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2|\gamma|}\,\mathrm{d}\xi}{(1+|\xi|)^{2k+2l}}\Bigg)^{1/2}}_{c_1 < \infty} \cdot \underbrace{\Bigg(\int \big(1+|\xi|\big)^{2k+2l} \left|\mathcal{F}\varphi(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\Bigg)^{1/2}}_{\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2_{(1+|x|)^{k+l}}}}$$

$$\overset{\text{Satz 10.7}}{\implies} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty \le c_2 \|\varphi\|_{W^{2,k+l}} \implies \|\varphi\|_{\overline{C}^k} \le c\|\varphi\|_{W^{2,k+l}}.$$

b) $f \in W^{2,k+l}(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Satz 5.2}}{\implies} \exists \varphi_j \in \mathcal{D}$ mit $\varphi_j \longrightarrow f$ in $W^{2,k+l}$.
Speziell: $\varphi_j \longrightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und daher auch in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Nach a) ist φ_j eine C-Folge in $\overline{C}^k(\mathbb{R}^n) \underset{\text{L. 10.6}}{\implies} \exists f_1 \in \overline{C}^k(\mathbb{R}^n) : \varphi_j \longrightarrow f_1$ in $\overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$.
Speziell $\varphi_j \longrightarrow f_1$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und daher auch in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Also ist $f = f_1$ und somit $f \in \overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$ und $\|f\|_{\overline{C}^k} = \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_{\overline{C}^k} \underset{\text{a)}}{\le} c \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_{W^{2,k+l}} = c\|f\|_{W^{2,k+l}}$. $\square$

§ 11 Die Theorie von Riesz und Schauder

Hier ist wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und ${}_{\mathbb{K}}H$ ein Hilbertraum. Wir untersuchen nun $\mathrm{Com}(H)$ genauer, vgl. auch S. 56.

Vorsicht: $\overline{}$ heißt je nach Kontext komplex konjugieren (bei $\lambda \in \mathbb{C}$), bzw. Abschluss (bei $M \subset H$).

Def.:
$A \in L(H)$.

1) $\ker A := A^{-1}(0) = \{x \in H;\ Ax = 0\}$
2) $\operatorname{im} A := A(H) = \{Ax;\ x \in H\}$
3) $\lambda \in \mathbb{K}$ **Eigenwert** von $A \iff \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$; $\dim\ker(A - \lambda I) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt **Vielfachheit** von λ; $\sigma_{\mathrm{p}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda \text{ Eigenwert von } A\} \subset \sigma(A)$ heißt **Punktspektrum** von A.

Bemerkung $\ker A \leq H$ abgeschlossen, $\operatorname{im} A \leq H$ i.A. nicht abgeschlossen.

Lemma 11.1

1) Für $A \in L(H)$ ist $\overline{\operatorname{im}(A)}^{\perp} = \ker A^*$.
2) Für $A \in L(H)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist
$\overline{\operatorname{im}(A - \lambda I)} \oplus \ker(A^* - \overline{\lambda} I) \simeq H : (x; y) \longmapsto x + y$ und
$\overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)} \oplus \ker(A - \lambda I) \simeq H : (x; y) \longmapsto x + y$.

Beweis 1) $y \in \overline{\operatorname{im} A}^{\perp} \iff \forall x \in \overline{\operatorname{im} A} : (x, y) = 0 \iff \forall x \in \operatorname{im} A : (x, y) = 0 \iff \forall z \in H : \underbrace{(Az, y)}_{=(z, A^* y)} = 0 \iff A^* y = 0 \iff y \in \ker A^*$.
2) folgt aus Satz 8.2, wenn $H_1 = \overline{\operatorname{im}(A - \lambda I)}$ bzw. $H_1 = \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)}$.
(Beachte $A^{**} = A$, $(\lambda I)^* = \overline{\lambda} I$!) $\square$

Satz 11.1
Für $A \in \mathrm{Com}(H)$ und $\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist $\operatorname{im}(A - \lambda I) \leq H$ abgeschlossen und somit $\operatorname{im}(A - \lambda I) \oplus \ker(A^* - \overline{\lambda} I) \simeq H$, $\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I) \oplus \ker(A - \lambda I) \simeq H$.

Beweis a) Wir zeigen zuerst

$$\exists c > 0 : \forall x \in \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)} : \left|(A - \lambda I)x\right| \geq c|x| \qquad \circledast$$

Annahme: $\circledast$ ist falsch, d.h.

$$\forall j \in \mathbb{N} : \exists x_j \in \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)} : |x_j| = 1 \wedge \bigl|(A - \lambda I)x_j\bigr| \leq \frac{1}{j}\,;$$

A kompakt $\Longrightarrow$ $\exists$ Teilfolge x_{j_k} : $Ax_{j_k} \longrightarrow y$; andererseits ist $\bigl|(A - \lambda I)x_{j_k}\bigr| \longrightarrow 0$, d.h. $\underbrace{(A - \lambda I)x_{j_k}}_{\longrightarrow y - \lambda \lim\limits_{k\to\infty} x_{j_k}} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \lambda x_{j_k} \longrightarrow y \Longrightarrow \lambda A x_{j_k} \longrightarrow Ay$; weil auch $Ax_{j_k} \longrightarrow y$ folgt $\lambda y = Ay$, d.h. $y \in \ker(A - \lambda I)$.
Wegen $x_{j_k} \in \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)}$ ist aber auch $y = \lambda \lim\limits_{k\to\infty} x_{j_k} \in \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)}$, d.h. $y \in \ker(A - \lambda I) \cap \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)} \underset{\text{L. 11.1}}{=} \{0\}$ im Widerspruch zu $|y| = \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{|\lambda x_{j_k}|}_{=|\lambda|} = |\lambda| \neq 0$.

b) Es sei $y \in \overline{\operatorname{im}(A - \lambda I)} \Longrightarrow \exists y_j \in \operatorname{im}(A - \lambda I)$ mit $y_j \to y \Longrightarrow \exists x_j \in H \underset{\text{L. 11.1}}{\simeq} \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)} \oplus \ker(A - \lambda I)$ mit $y_j = (A - \lambda I)x_j \Longrightarrow$ oEdA $x_j \in \overline{\operatorname{im}(A^* - \overline{\lambda} I)}$
$\Longrightarrow |x_j - x_k| \underset{\text{a)}}{\leq} \dfrac{1}{c}\bigl|(A - \lambda I)x_j - (A - \lambda I)x_k\bigr| = \dfrac{1}{c}|y_j - y_k| \leq \varepsilon$ für $j, k \geq N \Longrightarrow x_j$ ist eine C-Folge, $x_j \to x$ und $y = \lim\limits_{j\to\infty} y_j = \lim\limits_{j\to\infty} (A - \lambda I)x_j = (A - \lambda I)x$, d.h. $y \in \operatorname{im}(A - \lambda I)$. $\square$

Bemerkung Für A kompakt, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $y \in H$ gilt also: $\exists x \in H : (A - \lambda I)x = y \Longleftrightarrow y \in \operatorname{im}(A - \lambda I) \Longleftrightarrow y \perp \ker(A^* - \overline{\lambda} I)$. In Worten: Die Gleichung $(A - \lambda I)x = y$ ist lösbar $\Longleftrightarrow y \perp$ Eigenraum von A^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

Satz 11.2
Es sei $\dim H = \infty$ und $A \in \operatorname{Com}(H)$. Dann gilt:

1) $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \{0\}$;

2) $\sigma(A)$ ist abzählbar und hat höchstens den Häufungspunkt 0;

3) $\forall \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} : \dim \ker(A - \lambda I) < \infty$;

4) $\sigma(A^*) = \bigl\{\overline{\lambda};\ \lambda \in \sigma(A)\bigr\}$.

[**Bemerkung** $\sigma(A)$ ist also endlich, oder $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\} \subset \mathbb{K}$ mit $\lambda_i \to 0$. 0 kann, muss aber nicht Eigenwert sein.]

Beweis 1) a) $0 \in \sigma(A)$, denn sonst wäre $A^{-1} \in L(H) \Longrightarrow$ für $S = \bigl\{x \in H;\ |x| = 1\bigr\}$ ist $A^{-1}S$ beschränkt (da $\exists C > 0 : \forall x \in H : |A^{-1}x| \leq C|x|$) $\Longrightarrow S = A(A^{-1}S)$ präkompakt $\Longrightarrow$ $\lightning$ zu $\dim H = \infty$, s. Satz 1.5.
b) Es sei $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \bigl(\sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \{0\}\bigr)$. Wir haben $\lambda \in \varrho(A)$ zu zeigen.
b1) Wir zeigen zuerst, dass $\overline{\lambda} \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$.

Annahme: $\exists x_1 \in H\setminus\{0\} : (A^* - \overline{\lambda}I)x_1 = 0;\ \lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A),\ \lambda \neq 0 \underset{\text{Satz 11.1}}{\Longrightarrow} H = \mathrm{im}(A^* - \overline{\lambda}I) \Longrightarrow$
$\exists x_2 : (A^* - \overline{\lambda}I)x_2 = x_1$ und induktiv $\exists x_j \in H : (A^* - \overline{\lambda}I)x_j = x_{j-1}$ für $j \geq 2$;
$(A^* - \overline{\lambda}I)^{j-1}x_j = x_1 \neq 0,\ (A^* - \overline{\lambda}I)^j x_j = 0 \Longrightarrow \ker(A^* - \overline{\lambda}I)^{j-1} \subsetneq \ker(A^* - \overline{\lambda}I)^j \underset{\text{Satz 8.2}}{\Longrightarrow}$
$\forall j \in \mathbb{N} : \exists y_j \in \ker(A^* - \overline{\lambda}I)^j : |y_j| = 1$ und $y_j \perp \ker(A^* - \overline{\lambda}I)^{j-1}$.
Für $j > k$ gilt dann

$$|A^*y_k - A^*y_j| = \Big|\underbrace{(A^* - \overline{\lambda}I)y_k + \overline{\lambda}y_k - (A^* - \overline{\lambda}I)y_j}_{\in\ker(A^*-\overline{\lambda}I)^{j-1}} - \overline{\lambda}y_j\Big| \overset{\text{Pythagoras}}{\geq} |\overline{\lambda}y_j| = |\lambda| > 0$$

$\Longrightarrow A^*y_j$ hat keine konvergente Teilfolge, $\lightning$ zu A^* kompakt.

b2) $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A) \Longrightarrow A - \lambda I$ ist injektiv; $\overline{\lambda} \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A^*) \Longrightarrow \ker(A^* - \overline{\lambda}I) = 0 \underset{\text{Satz 11.1}}{\Longrightarrow}$
$H = \mathrm{im}(A - \lambda I) \Longrightarrow A - \lambda I$ ist surjektiv. Also ist $(A - \lambda I)^{-1} : H \longrightarrow H$ wohldefiniert und linear.
Außerdem ist nach $\circledast$ in S. 67

$$\exists c > 0 : \forall x \in \overline{\mathrm{im}(A^* - \overline{\lambda}I)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } \ker(A-\lambda I)=0}}{=} H : \big|(A - \lambda I)x\big| \geq c|x|,$$

d.h. $\big|(A - \lambda I)^{-1}y\big| \leq \dfrac{1}{c}|y|$, d.h. $(A - \lambda I)^{-1} \in L(H)$, d.h. $\lambda \in \varrho(A)$.

2) **Annahme:** $\exists \lambda_j \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ paarweise verschieden mit $\lambda_j \longrightarrow \lambda \neq 0$.
Es seien $x_j \in \ker(A - \lambda_j I) \setminus \{0\}$.
a) x_j sind linear unabhängig.
[Denn wäre z.B. $x_1, \cdots, x_{n-1}$ linear unabhängig, $x_1, \cdots, x_n$ linear abhängig $\Longrightarrow$
$x_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i x_i \quad \text{(I)} \quad \Longrightarrow \lambda_n x_n = Ax_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i \underbrace{Ax_i}_{\lambda_i x_i} \quad \text{(II)}$
$\mathrm{I}\lambda_n - \mathrm{II} : 0 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i(\underbrace{\lambda_n - \lambda_i}_{\neq 0})x_i \Longrightarrow \forall i : c_i = 0 \Longrightarrow x_n = 0 \ \lightning$]
b) Mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren konstruieren wir aus x_j ein Orthonormalsystem $y_1, y_2, \cdots$, indem wir setzen
$y_1 = \dfrac{x_1}{|x_1|},\ y_2 = \dfrac{x_2 - (x_2, y_1)y_1}{|./.|}, \cdots, y_k = \big(x_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(x_i, y_i)y_i\big)/|./.|.$
Wenn $y_j = \sum\limits_{l=1}^{j} a_{jl}x_l$ und $j > k$, so ist
$|Ay_j - Ay_k| = \big|\sum\limits_{l=1}^{j} a_{jl}\underbrace{Ax_l}_{\lambda_l x_l} - \sum\limits_{l=1}^{k} a_{kl}Ax_l\big| = \big|a_{jj}\lambda_j x_j + \sum\limits_{l=1}^{j-1} b_l x_l\big| = \big|\lambda_j y_j + \sum\limits_{l=1}^{j-1} c_l x_l\big|$

$= \big|\lambda_j y_j + \sum\limits_{l=1}^{j-1} d_l y_l\big| \overset{\text{Pythagoras}}{\geq} |\lambda_j|\,|y_j| = |\lambda_j| > c_1 > 0$ für $j \geq J$ (da $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = \lambda \neq 0$) im Widerspruch dazu, dass $\{Ay_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ präkompakt ist. Also kann außerhalb von 0 kein Häufungspunkt von $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ sein.
3) Wäre $\dim\ker(A - \lambda I) = \infty$ für $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, so könnten wir linear unabhängige $x_j \in \ker(A - \lambda I)$ nehmen und gelängen wie in 2) b) zu einem Widerspruch. [Alternativ könnte man auch verwenden, dass in $H_1 := \ker(A - \lambda I)$ die Einheitskugel $S = \big\{x \in H_1 :\ |x| = 1\big\}$ präkompakt ist, da $S = \lambda^{-1} AS$. Nach Satz 1.5 ist dann $\dim H_1 < \infty$.]
4) $\lambda \in \varrho(A) = \mathbb{K} \setminus \sigma(A) \iff (A - \lambda I)^{-1} \in L(H) \underset{\text{Satz 9.3}}{\iff} (A^* - \overline{\lambda} I)^{-1} \in L(H) \iff \overline{\lambda} \in \varrho(A^*)$.
[Alternativ folgt 4) auch aus b1) in S. 68.] □

Satz 11.3
Für $A \in \mathrm{Com}\,(H)$ und $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ ist $\dim\ker(A - \lambda I) = \dim\ker(A^* - \overline{\lambda} I)$.

Beweis Nach Satz 11.2 sind die 2 Dimensionen endlich. Wegen $A^{**} = A$ genügt es, die **Annahme** $\dim\ker(A^* - \overline{\lambda} I) > \dim\ker(A - \lambda I)$ zum Widerspruch zu führen. Nach Satz 11.2 $\exists \varepsilon > 0 : \forall \mu \in \mathbb{K}$ mit $0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon : \mu \in \varrho(A)$. Für so ein μ betrachten wir

$$B : \ker(A^* - \overline{\lambda} I) \overset{(A-\mu I)^{-1}}{\longrightarrow} H \overset{\text{Satz 11.1}}{\simeq} \mathrm{im}(A^* - \overline{\lambda} I) \oplus \ker(A - \lambda I) \overset{\mathrm{pr}_2}{\longrightarrow} \ker(A - \lambda I).$$

Wegen der Annahme $\exists y \in \ker(A^* - \overline{\lambda} I) : |y| = 1,\ By = 0 \implies z := (A - \mu I)^{-1} y \in \mathrm{im}(A^* - \overline{\lambda} I) \implies 1 = (y, y) = \big(y, (A - \mu I)z\big) = \big(y, (A - \lambda I)z + (\lambda - \mu)z\big) = \big(\underbrace{(A^* - \overline{\lambda} I)y}_{0}, z\big) + (\overline{\lambda} - \overline{\mu})(y, z) \underset{\substack{\text{Cauchy}\\ \text{Schwarz}}}{\leq} |\lambda - \mu| \cdot |z|$.

Andererseits gilt nach ⊛ in S. 67 $\exists c > 0 : \forall x \in \mathrm{im}(A^* - \overline{\lambda} I) : \big|(A - \lambda I)x\big| \geq c|x|$ und daher für $|\mu - \lambda| < \min\big\{\varepsilon, \frac{c}{2}\big\}$:

$$\big|(A - \mu I)x\big| = \big|(A - \lambda I)x - (\mu - \lambda)x\big| \geq \big|(A - \lambda I)x\big| - |\mu - \lambda|\,|x| \geq \frac{c}{2}\,|x|.$$

Das liefert für $x = z \in \mathrm{im}(A^* - \overline{\lambda} I)$ einen Widerspruch:

$$1 \leq |\lambda - \mu| \cdot |z| \leq |\lambda - \mu| \cdot \frac{2}{c} \,\big|\, \underbrace{(A - \mu I)z}_{y} \,\big| = |\lambda - \mu| \cdot \frac{2}{c} < 1$$

□

Anwendung auf Integralgleichungen

Wir betrachten $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Nach Satz 7.5 ist $K \in L\big(L^2(\Omega)\big)$ kompakt. Weiters hat der Operator K^* den Kern $\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)}$, denn für $f, g \in L^2(\Omega)$

ist $(Kf,g) \underset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\Omega\times\Omega} K(x,y)f(y)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\Omega\times\Omega} f(x)\overline{\overline{K(y,x)}\cdot g(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (f, K^*g)$.
Für $\underline{\underline{\lambda \in \mathbb{K}^*}}$ und $f,g \in L^2(\Omega) = H$ betrachten wir die Integralgleichungen

$(K-\lambda I)f = 0$, d.h. $\int\limits_{\Omega} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \lambda f(x)$: homogen

bzw.
$(K-\lambda I)f = g$, d.h. $\int\limits_{\Omega} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x)$: inhomogen.

Die Sätze 11.1/2/3 liefern die „Fredholmsche Alternative“:

$\boxed{\textbf{Entweder}}$ hat die homogene Integralgleichung keine nichttriviale Lösung, und dann hat die inhomogene Integralgleichung $\forall g$ eine eindeutige Lösung f, die stetig (bzgl. $\|\cdot\|_2$) von g abhängt. [Satz 11.2: $\ker(K-\lambda I) = \{0\} \implies \lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(K) \implies \lambda \notin \sigma(K) \implies (K-\lambda I)^{-1} \in L(H)$]

$\boxed{\textbf{Oder}}$ die homogene Integralgleichung hat den Lösungsraum $\ker(K-\lambda I)$ mit $1 \leq n = \dim\ker(K-\lambda I) < \infty$, und dann ist die inhomogene Integralgleichung genau dann lösbar, wenn $g \perp \ker(K^* - \overline{\lambda}I)$, und das sind genau n Bedingungen an g. [Satz 11.1/3: $g \in \mathrm{im}(K-\lambda I) \iff g \in \ker(K^*-\overline{\lambda}I)^{\perp}$; $\dim\ker(K^*-\overline{\lambda}I) = n$]

Bemerkungen 1) Für lineare Gleichungssysteme $Ax = y$ mit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, x,y \in \mathbb{K}^n$, gilt genau dieselbe Alternative (als trivialer Spezialfall der Sätze 11.1/2/3).
2) Die Sätze 11.2/3 gehen eigentlich auf Frigyes (= Friedrich) Riesz zurück (Acta Math. 41(1918), 71–98), wo sie (allgemeiner) im Banachraum bewiesen werden, vgl. Werner, Funktionalanalysis, VI. 2, p. 210. Ivar Fredholm formulierte seine „Alternative“ in der Arbeit “Sur une classe d’équations fonctionelles”, Acta Math. 27(1903), 365–390.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

IVAR FREDHOLM
à STOCKHOLM.

Dans quelques travaux[1] ABEL s'est occupé avec le problème de déterminer une fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$\text{(a)} \qquad \int f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x)$$

$f(x,y)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions données. ABEL a résolu quelques cas particuliers de cette équation fonctionnelle dont il paraît avoir reconnu le premier l'importance. C'est pour cela que je propose d'appeler l'équation fonctionnelle (a) une *équation fonctionnelle abélienne.*

Dans cette note je ne m'occupe pas en premier lieu de l'équation abélienne mais de l'équation fonctionnelle

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x),$$

qui est étroitement liée à l'équation abélienne.

En effet, si on introduit au lieu de $f(x,y)$ et $\psi(x)$, $\frac{1}{\lambda}f(x,y)$ et $\frac{1}{\lambda}\psi(x)$, l'équation (b) s'écrit

$$\text{(c)} \qquad \lambda\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x),$$

équation qui se transforme en l'équation (a) en posant $\lambda = 0$. Ainsi la solution de l'équation (a) peut être considérée comme implicitement contenue dans la solution de l'équation (b).

[1] Magazin för Naturvidenskaberne, Kristiania 1823 et Oeuvres complètes.

Acta mathematica. 27. Imprimé le 30 mars 1903.

Quant à l'équation (b) elle me paraît mériter l'attention particulière des géomètres, car la plupart des problèmes de la Physique mathématique qui conduisent à des équations différentielles linéaires se traduisent par des équations fonctionnelles de la forme (b) ou de la forme

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) + \int \ldots \int f(x_1 \ldots x_n, \xi_1 \ldots \xi_n) \varphi(\xi_1 \ldots \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n = \psi(x_1 \ldots x_n).$$

Pour le voir on n'a qu'à rappeler le problème de Dirichlet dans le cas où l'on cherche à représenter le potentiel inconnu par le potentiel de double couche, des problèmes analogues de la théorie du magnétisme et de la théorie de l'élasticité.

Le premier essai de résoudre une équation (b) a été fait par Neumann. En effet, la méthode célèbre de Neumann pour la résolution du problème de Dirichlet consiste en le développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances croissantes du paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Mais le développement de Neumann, tout en convergeant dans le cas du problème de Dirichlet, ne peut pas converger dans le cas général.

Dans un travail important[1] la méthode de Neumann a été appliquée avec succès par M. Volterra à l'équation fonctionnelle

$$\text{(c)} \qquad \varphi(x) + \int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

Dans le même travail M. Volterra a aussi mis en évidence le rapport intime entre l'équation (c) et l'équation abélienne

$$\int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

L'équation que je me propose à étudier dans le présent travail comprend comme cas particulier l'équation de M. Volterra, car en supposant, dans l'équation (b), que $f(x, y)$ soit nul pour $y > x$, on obtient immédiatement l'équation (c).

Dans ce qui suit la fonction $f(x, y)$ sera soumise à quelques restrictions. Je suppose que $f(x, y)$ soit telle que, α étant inférieur à l'unité, $(x - y)^\alpha f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable. Ainsi je ne vais

[1] Annali di Matematica, 1896.

Kapitel 3

Selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum

Im folgenden sei ${}_{\mathbb{C}}H$ ein komplexer Hilbertraum.

§ 17 Unbeschränkte Operatoren

Bisher wurden nur beschränkte Operatoren $A \in L(H)$ betrachtet, vgl. § 6, § 9. In $H = L^2(\mathbb{R}^1)$ lässt sich aber z. B. $A(f) = f'$
a) nur auf $W^{2,1}(\mathbb{R}) \lneqq H$ definieren, und
b) ist A nicht beschränkt, d.h. $\nexists C > 0 : \forall f \in W^{2,1} : \|Af\|_2 \leq C\|f\|$.
Aber A ist „abgeschlossen".

Def.:

1) $A : D \longrightarrow H$ heißt **linearer Operator** in $H :\Longleftrightarrow$

   (i) $D \leq H$ dichter Untervektorraum,

   (ii) A ist linear.

   Für D schreiben wir $D(A)$; wie früher seien $\ker(A) = A^{-1}(0) \leq D$ und $\operatorname{im}(A) = A(D) \leq H$. $\operatorname{Lu}(H) := \{A \text{ linearer Operator}\}$.
   Vorsicht: $\operatorname{Lu}(H)$ ist kein Vektorraum.

2) $A \in \operatorname{Lu}(H)$ heißt **abgeschlossen**: $\Longleftrightarrow$ der Graph von A ist abgeschlossen in $H \times H$, d.h. $\forall (x_n) \in D(A)$ mit $x_n \longrightarrow x,\ Ax_n \longrightarrow y$ in $H : x \in D(A)$ und $Ax = y$.
   $\operatorname{La}(H) := \big\{A \in \operatorname{Lu}(H);\ A \text{ abgeschlossen}\big\}$.

Bsp. 1) $L(H) \subset \operatorname{La}(H)$.

2) $A : W^{2,1}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^1) : f \longmapsto f'$ ist abgeschlossen, denn wenn $f_n \in W^{2,1}$ und $f_n \longrightarrow f,\ f'_n \longrightarrow g$ in $L^2 \implies g = \lim\limits_{n\to\infty} (\text{in}\, L^2) f'_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\text{in}\, \mathcal{D}') f'_n = \big(\lim\limits_{n\to\infty} (\text{in}\, \mathcal{D}') f_n\big)' = f'$
$\implies f' = g \in L^2 \implies f \in W^{2,1},\ Af = g$
[$p = -\mathrm{i}\hbar A$ (bzw. in $\mathbb{R}^n$ $p_j = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$) ist der Impulsoperator der Quantenmechanik.]

Bemerkung Für abgeschlossene Operatoren sind die Probleme
a) [d.h. A ist nur auf $D(A) \subsetneq H$ definiert] und b) [d.h. A ist nicht beschränkt]
äquivalent: „$\cancel{\text{b}})\implies \cancel{\text{a}})$“: A beschränkt $\overset{\text{Satz 6.3}}{\implies} \exists \hat{A} \in L(H) : \hat{A}\big|_{D(A)} = A;\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,
$x_n \in D(A) \implies \hat{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n \overset{A \text{ abg.}}{\implies} x \in D(A) \implies D(A) = H.$

„$\cancel{\text{a}}) \implies \cancel{\text{b}})$“: $D(A) = H$ und $A \in \mathrm{La}(H) \implies A$ beschränkt nach dem „Graphensatz“.

Satz 17.1 (Graphensatz bzw. Satz vom abgeschlossenen Graphen)
${}_{\mathbb{K}}X$, ${}_{\mathbb{K}}Y$ seien Banachräume und $A : X \longrightarrow Y$ linear mit abgeschlossenem Graphen (d.h. $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x$ und $Ax_n \longrightarrow y$ ist $Ax = y$).
Dann ist $A \in L(X, Y)$, d.h. A beschränkt ($\iff A$ stetig, Satz 6.1, S. 31).

Beweis Wie früher sei für $\varepsilon > 0$ $K_\varepsilon(x) = \big\{y \in X;\ |x - y| \le \varepsilon\big\}$.
Dann ist $K_\varepsilon(x)^0 = \big\{y \in X;\ |x - y| < \varepsilon\big\}$ und $\overline{K_\varepsilon(x)^0} = K_\varepsilon(x)$ (Übung!).
a) $M_n := \big\{x \in X;\ |Ax| \le n\big\} \implies M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = X$. Wir zeigen zuerst:

$$\exists x \in X :\ \exists \varepsilon > 0 :\ \exists n \in \mathbb{N} :\ K_\varepsilon(x) \cap M_n \subset K_\varepsilon(x) \text{ dicht.}$$

Annahme: Das ist falsch.
Es sei $x_1 = 0,\ \varepsilon_1 = 1,\ n_1 = 1 \implies \overline{K_1(0) \cap M_1} \subsetneq K_1(0) \implies \emptyset \ne K_1(0)^0 \setminus \overline{K_1(0) \cap M_1} =: U_1$ offen $\implies \exists x_2 \in X : \exists 0 < \varepsilon_2 \le \frac{1}{2} : K_{\varepsilon_2}(x_2) \subset U_1$;
$\overline{K_{\varepsilon_2}(x_2) \cap M_2} \subsetneq K_{\varepsilon_2}(x_2) \implies \emptyset \ne K_{\varepsilon_2}(x_2)^0 \setminus \overline{K_{\varepsilon_2}(x_2) \cap M_2} =: U_2$ offen
$\implies \exists x_3 \in X : \exists 0 < \varepsilon_3 \le \frac{1}{3} : K_{\varepsilon_3}(x_3) \subset U_2$ etc.
$\implies K_{\varepsilon_1}(x_1) \supset K_{\varepsilon_2}(x_2) \supset \cdots \implies \forall k \ge j : x_k \in K_{\varepsilon_j}(x_j)$, d.h. $|x_j - x_k| \le \varepsilon_j \le \frac{1}{j} \implies$
x_j C-Folge $\implies x_j \longrightarrow x \in X$ und $|x_j - x| \le \varepsilon_j$, d.h. $x \in K_{\varepsilon_j}(x_j) \subset U_{j-1} = K_{\varepsilon_{j-1}}(x_{j-1})^0 \setminus \overline{K_{\varepsilon_{j-1}}(x_{j-1}) \cap M_{j-1}} \implies \forall j \ge 2 : x \notin M_{j-1} \implies x \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = X$ ↯
[In a) wird eigentlich der „Satz von Baire“ bewiesen.]

b) Es sei also $x_0 \in X,\ \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}$ mit $K_\varepsilon(x_0) \cap M_n \subset K_\varepsilon(x_0)$ dicht. Dann ist auch $N_1 := \big(K_\varepsilon(x_0) \cap M_n\big) - x_0 = \big\{x \in X;\ |x| \le \varepsilon,\ x + x_0 \in M_n\big\}$ in $K_\varepsilon(0)$ dicht und

$$\forall x \in N_1 : |Ax| = \big|A(x + x_0) - Ax_0\big| \le \underbrace{\big|A(x + x_0)\big|}_{\le n} + |Ax_0| \le C_1.$$

Für $x \in N_2 := N_1 \setminus K_{\varepsilon/2}(0)$ gilt $|x| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ und daher $|Ax| \leq C_1 \leq \underbrace{C_1 \cdot \frac{2}{\varepsilon}}_{C_2} \cdot |x| = C_2|x|$ und N_2 ist in $K_\varepsilon(0) \setminus K_{\varepsilon/2}(0)$ dicht.
Dann ist $N_3 := \mathbb{K} \cdot N_2$ in X dicht und $\forall x \in N_3 : |Ax| \leq C_2|x|$.

c) Zeige noch: $\forall x \in X: \ |Ax| \leq 2C_2|x|$ [$\Longrightarrow$ A beschränkt].
$x \in X \setminus \{0\}$ sei fixiert. Da N_3 in X dicht ist, $\exists y_1 \in N_3$ mit $|x - y_1| \leq \dfrac{|x|}{2}$ und $|y_1| \leq |x|$.
[Nehme z.B. $y_1 \in N_3$ mit $\left|\frac{3}{4}\, x - y_1\right| \leq \dfrac{|x|}{4} \implies |x - y_1| \leq \dfrac{|x|}{2}$ und $|y_1| \leq |x|$]
Ebenso $\exists y_2 \in N_3$ mit $\left|(x - y_1) - y_2\right| \leq \dfrac{|x|}{4}$ und $|y_2| \leq |x - y_1| \leq \dfrac{|x|}{2}$ etc. $\cdots$
$\exists y_n \in N_3$ mit $\left|x - \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right| \leq 2^{-n}|x|$ und $|y_n| \leq \left|x - \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j\right| \leq 2^{1-n}|x|$.
Wenn $x_0 = 0$, $x_n := \sum\limits_{j=1}^{n} y_j$, so gilt also $|x - x_n| \longrightarrow 0$, d.h. $x_n \longrightarrow x$ und Ax_n ist eine C-Folge,

denn für $n \geq m$ ist $|Ax_n - Ax_m| = \left|A \sum\limits_{j=m+1}^{n} y_j\right| \leq \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} |A \overbrace{y_j}^{\in N_3}| \overset{\text{b)}}{\leq} C_2 \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} |y_j|$

$$\circledast \qquad \leq C_2 \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{1-j}|x| = C_2 \cdot 2^{1-m}|x| \to 0 \text{ für } m \to \infty \implies \exists y \in Y : Ax_n \longrightarrow y$$

$\overset{(A \text{ abg.})}{\Longrightarrow} Ax = y = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ und $|Ax| = \lim\limits_{n\to\infty} |Ax_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |Ax_n - Ax_0| \overset{\circledast}{\leq} 2C_2|x|$ $\square$

Def.:
Für $A \in \mathrm{Lu}(H)$ und $x, y \in D(A)$ sei $[x,y]_A := (x,y) + (Ax, Ay)$ und $|x|_A := \sqrt{[x,x]_A}$.

Satz 17.2
Für $A \in \mathrm{Lu}$ gilt:

$$A \text{ abgeschlossen} \iff \big(D(A), [\ ,\ ]_A\big) \text{ ist ein Hilbertraum.}$$

Beweis „$\Longrightarrow$" Offenbar ist $[\ ,\ ]_A$ ein Skalarprodukt. Zum Nachweis der Vollständigkeit sei $(x_n) \in D(A)^{\mathbb{N}}$ eine C-Folge bzgl. $|\cdot|_A \implies (x_n), (Ax_n)$ sind C-Folgen in H
$\implies x_n \longrightarrow x,\ Ax_n \longrightarrow y \overset{(A \text{ abg.})}{\Longrightarrow}$
$Ax_n \longrightarrow Ax \implies |x_n - x|_A^2 = |x_n - x|^2 + |Ax_n - Ax|^2 \longrightarrow 0 \implies x_n \longrightarrow x$ bzgl. $|\ ,\ |_A$.

„$\Longleftarrow$" Seien $x_n \in D(A)$ mit $x_n \longrightarrow x$ und $Ax_n \longrightarrow y$ in $H \implies x_n$ C-Folge bzgl. $|\cdot|_A$, d.h. $|x_n - u|^2 + |Ax_n - Au|^2 \longrightarrow 0 \implies u = x,\ Au = y$, d.h. $x \in D(A),\ Ax = y$, d.h. A ist abgeschlossen. $\square$

Def.:

1) $A, B \in \mathrm{Lu}(H)$. B heißt **Erweiterung** von A (geschrieben $A \subset B$) $\Longleftrightarrow D(A) \subset D(B)$ und $A = B\big|_{D(A)}$.

2) $A \in \mathrm{Lu}(H)$ heißt **abschließbar** $\Longleftrightarrow \exists B \in \mathrm{La}(H) : A \subset B$
$\mathrm{Lab}(H) := \big\{A \in \mathrm{Lu}(H);\ A \text{ abschließbar}\big\}$.

Satz 17.3 + Def.
Es sei $A \in \mathrm{Lab}(H)$. Dann gilt:

$$\exists_1 \overline{A} \in \mathrm{La}(H) : \forall B \in \mathrm{La}(H) \text{mit } A \subset B : A \subset \overline{A} \subset B.$$

$\overline{A}$ heißt **Abschluss** von A. Weiters ist $D(A) \subset \big(D(\overline{A}), |\cdot|_{\overline{A}}\big)$ dicht, d.h. $\big(D(\overline{A}), |\cdot|_{\overline{A}}\big)$ ist die Vervollständigung von $\big(D(A), |\cdot|_A\big)$.

Beweis Es sei $B \in \mathrm{La}(H),\ A \subset B$, und $D(\overline{A}) := \overline{D(A)}$ in $\big(D(B), |\cdot|_B\big)$ und $\overline{A} := B\big|_{D(\overline{A})}$.
(Dann ist jedenfalls $D(A) \subset \big(D(\overline{A}), |\cdot|_{\overline{A}}\big)$ dicht.)
Offenbar ist $A \subset \overline{A}$; weiters ist $D(\overline{A})$ ein abgeschlossener Unterraum von $\big(D(B), |\cdot|_B\big)$ und daher $\big(D(\overline{A}), |\cdot|_{\overline{A}}\big)$ vollständig (Übung 1). Also ist $\overline{A} \in \mathrm{La}(H)$ nach Satz 17.2.
Wenn $A \subset C \in \mathrm{La}(H),\ x \in D(\overline{A}) \implies \exists x_n \in D(A)$ mit $x_n \longrightarrow x,\ \underbrace{Ax_n}_{=Cx_n} \longrightarrow \overline{A}x \implies$ (C abgeschlossen) $\implies x \in D(C)$ und $\overline{A}x = Cx$, d.h. $\overline{A} \subset C$. $\square$

Bsp.: $A_1 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^1) : f \longmapsto f' \implies |f|^2_{A_1} = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 = \|f\|^2_{W^{2,1}}$;
$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset W^{2,1}(\mathbb{R})$ dicht (Satz 5.2) $\implies \overline{A}_1 = A : W^{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) : f \longmapsto f'$.

Lemma 17.1 + Def.
Für $A \in \mathrm{Lu}(H)$ sei $D(A^*) := \big\{y \in H;\ \exists y_1 \in H : \forall x \in D(A) : (Ax, y) = (x, y_1)\big\}$ und $A^* : D(A^*) \longrightarrow H : y \longmapsto y_1$. Dann ist A^* wohldefiniert (d.h. y_1 durch y eindeutig bestimmt) und heißt wieder **adjungierter Operator**.

Beweis Wenn $\forall x \in D(A) : (x, y_1) = (x, \tilde{y}_1)$, so ist $y_1 - \tilde{y}_1 \in D(A)^\perp = \{0\}$, da $D(A) \subset H$ dicht. $\square$

Vorsicht: 1) Beachte, dass für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ der adjungierte Operator $A^* = \overline{A^T} = (\overline{a_{ji}})_{i,j=1,\cdots,n}$ NICHTS mit der adjungierten Matrix $A^{\mathrm{ad}} = \big((-1)^{i+j} \det (A_{\cancel{j}\,\cancel{i}})\big)_{i,j}$ zu tun hat.
2) Im Allgemeinen ist $D(A^*) \subset H$ nicht dicht, d.h. $A^* \notin \mathrm{Lu}(H)$.

Satz 17.4
Für $A \in \mathrm{Lu}(H)$ gilt:

a) $D(A^*) \leq H$ Untervektorraum, A^* linear;

b) $A \subset B \implies A^* \supset B^*$;

c) $A \in \mathrm{Lab}(H) \implies A^* = (\overline{A})^*$.

Beweis Übungen 53 und 54.

Def.:

1) $A \in \mathrm{Lu}(H)$ heißt **symmetrisch** $\iff \forall x, y \in D(A) : (Ax, y) = (x, Ay)$;
$\mathrm{Ls}(H) := \big\{A \in \mathrm{Lu}(H);\ A \text{ symmetrisch}\big\}$.

2) $A \in \mathrm{Lu}(H)$ heißt **selbstadjungiert** (sa.) $\iff A^* = A$; $\mathrm{Lsa}(H) := \big\{A \in \mathrm{Lu}(H);\ A \text{ sa.}\big\}$.

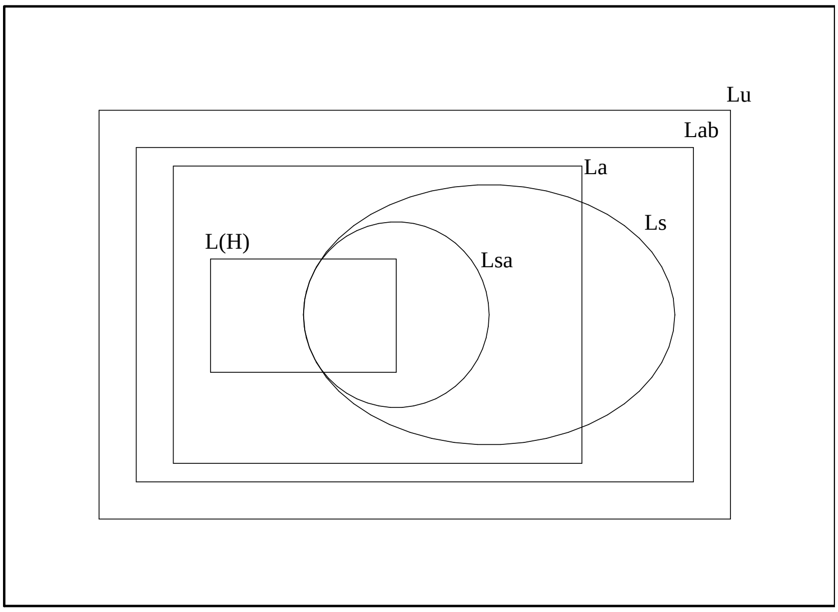
Satz 17.5

1) Für $A \in \mathrm{Lu}(H)$ gilt:
A symmetrisch $\iff A \subset A^* \iff \forall x \in D(A) : (Ax, x) \in \mathbb{R}$

2) $\mathrm{Lsa}(H) \subset \mathrm{Ls}(H) \subset \mathrm{Lab}(H)$.

3) $A \in \mathrm{Ls}(H) \implies \overline{A} \in \mathrm{Ls}(H)$;
$A \in \mathrm{Lsa}(H) \implies A = \overline{A}$, d.h. $\mathrm{Lsa}(H) \subset \mathrm{La}(H)$;
$A \in \mathrm{Lsa}(H),\ A \subset B,\ B \in \mathrm{Ls}(H) \implies A = B$, d.h. ein sa. Operator lässt sich nicht symmetrisch erweitern.

Bild



Beweis 1) A symmetrisch $\iff \forall x,y \in D(A) : (Ax,y) = (x,Ay) \iff A \subset A^*$;
$A \in \mathrm{Ls}(H) \implies \forall x \in D(A) : (Ax,x) = (x,Ax) = \overline{(Ax,x)}$, d.h. $(Ax,x) \in \mathbb{R}$.
Umgekehrt, wenn $\forall x \in D(A) : (Ax,x) \in \mathbb{R} \implies \forall x,y \in D(A) : \mathbb{R} \ni \big(A(x+y), x+y\big) = \underbrace{(Ax,x) + (Ay,y)}_{\in\mathbb{R}} + (Ax,y) + (Ay,x) \implies \mathrm{Im}(Ax,y) = -\mathrm{Im}(Ay,x) = \mathrm{Im}(x,Ay)$ und
$\mathrm{Re}(Ax,y) = -\mathrm{Im}(Ax,\mathrm{i}y) = -\mathrm{Im}(x,A\mathrm{i}y) = \mathrm{Re}(x,Ay)$.
2) $\mathrm{Lsa}(H) \subset \mathrm{Ls}(H)$ nach 1); $A \in \mathrm{Ls}(H) \underset{1)}{\implies} A \subset A^*$; A^* ist abgeschlossen, denn
$y_n \in D(A^*),\ y_n \longrightarrow y,\ A^*y_n \longrightarrow w$ in $H \implies \forall x \in D(A) : \underbrace{(Ax,y_n)}_{\to(Ax,y)} = \underbrace{(x,A^*y_n)}_{\to(x,w)}$
$\implies (Ax,y) = (x,w) \implies y \in D(A^*),\ A^*y = w$. Also ist $A \subset \overline{A} \subset A^*$.
3) a) $A \in \mathrm{Ls}(H),\ x,y \in D(\overline{A}),\ x_n,y_n \in D(A)$ mit $x_n \longrightarrow x,\ y_n \longrightarrow y$ in $\big(D(\overline{A}), |\cdot|_{\overline{A}}\big) \implies (\overline{A}x,y) = \lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n,Ay_n) = (x,\overline{A}y)$, d.h. $\overline{A} \in \mathrm{Ls}(H)$.
b) $A \in \mathrm{Lsa}(H) \underset{2)}{\implies} A \subset \overline{A} \subset A^* = A \implies A \in \mathrm{La}(H)$
c) $A \in \mathrm{Lsa},\ A \subset B,\ B \in \mathrm{Ls} \implies A^* = A \supset B^* \supset B \implies A = B$ $\square$

Bsp.: $B_1 = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^1)$ ist symmetrisch, denn $(\mathrm{i}f',g) = \displaystyle\int \mathrm{i}f'(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \underset{\text{partiell}}{=} -\mathrm{i}\int f(x)\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x = (f,\mathrm{i}g')$. Daher ist $B = \overline{B}_1 = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : W^{2,1} \longrightarrow L^2$ (vgl. Bsp. in S. 77) auch symmetrisch nach Satz 17.5, 3). B ist sogar sa., denn wenn
$g \in D(B^*) \implies \exists g_1 \in L^2 : \forall f \in D(B) = W^{2,1} : (Bf,g) = (f,g_1)$, d.h.
$\displaystyle\int \mathrm{i}f'\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int f\overline{g}_1\,\mathrm{d}x \implies \forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$\left.\underbrace{\mathrm{i}T_{\overline{g}}(\varphi')}_{-\mathrm{i}(T_{\overline{g}})'(\varphi)} = T_{\overline{g}_1}(\varphi)\right\} \implies -\mathrm{i}\overline{g}\,' = \overline{g}_1 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$$

$\implies g' = -\mathrm{i}g_1 \in L^2(\mathbb{R}^1) \implies g \in W^{2,1} = D(B) \implies D(B^*) = D(B) \implies B^* = B$.

Wir wollen nun Bedingungen angeben, unter denen symmetrische Operatoren sa. sind. Zuerst

Lemma 17.2
Für $A \in \mathrm{Ls}(H),\ \lambda \in \mathbb{C}$, gilt:

1) $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda}I$;
2) $\overline{\mathrm{im}(A - \lambda I)} \oplus \ker(A^* - \overline{\lambda}I) \simeq H : (x;y) \longmapsto x + y$ (vgl. S. 67)
3) $\forall x \in D(A) : \big|(A - \lambda I)x\big| \geq |\mathrm{Im}\,\lambda| \cdot |x|$ (vgl. S. 67)
[wobei $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow H : x \longmapsto Ax - \lambda x$ etc.]

Beweis 1) $x \in D(A),\ y \in D(A^*) \implies (Ax,y) = (x, A^*y)$
$\implies \big((A-\lambda I)x, y\big) = \big(x, (A^* - \overline{\lambda} I)y\big) \implies (A-\lambda I)^* \supset A^* - \overline{\lambda} I.$
Ebenso gilt umgekehrt für $y \in D\big((A-\lambda I)^*\big)$, dass $\big((A-\lambda I)x, y\big) = \big(x, (A-\lambda I)^* y\big)$, d.h.
$(Ax, y) = \big(x, (A-\lambda I)^* y + \overline{\lambda} y\big) \implies A^* \supset (A-\lambda I)^* + \overline{\lambda} I \implies A^* - \overline{\lambda} I \supset (A-\lambda I)^*.$
2) $y \in \ker(A^* - \overline{\lambda} I) \overset{1)}{\iff} y \in \ker\big((A-\lambda I)^*\big) \iff \forall x \in D(A) : \big((A-\lambda I)x, y\big) = 0 \iff y \in \operatorname{im}(A-\lambda I)^\perp = \overline{\operatorname{im}(A-\lambda I))}^{\perp}$. Verwende dann Satz 8.2.
3) $x \in D(A) \implies |Ax - \lambda x|^2 = |Ax|^2 \underbrace{-(Ax, \lambda x) - (\lambda x, Ax)}_{-2\ \underbrace{\operatorname{Re}(Ax,\lambda x)}_{(\operatorname{Re}\lambda)\cdot\underbrace{(Ax,x)}_{\in \mathbb{R}}}} + \underbrace{|\lambda|^2}_{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2} |x|^2$

Weiters ist $2|\operatorname{Re}\lambda| \cdot \big|(Ax,x)\big| \le 2|\operatorname{Re}\lambda| \cdot |x| \cdot |Ax| \le (\operatorname{Re}\lambda)^2|x|^2 + |Ax|^2$ (weil $2ab \le a^2 + b^2$)
$\implies |Ax - \lambda x|^2 \ge |Ax|^2 - \big[(\operatorname{Re}\lambda)^2|x|^2 + |Ax|^2\big] + |\lambda|^2\,|x|^2 = (\operatorname{Im}\lambda)^2|x|^2.$ ☐

Satz 17.6
Es sei $A \in \operatorname{Ls}(H)$.

1) (Hellinger–Töplitz) $D(A) = H \implies A \in L(H) \cap \operatorname{Lsa}(H)$.

2) $\exists \lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I,\ A - \overline{\lambda} I$ surjektiv $\implies A \in \operatorname{Lsa}(H)$.

Beweis 1) $A \in \operatorname{Ls}(H) \subset \operatorname{Lab}(H) \implies A \subset \overline{A},\ A \subset A^*$;
$D(A) = H \implies A = \overline{A} = A^* \underset{\text{Satz 17.1}}{\implies} A \in \operatorname{Lsa}(H)$ und $A \in L(H)$
2) $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow H$ ist surjektiv und wegen $\ker(A - \lambda I) \subset \ker(A^* - \lambda I)$
$\underset{\text{L. 17.2,2)}}{=} \operatorname{im}(A - \overline{\lambda} I)^\perp = H^\perp = \{0\}$ auch injektiv.
Wenn $x \in D(A^*),\ y := (A^* - \lambda I)x,\ z := (A - \lambda I)^{-1} y \implies y = (A - \lambda I) z$
$\underset{(A \subset A^*)}{=} (A^* - \lambda I) z \implies x - z \in \ker(A^* - \lambda I) = \{0\} \implies x = z \in D(A)$, d.h.
$D(A^*) \subset D(A) \implies A^* = A$ ☐

Satz 17.7
Für $A \in \operatorname{Ls}(H)$ gilt

$$A \in \operatorname{Lsa}(H) \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : A - \lambda I : D(A) \longrightarrow H$$

ist bijektiv und $(A - \lambda I)^{-1} \in L(H)$ (d.h. stetig).

Beweis „$\Longleftarrow$“ gilt nach Satz 17.6, 2).
„$\Longrightarrow$“ Es sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Aus Lemma 17.2, 3),2) folgt $\ker(A - \lambda I) = 0,\ H = \overline{\operatorname{im}(A - \lambda I)}$ und $(A - \lambda I)^{-1} : \operatorname{im}(A - \lambda I) \longrightarrow H$ ist stetig. $x \in H,\ x_n \in \operatorname{im}(A - \lambda I)$ mit $x_n \longrightarrow x \implies$
$y_n = (A - \lambda I)^{-1} x_n$ C-Folge $\implies y_n \longrightarrow y$,
$Ay_n = x_n + \lambda y_n \longrightarrow x + \lambda y \underset{A \text{ abg.}}{\implies} y \in D(A)$ und $Ay = x + \lambda y \implies x \in \operatorname{im}(A - \lambda I)$. ☐

Satz 17.8 (F. Rellich 1939, „Kriterium von Kato“)
Es sei $A \in \mathrm{Lsa}(H),\ B \in \mathrm{Ls}(H),\ D(A) \subset D(B)$ und

$$\exists 0 \le \delta < 1 : \exists c \ge 0 : \forall x \in D(A) : |Bx| \le \delta |Ax| + c|x|.$$

Dann ist auch $A + B \in \mathrm{Lsa}(H)$. [Hierbei ist $A + B : D(A) \longrightarrow H : x \longmapsto Ax + Bx$.]

Beweis a) Nach Satz 17.7 ist $(A - \mathrm{i}tI)^{-1} \in L(H)$ für $t \in \mathbb{R}^* \implies$
$A+B-\mathrm{i}tI = \big(I+B(A-\mathrm{i}tI)^{-1}\big)\cdot(A-\mathrm{i}tI) \implies \mathrm{im}(A+B-\mathrm{i}tI) = \mathrm{im}\big(I+B(A-\mathrm{i}tI)^{-1}\big) =: X_t$.
Nach Satz 17.6 ist zu zeigen: $\exists t \in \mathbb{R}^* : X_t = X_{-t} = H$. Nach Satz 6.6 genügt es zu zeigen, dass

$$\exists t \in \mathbb{R}^* : B(A \pm \mathrm{i}tI)^{-1} \in L(H),\ \big\|B(A \pm \mathrm{i}tI)^{-1}\big\| < 1$$

(denn dann ist $-1 \in \varrho\big(B \cdot (A \pm \mathrm{i}tI)^{-1}\big) \implies X_{\pm t} = H$).

b) Idee: $|t| \to \infty \implies$ “$B \cdot (A - \mathrm{i}tI)^{-1} \approx 0$”.
Exakt: $x \in H \underset{\text{L. 17.2, 3)}}{\implies} \big|(A - \mathrm{i}tI)^{-1}x\big| \le \dfrac{1}{|t|}\,|x|$ und

$$\Big|B\underbrace{(A - \mathrm{i}tI)^{-1}x}_{y}\Big| \le \delta|Ay| + \underbrace{c|y|}_{\le \frac{c}{|t|}|x|};$$

$$\big|(A - \mathrm{i}tI)y\big|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vgl. S. 80 oben}}}{=} |Ay|^2 + |t|^2|y|^2 \ge |Ay|^2$$

$\implies |Ay| \le \big|(A - \mathrm{i}tI)y\big| = |x|$
$\implies \big|B(A - \mathrm{i}tI)^{-1}x\big| \le \left(\delta + \dfrac{c}{|t|}\right)|x| = C|x|$ mit $0 \le C < 1$ für $|t|$ groß genug $\implies$
$\implies B(A - \mathrm{i}tI)^{-1} \in L(H)$ und $\big\|B(A - \mathrm{i}tI)^{-1}\big\| \le C < 1$ für großes $|t|$. $\square$

Bsp.: 1) $A : \big\{f \in L^2(\mathbb{R}^n);\ x_j f \in L^2(\mathbb{R}^n)\big\} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : f \longmapsto x_j f \implies A \in \mathrm{Ls}\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)$;
A ist sa. nach Satz 17.6, 2), denn $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \implies A - \lambda I$ ist surjektiv, da für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $g = \dfrac{f}{x_j - \lambda} \in D(A)$ und $(A - \lambda I)g = f$. [Das sind die Ortsoperatoren der Quantenmechanik.]

2) $B : D(A) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : f \longmapsto \sqrt{|x_j|}\cdot f \implies B \in \mathrm{Ls}\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big),\ \forall f \in D(A) : \|Bf\|^2 =$
$= \displaystyle\int |x_j| \cdot \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \underset{\text{Hölder}}{\le} \left[\int |x_j|^2 \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x\right]^{1/2} = \|Af\| \cdot \|f\|$
$\implies \|Bf\| \le \sqrt{\|Af\| \cdot \|f\|} \le \dfrac{1}{2}\big(\|Af\| + \|f\|\big) \underset{\text{Kato}}{\implies} A + B$ sa.
(was natürlich auch Satz 17.6 zeigt).

Satz 17.9
$$A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H) \implies \|A\| = \sup_{|x|\le 1} \big|(Ax,x)\big|.$$

Beweis $M := \sup\limits_{|x|\le 1} \underbrace{\big|(Ax,x)\big|}_{\substack{\le \underbrace{|Ax|}\cdot|x| \\ \le \|A\|\cdot|x|}} \le \|A\|;$

andererseits ist für $x,y \in H$

$$\mathrm{Re}(Ax,y) = \frac{1}{2}\big[(Ax,y) + \underbrace{\overline{(Ax,y)}}_{(y,Ax) \underset{A\text{ sym.}}{=} (Ay,x)}\big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(A(x+y),x+y) - \big(A(x-y),x-y\big)\Big] \implies \forall x,y \in H \text{ mit } |x|,\ |y| \le 1:$$

$$\begin{aligned} \big|\mathrm{Re}(Ax,y)\big| &\le \frac{1}{4}\Big[\big|\big(A(x+y),x+y\big)\big| + \big|\big(A(x-y),x-y\big)\big|\Big] \\ &\underset{\circledast}{\le} \frac{1}{4}M\big[|x+y|^2 + |x-y|^2\big] = \frac{M}{2}\big(|x|^2+|y|^2\big) \le M \end{aligned}$$

$$\implies \|A\|^2 = \sup_{|x|\le 1}(Ax,Ax) = \sup_{\substack{|x|\le 1\\ Ax\ne 0}} \underbrace{\left(Ax, \underbrace{\frac{Ax}{|Ax|}}_{y}\right)}_{\le M} \cdot \underbrace{|Ax|}_{\le\|A\|} \le M\cdot\|A\| \implies \|A\| \le M.$$

$$\left(\circledast \text{ weil } \forall u \in H: \big|(Au,u)\big| \underset{\text{falls } u\ne 0}{=} \left|\left(A\frac{u}{|u|}\,,\ \frac{u}{|u|}\right)\right| \cdot |u|^2 \le M\cdot|u|^2\right)$$ $\square$

§ 18 Das Spektrum von selbstadjungierten Operatoren

Def.:
Für $A \in \mathrm{Lu}(H)$ heißt (wie in S. 33, 67) $\varrho(A) := \big\{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I : D(A) \longrightarrow H$ bijektiv, $(A-\lambda I)^{-1} \in L(H)\big\}$ **Resolventenmenge**, $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ **Spektrum** und $\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \exists x \in D(A) \setminus \{0\} : Ax = \lambda x\big\}$ **Punktspektrum**.

Bemerkung Die folgenden 2 Beispiele zeigen, dass das Spektrum für nicht sa. Operatoren nicht sehr aussagekräftig ist.

Bsp.: 1) $H = L^2\big((0,1)\big),\ A : W^{2,1}\big((0,1)\big) \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$. Dann ist A NICHT symmetrisch, denn für $f, g \in \overline{C}^1\big((0,1)\big) \subset W^{2,1}\big((0,1)\big)$ gilt

$$(Af, g) = \int_0^1 \mathrm{i}f'(t) \cdot \overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,\underbrace{\big(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}\big)}_{\text{i.A. } \neq 0 \text{ (z.B. für } f(t)=g(t)=t)} + \underbrace{\int_0^1 f(t)\,\overline{\mathrm{i}\,g'(t)}\,\mathrm{d}t}_{(f,Ag)}.$$

Weiters ist $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \mathbb{C}$, da $A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} = \lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}$.
2) Es ist $W^{2,1}\big((0,1)\big) \subset \overline{C}^0\big((0,1)\big)$, da $f \in W^{2,1}\big((0,1)\big) \implies f' \in L^2\big((0,1)\big) \subset L^1\big((0,1)\big)$ (vgl. Üb. 14) $\implies f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t + \text{const} \in C\big([0,1]\big) \cong \overline{C}^0\big((0,1)\big)$.
Wenn wir $B : \big\{f \in W^{2,1}\big((0,1)\big);\ f(0) = 0\big\} \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$ setzen, so ist $B \subset A$ und $\sigma(B) = \{\}$, denn $R_\lambda : H \longrightarrow D(B) : f \longmapsto -\mathrm{i}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)} f(t)\,\mathrm{d}t$ erfüllt $(B - \lambda I)R_\lambda = R_\lambda(B - \lambda I) = I$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ (s. Übung 59).

Bemerkung Für $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ gibt es zwar kein $x \neq 0$ mit $(A - \lambda I)x = 0$, aber eine „Weylsche Folge“.

Def.:
Es sei $A \in \mathrm{Lu}(H),\ \lambda \in \mathbb{C}$. $(x_n) \in D(A)^{\mathbb{N}}$ heißt **Weylsche Folge** zu $\lambda \iff$

(i) $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt,

(ii) $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nicht präkompakt,

(iii) $(A - \lambda I)x_n \to 0$.

Lemma 18.1
Es sei $A \in \mathrm{Lsa}(H)$. Dann gilt

1) $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\subset\varrho(A)$ und $\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|\le\dfrac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$ für $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

2) a) $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)\iff\overline{\operatorname{im}(A-\lambda I)}\ne H$

b) $\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{p}}(A)\iff\operatorname{im}(A-\lambda I)\subsetneq\overline{\operatorname{im}(A-\lambda I)}=H$

c) $\lambda\in\varrho(A)\iff\operatorname{im}(A-\lambda I)=H$

3) $\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{p}}(A)\implies\exists$ Weylsche Folge zu λ

4) $\lambda_1\ne\lambda_2\in\sigma_{\mathrm{p}}(A),\ Ax_i=\lambda_i x_i\implies(x_1,x_2)=0$

Beweis 1) folgt aus Satz 17.7 und L. 17.2, 3).
2) a) $\overline{\operatorname{im}(A-\lambda I)}\ne H\underset{\text{L. 17.2, 2)}}{\iff}\ker(\underbrace{A^*}_{=A}-\overline{\lambda}I)\ne\{0\}\iff\overline{\lambda}\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)\underset{1)}{\iff}\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)$.

b) $A\in\operatorname{Lsa}(H)\implies A$ abg. $\implies A-\lambda I$ abg., d.h. der Graph von $A-\lambda I$ ist in $H\times H$ abgeschlossen $\implies$ der Graph von $(A-\lambda I)^{-1}:\operatorname{im}(A-\lambda I)\longrightarrow H$ ist in $H\times H$ abgeschlossen, falls $\lambda\notin\sigma_{\mathrm{p}}(A)$. Nach dem Graphensatz ist dann $(A-\lambda I)^{-1}\in L(H)$ falls $\lambda\notin\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ und $\operatorname{im}(A-\lambda I)=H$. Somit: $\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{p}}(A)\implies\operatorname{im}(A-\lambda I)\subsetneq\overline{\operatorname{im}(A-\lambda I)}=H$.
„$\Longleftarrow$“ folgt aus a). c) folgt aus a) und b).
3) $\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{p}}(A)\overset{2)}{\implies}(A-\lambda I)^{-1}\in\operatorname{La}(H),\ D\big((A-\lambda I)^{-1}\big)=\operatorname{im}(A-\lambda I)\ne H\implies$ (vgl. S. 75) $\implies(A-\lambda I)^{-1}$ unbeschränkt $\implies$
$\implies\forall n\in\mathbb{N}:\exists y_n\in\operatorname{im}(A-\lambda I):\left|(A-\lambda I)^{-1}y_n\right|>n|y_n|$.
Setze $x_n=\dfrac{(A-\lambda I)^{-1}y_n}{\left|(A-\lambda I)^{-1}y_n\right|}\implies\left|(A-\lambda I)x_n\right|=\dfrac{|y_n|}{\left|(A-\lambda I)^{-1}y_n\right|}<\dfrac{1}{n}\to0$ und $|x_n|=1$ und $\{x_n;n\in\mathbb{N}\}$ ist nicht präkompakt, denn sonst $\exists$ Teilfolge $x_{n_j}\longrightarrow x\implies$
$|x|=\lim\limits_{j\to\infty}|x_{n_j}|=1,\ (A-\lambda I)x_{n_j}\to0\implies Ax_{n_j}\longrightarrow\lambda x\underset{A\text{ abg.}}{\implies}x\in D(A)\setminus\{0\},\ Ax=\lambda x$ ↯ zu $\lambda\notin\sigma_{\mathrm{p}}(A)$.
Also ist (x_n) eine Weylsche Folge zu λ.
4) $\lambda_1(x_1,x_2)=(Ax_1,x_2)=(x_1,Ax_2)=\overline{\lambda}_2(x_1,x_2)=\lambda_2(x_1,x_2)$ (da $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$) $\implies$ $(x_1,x_2)=0$ wenn $\lambda_1\ne\lambda_2$. □

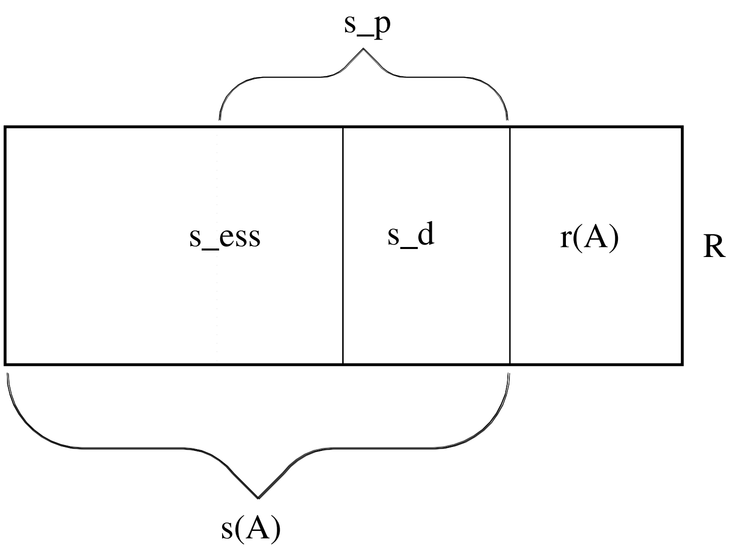
Wir wollen $\sigma(A)$ nun neu einteilen:

Satz 18.1 + Def.
Es sei $A\in\operatorname{Lsa}(H)$. Dann gilt:

1) $\sigma_{\mathrm{ess}}(A):=\{\lambda\in\mathbb{C};\ \exists$ Weylsche Folge zu $\lambda\}\subset\sigma(A)$.
$\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ heißt **essentielles Spektrum** von A.

2) $\sigma_{\mathrm{d}}(A):=\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(A)\subset\big\{\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A);\ \lambda$ Eigenwert endlicher Vielfachheit, d.h. $\dim\ker(A-\lambda I)<\infty\big\}$.
$\sigma_{\mathrm{d}}(A)$ heißt **diskretes Spektrum** von A.

Bemerkung In S. 101 werden wir sehen, dass $\sigma_{\mathrm{d}}(A) = \big\{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A);$
$\dim\ker(A-\lambda I) < \infty \wedge \exists\delta > 0 : (\lambda-\delta, \lambda+\delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}\big\}$. Davon kommt der Name.
Symbolbild:



frag replacements
σ_{ess}
σ_{d}
$\varrho(A)$
$\sigma(A)$
σ_{p}

Beweis 1) Es sei $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ und x_n eine Weylsche Folge.
Annahme: $\lambda \notin \sigma(A) \implies (A-\lambda I)^{-1} \in L(H) \implies$
$|x_n| = \big|(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)x_n\big| \le C\big|(A-\lambda I)x_n\big| \to 0 \implies \lightning$ zu $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ nicht präkompakt.
2) a) Nach Lemma 18.1, 3) ist $\sigma_{\mathrm{d}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A)$
b) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $V_\lambda := \ker(A-\lambda I) \le H$ abg. (vgl. Lemma 17.2, 2)). Wenn $\dim V_\lambda = \infty \implies$
$\exists$ ON-System $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ in $V_\lambda \implies (x_n)$ ist Weylsche Folge zu $\lambda \implies \lambda \notin \sigma_{\mathrm{d}}(A)$. $\square$

Lemma 18.2
Es sei $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ mit $\dim\ker(A-\lambda I) < \infty$.
Weiters sei $H_1 := \overline{\mathrm{im}(A-\lambda I)} \le H,\ D(\tilde{A}) := D(A) \cap H_1$, und $\tilde{A} := A|_{D(\tilde{A})}$.
Dann ist $\tilde{A} \in \mathrm{Lsa}(H_1)$ und $\sigma_{\mathrm{ess}}(\tilde{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.

Beweis a) $\forall x \in D(\tilde{A}) : \tilde{A}x = (A-\lambda I)x + \lambda x \in H_1 \implies \tilde{A} : D(\tilde{A}) \longrightarrow H_1$.
b) $A = A^*,\ \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \mathbb{R} \overset{\text{L. 17.2, 2)}}{\implies} H \simeq H_1 \oplus \ker(A-\lambda I) : x \longmapsto (\mathrm{pr}_1 x; \mathrm{pr}_2 x)$;
$\ker(A-\lambda I) \subset D(A) \implies \forall x \in D(A) : \mathrm{pr}_1 x = x - \mathrm{pr}_2 x \in D(\tilde{A})$.
Daher ist $D(\tilde{A}) \subset H_1$ dicht, denn $x \in H_1,\ x_n \in D(A)$ mit $x_n \longrightarrow x \implies$
$\mathrm{pr}_1 x_n \in D(\tilde{A}),\ \mathrm{pr}_1 x_n \longrightarrow \mathrm{pr}_1 x = x$.
c) $\forall x, y \in D(\tilde{A}) : (\tilde{A}x, y) = (x, \tilde{A}y) \implies \tilde{A} \in \mathrm{Ls}(H_1)$.
d) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \underset{\text{Satz 17.7}}{\implies} \mathrm{im}(A - \mathrm{i}tI) = H \implies \mathrm{im}\big(\mathrm{pr}_1 \circ (A - \mathrm{i}tI)\big) = H_1$;
$x \in D(A) \implies \mathrm{pr}_1 x \in D(\tilde{A}),\ Ax = \underbrace{\tilde{A}\mathrm{pr}_1 x}_{\in H_1} + \underbrace{A\mathrm{pr}_2 x}_{\lambda \mathrm{pr}_2 x \in H_1^\perp} \implies \mathrm{pr}_1 \circ A(x) = \tilde{A} \circ \mathrm{pr}_1(x) \implies$

$H_1 = \operatorname{im}(\mathrm{pr}_1 \circ (A - \mathrm{i}tI)\big) = \operatorname{im}\big((\tilde{A} - \mathrm{i}tI) \circ \mathrm{pr}_1\big) = \operatorname{im}(\tilde{A} - \mathrm{i}tI) \underset{\text{Satz 17.6}}{\Longrightarrow} \tilde{A} \in \mathrm{Lsa}(H_1)$

e) $\mu \in \sigma_{\text{ess}}(\tilde{A}) \implies \exists$ Weylsche Folge $(x_n) \in D(\tilde{A})^{\mathbb{N}}$ zu μ und $\tilde{A} \implies (x_n)$ Weylsche Folge zu μ und $A \implies \mu \in \sigma_{\text{ess}}(A)$

f) $\mu \in \sigma_{\text{ess}}(A) \implies \exists$ Weylsche Folge $(x_n) \in D(A)^{\mathbb{N}}$ zu μ und $A \implies (\mathrm{pr}_1 x_n) \in D(\tilde{A})^{\mathbb{N}}$ ist beschränkt, $(A - \mu I) \underbrace{x_n}_{\mathrm{pr}_1 x_n + \mathrm{pr}_2 x_n} = \underbrace{(\tilde{A} - \mu I)(\mathrm{pr}_1 x_n)}_{\in H_1} + \underbrace{(A - \mu I)(\mathrm{pr}_2 x_n)}_{(\lambda - \mu)\mathrm{pr}_2 x_n \in H_1^{\perp}} \to 0 \implies$

$(\tilde{A} - \mu I)\mathrm{pr}_1 x_n \to 0$

Annahme: $\{\mathrm{pr}_1 x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ist präkompakt $\implies$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz $\{y_1, \cdots, y_n\} \subset H_1$;

$\{\mathrm{pr}_2 x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt, $\dim \ker(A - \lambda I) < \infty \implies$

$\exists$ endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz $\{z_1, \cdots, z_M\} \subset \ker(A - \lambda I) \implies \{y_i + z_j;\ 1 \le i \le N, 1 \le j \le M\}$ endliches ε-Netz zu $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \implies \lightning$ zu (x_n) Weylsche Folge.

Also ist $\mathrm{pr}_1 x_n$ eine Weylsche Folge zu λ, $\tilde{A} \implies \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\tilde{A})$. □

Satz 18.2

Sei $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ $\big(= L(H) \cap \mathrm{Lsa}(H)\big)$. Dann gilt

1) $\sigma(A) \subset \big[-\|A\|, \|A\|\big]$;

2) $\sigma(A) \not\subset \big(-\|A\|, \|A\|\big)$, d.h. $\|A\| \in \sigma(A) \vee -\|A\| \in \sigma(A)$.

Beweis 1) folgt aus Lemma 18.1, 1) und Satz 6.6.

2) Nach Satz 17.9 ist $\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} \big|(Ax, x)\big| \implies \exists x_n \in H$ mit $|x_n| = 1$ und

$\big|\underbrace{(Ax_n, x_n)}_{\in \mathbb{R}}\big| \longrightarrow \|A\|$;

bei Übergang zu einer Teilfolge gilt sogar $(Ax_n, x_n) \longrightarrow \varepsilon\|A\|$ für ein $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

$$0 \le \big|Ax_n - \varepsilon\|A\|x_n\big|^2 = \underbrace{|Ax_n|^2}_{\le \|A\|^2} - 2\varepsilon\|A\|(Ax_n, x_n) + \|A\|^2 \underbrace{|x_n|^2}_{1} \le 2\|A\|^2 - 2\varepsilon\|A\| \underbrace{(Ax_n, x_n)}_{\to \varepsilon\|A\|} \to 0$$

$\implies \big(A - \varepsilon\|A\|I\big)x_n \to 0$

1. Fall $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ nicht präkompakt $\implies (x_n)$ Weylsche Folge zu $\varepsilon\|A\|$

$$\implies \varepsilon\|A\| \in \sigma_{\text{ess}}(A) \subset \sigma(A)$$

2. Fall $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ präkompakt $\implies \exists$ Teilfolge $x_{n_j} \longrightarrow x \in H$

$$\implies |x| = 1,\ \big(A - \varepsilon\|A\|I\big)x = 0 \implies \varepsilon\|A\| \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \sigma(A)$$

□

Bemerkung $K_{\text{Satz 7.6}} \in L(H) \setminus \mathrm{Ls}(H)$ und $\pm\|K\| \notin \sigma(K) = \{0\}$

Satz 18.3 / 18.4
Sei $\dim H = \infty$ und $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$. Dann gilt:

1) A kompakt $\iff \sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \{0\}$;

2) Wenn A kompakt ist, so ist

   a) $\sigma(A)$ abzählbar und hat höchstens den Häufungspunkt 0 und $\forall \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$: $\dim \ker(A - \lambda I) < \infty$;

   b) $\exists$ ONB $S \subset H$ bestehend aus Eigenvektoren von A; wenn für $e \in S$ $Ae = \lambda_e e$, $\lambda_e \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, so ist $Ax = A\big(\sum\limits_{e\in S}(x,e)e\big) = \sum\limits_{e\in S}(x,e)\cdot\lambda_e\cdot e$.

Beweis 2) a) folgt aus Satz 11.2, S. 68.
2) b) Nach Lemma 18.1, 4) sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Für $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ sei S_λ eine ONB in $\ker(A-\lambda I)$ und $S := \bigcup\limits_{\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)} S_\lambda \implies S$ ist ein ON-System.
Es bleibt noch zu zeigen, dass S eine ONB ist, d.h. dass $H_1 := S^\perp = \{0\}$ (vgl. Lemma 8.4).
$\forall x \in H_1 : \forall e \in S_\lambda : (Ax, e) = (x, Ae) = (x, \lambda e) = 0 \implies \forall x \in H_1 : Ax \in H_1 \implies$
$\tilde{A} = A|_{H_1} \in L(H_1)$ und $\tilde{A} \in \mathrm{Lsa}(H_1) \cap \mathrm{Com}(H_1)$.
1. Fall $\|\tilde{A}\| > 0 \underset{\text{Satz 18.2}}{\implies} \lambda = \|\tilde{A}\| \in \sigma(\tilde{A})$ oder $\lambda = -\|\tilde{A}\| \in \sigma(\tilde{A}) \underset{\text{Satz 11.2, 1)}}{\implies} \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\tilde{A}) \implies$
$H_1 \cap \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \implies \lightning$ zu $H_1 \perp \ker(A - \lambda I)$
2. Fall $\tilde{A} = 0 \implies H_1 \subset \ker A$; $H_1 \perp \ker A \implies H_1 = \{0\}$.
[Der Rest in 2) b) ist klar, da $x = \sum\limits_{e\in S}(x,e)e$ in H konvergiert (vgl. Lemma 8.3) $\implies$
$Ax = \sum\limits_{e\in S}(x,e)\underbrace{Ae}_{\lambda_e e}$.]
1) a) Es sei A kompakt. Wir zeigen $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \subset \{0\}$.
Annahme $0 \neq \lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$
(x_n) sei eine Weylsche Folge zu $\lambda \underset{A\in\mathrm{Com}(H)}{\implies} \{Ax_n; n \in \mathbb{N}\}$ präkompakt, d.h. $\forall$ Teilfolge Ax_{n_j} : $\exists$ konvergente Teilteilfolge $Ax_{n_{j_k}}$; $Ax_n - \lambda x_n \to 0 \implies \lambda x_{n_{j_k}}$ konvergent $\underset{\lambda\neq 0}{\implies} x_{n_{j_k}}$ konvergent.
Daher hat jede Teilfolge x_{n_j} eine konvergente Teilteilfolge $x_{n_{j_k}} \implies \lightning$ zu $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ nicht präkompakt.
1) b) Es sei A kompakt. Wir zeigen $0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.
$\dim H = \infty \implies \mathrm{Card}\, S \geq \aleph_0$; für $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ ist $\dim \ker(A - \lambda I) < \infty$.
Daher haben wir 2 Fälle:
1. Fall $\#\sigma(A) < \infty \implies \dim \ker A = \infty \underset{\text{Satz 18.1, 2)}}{\implies} 0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ oder
2. Fall $\#\sigma(A) = \infty \implies \exists \lambda_n \in \sigma(A)$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise verschieden $\underset{2)}{\implies} \lambda_n \to 0$;
wenn $e_n \in S$ mit $Ae_n = \lambda_n e_n \implies e_n$ ON-System und
$Ae_n = \lambda_n e_n \to 0 \implies (e_n)$ ist Weylsche Folge zu $0 \implies 0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.

1) c) Es sei nun $\sigma_{\text{ess}}(A) = \{0\}$. Wir zeigen, dass $A \in \text{Com}(H)$, d.h. $A(M)$ präkompakt, wenn $M := \{x \in H;\ |x| \leq 1\}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ endliches ε-Netz zu $A(M)$.
α) $\sigma(A)$ hat höchstens den Häufungspunkt 0, denn wenn $0 \neq \lambda_n \in \sigma(A)$ paarweise verschieden mit $\lambda_n \longrightarrow \lambda \neq 0 \implies \lambda_n \in \sigma_{\text{p}}(A) \implies \exists x_n \in H : Ax_n = \lambda_n x_n,\ |x_n| = 1 \underset{\text{L. 18.1, 4)}}{\implies} x_n$ ON-System, $(A - \lambda I)x_n = (\lambda_n - \lambda)x_n \to 0 \implies x_n$ ist Weylsche Folge zu $\lambda \longrightarrow \lightning$ zu $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(A)$.
β) Sei $\varepsilon > 0$ und $H_1 := \sum\limits_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ |\lambda| > \varepsilon/2}} \ker(A - \lambda I)$. Dann ist $\dim H_1 < \infty$ (nach Satz 18.1, 2) und $\tilde{A} = A|_{H_2} : H_2 := H_1^{\perp} \longrightarrow H_2$ und $\tilde{A} \in L(H_2) \cap \text{Ls}(H_2) \implies$ entweder $\tilde{A} = 0$ oder $\pm\|\tilde{A}\| \in \sigma_{\text{p}}(\tilde{A}) \subset \sigma_{\text{p}}(A)$ (nach Satz 18.2 und wie in S. 87) $\implies$ $H_2 \cap \ker\Big(A - \big(\pm\|\tilde{A}\|\big)I\Big) \neq \{0\} \implies \|\tilde{A}\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
γ) Sei $\{y_1, \cdots, y_N\}$ ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz zu $A(H_1 \cap M)$; $H \simeq H_1 \oplus H_2 : x \longmapsto (\text{pr}_1 x; \text{pr}_2 x) \implies$ $\forall x \in M : Ax = A(\text{pr}_1 x) + A(\text{pr}_2 x)$,

$$\exists j : \big|A(\text{pr}_1 x) - y_j\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \big|\underbrace{A(\text{pr}_2 x)}_{=\tilde{A}(\text{pr}_2 x)}\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{|\text{pr}_2 x|}_{\leq |x|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\implies |Ax - y_j| \leq \varepsilon \implies \{y_1, \cdots, y_N\}$ ist ε-Netz zu $A(M)$. $\square$

Bsp. $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ mit $\forall x, y \in \Omega : K(x,y) = \overline{K(y,x)} \implies$ $K \in \text{Com}\big(L^2(\Omega)\big)$ und $K = K^*$ (vgl. Satz 7.5, S. 40) $\implies$ Satz 18.3/4 ist anwendbar.
Wenn $\{f_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ eine ONB aus „Eigenfunktionen", d.h. mit $Kf_j = \lambda_j f_j$ ist, so ist also $Kf = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{f_j(x)}\,\mathrm{d}x \cdot \lambda_j f_j$, und für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(K)$, d.h. $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ ist

$$f = (K - \lambda I)^{-1} g = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} g(x)\overline{f_j(x)}\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{\lambda_j - \lambda} \cdot f_j$$

die Lösung der Fredholmschen Integralgleichung $\int\limits_{\Omega} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x)$.

§ 19 Spektralscharen und Spektraloperatoren

Motivation
Wenn $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ selbstadjungiert ist (d.h. $A = A^*$ bzw. $\forall z, w \in \mathbb{C}^n : (Az, w) = (z, Aw)$, d.h. $\sum\limits_{i,j} a_{ij} z_j \overline{w_i} = \sum\limits_{i,j} z_j \overline{a_{ji} w_i}$ bzw. $\forall i, j : a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ bzw. $A = \overline{A^T}$ (die Matrix A wird dann oft als „hermitesch" bezeichnet)), so gilt (siehe lineare Algebra): $\exists$ ONB $e_1, \cdots, e_n$ aus EVen von A, d.h. $Ae_i = \lambda_i e_i$, und die Eigenwerte λ_i sind reell. Wenn $\mu_1 < \cdots < \mu_r$ die verschiedenen unter den Eigenwerten λ_i sind, $x \in \mathbb{C}^n \implies Ax = A\big(\sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\big) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)\lambda_i e_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j P_j(x)$, wobei $P_j(x) = \sum\limits_{\lambda_i = \mu_j} (x, e_i)e_i$ der Projektor auf den Eigenraum $\ker(A - \mu_j I)$ zum Eigenwert μ_j ist. Dann ist $A^m = \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j^m P_j$ und $\varphi(A) := \sum\limits_{j=1}^{r} \varphi(\mu_j) P_j$ kann für stetiges $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert werden.
Für $\dim H = \infty$ hat A im Allgemeinen zu wenig Eigenwerte, aber die Darstellung $A = \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j P_j$ gilt allgemeiner als „Riemann-Stieltjes-Integral" $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ für $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ („Spektralsatz", s. § 20).

Def.:
Die Abbildung $E : \mathbb{R} \longrightarrow L(H)$ heißt **Spektralschar** $\iff \forall \lambda \in \mathbb{R} : E_\lambda$ ist Projektor und

a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda,\mu\}}$

b) $\forall x \in H : \lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0, \; \lim\limits_{\lambda \to \infty} E_\lambda x = x$

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in H : \lim\limits_{\mu \nearrow \lambda} E_\mu x = E_\lambda x$

Bezeichnung Für eine Spektralschar E sei $H^\lambda := \mathrm{im}(E_\lambda) = \ker(E_\lambda - I) \leq H$ abg. (vgl. S. 55).

Lemma 19.1
$H^\lambda \leq H$ seien abgeschlossen für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $E_\lambda :=$ Projektor zu H^λ.
Dann gilt: E Spektralschar $\iff$

a) $\forall \lambda \leq \mu : H^\lambda \subset H^\mu$

b) $\bigcap\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} H^\lambda = \{0\}, \; \overline{\bigcup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} H^\lambda} = H$

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \overline{\bigcup\limits_{\mu < \lambda} H^\mu} = H^\lambda$

In diesem Fall gilt für $\lambda \leq \mu : E_\mu - E_\lambda =$ Projektor zu $H^\mu \cap (H^\lambda)^\perp$.

Beweis „ $\Longrightarrow$ “ a) $\lambda \leq \mu \implies H^\lambda = \operatorname{im} E_\lambda = \operatorname{im}(E_\mu E_\lambda) \subset \operatorname{im} E_\mu = H^\mu$.
b) $x \in H \implies x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda x \in \overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} H^\lambda}$; $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} H^\lambda \implies x = \lim\limits_{\lambda\to-\infty} x = \lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = 0$
c) $x \in H^\lambda \implies x = E_\lambda x = \lim\limits_{\mu\nearrow\lambda} \underbrace{E_\mu x}_{\in H^\mu} \in \overline{\bigcup\limits_{\mu<\lambda} H^\mu}$.

„$\Longleftarrow$“ a) $\lambda \leq \mu,\ H \supset H^\mu \supset H^\lambda,\ x \in H \implies x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in H^\mu,\ x_2 \in (H^\mu)^\perp$, $E_\mu x = x_1 = u + v,\ u \in H^\lambda,\ v \in H^\mu \cap (H^\lambda)^\perp,\ E_\lambda x = u$ (da $v + x_2 \in (H^\lambda)^\perp$) $\implies E_\lambda E_\mu x = u = E_\mu E_\lambda x$ und $(E_\mu - E_\lambda)x = v$, d.h. $E_\mu - E_\lambda =$ Projektor zu $H^\mu \cap (H^\lambda)^\perp$.

b) α) $x \in H = \overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} H^\lambda} \implies \exists x_j \in H^{\lambda_j} : x = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$;
$\lambda \geq \lambda_j \implies |x - E_\lambda x| = d(x, H^\lambda) \leq |x - \underbrace{x_j}_{\in H^\lambda}| \to 0 \implies x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda x$.
β) $x \in H = \{0\}^\perp = (\bigcap\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} H^\lambda)^\perp \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(s. Beweis v. L. 19.2)}}}{=} \overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} H^{\lambda\perp}} \implies$
$\implies x = \lim\limits_{j\to\infty} x_j,\ x_j \in H^{\lambda_j\perp};\ \lambda \leq \lambda_j \implies E_{\lambda_j} x = \underbrace{E_\lambda x}_{\in H^\lambda} + \underbrace{(E_{\lambda_j} - E_\lambda)x}_{\in H^{\lambda\perp}}$
$\implies |E_\lambda x| \leq |E_{\lambda_j} x|$ und $|E_{\lambda_j} x| = d(x, H^{\lambda_j\perp}) \leq |x - x_j| \to 0 \implies \lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = 0$.

c) $H^\lambda = \overline{\bigcup\limits_{\mu<\lambda} H^\mu},\ x \in H \implies \exists x_j \in H^{\mu_j}$ mit $\mu_j < \lambda : E_\lambda x = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$;
$\mu_j \leq \mu < \lambda \implies E_\lambda x - E_{\mu_j} x = \underbrace{E_\lambda x - E_\mu x}_{\in H^{\mu\perp}} + \underbrace{E_\mu x - E_{\mu_j} x}_{\in H^\mu}$
$\implies |E_\lambda x - E_\mu x| \leq |E_\lambda x - E_{\mu_j} x| = d(E_\lambda x, H^{\mu_j}) \leq |E_\lambda x - x_j| \to 0 \implies \lim\limits_{\mu\nearrow\lambda} E_\mu x = E_\lambda x$. □

Bemerkung *Vorsicht:* $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0,\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda = I,\ \lim\limits_{\mu\nearrow\lambda} E_\mu = E_\lambda$ gilt im Allgemeinen **NICHT** in $L(H)$, weil $\|P\| = 1$ für P Projektor, $P \neq 0$.

Lemma 19.2
Wenn E eine Spektralschar ist und $\lambda \in \mathbb{R}$, so existiert $E_{\lambda+0}x := \lim\limits_{\mu\searrow\lambda} E_\mu x$ für jedes $x \in H$ und $E_{\lambda+0}$ ist der Projektor zu $\bigcap\limits_{\mu>\lambda} H^\mu =: H^{\lambda+0}$.

Beweis a) $H_1 := \bigcap\limits_{\mu>\lambda} H^\mu \leq H$ abgeschlossen; $x \in H_1 \implies \lim\limits_{\mu\searrow\lambda} \underbrace{E_\mu x}_{=x} = x$

b) Offenbar ist $H_1^\perp \supset H^{\mu\perp} \implies H_1^\perp \supset \overline{\bigcup\limits_{\mu>\lambda} H^{\mu\perp}}$, wäre $H_1^\perp \supsetneqq \overline{\bigcup\limits_{\mu>\lambda} H^{\mu\perp}}$ [1]

$\implies H_1 = H_1^{\perp\perp} \subsetneqq \overline{\bigcup\limits_{\mu>\lambda} H^{\mu\perp}}^{\perp} = (\bigcup\limits_{\mu>\lambda} H^{\mu\perp})^\perp = \bigcap\limits_{\mu>\lambda} \underbrace{H^{\mu\perp\perp}}_{=H^\mu} = H_1 \; \lightning$

Also ist $H_1^\perp = \overline{\bigcup\limits_{\mu>\lambda} H^{\mu\perp}}$.

c) Wenn $x \in H_1^\perp,\ x = \lim\limits_{j\to\infty} x_j,\ x_j \in H^{\mu_j\perp},\ \lambda < \mu_j$ und $\lambda < \mu \le \mu_j \implies$

$\implies |E_\mu x| \le \big|E_\mu(x - x_j)\big| + |\underbrace{E_\mu x_j}_{0 \text{ da } x_j \in H^{\mu_j\perp} \subset H^{\mu\perp}}| \le |x - x_j| \to 0$, d.h. $\lim\limits_{\mu\searrow\lambda} E_\mu x = 0$.

d) Somit ist $\lim\limits_{\mu\searrow\lambda} E_\mu x = x_1$ für $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in H_1,\ x_2 \in H_1^\perp$. $\square$

Def.:
$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** $\iff \forall \lambda \le \mu : h(\lambda) \le h(\mu)$.

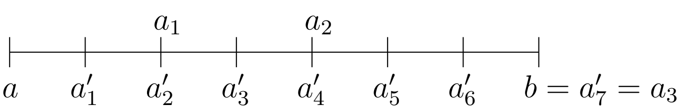
Lemma 19.3 + Def.
Wenn $a < b \in \mathbb{R},\ \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend ist, so existiert

$$\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda) := \lim_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(a_i)(h^1(a_{i+1}) - h^1(a_i)),$$

wobei $Z : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ ist,
$\mathrm{d}(Z) = \max\big\{a_{i+1} - a_i;\ i = 0, \cdots, k-1\big\},\ \{a,b\} \in \big\{[a,b], [a,b), (a,b], (a,b)\big\}$ und $h^1(\lambda) = h(\lambda)$ für $\lambda \in (a,b),\ h^1(a) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\nearrow a} h(\lambda) : \{= [\\ \lim\limits_{\lambda\searrow a} h(\lambda) : \{= (\end{cases}$ und $h^1(b) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\nearrow b} h(\lambda) : \} =) \\ \lim\limits_{\lambda\searrow b} h(\lambda) : \} =]. \end{cases}$

$\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)$ heißt **Riemann-Stieltjes-Integral** (RS$\int$).

Beweis (vgl. Analysis 1 für das Riemann-Integral)
Wenn $Z_1 : a = a_0' < a_1' < \cdots < a_l' = b$ und Z_1 feiner als Z ist, d.h. z.B.



$\implies h^1(a_{j+1}) - h^1(a_j) = \sum\limits_{i=\cdots}^{\cdots} h^1(a_{i+1}') - h^1(a_i') \implies$

[1]ist ein abgeschlossener Untervektorraum von H, da $H^{\mu_1\perp} \subset H^{\mu_2\perp}$ für $\mu_1 \ge \mu_2$

$$\Big|\sum_{i=0}^{l-1}\varphi(a'_i)\big(h^1(a'_{i+1})-h^1(a'_i)\big)-\sum_{j=0}^{k-1}\varphi(a_j)\big(h^1(a_{j+1})-h^1(a_j)\big)\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{i=0}^{l-1}\underbrace{\big(\varphi(a'_i)-\varphi(a_{j_i})\big)}_{|\cdot|\le\varepsilon\text{ für }\mathrm{d}(Z)\le\delta,\text{ da }\varphi\text{ glm. stetig}}\cdot\big(h^1(a'_{i+1})-h^1(a'_i)\big)\Big|\le\varepsilon\cdot\big(h^1(b)-h^1(a)\big)\to 0$$

□

[**Bemerkung** Die Bezeichnung kommt davon, dass $\displaystyle\int_{(a,b)}\varphi\,\mathrm{d}h$ für $h\in C^1(\mathbb{R})$ das übliche Integral von $\varphi\,\mathrm{d}h\in\Omega^1\big((a,b)\big)$ ist. Beachte auch, dass $\mathcal{D}\big((a,b)\big)\longrightarrow\mathbb{C}:\varphi\longmapsto\displaystyle\int_{(a,b)}\varphi\,\mathrm{d}h$ gerade $(T_h)'\in\mathcal{D}'\big((a,b)\big)$ ist.]

Bsp. Wenn $h(t)=Y(t)=\begin{cases}1: 0<t<\infty\\ 0: t\le 0,\end{cases}$ so ist

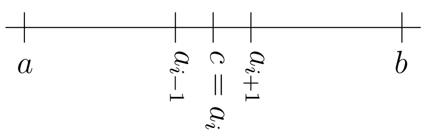
$$\int_{[-1,1]}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}Y(\lambda)=\lim_{\mathrm{d}(Z)\to0}\sum_{i=0}^{k-1}\varphi(a_i)\cdot\big(\underbrace{Y(a_{i+1})-Y(a_i)}_{=1\text{ nur für }a_i\le0,\,a_{i+1}>0}\big)=\varphi(0);$$

$$\int_{\{0,1]}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}Y(\lambda)=\text{ (ebenso) }=\begin{cases}\varphi(0) & : \{=[\\ 0 & : \{=(\end{cases}.$$

Beachte, dass der Wert von $Y(0)$ in der Definition keine Rolle spielt, nur $\lim\limits_{t\nearrow0}Y(t)$, $\lim\limits_{t\searrow0}Y(t)$.

Lemma 19.4
Wenn zusätzlich $a<c<b$, so ist $\displaystyle\int_{\{a,b\}}=\int_{\{a,c\}}+\int_{\{c,b\}}$ falls c in genau einem Teilintervall $\{a,c\},\{c,b\}$ enthalten ist.

Beweis Wenn oEdA $c=a_i$, so ist



$$\int_{\{a,b\}}=\lim_{\mathrm{d}(Z)\to0}\underbrace{\cdots}_{\textstyle\downarrow\atop\textstyle\int_{\{a,c)}}+\underbrace{\varphi(a_{i-1})\big(h(a_i)-h(a_{i-1})\big)+\varphi(a_i)\big(h(a_{i+1})-h(a_i)\big)}_{\textstyle\downarrow\atop\textstyle\varphi(c)\cdot\big(\lim\limits_{\lambda\searrow c}h(\lambda)-\lim\limits_{\lambda\nearrow c}h(\lambda)\big)}+\underbrace{\cdots}_{\textstyle\downarrow\atop\textstyle\int_{(c,b\}}}$$

□

Def.:
Für $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und h monoton wachsend sei

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\lambda)\right| \mathrm{d}h(\lambda) := \lim_{N\to\infty} \int_{(-N,N)} \left|\varphi(\lambda)\right| \mathrm{d}h(\lambda) \in [0,\infty].$$

φ heißt **absolut RS-integrierbar** bzgl. $h \iff \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\lambda)\right| \mathrm{d}h(\lambda) < \infty.$

Lemma 19.5

1) Wenn φ absolut RS-integrierbar bzgl. h ist, so existiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda) := \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)$$

und es gilt

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\lambda)\right| \mathrm{d}h(\lambda).$$

2) φ_i absolut RS-integrierbar, $\varrho_i \in \mathbb{C},\ i = 1,2 \implies \varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2$ absolut RS-integrierbar und

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2)\,\mathrm{d}h = \sum_{i=1}^{2} \varrho_i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i\,\mathrm{d}h$$

Beweis 1) Die Definition zeigt, dass

$$\left|\int_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)\right| \leq \int_{\{a,b\}} \left|\varphi(\lambda)\right| \mathrm{d}h(\lambda) \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall N \leq \alpha < \beta : \left|\int_{\{\alpha,\beta\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)\right| \leq \varepsilon,\ \left|\int_{\{-\beta,-\alpha\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)\right| \leq \varepsilon.$$

2) $\int_{\{\alpha,\beta\}}$ ist linear und daher auch $\int_{-\infty}^{\infty}$. $\square$

Lemma 19.6 / 19.7 + Def.
Wenn E eine Spektralschar ist und $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so existiert $\forall x \in H$

$$\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x := \lim_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(a_i)(E^1_{a_{i+1}}x - E^1_{a_i}x) \in H$$

(wobei $Z, a_i, \{a,b\},\ \mathrm{d}(Z)$ wie oben, $E^1_\lambda = E_\lambda$ für $\lambda \in (a,b)$ und

$E^1_a = \begin{cases} E_a & : \ \{=[\\ E_{a+0} & : \ \{=(\end{cases}, \qquad E^1_b = \begin{cases} E_b & : \ \}=) \\ E_{b+0} & : \ \}=] \end{cases}$) und heißt wieder **RS-Integral**

(von φ bzgl. E). Es gilt:

1) $\displaystyle\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x \in \mathrm{im}(E^1_b - E^1_a)$;

2) $\displaystyle\Big|\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x\Big|^2 = \int\limits_{\{a,b\}} \big|\varphi(\lambda)\big|^2\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2$;

3) $\displaystyle\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2) = \sum_{i=1}^{2} \varrho_i \int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x_i,\ \ \varrho_i \in \mathbb{C}.$

Beweis 1) Die Existenz von $\lim\limits_{\mathrm{d}(z)\to 0} \cdots$ wird wie in Lemma 19.3 bewiesen:

$\Big|\sum\limits_{i=0}^{l-1} \varphi(a'_i)(E^1_{a'_{i+1}} - E^1_{a'_i})x - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \varphi(a_j)(E^1_{a_{j+1}} - E^1_{a_j})x\Big|^2$
$= \sum\limits_{i=0}^{l-1} \underbrace{\big|\varphi(a'_i) - \varphi(a_{j_i})\big|^2}_{\le \varepsilon \text{ für } \mathrm{d}(Z)\le\delta} \cdot \big|(E^1_{a'_{i+1}} - E^1_{a'_i})x\big|^2 \le \varepsilon \cdot \sum\limits_{i=0}^{l-1} \big|(E^1_{a'_{i+1}} - E^1_{a'_i})x\big|^2 =$
$= \varepsilon\Big|\sum\limits_{i=0}^{l-1}(E^1_{a'_{i+1}} - E^1_{a'_i})x\Big|^2 = \varepsilon\big|(E^1_b - E^1_a)x\big|^2$, weil $(E_{a'_{i+1}} - E_{a'_i})x \in H^{a'_{i+1}}$ und $(E_{a'_{j+1}} - E_{a'_j})x \in H^{a'_j\perp} \subset H^{a'_{i+1}\perp}$ für $i<j$ (d.h. $a'_{i+1} \le a'_j$) und daher $(E^1_{a'_{i+1}} - E^1_{a'_i})x,\ i = 0,\cdots,l-1$, paarweise orthogonal sind. Weiters liegen alle $\sum\limits_{i=0}^{l-1}$ in $\mathrm{im}(E^1_b) \cap (\mathrm{im}\,E^1_a)^\perp = \mathrm{im}(E^1_b - E^1_a)$.

2) $\Big|\sum\limits_{i=0}^{k-1} \varphi(a_i)(E^1_{a_{i+1}}x - E^1_{a_i}x)\Big|^2 = \sum\limits_{i=0}^{k-1}\sum\limits_{j=0}^{k-1} \varphi(a_i)\overline{\varphi(a_j)}\,\underbrace{(E^1_{a_{i+1}}x - E^1_{a_i}x,\ E^1_{a_{j+1}}x - E^1_{a_j}x)}_{\underset{1)}{=} \begin{cases} \big|(E^1_{a_{i+1}} - E^1_{a_i})x\big|^2 & : \ i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \big|\varphi(a_i)\big|^2 \cdot \big|(E^1_{a_{i+1}} - E^1_{a_i})x\big|^2 \longrightarrow \int\limits_{\{a,b\}} \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2;$$

beachte, dass $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \lambda \longmapsto |E_\lambda x|^2$ monoton wachsend ist, da für $\lambda \leq \mu$ gilt

$$|E_\mu x|^2 = \big|\underbrace{E_\lambda x}_{\in H^\lambda} + \underbrace{(E_\mu - E_\lambda)x}_{\in H^{\lambda\perp}}\big|^2 = |E_\lambda x|^2 + \big|(E_\mu - E_\lambda)x\big|^2.$$

3) folgt aus der Linearität der $\sum\limits_{i=0}^{k-1} \cdots$. $\square$

Bsp. (Multiplikationsoperatoren)
$H = L^2(\mathbb{R})$ und $E_\lambda : H \longrightarrow H : f = [\tilde{f}] \longmapsto f \cdot Y(\lambda - x) = \left[x \longmapsto \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{f}(x) & : & x < \lambda \\ 0 & : & x \geq \lambda \end{array} \right\}\right]$.
Dann ist $H^\lambda = \big\{f \in H;\ \operatorname{supp} T_f \subset (-\infty, \lambda]\big\}$ und E ist eine Spektralschar. Hier ist $E_{\lambda+0} = E_\lambda$.
Für $f \in H$ und $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist

$$g := \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(a_i)\underbrace{(E_{a_{i+1}} f - E_{a_i} f)}_{f \cdot \chi_{[a_i, a_{i+1}]}} \longrightarrow \varphi \cdot f \cdot \chi_{[a,b]} \text{ in } H,$$

denn

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |g - \varphi \cdot f \cdot \chi_{[a,b]}|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \underbrace{\big|\varphi(a_i) - \varphi(x)\big|^2}_{\leq \varepsilon} \cdot \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \to 0 \text{ für } \mathrm{d}(Z) \to 0.$$

Somit $\displaystyle\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda) \,\mathrm{d}E_\lambda f = \varphi \cdot f \cdot \chi_{[a,b]}$.

Lemma 19.8 + Def.
E sei eine Spektralschar und $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $x \in H$. Dann gilt

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \,\mathrm{d}E_\lambda x := \lim_{\substack{b\to\infty \\ a \to -\infty}} \int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda) \,\mathrm{d}E_\lambda x$ existiert in $H \Longleftrightarrow \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty$.

2) $D(B) := \left\{x \in H;\ \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty\right\} \leq H$ dicht.

3) $\forall x \in D(B) : \left|\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \,\mathrm{d}E_\lambda x\right|^2 = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2$.

$B : D(B) \longrightarrow H : x \longmapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x$ heißt **Spektraloperator** zu E, φ.

Beweis 1) $\lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}} \int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x$ existiert $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 :$

$$\forall N \leq \alpha < \beta : \varepsilon \geq \left| \int\limits_{\pm\{\alpha,\beta\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x \right|^2 \overset{\substack{\text{L. 19.6/7}\\ \downarrow}}{=} \int\limits_{\pm\{\alpha,\beta\}} \left|\varphi(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}|E_\lambda x|^2 \iff$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty$, d.h. $\left|\varphi(\lambda)\right|^2$ absolut RS-integrierbar bzgl. $h(\lambda) = |E_\lambda x|^2$.

2) $D(B)$ ist ein Vektorraum, da $x, y \in D(B) \implies$ (L. 19.6/7, 3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x+y)$ existiert.

Wenn $\alpha < \beta$ und $x \in \mathrm{im}(E_\beta - E_\alpha) = H^\beta \cap H^{\alpha\perp}$, so ist für
$\lambda \geq \beta : E_\lambda x = E_\lambda E_\beta x = E_\beta x = x$ und für
$\lambda \leq \alpha : E_\lambda x = E_\lambda E_\alpha x = E_\alpha x = 0 \implies$
$\forall a < \alpha,\ b > \beta : \int\limits_{(a,b)} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x = \int\limits_{[\alpha,\beta)} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x \implies x \in D(B)$.

Wegen $x \overset{\substack{\text{S. 89}\\ \downarrow}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} (E_n - E_{-n})x$ folgt $\overline{D(B)} = H$.

3) folgt aus Lemma 19.6/7, 2). □

Schreibweise Man schreibt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ für den Spektraloperator zu E, φ. [Mit etwas Maßtheorie lässt sich $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ sogar für beliebige $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel-messbar definieren.]

Def.:
$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal von beschränkter Variation** $\iff$ h ist endliche Linearkombination von monoton wachsenden Funktionen.

Bsp. E Spektralschar, $x, y \in H \implies \lambda \longmapsto (E_\lambda x, y)$ ist lokal von beschränkter Variation (Polarisierungsformel).

Bemerkung h lokal von beschränkter Variation $\implies \int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)$ bzw. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)$

sind wie in S. 91 bzw. S. 93 definiert. Wie in Lemma 19.6/7 erhalten wir dann

$$\Bigg(\int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x,\ \int\limits_{\{a,b\}} \psi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda y\Bigg) = \int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\,\mathrm{d}\underbrace{(E_\lambda x, E_\lambda y)}_{=(E_\lambda x,y)}.$$

Satz 19.1

Es sei $B = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$. Dann gilt:

1) $\forall x \in D(B) : \forall y \in H : (Bx, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x, y)$;

2) $\forall x \in D(B) : \forall \mu \in \mathbb{R} : E_\mu x \in D(B) \wedge BE_\mu x = E_\mu Bx$;

3) $D(B^*) = D(B)$ und $B^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda$.

Speziell: φ reellwertig $\Longrightarrow B \in \mathrm{Lsa}(H)$.

4) $B \in \mathrm{La}(H)$.

Beweis 1) $Bx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[-n,n)} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \sum\limits_i \varphi(a_i)(E_{a_{i+1}} - E_{a_i})x$

$$\Longrightarrow\ (Bx, y) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \sum_i \varphi(a_i)\big((E_{a_{i+1}}x, y) - (E_{a_i}x, y)\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x, y).$$

2) Folgt ebenso aus $E_\mu E_{a_i} = E_{a_i} E_\mu$.

3) a) Wenn $C = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda$, so ist $D(C) = \Big\{x \in H;\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty\Big\} = D(B)$.

Für $x, y \in D(B)$ gilt

$$(x, Cy) = \overline{(Cy, x)} \underset{1)}{=} \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{d}(E_\lambda y, x)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x, y) = (Bx, y),$$

d.h. $C \subset B^*$.

b) Wenn $y \in D(B^*)$, $n \in \mathbb{N}$, $y_n = (E_n - E_{-n})y$ und $x_n = \int\limits_{[-n,n)} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda y \underset{\text{L. 19.6/7, 1)}}{\Longrightarrow}$

$x_n, Bx_n, y_n \in \mathrm{im}(E_n - E_{-n}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vgl. S. 96}}}{\subset} D(B) \Longrightarrow (Bx_n, y) = \big((E_n - E_{-n})Bx_n, y\big) = (Bx_n, y_n) \underset{\text{a)}}{=}$

(x_n, Cy_n) und $Cy_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{d} \underbrace{E_\lambda y_n}_{\substack{\text{konst. f. } \lambda \geq n \\ \text{und f. } \lambda \leq -n}} = \int\limits_{[-n,n)} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda y = x_n \implies$

$(Bx_n, y) = |x_n|^2 = \int\limits_{[-n,n)} \left|\varphi(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}|E_\lambda y|^2$; andererseits ist

$\underbrace{\left|(Bx_n, y)\right|^2}_{|x_n|^4} = \left|(x_n, B^* y)\right|^2 \leq |x_n|^2 |B^* y|^2 \implies |x_n|^2 \leq |B^* y|^2 \implies$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}|E_\lambda y|^2 \leq |B^* y|^2 < \infty \implies y \in D(C) \implies B^* = C.$

4) Es sei $x_n \in D(B),\ x_n \longrightarrow x$ und $Bx_n \longrightarrow y$ und $u \in D(B) \implies$
$\underset{\substack{\downarrow \\ (y,u)}}{(Bx_n, u)} = (x_n, B^* u) \longrightarrow (x, B^* u) \implies \forall u \in D(B) = D(B^*) : (B^* u, x) = (u, y)$
$\implies x \in D(B^{**})$ und $y = B^{**} x$.

Nach 3) ist aber $B^{**} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{\varphi(\lambda)}}\,\mathrm{d}E_\lambda = B$, d.h. $x \in D(B),\ y = Bx$, d.h. B abgeschlossen (vgl. auch S. 79!) $\square$

Bezeichnungen Für eine Spektralschar E sei $H_0 := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} H^n \cap H^{-n\perp} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{im}(E_n - E_{-n})$.

Weiters sei $A := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda \in \mathrm{Lsa}(H)$ und für $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig setzen wir $\varphi(A) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$. (Dass $\varphi(A)$ tatsächlich nur von A abhängt, wird aus dem „Spektralsatz" folgen, der besagt, dass sich jedes $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ durch eine eindeutig bestimmte Spektralschar in der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda = A$ schreiben lässt.) Für $A_1, A_2 \in \mathrm{Lu}(H)$ sei $D(A_1 A_2) := \big\{x \in D(A_2); A_2 x \in D(A_1)\big\}$ und $A_1 A_2 : D(A_1 A_2) \longrightarrow H : x \longmapsto A_1(A_2 x)$.

Bsp. 1) Für $A = A^* : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit Eigenwerten $\mu_1 < \cdots < \mu_r$ wie in S. 89 setzen wir $E_\lambda x := \sum\limits_{\mu_j < \lambda} P_j x = \sum\limits_{\lambda_i < \lambda} (x, e_i) e_i \implies E_\lambda$ ist eine Spektralschar, $E_{\mu_j + 0} - E_{\mu_j} = P_j$ (s. Üb. 61) und $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda = \int\limits_{[\mu_1, \mu_r]} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$, denn $\lim\limits_{\mathrm{d}(Z) \to 0} \sum\limits_i a_i (E^1_{a_{i+1}} - E^1_{a_i}) x = \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j P_j x = Ax$, s. Üb. 65.

2) Für E wie im Bsp. in S. 95 ist $A : \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}); x \cdot f \in L^2(\mathbb{R}) \big\} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) : f \longmapsto x \cdot f$ und $\varphi(A) : \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^1); \varphi \cdot f \in L^2(\mathbb{R}) \big\} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) : f \longmapsto \varphi \cdot f$. Beachte, dass $D\big(\varphi(A) \cdot \psi(A)\big) = \{ f \in L^2;\ \psi \cdot f,\ \varphi \cdot \psi \cdot f \in L^2 \} \underset{\text{i.A.}}{\subsetneqq} D\big((\varphi \cdot \psi)(A)\big) = \{ f \in L^2;\ \varphi \cdot \psi \cdot f \in L^2 \}$.

Satz 19.2

E Spektralschar, $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda \implies$

a) $H_0 \le \Big(D\big(\varphi(A)\big),\ \| \cdot \|_{\varphi(A)} \Big)$ dicht

b) $D\big(\varphi(A) \cdot \psi(A)\big) = D\big(\psi(A)\big) \cap D\big((\varphi \cdot \psi)(A)\big)$

c) $(\varphi \cdot \psi)(A) = \overline{\varphi(A) \cdot \psi(A)} = \overline{\psi(A) \cdot \varphi(A)}$ (Abschluss wie in S. 77)

Beweis a) $H_0 \subset D\big(\varphi(A)\big)$, vgl. S. 96, und $x \in D\big(\varphi(A)\big),\ x_n = (E_n - E_{-n})x \underset{\text{S. 89}}{\implies} x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ und $\varphi(A)x = \lim\limits_{n\to\infty} (E_n - E_{-n})\varphi(A)x \underset{\text{Satz 19.1, 2)}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A)x_n$, d.h. $x_n \longrightarrow x$ bzgl. $\| \cdot \|_{\varphi(A)}$.

b) $x \in D\big(\varphi(A)\psi(A)\big) \iff x \in D\big(\psi(A)\big) \wedge \psi(A)x \in D\big(\varphi(A)\big) \iff \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big|\psi(\lambda)\big|^2 \mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty$

und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \mathrm{d} \underbrace{\big|E_\lambda \psi(A)x\big|^2}_{h(\lambda)} < \infty$;

$$h(\lambda) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Satz 19.1, 2)}}}{=} |\psi(A)E_\lambda x|^2 = \int_{(-\infty,\lambda)} \big|\psi(\mu)\big|^2 \mathrm{d}|E_\mu x|^2 \implies \int_{-\infty}^{\infty} \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \mathrm{d}h(\lambda) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n)} \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \mathrm{d}h(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \sum_i \big|\varphi(a_i)\big|^2 \Big(\underbrace{h(a_{i+1}) - h(a_i)}_{\int_{[a_i,a_{i+1})} |\psi(\mu)|^2 \mathrm{d}|E_\mu x|^2} \Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Bigg(\int_{[-n,n)} \big|\varphi(\mu)\big|^2 \big|\psi(\mu)\big|^2 \mathrm{d}|E_\mu x|^2 + \underbrace{\lim_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \sum_i \int_{[a_i,a_{i+1})} \Big(\big|\varphi(a_i)\big|^2 - \big|\varphi(\mu)\big|^2 \Big) \big|\psi(\mu)\big|^2 \mathrm{d}|E_\mu x|^2 \Bigg)}_{=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \big|(\varphi \cdot \psi)(\mu)\big|^2 \mathrm{d}|E_\mu x|^2$$

c) Für $x \in D\big(\varphi(A)\psi(A)\big),\ y \in D\big(\varphi(A)\big)$ ist $\big(\varphi(A)\psi(A)x, y\big) \underset{\text{Satz 19.1, 3)}}{=} \big(\psi(A)x, \overline{\varphi}(A)y\big)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \big(\psi(A)(E_n - E_{-n})x, \overline{\varphi}(A)(E_n - E_{-n})y\big)$

$$= \lim_{n\to\infty}\Bigg(\int\limits_{[-n,n)} \psi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x,\ \int\limits_{[-n,n)} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda y\Bigg) \underset{\text{vgl. Bem. S. 96}}{=}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x, y) \underset{\text{Satz 19.1, 1)}}{=} \big((\varphi\cdot\psi)(A)x, y\big).$$

Da $D\big(\varphi(A)\big) \leq H$ dicht, folgt $\varphi(A)\psi(A) \subset (\varphi\cdot\psi)(A)$; wegen a) und Satz 17.3 ist $\overline{\varphi(A)\psi(A)} = (\varphi\cdot\psi)(A)$. □

Satz 19.3

E sei eine Spektralschar und $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$. Dann ist $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $A^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n\,\mathrm{d}E_\lambda$.

Beweis a) $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ folgt aus Satz 19.1, 3).
b) Es sei $\varphi(\lambda) = \lambda^2$; $D(A\cdot A) \underset{\text{Satz 19.2, b)}}{=} D(A) \cap D\big(\varphi(A)\big) =$

$$\Bigg\{x \in H;\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty \wedge \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^4\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty\Bigg\} =$$

$= \Bigg\{x \in H;\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^4\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 < \infty\Bigg\} = D\big(\varphi(A)\big)$ und nach Satz 19.2, c) ist dann $A\cdot A = \varphi(A)$,

d.h. $A^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\,\mathrm{d}E_\lambda$. Mit Induktion folgt $A^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n\,\mathrm{d}E_\lambda$. □

Bemerkungen 1) Im obigen Beweis wurde verwendet, dass RS-Integrale „monoton“ sind:

$$\forall\lambda : \varphi(\lambda) \leq \psi(\lambda) \implies \int\limits_{\{a,b\}} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda) = \lim_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\varphi(a_i)}_{\leq\psi(a_i)} \underbrace{\big(h^1(a_{i+1}) - h^1(a_i)\big)}_{\geq 0} \leq \int\limits_{\{a,b\}} \psi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)$$

für h monoton wachsend.
2) Im nächsten Beweis verwenden wir, dass

$$\int\limits_{\{a,b\}} 1\cdot\,\mathrm{d}h(\lambda) = \lim_{\mathrm{d}(Z)\to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} h^1(a_{i+1}) - h^1(a_i)}_{h^1(b)-h^1(a)} = h^1(b) - h^1(a)$$

$\implies \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1\,\mathrm{d}h(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} h(\lambda) - \lim\limits_{\lambda\to-\infty} h(\lambda) \implies \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda = I \implies$ für $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$ und $\mu \in \mathbb{C}$ gilt $A - \mu I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\,\mathrm{d}E_\lambda$.

Satz 19.4

E Spektralschar, $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\mu \in \varrho(A) \iff \exists \varepsilon > 0 : E_{\mu-\varepsilon} = E_{\mu+\varepsilon}$ (bzw. $\forall \lambda \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon] : E_\lambda = E_\mu$ und $H^\lambda = H^\mu$).
Speziell: $\varrho(A) \subset \mathbb{C}$ offen.

b) $\mu \in \sigma(A) \iff \forall \varepsilon > 0 : E_{\mu-\varepsilon} \neq E_{\mu+\varepsilon}$ (d.h. $H^{\mu-\varepsilon} \subsetneqq H^{\mu+\varepsilon}$).

c) $\ker(A-\mu I) = H^{\mu+0} \cap (H^\mu)^\perp = \mathrm{im}\,(E_{\mu+0} - E_\mu)$.
Speziell: $\mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \iff E_\mu \neq E_{\mu+0}$ (d.h. $H^\mu \subsetneqq H^{\mu+0}$)

d) $\mu \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A) \iff \forall \varepsilon > 0 : \dim\big(H^{\mu+\varepsilon} \cap (H^{\mu-\varepsilon})^\perp\big) = \infty$

e) $\mu \in \sigma_{\mathrm{d}}(A) \iff \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ und $\exists \varepsilon > 0 : \dim\big(H^{\mu+\varepsilon} \cap (H^{\mu-\varepsilon})^\perp\big) < \infty \iff$
$\dim\ker(A-\mu I) < \infty$ und $\exists \delta > 0 : \sigma(A) \cap (\mu-\delta, \mu+\delta) = \{\mu\}$.

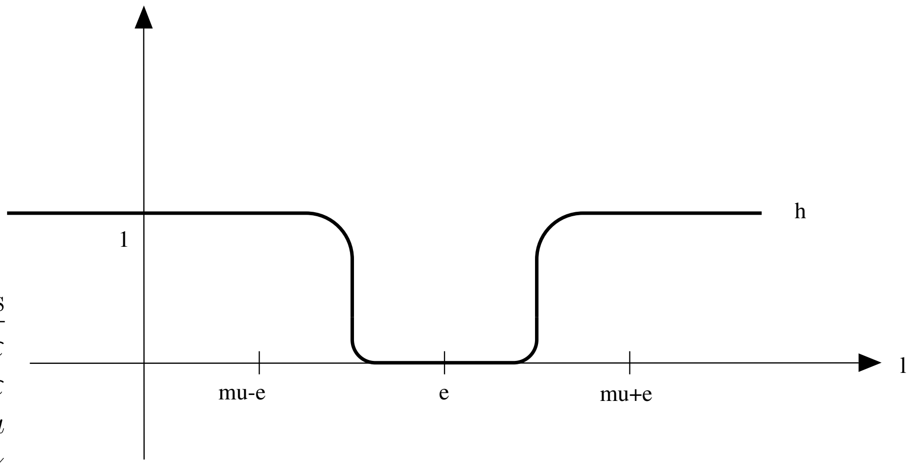
Beweis a) „$\Longrightarrow$" Es sei $\mu \in \varrho(A)$.
Annahme: $\forall j \in \mathbb{N} : E_{\mu-\frac{1}{j}} \neq E_{\mu+\frac{1}{j}} \implies$
$\forall j \in \mathbb{N} : \exists x_j \in \mathrm{im}(E_{\mu+\frac{1}{j}} - E_{\mu-\frac{1}{j}}) \underset{\text{L. 19.1}}{=} H^{\mu+\frac{1}{j}} \cap (H^{\mu-\frac{1}{j}})^\perp$ mit $|x_j| = 1$

$$\implies \big|\underbrace{(A-\mu I)x_j}_{y_j}\big|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda-\mu|^2 \, \mathrm{d} \underbrace{|E_\lambda x_j|^2}_{\substack{\text{konstant f. } \lambda \geq \mu+\frac{1}{j} \\ \text{und f. } \lambda \leq \mu-\frac{1}{j}}}$$

$$= \int\limits_{[\mu-1/j, \mu+1/j]} |\lambda-\mu|^2 \, \mathrm{d}|E_\lambda x_j|^2 \leq \frac{1}{j^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\,|E_\lambda x_j|^2 = \frac{1}{j^2}$$

Wegen $\mu \in \varrho(A)$ ist aber $1 = |x_j| = \big|(A-\mu I)^{-1} y_j\big| \leq C|y_j|$, d.h. $\forall j : 1 \leq \dfrac{C}{j}$ ↯

„$\Longleftarrow$" Es sei $\varepsilon > 0$ mit $E_{\mu-\varepsilon} = E_{\mu+\varepsilon}$ und $\varphi \in \mathcal{D}\big((\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)\big)$ mit $\varphi(\lambda) = 1$ für $|\lambda-\mu| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$;
setze $\chi := 1 - \varphi$ und $B := \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\lambda)}{\lambda-\mu} \, \mathrm{d}E_\lambda$



frag replacements

$\mu-\varepsilon$

$\mu+\varepsilon$

μ

χ

λ

$$\Longrightarrow\ \forall x\in H:\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{|\chi(\lambda)|^2}{(\lambda-\mu)^2}}_{\le C}\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2\le C|x|^2<\infty\ \Longrightarrow\ D(B)=H \text{ und } |Bx|^2\le C|x|^2, \text{ d.h.}$$

$$B\in L(H);\ D\big((A-\mu I)\cdot B\big)\underset{\text{Satz 19.2}}{=}D(B)\cap D\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\Bigg)=H\ \Longrightarrow$$

$$(A-\mu I)\cdot B=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}1\,\mathrm{d}E_\lambda=I, \text{ da }\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda=0 \text{ wegen } E_{\mu-\lambda}=E_{\mu+\lambda}.$$

Ebenso ist $D\big(B\cdot(A-\mu I)\big)=D(A)\cap D\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\Bigg)=D(A)$ und $B\cdot(A-\mu I)=I\big|_{D(A)}$,

d.h. $B=(A-\mu I)^{-1}\in L(H)$, d.h. $\mu\in\varrho(A)$.

b) folgt aus a).

c) „$\supset$“ $x\in H^{\mu+0}\cap(H^\mu)^\perp\ \Longrightarrow\ \forall j\in\mathbb{N}: x\in H^{\mu+\frac{1}{j}}\cap(H^{\mu-\frac{1}{j}})^\perp$

$$\underset{\text{a)}}{\Longrightarrow}\ \forall j\in\mathbb{N}:\big|(A-\mu I)x\big|^2\le\frac{|x|^2}{j^2}\ \Longrightarrow\ (A-\mu I)x=0$$

„$\subset$“ $(A-\mu I)x=0\ \Longrightarrow\ 0=\big|(A-\mu I)x\big|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda-\mu|^2\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2$

$$\Longrightarrow\ \forall \text{ Intervalle } [a,b]\subset\mathbb{R}\setminus\{\mu\}: 0=\int\limits_{[a,b)}\underbrace{|\lambda-\mu|^2}_{\ge\varepsilon>0 \text{ auf } [a,b]}\,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2\ge\varepsilon\big(|E_bx|^2-|E_ax|^2\big)\ge0$$

$|E_a x| = |E_b x| \implies$
$0 = \lim\limits_{\substack{b\to\infty \\ a\searrow\mu}} |E_b x| - |E_a x| = |x| - |E_{\mu+0}\, x|$ und
$0 = \lim\limits_{\substack{b\nearrow\mu \\ a\to-\infty}} |E_b x| - |E_a x| = |E_\mu x| \implies x \in H^{\mu+0} \cap (H^\mu)^\perp.$

d) „$\Longrightarrow$“ Es sei $\mu \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.
1. Fall $\dim\ker(A-\mu I) = \infty \implies \forall\varepsilon > 0 : \dim\bigl(H^{\mu+\varepsilon} \cap (H^{\mu-\varepsilon})^\perp\bigr) \geq \dim\, \underbrace{(H^{\mu+0} \cap H^{\mu\perp})}_{\overset{c)}{=}\ker(A-\mu I)} = \infty$

2. Fall $\dim\ker(A-\mu I) < \infty$
Annahme: $\dim\bigl(H^{\mu+\varepsilon} \cap (H^{\mu-\varepsilon})^\perp\bigr) < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$.
Wegen $H^{\lambda_1} \leq H^{\lambda_2}$ für $\lambda_1 \leq \lambda_2$ folgt:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 : H^{\mu+\varepsilon_1} = H^{\mu+0},\ H^{\mu-\varepsilon_1} = H^\mu.$$

Wenn $x \in \overline{\mathrm{im}\,(A-\mu I)} \underset{\text{L. 17.2}}{\Longrightarrow} x \in \ker(A-\mu I)^\perp \underset{c)}{=} \mathrm{im}(E_{\mu+0} - E_\mu)^\perp \underset{\text{L. 17.2}}{=} \ker(E_{\mu+0} - E_\mu) = \ker(E_{\mu+\varepsilon_1} - E_{\mu-\varepsilon_1}) \implies$ (falls zusätzlich $x \in D(A)$)

$$\bigl|(A-\mu I)x\bigr|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\mu)^2 \,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 = \int\limits_{(-\infty,\mu-\varepsilon_1]\cup[\mu+\varepsilon_1,\infty)} (\lambda-\mu)^2 \,\mathrm{d}|E_\lambda x|^2 \geq$$

$$\geq \varepsilon_1^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}|E_\lambda x|^2 = \varepsilon_1^2 |x|^2 \qquad \circledast$$

Nach Lemma 18.2 ist auch $\mu \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\tilde{A})$, wobei $\tilde{A} := A\big|_{D(A)\cap\overline{\mathrm{im}(A-\mu I)}} \implies \exists$ Weylsche Folge $x_j \in D(\tilde{A})$ zu $\mu \implies (A-\mu I)x_j \to 0 \overset{\circledast}{\implies} x_j \to 0 \implies \lightning$ zu $\{x_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ nicht präkompakt.

„$\Longleftarrow$“ Es sei $\forall\varepsilon > 0 : \dim\bigl(H^{\mu+\varepsilon} \cap (H^{\mu-\varepsilon})^\perp\bigr) = \infty$
$\implies \exists x_1 \in H^{\mu+1} \cap (H^{\mu-1})^\perp$ mit $|x_1| = 1$
$\implies \exists x_2 \in H^{\mu+1/2} \cap (H^{\mu-1/2})^\perp$ mit $x_2 \perp x_1,\ |x_2| = 1$ etc.
$\implies \exists x_j \in H^{\mu+1/j} \cap (H^{\mu-1/j})^\perp$ mit $x_j \perp x_1, \cdots, x_{j-1},\ |x_j| = 1$
$\implies x_1, x_2, \cdots$ ONSystem und $\bigl|(A-\mu I)x_j\bigr|^2 \leq \dfrac{1}{j^2}$ (vgl. a)) $\implies x_j$ ist Weylsche Folge zu $\mu \implies \mu \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.

e) folgt aus d). Beachte, dass aus $\dim(H^{\mu+\varepsilon} \cap H^{\mu-\varepsilon\perp}) < \infty$ (wegen $H^{\lambda_1} \leq H^{\lambda_2}$ für $\lambda_1 \leq \lambda_2$) folgt, dass $\exists\delta > 0 : H^{\mu+\delta} = H^{\mu+0},\ H^{\mu-\delta} = H^\mu$. $\square$

Bsp. Für E wie in S. 95, d.h. $Af = x \cdot f$ ist $\forall\mu \in \mathbb{R},\ \forall\varepsilon > 0 : H^{\mu+\varepsilon} \cap (H^{\mu-\varepsilon})^\perp =$
$= \bigl\{f \in L^2(\mathbb{R});\ \operatorname{supp} T_f \subset [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]\bigr\}$ unendlichdimensional, d.h. $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \mathbb{R}$.
Wenn allgemeiner $\tilde{g} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g = [\tilde{g}] \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$,

und $A : \{f = [\tilde{f}] \in H;\ \tilde{g} \cdot \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\Omega)\} \longrightarrow H : f \longmapsto g \cdot f := [\tilde{g} \cdot \tilde{f}]$, so ist eine Spektralschar durch $E_\lambda f = f \cdot Y\big(\lambda - \tilde{g}(x)\big)$ gegeben,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda,\ \sigma(A) = \Big\{\mu \in \mathbb{R};\ \forall \varepsilon > 0 : \int_{\{x \in \Omega;\, \mu - \varepsilon \leq \tilde{g}(x) < \mu + \varepsilon\}} \mathrm{d}x > 0\Big\},\ \sigma_{\mathrm{d}}(A) = \{\},$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \Big\{\mu \in \mathbb{R};\ \int_{\{x \in \Omega;\, \tilde{g}(x) = \mu\}} \mathrm{d}x > 0\Big\}.$$

§ 20 Die Spektraldarstellung eines selbstadjungierten Operators

Wir zeigen hier, dass jedes $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ die Form $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ hat für eine eindeutig bestimmte Spektralschar E.

Def.:

1) Für symmetrische $A, B \in L(H)$ sei $A \leq B :\Longleftrightarrow \forall x \in H : (Ax, x) \leq (Bx, x)$.

2) $L_+(H) := \big\{A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H);\ A \geq 0\big\}$

Bemerkungen 1) Beachte, dass $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ für $A \in \mathrm{Ls}(H)$, vgl. Satz 17.5, 1).
2) Für einen Projektor P gilt $(Px, Px) = (P^2 x, x) = (Px, x) \implies$
$0 \leq (Px, x) = |Px|^2 \leq |x|^2 = (x, x)$, d.h. $0 \leq P \leq I$ bzw. $P, I - P \in L_+(H)$.
3) $\leq$ ist eine Ordnung auf $L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$, denn
(i) $A \leq A$ (ii) $A \leq B \wedge B \leq A \implies \forall x : \big((A - B)x, x\big) = 0 \underset{\text{Satz 17.9}}{\implies} A = B$
(iii) $A \leq B \leq C \implies A \leq C$. Weiters gilt $A \leq B \implies A + C \leq B + C$.
Vorsicht: Das ist keine strikte Ordnung, d.h. i. A. gilt weder $A \leq B$ noch $B \leq A$.

Lemma 20.0
$A \in L_+(H)$. Dann gilt: $\forall x, y \in H :$

1) $\big|(Ax, y)\big|^2 \leq (Ax, x) \cdot (Ay, y)$

2) $|Ax|^2 \leq \|A\| \cdot (Ax, x)$; speziell: $(Ax_n, x_n) \to 0 \implies Ax_n \to 0$

Beweis 1) $H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : (x; y) \longmapsto (Ax, y)$ erfüllt alle Bedingungen an ein Skalarprodukt bis auf die positive Definitheit $\implies$ Cauchy-Schwarz (vgl. L. 8.1) liefert die Behauptung.

2) $|Ax|^4 = (Ax, \underbrace{Ax}_{y})^2 \underset{1)}{\leq} (Ax,x)\cdot(Ay,y) = (Ax,x)\cdot(A^2x, Ax) \underset{\text{cs}}{\leq} (Ax,x)\cdot \underbrace{|A^2x|}_{\leq \|A\|\cdot|Ax|} \cdot |Ax|$

$\implies |Ax|^2 \leq \|A\|\cdot(Ax,x)$ □

Lemma 20.1
$A, B \in L_+(H),\ AB = BA \implies AB \in L_+(H).$

Beweis a) $(AB)^* = B^*A^* = BA = AB \implies AB \in L(H)\cap \mathrm{Ls}(H)$.
b) Annahme: $\alpha := \inf\limits_{|x|=1} (ABx, x) < 0$; es seien $x_n \in H$ mit $|x_n| = 1$ und
$\big(\underbrace{(AB-\alpha I)}_{\geq 0} x_n, x_n\big) \to 0 \underset{\text{L. 20.0}}{\implies} (AB-\alpha I)x_n \to 0 \implies ABx_n \neq 0$ für $n \geq N$.
Für $N \leq n$ fest sei $H_1 := \mathbb{R}\cdot x_n + \mathbb{R}\cdot Bx_n + \mathbb{R}\cdot ABx_n$, ein ≤ 3 dimensionaler reeller Hilbertraum (da $(Bx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ etc.,)
$\big||ABx_n| - \underbrace{|\alpha x_n|}_{=|\alpha|}\big| \leq \big|(AB-\alpha I)x_n\big| \to 0 \implies |ABx_n| \to |\alpha| \implies \cos\measuredangle\{x_n, ABx_n\} =$

$$\frac{(ABx_n, x_n)}{|x_n|\cdot|ABx_n|} \to \frac{\alpha}{|\alpha|} = -1, \text{ d.h. } \underbrace{\measuredangle\{x_n, ABx_n\}}_{\leq \underbrace{\measuredangle\{x_n, Bx_n\}}_{\leq\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\measuredangle\{Bx_n, ABx_n\}}_{\leq\frac{\pi}{2}}} \to \pi$$

(da $(Bx_n, x_n), (ABx_n, Bx_n) \geq 0$)

$$\implies \measuredangle\{x_n, Bx_n\} \to \frac{\pi}{2} \implies (Bx_n, x_n) = \underbrace{\cos\measuredangle\{x_n, Bx_n\}}_{\to 0}\cdot\underbrace{|x_n|}_{1}\cdot\underbrace{|Bx_n|}_{\leq\|B\|} \to 0$$

$\underset{\text{L. 20.0}}{\implies} Bx_n \to 0 \implies ABx_n \to 0 \implies \lightning$ zu $|ABx_n| \to |\alpha| \neq 0$ □

Lemma 20.2
Es seien $A_n \in L(H)\cap\mathrm{Ls}(H)$ für $n\in\mathbb{N}$ und es gelte $A_1 \leq A_2 \leq \cdots$ und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.
Dann $\exists A \in L(H)\cap\mathrm{Ls}(H) : \forall x \in H : Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$.
(*Vorsicht:* I.A. ist nicht $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ in $L(H)$, vgl. S. 90)

Beweis Für $x \in H$ und $m \leq n$ ist $(A_m x, x) \leq (A_n x, x)$ und daher ist $(A_n x, x)$ eine monoton steigende Folge in $\mathbb{R}$, die beschränkt ist, da $(A_n x, x) \leq |x|^2 \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|A_k\|$. Also konvergiert $(A_n x, x)$ für $n \to \infty$.
Dann ist $A_n x$ eine C-Folge in H, denn

$$\big|\underbrace{(A_n - A_m)}_{\geq 0} x\big|^2 \underset{\text{L. 20.0, 2)}}{\leq} \underbrace{\|A_n - A_m\|}_{\leq 2\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\|A_k\|}\cdot\big((A_n - A_m)x, x\big) \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad N \leq m \leq n$$

$\implies \forall x \in H : Ax := \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ existiert. Klarerweise ist A linear und symmetrisch. Nach dem Satz von Hellinger–Töplitz (S. 80) ist $A \in L(H)$. □

Bsp. Für eine Spektralschar E und $\mu_n \nearrow \lambda$ bzw. $\mu_n \searrow \lambda$ ist $\pm E_{\mu_1} \leq \pm E_{\mu_2} \leq \cdots$ und $A_{\text{Lemma 20.2}} = E_\lambda$ bzw. $E_{\lambda+0}$.

Lemma 20.3
$A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H) \implies \exists_1 B \in L_+(H)$:
(i) $B^2 = A^2$ ii) $\forall C \in L(H)$ mit $AC = CA : BC = CB$.

Beweis a) **Existenz** oEdA $\|A\| \leq 1$ (sonst betrachte $A_1 = \frac{1}{\|A\|} \cdot A$ zuerst).
Dann ist $0 \leq |Ax|^2 = (A^2x, x) \leq |x|^2$, d.h. $0 \leq A^2 \leq I$.
Für $0 \leq y \leq 1$ gilt $x_n \nearrow \sqrt{y}$, wenn $x_0 = 0$ und rekursiv $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{2}(y - x_n^2)$. Mit $y \hat{=} A^2$ definieren wir analog $B_0 := 0,\ B_{n+1} := B_n + \frac{1}{2}(A^2 - B_n^2) \implies I - B_{n+1} = I - B_n + \frac{1}{2}B_n^2 - \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(I - B_n)^2}_{\geq 0} + \frac{1}{2}\underbrace{(I - A^2)}_{\geq 0} \geq 0$, d.h. $\forall n : B_n \leq I$, und induktiv zeigt man, dass die B_n alle vertauschbar sind. Induktiv folgt auch $\forall n \in \mathbb{N}_0 : B_n \leq B_{n+1}$, denn $B_0 = 0 \leq B_1 = \frac{1}{2}A^2$ und $B_{n+1} - B_n = B_n + \frac{1}{2}(A^2 - B_n^2) - \big(B_{n-1} + \frac{1}{2}(A^2 - B_{n-1}^2)\big) =$
$= \underbrace{(B_n - B_{n-1})}_{\geq 0}\big(\underbrace{I - \tfrac{1}{2}(B_n + B_{n-1})}_{\geq 0 (B_n \leq I)}\big) \geq 0$ nach Lemma 20.1. Nach Lemma 20.2
$\exists B$ mit $\forall x \in H : Bx = \lim\limits_{n\to\infty} B_n x$. Wegen $(Bx, x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(B_n x, x)}_{\geq 0} \geq 0$ gilt $B \in L_+(H)$.

Wenn $C \in L(H)$ mit $AC = CA \implies \forall n : B_nC = CB_n$ (induktiv) $\implies$
$\implies \forall x \in H : BCx = \lim\limits_{n\to\infty} B_nCx = \lim\limits_{n\to\infty} CB_nx = C \lim\limits_{n\to\infty} B_nx = CBx \implies BC = CB$.
Um i) zu zeigen, nehme $x \in H$

$$\left.\begin{array}{cccc} \implies & B_{n+1}x & = & B_nx \quad + \dfrac{1}{2}(A^2 - B_n^2)x \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & Bx & & Bx \end{array}\right\} \implies B_n^2 x \longrightarrow A^2 x$$

$$\begin{array}{llll} \implies & \forall x, y \in H : & (B_n^2 x, y) & = (B_n x, B_n y) \longrightarrow (Bx, By) = (B^2x, y) \\ & & \downarrow & \\ & & (A^2x, y) & \\ \implies & \forall x \in H : & A^2x = B^2x & \implies B^2 = A^2. \end{array}$$

b) **Eindeutigkeit** Wenn $B' \in L_+(H)$ auch i), ii) erfüllt
$\implies BB' = B'B \implies 0 = B^2 - B'^2 = (B + B')(B - B')$;
$x \in H, y = (B - B')x \implies 0 \leq (By, y) \leq \big(\underbrace{(B + B')y}_{(B^2 - B'^2)x = 0}, y\big) = 0$
$\implies (By, y) = 0 \underset{\text{L. 20.0}}{\implies} By = 0 \implies B'y = 0 \implies$
$\implies (B - B')y = 0 \implies \big|(B - B')x\big|^2 = \big((B - B')y, x\big) = 0$
$\implies Bx = B'x$, d.h. $B = B'$. $\square$

Def.:
Für $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ sei $|A| := B$ aus L. 20.3.

Lemma 20.4
$A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H),\ P :=$ Projektor auf $\ker\big(|A| - A\big)$. Dann gilt:

a) $\forall C \in L(H)$ mit $AC = CA : PC = CP$;

b) $AP = |A|P \geq 0$;

c) $A(I - P) = -|A|(I - P) \leq 0$.

Beweis a) Es sei $H_1 := \ker\big(|A| - A\big)$ und $C \in L(H)$ mit $AC = CA$;
$x \in H_1 \iff \big(|A| - A\big)x = 0 \implies \big(|A| - A\big)Cx = C\big(|A| - A\big)x = 0 \implies Cx \in H_1$;
$x \in H_1^\perp \iff \forall y \in H_1 : (x, y) = 0 \implies \forall y \in H_1 : (Cx, y) = (x, C^*y) = 0$, da auch $AC^* = A^*C^* = (CA)^* = (AC)^* = C^*A \implies C^*y \in H_1$.
Wenn daher $x \in H,\ x = y + z,\ y \in H_1,\ z \in H_1^\perp$ (vgl. Satz 8.2)
$\implies PCx = P \underbrace{Cy}_{\in H_1} + P \underbrace{Cz}_{\in H_1^\perp} = Cy = CPx.$

b) $\forall x \in H : \big(A - |A|\big)Px = 0 \implies AP = |A|P \geq 0$ (L. 20.1).

c) $\forall x \in H : \big(|A| - A\big)\big(|A| + A\big)x = 0$ (weil $A^2 = |A|^2$)
$\implies \big(|A| + A\big)x \in H_1 \implies P\big(|A| + A\big)x = \big(|A| + A\big)x$
$\implies A(I - P) = -|A|(I - P) \leq 0$ (L. 20.1) $\square$

Satz 20.1
$A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H) \implies \exists$ Spektralschar E mit $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda$.

Dabei gilt $E_\lambda = \left\{ \begin{array}{ccl} I & : & \lambda > \quad \|A\| \\ 0 & : & \lambda \leq -\|A\| \end{array} \right\}$.

Beweis Es sei P_λ der Projektor auf $\ker\big(|A - \lambda I| - (A - \lambda I)\big)$ und $E_\lambda := I - P_\lambda$, d.h. $H^\lambda = \ker\big(|A - \lambda I| - (A - \lambda I)\big)^\perp$. Nach Lemma 20.4 sind die E_λ mit A und daher (nach L. 20.4) auch untereinander kommutierbar.
a) $\lambda < \mu \underset{\text{L. 20.4 b),c)}}{\implies} (A - \lambda I)E_\lambda \leq 0,\ (A - \mu I)P_\mu \geq 0$
$\underset{\text{L. 20.1}}{\implies} (A - \lambda I)E_\lambda P_\mu \leq 0,\ (A - \mu I)E_\lambda P_\mu \geq 0$
$\implies \underbrace{(\lambda - \mu)}_{<0} E_\lambda P_\mu = (A - \mu I)E_\lambda P_\mu - (A - \lambda I)E_\lambda P_\mu \geq 0$
$\implies E_\lambda P_\mu \leq 0;\ E_\lambda, P_\mu \geq 0 \implies E_\lambda P_\mu \geq 0 \implies E_\lambda P_\mu = 0$
$\implies E_\lambda(I - E_\mu) = 0 \implies E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$

b) $\lambda \leq -\|A\| \underset{\text{Satz 17.9}}{\Longrightarrow} \forall x \in H : (Ax, x) \geq \lambda |x|^2 \implies A - \lambda I \geq 0$
$\implies |A - \lambda I| = A - \lambda I \implies P_\lambda = I \implies E_\lambda = 0.$
Wenn andererseits $\lambda > \|A\| \implies A - \lambda I \leq 0 \implies |A - \lambda I| = -(A - \lambda I)$ und
$\ker\big(|A - \lambda I| - (A - \lambda I)\big) = \ker(A - \lambda I) = \{0\}$ (weil $\lambda \in \varrho(A)$) $\implies E_\lambda = I.$

c) Nach Lemma 20.2 (bzw. nach S. 90, c)) existiert der Projektor $E_{\mu-0}$ mit $E_{\mu-0}x = \lim\limits_{\lambda \nearrow \mu} E_\lambda x$ und ist $E_{\mu-0} \leq E_\mu$ [$E_\lambda \leq E_\mu$ für $\lambda \leq \mu$, s. S. 95, 3. Zeile]. Für $\lambda < \mu$ ist

$$(A - \mu I)(E_\mu - E_\lambda) = \underbrace{(A - \mu I)E_\mu}_{\leq 0} \underbrace{(E_\mu - E_\lambda)}_{\geq 0} \leq 0 \qquad \text{(L. 20.1)}$$

und ebenso

$$(A - \lambda I)(E_\mu - E_\lambda) = \underbrace{(A - \lambda I)P_\lambda}_{\geq 0} \underbrace{(E_\mu - E_\lambda)}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \text{(L. 20.1)}$$

Mit $\lambda \nearrow \mu$ folgt $(A - \mu I)(E_\mu - E_{\mu-0}) = 0$.
Wegen $|A - \mu I|E_{\mu-0} = |A - \mu I|E_\mu E_{\mu-0} =$ (L. 20.4, c))
$= -(A - \mu I)E_\mu E_{\mu-0} = -(A - \mu I)E_{\mu-0}$ ist auch $|A - \mu I|(E_\mu - E_{\mu-0}) = 0$
$\implies \operatorname{im}(E_\mu - E_{\mu-0}) \subset \ker\big(|A - \mu I| - (A - \mu I)\big) = H^{\mu\perp}$;
andererseits ist $\operatorname{im}(E_\mu - E_{\mu-0}) \subset \operatorname{im} E_\mu = H^\mu$, d.h. $E_\mu = E_{\mu-0}$.

d) Es sei $B = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$; nach c) ist für $\lambda < \mu$

$$(A - \mu I)(E_\mu - E_\lambda) \leq 0, \quad (A - \lambda I)(E_\mu - E_\lambda) \geq 0$$

$\implies \lambda(E_\mu - E_\lambda) \leq A(E_\mu - E_\lambda) \leq \mu(E_\mu - E_\lambda)$
$\implies \forall x \in H : \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i\big((E_{a_{i+1}} - E_{a_i})x, x\big) \leq \underbrace{\sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(A(E_{a_{i+1}} - E_{a_i})x, x\big)}_{=(Ax,x)} \leq$

$\leq \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_{i+1}\big((E_{a_{i+1}} - E_{a_i})x, x\big)$, wenn $a_0 = -\|A\| < a_1 < \cdots < a_k = \|A\| + 1$ eine Zerlegung ist.

Wegen $\lim\limits_{\mathrm{d}(Z) \to 0} \underbrace{\sum\limits_{i=0}^{k} \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{\leq \mathrm{d}(Z)} \cdot \big((E_{a_{i+1}} - E_{a_i})x, x\big)}_{\leq \mathrm{d}(Z)|x|^2} = 0$ folgt $\forall x \in H : \big((A - B)x, x\big) = 0$

$\underset{\text{Satz 17.9}}{\Longrightarrow} A = B.$ $\square$

Exkurs Oft wird der Spektralsatz auch in der „Funktionalkalkülform“ angegeben.

Satz 20.1’
Es sei $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ mit Spektralschar E wie in Satz 20.1 und $K := \big[-\|A\|, \|A\|\big]$.

1) a) $\big(C(K), \|\cdot\|_\infty\big) \xrightarrow{F} \big(L(H), \|\cdot\|\big) : \varphi \longmapsto \varphi(A) = \int\limits_K \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda$ ist ein stetiger $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus (d.h. F linear, $F(\varphi \cdot \psi) = F(\varphi) \cdot F(\psi)$, $\big\|F(\varphi)\big\| \leq C \cdot \|\varphi\|_\infty$ (wobei sogar $C = 1$)) und $F(1) = I$, $F(\mathrm{id}) = A$.
b) F ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.
c) $C \in L(H)$ mit $AC = CA \implies \forall \lambda \in \mathbb{R} : E_\lambda C = C E_\lambda$ und $\forall \varphi \in C(K) : \varphi(A) C = C \varphi(A)$.

2) E ist die einzige Spektralschar mit $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \mathrm{d}E_\lambda$.

Beweis 1) a) Nach Satz 20.1 ist $E_\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} I : \lambda > & \|A\| \\ 0 : \lambda \leq & -\|A\| \end{array} \right\} \implies \int\limits_K \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda$,
wenn φ irgendwie stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Dann ist
$\int\limits_K \lambda\, \mathrm{d}E_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \mathrm{d}E_\lambda = A$ und $\int\limits_K 1\, \mathrm{d}E_\lambda = I$ (vgl. S. 100) und
$\int\limits_K (\varphi \dot{+} \psi)\, \mathrm{d}E_\lambda = \int\limits_K \varphi\, \mathrm{d}E_\lambda \dot{+} \int\limits_K \psi\, \mathrm{d}E_\lambda$, vgl. L. 19.5, 2) und Satz 19.2. Schließlich gilt
$\left| \int\limits_K \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda x \right|^2 = \int\limits_K \big|\varphi(\lambda)\big|^2 \mathrm{d}\big|E_\lambda x\big|^2 \leq \|\varphi\|_\infty^2 \int\limits_K \mathrm{d}|E_\lambda x|^2 = \|\varphi\|_\infty^2 \cdot |x|^2$, d.h.
$\left\| \int\limits_K \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda \right\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

c) $AC = CA \underset{\text{L. 20.4}}{\implies} \forall \lambda : E_\lambda C = C E_\lambda \implies \forall \varphi : \varphi(A) C = C \varphi(A)$

b) Für Polynome $\varphi(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$ ist $F(\varphi) = c_n A^n + \cdots + c_1 A + c_0 I$ eindeutig. Weil die Polynome in $C(K)$ dicht sind (s.u.) und F stetig ist, ist F dann eindeutig.

2) a) Wenn λ fest und $\varphi(\mu) = |\mu - \lambda|$, so ist $\varphi(A)^2 = \varphi^2(A) = (A - \lambda I)^2$, $\varphi(A) \in L_+(H)$,

und $\varphi(A)C = C\varphi(A)$ für $AC = CA \underset{\text{L. 20.3}}{\Longrightarrow} \varphi(A) = |A - \lambda I|$ im Sinn der Definition in S. 107.

b) $\tilde{E}$ sei eine 2. Spektralschar mit $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}\tilde{E}_\lambda$.

Satz 19.4 $\Longrightarrow$ $\tilde{E}_\lambda = 0$ bzw. I für $\lambda \le -\|A\|$ bzw. $\lambda > \|A\|$ $\Longrightarrow$

$\tilde{F}(\varphi) := \int\limits_K \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\tilde{E}_\lambda \overset{1)\, b)}{=} F(\varphi)$. Speziell $|A - \lambda I| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mu - \lambda| \, \mathrm{d}\tilde{E}_\mu$.

Wir zeigen, dass dann im $\tilde{E}_\lambda = \ker\big(|A - \lambda I| - (A - \lambda I)\big)^\perp$ und daher $\tilde{E}_\lambda = E_\lambda$ (vgl. S. 107).

$y \in \ker\big(|A - \lambda I| - (A - \lambda I)\big) \Longleftrightarrow \Big|\big(|A - \lambda I| - (A - \lambda I)\big)y\Big|^2 = 0 \underset{\text{a)}}{\Longleftrightarrow}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\big||\mu - \lambda| - (\mu - \lambda)\big|^2}_{\begin{cases} 0 & : \ \mu \ge \lambda \\ 4(\lambda - \mu)^2 & : \ \mu \le \lambda \end{cases}} \mathrm{d}|\tilde{E}_\mu y|^2 = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{(-\infty, \lambda]} (\lambda - \mu)^2 \, \mathrm{d}|\tilde{E}_\mu y|^2 = 0 \Longleftrightarrow |\tilde{E}_\mu y|^2$ konstant für

$\mu < \lambda \Longleftrightarrow \tilde{E}_\mu y = 0$ für $\mu < \lambda$ (da $\tilde{E}_\mu = 0$ für $\mu \le -\|A\|$) $\Longleftrightarrow \tilde{E}_\mu y = 0$ für $\mu \le \lambda$
(hier kommt die linksseitige Stetigkeit der $\tilde{E}_\lambda$ ins Spiel) $\Longleftrightarrow y \in \ker \tilde{E}_\lambda = (\mathrm{im}\, \tilde{E}_\lambda)^\perp$ $\square$

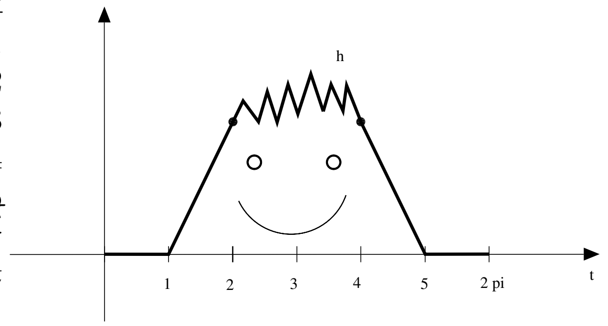
Satz von Weierstraß Für $a < b \in \mathbb{R}$ sind die Polynome in $\Big(C\big([a, b]\big), \|\cdot\|_\infty\Big)$ dicht.

Beweis Nach Verschiebung und Streckung ist oEdA $a = 2$, $b = 4$. Für $\varphi \in C\big([2, 4]\big)$ sei

PSfrag replacements

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & : \ 0 \le t \le 1 \\ (t-1)\varphi(2) & : \ 1 \le t \le 2 \\ \varphi(t) & : \ 2 \le t \le 4 \\ (5-t)\varphi(4) & : \ 4 \le t \le 5 \\ 0 & : \ 5 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

1
2
3
4
5
2π
t
φ_1



Nach der Bemerkung in S. 21 ist $\big\|(\varphi_1)_h - \varphi_1\big\|_{C([0,2\pi])} \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ für $0 < h < \delta$ und $\psi := (\varphi_1)_h \in \mathcal{D}\big((0, 2\pi)\big)$ für $0 < h < 1$. ψ werde periodisch fortgesetzt. Die Fourierreihe von ψ konvergiert gleichmäßig (vgl. S. 51), d.h. $\exists N \in \mathbb{N} : \Big\|\psi - \sum\limits_{|k| \le N} \lambda_k \dfrac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\Big\|_\infty \le \dfrac{\varepsilon}{3}$. Schließlich ist $e^{ikt} =$

$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}kt)^j}{j!}$ und die $\sum$ konvergiert gleichmäßig für $0 \le t \le 2\pi$ und festes k (Weierstraßsches Majorantenkriterium)

$$\implies \exists M \in \mathbb{N} : \forall t \in [0, 2\pi] : \left| \sum_{|k| \le N} \lambda_k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}} - \underbrace{\sum_{|k| \le N} \frac{\lambda_k}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{M} \frac{(\mathrm{i}kt)^j}{j!}}_{=:P(t)} \right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

$\implies \|\varphi - P\|_\infty \le \varepsilon$ in $C\big([2,4]\big)$. □

Zu guter Letzt betrachten wir $A \in \mathrm{Lsa}(H)$.

Def.:
Wenn $H_j,\ j \in \mathbb{N}$, Hilberträume sind, so wird $H := \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} H_j := \big\{x = (x_j) \in \prod_{j \in \mathbb{N}} H_j;$ $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\big\}$ ein Hilbertraum mit $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, y_j)$. Wir betten H_j vermöge $H_j \hookrightarrow H : u \longmapsto (0, \cdots, 0, u, 0, \cdots)$ in H ein.

Bsp. $\ell^2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{K}$ und ebenso wie dort zeigt man, dass H ein Vektorraum und vollständig ist und dass $H_0 = \big\{x \in H;\ \#\{j;\ x_j \ne 0\} < \infty\big\} \subset H$ dicht ist.

Lemma 20.5
Es sei $H = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} H_j$ und $A_j \in L(H_j) \cap \mathrm{Ls}(H_j)$ und
$A : \Big\{x \in H;\ \sum_{j=1}^{\infty} |A_j x_j|^2 < \infty\Big\} \longrightarrow H : x \longmapsto (A_j x_j)$. Dann ist $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ und ist der einzige sa. Operator in H mit $\forall j \in \mathbb{N} : H_j \subset D(A), A\big|_{H_j} = A_j$.

Beweis a) $D(A) \le H$, denn $x, y \in D(A) \implies Ax, Ay \in H \implies$
$\big(A_j(x_j + y_j)\big) = Ax + Ay \in H \implies x + y \in D(A)$.

b) $x, y \in D(A) \implies (Ax, y) = \sum_j (A_j x_j, y_j) = \sum_j (x_j, A_j y_j) = (x, Ay) \implies A \in \mathrm{Ls}(H)$.

c) $t \in \mathbb{R}^*$, $y \in H$, $x_j := \big((A_j + \mathrm{i}tI)^{-1} y_j\big) \implies \sum_j |x_j|^2 =$
$\sum_{j=1}^{\infty} \big\|(A_j + \mathrm{i}tI)^{-1}\big\|^2 \cdot |y_j|^2 \underset{\text{L. 18.1, 1)}}{\le} \frac{1}{t^2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 < \infty \implies x \in H$ und $A_j x_j = y_j - \mathrm{i}t x_j \implies$ $(A_j x_j) \in H \implies x \in D(A)$ und $(A + \mathrm{i}tI)x = y \implies A + \mathrm{i}tI$ surj. $\underset{\text{S. 17.6,2)}}{\implies} A \in \mathrm{Lsa}(H)$.

d) Wenn auch $B \in \mathrm{Lsa}(H)$ mit $B\big|_{H_j} = A_j \implies B = A$ auf
$H_0 := \big\{x \in H;\ \#\{j; x_j \neq 0\} < \infty\big\};\ x \in D(A),\ x^{(n)} := (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$
$\implies x^{(n)} \longrightarrow x$ und $Bx^{(n)} = Ax^{(n)} \longrightarrow Ax$ in H
$\underset{B \text{ abg.}}{\implies} x \in D(B),\ Bx = Ax \implies A \subset B \implies$ (Satz 17.5, 3)) $\implies A = B$. □

Satz 20.2

$A \in \mathrm{Lsa}(H) \implies \exists$ Spektralschar E mit $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda$.

Beweis a) Nach Lemma 18.1 ist $\pm\mathrm{i} \in \varrho(A)$.
Es seien $B = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\big((A-\mathrm{i}I)^{-1} - (A+\mathrm{i}I)^{-1}\big),\ C = \dfrac{1}{2}\big((A-\mathrm{i}I)^{-1} + (A+\mathrm{i}I)^{-1}\big) \implies B, C \in L(H)$ und $\|B\|,\ \|C\| \leq 1$ (vgl. L. 18.1, 1)).

b) $A \in \mathrm{Ls}(H) \implies \forall x, y \in D(A) : \big(\underbrace{(A - \mathrm{i}I)x}_{u}, y\big) = \big(x, \underbrace{(A + \mathrm{i}I)y}_{v}\big)$
$A \pm \mathrm{i}I : D(A) \longrightarrow H$ bijektiv (vgl. a)) $\implies \forall u, v \in H : \big(u, (A + \mathrm{i}I)^{-1}v\big) = \big((A - \mathrm{i}I)^{-1}u, v\big)$
$\implies (A - \mathrm{i}I)^{-1*} = (A + \mathrm{i}I)^{-1} \implies B^* = B,\ C^* = C;\ B, C \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$

c) $V := (A + \mathrm{i}I)^{-1}\big(D(A)\big) = \big\{x \in D(A);\ Ax + \mathrm{i}x \in D(A)\big\} = \big\{x \in D(A);\ Ax \in D(A)\big\} = (A - \mathrm{i}I)^{-1}\big(D(A)\big)$ und $(A + \mathrm{i}I)(A - \mathrm{i}I) = (A - \mathrm{i}I)(A + \mathrm{i}I) : V \longrightarrow H$ bijektiv
$\implies D := (A + \mathrm{i}I)^{-1}(A - \mathrm{i}I)^{-1} = (A - \mathrm{i}I)^{-1}(A + \mathrm{i}I)^{-1} \implies BC = CB$.
Weiters ist $B = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\big((A + \mathrm{i}I)D - (A - \mathrm{i}I)D\big) = D$ und
$C = \dfrac{1}{2}\big((A + \mathrm{i}I)D + (A - \mathrm{i}I)D\big) = AD = AB$ und
$B^2 + C^2 = -\dfrac{1}{4}\big((A - \mathrm{i}I)^{-1} - (A + \mathrm{i}I)^{-1}\big)^2 + \dfrac{1}{4}\big((A - \mathrm{i}I)^{-1} + (A + \mathrm{i}I)^{-1}\big)^2 = D = B.$

d) $\forall x \in H : (Bx, x) = (B^2x, x) + (C^2x, x) = |Bx|^2 + |Cx|^2 \geq 0$, d.h. $B \in L_+(H) \subset L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$.
Wenn F_λ die Spektralschar von B ist (Satz 20.1), so ist für $\lambda \leq 0$ $B - \lambda I \geq 0$
$\implies |B - \lambda I| = B - \lambda I \implies H^\lambda = \ker\big(|B - \lambda I| - (B - \lambda I)\big)^\perp = \{0\} \implies$
$F_\lambda = [\text{Projektor auf } H^\lambda] = 0$. Somit gilt $B = \displaystyle\int_{[0,1]} \lambda \,\mathrm{d}F_\lambda$.
Es ist sogar $F_{0+0} = 0$, denn sonst $\exists 0 \neq x \in \ker(B)$ (vgl. Satz 19.4 c))
$\implies Cx = ABx = 0 \implies y := (A - \mathrm{i}I)^{-1}x = (C + \mathrm{i}B)x = 0 \implies x = (A - \mathrm{i}I)y = 0$ ↯
Somit ist $B = \displaystyle\int_{(0,1]} \lambda \,\mathrm{d}F_\lambda$.

e) Es sei $H_1 := \operatorname{im}(I - F_{\frac{1}{2}})$, $H_j := \operatorname{im}\big(F_{\frac{1}{j}} - F_{\frac{1}{j+1}}\big) = H^{\frac{1}{j}} \cap \big(H^{\frac{1}{j+1}}\big)^{\perp}$ für $j \geq 2 \implies H_j \perp H_k$ für $j \neq k$ und $\Phi : \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} H_j \xrightarrow{\sim} H : x \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j$, denn Φ wohldefiniert, linear, isometrisch und bijektiv mit $\Phi^{-1}(x) = \big((I - F_{\frac{1}{2}})x, (F_{\frac{1}{2}} - F_{\frac{1}{3}})x, \cdots\big)$. Wegen $BF_\lambda = F_\lambda B$ ist $B(H_j) \subset H_j$ und $B_j := B\big|_{H_j} \in L(H_j) \cap \mathrm{Ls}(H_j)$ und $B_j = \int\limits_{\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]} \lambda \, \mathrm{d}F_\lambda\big|_{H_j}$, da

$$F_\lambda\big|_{H_j} = \begin{cases} F_{1/j}\big|_{H_j} = I_{H_j} & : \lambda \geq \frac{1}{j} \\ 0 & : \lambda \leq \frac{1}{j+1} \end{cases} \overset{\text{Satz 19.4}}{\implies} 0 \in \varrho(B_j) \implies B_j \text{ surjektiv}$$

$\implies H_j \subset \operatorname{im} B \subset D(A)$.
Weiters ist $CB = BC \implies$ (Satz 20.1', 1c)) $CF_\lambda = F_\lambda C \implies C(H_j) \subset H_j \implies A(H_j) = A\big(B(H_j)\big) = C(H_j) \subset H_j$; es sei $A_j := A\big|_{H_j} \implies D(A_j) = H_j$, $A_j \in \mathrm{Ls}(H_j) \implies$ (Hellinger-Töplitz) $A_j \in L(H_j) \cap \mathrm{Ls}(H_j) \underset{\text{Satz 20.1}}{\implies} A_j = \int\limits_{[a_j, b_j]} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda^{(j)}$ für eine Spektralschar $E_\lambda^{(j)}$ auf H_j.

f) Entsprechend Lemma 20.5 sei $E_\lambda \in \mathrm{Lsa}(H)$ mit $E_\lambda\big|_{H_j} = E_\lambda^{(j)}$

$$\implies |E_\lambda x|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{|E_\lambda^{(j)} x_j|^2}_{\leq |x_j|^2} \leq |x|^2$$

$\implies E_\lambda \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ und für $x \in H$, $\Phi^{-1}(x) = (x_j)$ ist $E_\lambda E_\mu x = E_\lambda(\sum_j E_\mu^{(j)} x_j) = \sum_j E_\lambda^{(j)} E_\mu^{(j)} x_j = \sum_j E_\lambda^{(j)} x_j = E_\lambda x$ wenn $\lambda \leq \mu$, d.h. $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda,\mu\}}$; ebenso ist

$$\lim_{\lambda\to-\infty} |E_\lambda x|^2 = \lim_{\lambda\to-\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} |E_\lambda^{(j)} x_j|^2}_{\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |E_\lambda^{(j)} x_j|^2}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2}_{\leq \varepsilon \text{ für } n \geq N}} = 0$$

und $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda x = x$; $\lim\limits_{\mu\nearrow\lambda} E_\mu x = E_\lambda x$. Also ist E eine Spektralschar auf H.

g) Es sei $\tilde{A} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$. Für $x \in H_j$ ist $E_\lambda x = E_\lambda^{(j)} x \implies$
$x \in D(\tilde{A})$ und $\tilde{A}x = \int\limits_{[a_j, b_j]} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda^{(j)} x = A_j x = Ax$. Dann ist

$A = \tilde{A} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ nach Lemma 20.5. $\square$

Bemerkung Ähnlich wie in Satz 20.1' erhalten wir eine „Funktionalkalkülform“:
$A \in \mathrm{Lsa}(H)$, E wie in Satz 20.2, $BC(\mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, beschränkt$\} \implies$

$F : \big(BC(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(L(H), \|\cdot\|\big) : \varphi \longmapsto \varphi(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda$ ist ein stetiger

$\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus, $F(1) = I$, $F\left(\dfrac{1}{\lambda - \lambda_0}\right) = (A - \lambda_0 I)^{-1}$ für $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
$\forall x \in H : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi \cap [-N, N] = \emptyset \implies \big|F(\varphi)x\big| \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty$,
und F ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

Satz 20.3

Für $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ ist die Spektralschar E mit $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ eindeutig bestimmt.

Beweis B, H_j, A_j, E_λ seien wie im Beweis von Satz 20.2 und $\tilde{E}_\lambda$ eine weitere Spektralschar auf H mit $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}\tilde{E}_\lambda \implies (A \pm \mathrm{i}I)^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda \pm \mathrm{i}} \, \mathrm{d}\tilde{E}_\lambda$ (vgl. S. 101)

$\implies$ (Satz 19.1, 2)) $\implies \tilde{E}_\lambda, B$ vertauschbar $\implies$ (Satz 20.1', 1)c)) $\implies \tilde{E}_\lambda, F_\mu$ vertauschbar

$\implies \tilde{E}_\lambda^{(j)} := \tilde{E}_\lambda\big|_{H_j} : H_j \longrightarrow H_j$ ist eine Spektralschar auf H_j und $A_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}\tilde{E}_\lambda^{(j)}$

$\implies$ (Satz 20.1', 2)) $\forall j \in \mathbb{N} : \forall \lambda \in \mathbb{R} : E_\lambda^{(j)} = \tilde{E}_\lambda^{(j)} \implies$ (Lemma 20.5)

$\implies \forall \lambda \in \mathbb{R} : E_\lambda = \tilde{E}_\lambda$. $\square$

Def.:
E wie in Satz 20.3 heißt **Spektralschar von** A.