1. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(1) (a) (X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Zeige:

$$M \subset X \text{ abgeschlossen} \iff M \text{ vollständig.}$$

(b) Zeige, dass l^1 in $(l^\infty, |\cdot|_\infty)$ nicht abgeschlossen ist.

(c) Folgere, dass $(l^1, |\cdot|_\infty)$ kein Banachraum ist und daher $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty$ auf l^1 nicht äquivalent sind.

Zusatzfrage: Welche der 2 Ungleichungen $|x|_\infty \leq C_1|x|_1$, $|x|_1 \leq C_2|x|_\infty$ ist falsch?

(2) Es sei $c_0 = \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N};\ \lim_{i\to\infty} x_i = 0\}$. Zeige:

(a) $l^1 \subset c_0$ (b) $c_0 \subset (l^\infty, |\cdot|_\infty)$ ist abgeschlossen (c) $l^1 \subset c_0$ ist dicht.

Warum ist dann $(c_0, |\cdot|_\infty)$ die Vervollständigung von $(l^1, |\cdot|_\infty)$?

(3) Es seien $1 \leq p < q < \infty$ (NICHT notwendig $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Zeige:

(a) $l^p \subset l^q$ (b) $l^p \neq l^q$ (c) $l^p \subset (l^q, |\cdot|_q)$ dicht.

Warum ist dann $(l^q, |\cdot|_q)$ die Vervollständigung von $(l^p, |\cdot|_q)$?

Zusatzfrage: Zeige $\bigcup\limits_{1\leq p<\infty} l^p \subsetneqq c_0$.

(4) Es sei $X = C([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$, $a < b \in \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

(a) Zeige, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.

(b) Zeige, dass $Y := \{f \in X;\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\} \leq X$ abgeschlossen ist.

(c) Es sei $f_0 \equiv 1$. Zeige, dass $\inf_{g\in Y} \|f_0 - g\|_\infty = 1$.

(d) Folgere, dass hier das "sup" im Riesz'schen Lemma ein Maximum ist.

(5) Es seien $a = 0, b = 1$ und X, Y wie oben, $X_1 = \{f \in X;\ f(0) = 0\}$, $Y_1 = X_1 \cap Y$.

(a) Warum ist $(X_1, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum und $Y_1 \leq X_1$ abgeschlossen?

(b) Setze $h_n(t) := (1 + \frac{1}{n})\, t^{1/n}$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n := f - \lambda h_n$ für $f \in X_1$ mit $\lambda := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Zeige $f_n \in Y_1$ und $\|f - f_n\|_\infty = (1 + \frac{1}{n})|\lambda|$.

(c) Zeige, dass $\inf\limits_{g\in Y_1} \|f - g\|_\infty \leq \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| < 1$ wenn $f \in X_1$, $\|f\|_\infty = 1$.

(d) Folgere, dass i.a. das "sup" im Riesz'schen Lemma kein Maximum ist.

(6) Zeige: (a) $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $x \in l^p$, $|x|_p \leq 1 \Longrightarrow |x|_q \leq 1$;

(b) $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $x \in l^p \Longrightarrow |x|_q \leq |x|_p$;

(c) $1 \leq p < \infty$, $x \in \mathbb{K}^n \Longrightarrow |x|_\infty \leq |x|_p \leq n^{1/p}|x|_\infty$;

(d) $x \in \mathbb{K}^n \Longrightarrow |x|_\infty = \lim_{p\to\infty} |x|_p$; (e) $x \in l^1 \Longrightarrow |x|_\infty = \lim_{p\to\infty} |x|_p$.

(7) (a) Zeichne $K^p := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|_p \leq 1\}$ jeweils für $p = 1, 2, \infty$ und $n = 2, 3$.

(b) Welche Inklusionen entsprechen den Ungleichungen von Üb. 6 (b), (c)?

(8) Zeige, dass für $1 \leq p < \infty$ gilt:

$$M \subset l^p \text{ präkompakt} \iff [M \text{ beschränkt}] \wedge [\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M : \sum_{i=N}^{\infty} |x_i|^p \leq \epsilon].$$

(Z1) Konstruiere in den folgenden Banachräumen beschränkte Folgen, die keine konvergenten Teilfolgen haben: (a) $(l^p, |\cdot|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, (b) $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

(9) Es sei $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, und $f_k(x) = 0$ bzw. kx bzw. 1 für $-1 \le x \le 0$ bzw. $0 \le x \le \frac{1}{k}$ bzw. $\frac{1}{k} \le x \le 1$. Skizze!

(a) Errate $f := \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ in $L^p([-1,1]) \simeq L^p((-1,1))$ und zeige $\|f_k - f\|_p \to 0$.

(b) Folgere, dass $(C([-1,1]), \|\cdot\|_p)$ kein Banachraum ist.

(c) Was ist die Vervollständigung von $(C([-1,1]), \|\cdot\|_p)$?

(10) Welche der folgenden Mengen sind präkompakt in $(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$?

(a) $M_1 = \{a + \sin x;\ a \in \mathbb{R}\}$ (b) $M_2 = \{\sin(ax);\ a \in \mathbb{R}\}$

(c) $M_3 = \{\sin(a + x);\ a \in \mathbb{R}\}$ (d) $M_4 = \{f_k$ wie in Üb. 9; $k \in \mathbb{N}\}$

(11) Es sei $BC(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt$\}$, $\phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ und $f_k(x) = \phi(x-k)$. Zeige:

(a) $(BC(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum;

(b) $M := \{f_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ ist gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig;

(c) M ist nicht präkompakt in $(BC(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Arzelà-Ascoli?

(12) Überlege, dass der Satz von Arzelà-Ascoli allgemeiner gilt für $C(K)$, wenn K ein kompakter metrischer Raum ist.

(13) Es sei $1 \le p \le \infty$ und $f_k(x) = c_k \cdot x^k$ mit $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Was muss c_k erfüllen, dass $f_k \to 0$ in $L^p([0,1])$?

(b) Stelle c_k so ein, dass $f_k \to 0$ in $L^p([0,1])$ aber nicht in $L^q([0,1])$ für $q > p$.

(c) Stelle c_k so ein, dass $\forall x \in [0,1) : f_k(x) \to 0$, aber $f_k \not\to 0$ in $L^1([0,1])$.

Zusatzfrage: Warum ist der Satz von Lebesgue in (c) nicht anwendbar?

(14) (X, Σ, μ) sei ein *endlicher* Maßraum, d.h. $\mu(X) < \infty$, und $1 \le p < q < \infty$ (NICHT notwendig $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) . Zeige: (a) $L^q(X) \subset L^p(X)$ und ist darin dicht;

(b) $\forall f \in L^q(X) : \|f\|_p \le \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$ (Hinweis: $\|f\|_p^p = \int_X |\tilde{f}|^p \cdot 1 \mathrm{d}\mu$, Hölder mit $p_1 = \frac{q}{p}$)

Warum ist dann $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ die Vervollständigung von $(L^q(X), \|\cdot\|_p)$? (Vgl. Üb. 3.)

Zusatzfrage: Gilt $L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ oder $L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$, wenn $\mu =$ Lebesguemaß?

(15) X sei ein metrischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $K \subset X$, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$. Zeige: (a) $d(-, A) : X \longrightarrow [0, \infty) : x \longmapsto \inf\limits_{y \in A} d(x,y)$ ist lipschitzstetig.

(b) "sup" = "max" im Riesz'schen Lemma bei endlicher Dimension.

(c) $d(K, A) := \inf\limits_{x \in K} d(x, A) = \inf\limits_{x \in K, y \in A} d(x,y) > 0$. (Welche "inf" sind "min"?)

(16) Es sei $1 \le p < \infty$ und $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\cdot\|_p$. Für $f \in X$ und $a \in \mathbb{R}^n$ sei $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$. Zeige: $\lim\limits_{a\to 0} \tau_a f = f$ in X zuerst für $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ und dann allgemein für $f \in X$! Zusatzfrage: Gilt dies auch für $p = \infty$?

(Z2) Es sei $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $\mu = \lambda|_\Omega$, $1 \le p < \infty$. Überlege, dass $L^p(\Omega) \simeq \{[\tilde{f}] \in L^p(\mathbb{R}^n);\ \tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0\}$ und zeige, dass

$$M \subset L^p(\Omega) \text{ präkompakt } \iff [M \text{ beschränkt in } L^p(\Omega)]$$
$$\wedge [\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall a \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |a| \le \delta : \forall f \in M : \|\tau_a f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \epsilon].$$

2004 - 10 - 28

3. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(17) Bestimme $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \dfrac{\epsilon^3}{(x^2+\epsilon^2)^2}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$! Skizze!

(18) (a) Zeige: $f_k \to f$ in $L^p(\Omega) \Longrightarrow T_{f_k} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Folgere $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k} = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$. (b) Folgere $\lim\limits_{k\to\infty} \cos(kx) = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$. (Gilt das auch punktweise?)

(c) Zeige den Grenzwert in (b) direkt durch partielles Integrieren!

(19) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert $\lim\limits_{k\to\infty} k^\lambda Y(x) \mathrm{e}^{-kx}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$? Skizze!

(20) Bestimme in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

(a) $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \dfrac{\epsilon^n}{|x|^{2n}+\epsilon^{2n}}$ (b) $\lim\limits_{k\to\infty} k^\lambda \mathrm{e}^{-k|x|}$ für $\lambda \le n$.

(21) Es sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \setminus \{0\}$. Welche der Folgen

(a) $\dfrac{1}{k}\,\phi(x)$ (b) $k\phi(kx)$ (c) $\dfrac{1}{k}\,\phi\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$

konvergieren für $k \to \infty$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, welche in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$? Skizze!

(22) Es sei $T = \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathbb{C} : \phi \longmapsto \int\limits_{-N}^{N} \dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$, wobei $\operatorname{supp}\phi \subset [-N, N]$. Zeige:

(a) T ist wohldefiniert; (b) T ist linear; (c) $|T(\phi)| \le 2N \cdot \|\phi'\|_\infty$;

(d) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$; (e) $T(\phi) = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{|x|\ge\epsilon} \dfrac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(23) (Fortsetzung) Zeige $\lim_{\epsilon\searrow 0} \dfrac{1}{x \pm \mathrm{i}\epsilon} = \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$! (Formel von Sochozkij)

Hinweis: $\dfrac{1}{x\pm\mathrm{i}\epsilon}\,(\phi) = \int\limits_{-N}^{N} \dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x\pm\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{d}x + \phi(0) \int\limits_{-N}^{N} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\pm\mathrm{i}\epsilon}$.

(24) (a) Warum gilt $\dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{|x|^2+\epsilon^2}}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$?

(b) Berechne $\Delta_3 |x|^{-1} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \Delta_3 \dfrac{1}{\sqrt{|x|^2+\epsilon^2}}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$! $\left(\int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\right)$

(Z3) (a) Zeige $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sin(kx)}{x} = \pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ausgehend von

$$\frac{\sin(kx)}{x}\,(\phi) = \int_{-N}^{N} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{-N}^{N} \phi(0)\frac{\sin(kx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Was ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$?

2004 - 11 - 04

1. Klausur zu 'Funktionalanalysis', WS 2004/05

Du kannst alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Dir angerechnet. Beachte bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) (a) Zeige, dass $l^1 \subset l^2$.

(b) Berechne $|x_a|_1$ sowie $|x_a|_2$ für $x_a := (1, a, a^2, \dots)$ mit $0 < a < 1$.

(c) Zeige $\nexists C > 0 : \forall x \in l^1 : |x|_1 \leq C|x|_2$ unter Verwendung von (b). Sind die Normen $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ auf l^1 äquivalent?

(2) Zeige, dass für $c_0 = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0\}$ mit $|\cdot|_\infty$ gilt:

$M \subset c_0$ präkompakt $\iff$ [M beschränkt]$\wedge$[$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in M : \forall i \geq N : |x_i| \leq \epsilon$].

(3) Es sei $f_k(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ für $-1 \leq x \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}$.

(a) Errate $f := \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ in $L^2([-1,1])$ und zeige $f_k \to f$ mit dem Satz von Lebesgue.

(b) Berechne $\|f_k - f\|_2$ und zeige $\|f_k - f\|_2 \to 0$ direkt!

(c) Was ist die Vervollständigung von $\big(C([-1,1]), \|\cdot\|_2\big)$?

(4) Welche der folgenden Mengen sind präkompakt in $\big(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$?

(a) $M_1 = \{x + k;\ k \in \mathbb{N}\}$ (b) $M_2 = \{f_k$ wie in Aufgabe 3; $k \in \mathbb{N}\}$

(c) $M_3 = \{k \sin(\frac{x}{k});\ k \in \mathbb{N}\}$

(5) Bestimme $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{\epsilon^2}{(|x|^2 + \epsilon^2)^2}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$! (Beachte: in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathbf{zwei}})$!)

(6) (a) Warum gilt $\log|x| = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \log\sqrt{|x|^2 + \epsilon^2}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$?

(Hinweis: $\left|\log\sqrt{|x|^2+\epsilon^2}\right| \leq \big|\log|x|\big| + \log\sqrt{N^2+1}$ für $0 < |x| \leq N, \quad \epsilon \in [-1,1]$.)

(b) Berechne $\Delta_2 \log|x| = \frac{1}{2} \lim\limits_{\epsilon\to 0} \Delta_2 \log(|x|^2 + \epsilon^2)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$!

2004 - 11 - 11

4. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(25) Es sei ${}_{\mathbb{K}}X$ ein Banachraum und $A \in L(X)$. Beweise, dass $\rho(A) \subset \mathbb{K}$ offen ist. Nehme dazu $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$ und zeige:

(a) $A - \lambda I = (A - \lambda_0 I) \cdot B$, wenn $B := I + (\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1}$;

(b) $B^{-1} \in L(X)$; (c) $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$.

(26) Für $1 \le p \le \infty$ betrachten wir im Banachraum $(l^p, |\cdot|_p)$ die "Shiftabbildung" $A : l^p \longrightarrow l^p : (x_1, x_2, \dots) \longmapsto (x_2, x_3, \dots)$. (a) Warum ist $A \in L(l^p)$?

(b) Was ist $\|A\|$? (c) Welche Eigenwerte hat A? (d) Was ist $\rho(A)$?

(27) (Fortsetzung) Löse $Ax - \lambda x = y$ für $|\lambda| > 1$ mit der Neumann'schen Reihe. Was ergibt sich speziell für $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ (wenn $p > 1$)?

(28) ${}_{\mathbb{C}}X$ sei ein Banachraum, $A \in L(X)$, und $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, $c_j \in \mathbb{C}$, eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty]$.

(a) Zeige, dass $f(A) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j A^j$ in $L(X)$ konvergiert, wenn $\|A\| < r$.

(b) Wie erhält man die Neumann'sche Reihe als Spezialfall?

(c) Zeige $\|\mathrm{e}^A\| \le \mathrm{e}^{\|A\|}$ und $\mathrm{e}^{sA} \cdot \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{(s+t)A}$ für $s, t \in \mathbb{C}$.

(29) (Fortsetzung) Um die *Lieproduktformel* $\mathrm{e}^{A+B} = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{A/n} \cdot \mathrm{e}^{B/n})^n$ in $L(X)$ für $A, B \in L(X)$ zu beweisen, setze $S = S_n = \mathrm{e}^{(A+B)/n}$, $T = T_n = \mathrm{e}^{A/n} \cdot \mathrm{e}^{B/n}$, und zeige:

(a) $S^n - T^n = \sum_{j=0}^{n-1} S^j (S - T) T^{n-1-j}$;

(b) $\|S^n - T^n\| \le \mathrm{e}^{\|A\|+\|B\|} \cdot n \cdot \|S - T\|$;

(c) $S - T = f(\frac{A+B}{n}) - \frac{AB}{n^2} - f(\frac{A}{n})\mathrm{e}^{B/n} - (I + \frac{A}{n}) f(\frac{B}{n})$ für $f(z) = \sum\limits_{j=2}^{\infty} \dfrac{z^j}{j!}$;

(d) $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \|S_n - T_n\| \le \frac{C}{n^2}$.

(30) Bestimme für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $\|A\|_\infty = \max\limits_{|x|_\infty \le 1} |Ax|_\infty$ und folgere $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$.

(31) ${}_{\mathbb{K}}X$ sei ein Banachraum, $A \in L(X)$, $X_1 = \ker A = A^{-1}(0)$, $X_2 = \operatorname{im} A = A(X)$, und es gelte $X_1 \ne \{0\}$, $\dim X_2 < \infty$, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, $X_1 + X_2 = X$. $B := A|_{X_2}$ habe die Eigenwerte $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $A - \lambda I$ bijektiv?

(b) Was ist für diese λ $(A - \lambda I)^{-1}(x_1 + x_2)$, wenn $x_i \in X_i$, und was ist $\sigma(A)$?

(32) (Fortsetzung) Betrachte im Banachraum $\big(X = L^p((0, \pi)), \|\cdot\|_p\big)$, $1 \le p \le \infty$, den Operator $K : X \longrightarrow X : f \longmapsto \big(x \longmapsto \int_0^\pi \sin(x + y) f(y)\,\mathrm{d}y\big)$.

(a) Bestimme $X_1 = \ker K$ und $X_2 = \operatorname{im} K$. (Additionstheorem!)

(b) Zeige $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ und $X_1 + X_2 = X$. (c) Was ist $\sigma(K)$?

(d) Löse die Fredholm'sche Integralgleichung $Kf - 2f = \mathrm{e}^x$.

(Z4) $(\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sei eine beschränkte Folge und $A : l^p \longrightarrow l^p : x \longmapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, $1 \le p \le \infty$. Was ist $\|A\|$? Was ist $\sigma(A)$? Was ist $(A - \lambda I)^{-1}$ für $\lambda \in \rho(A)$? Konstruiere $A \in L(l^p)$ mit $\sigma(A) = K$ für vorgegebenes $\emptyset \ne K \subset \mathbb{K}$, K kompakt.

2004 - 11 - 18

5. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(33) (a) Zeige, dass in einem Hilbertraum H die *Parallelogrammgleichung* gilt, d.h.
$$\forall x, y \in H : |x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$
(b) Folgere, dass l^p für $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, kein Hilbertraum ist, d.h. dass es kein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ mit $\forall x \in l^p : (x, x) = |x|_p^2$ geben kann.

(34) Es sei $\tilde{f}(t) = t$ für $0 \leq t < 2\pi$.

(a) Setze $\tilde{f}$ periodisch fort ("Sägezahnfunktion"). Skizze!

(b) Berechne die Fourierkoeffizienten $\lambda_k = (f, e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \mathrm{e}^{-ikt}\, dt$.

(c) Was ist die Fourierreihe von f? Fasse $\lambda_k e_k$ und $\lambda_{-k} e_{-k}$ zusammen!

(d) Warum ist die Dirichletbedingung in jedem Punkt t_0 erfüllt?

(e) Was ergibt die Fourierreihe für $t = 0$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$?

(35) (a) Was besagt die Parsevalsche Gleichung für die Fourierreihe von $f \in L^2((0, 2\pi))$?

(b) Was ergibt sich speziell in Übung 34?

(36) Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f \in L^2((0, 2\pi))$ mit $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$. (a) Bestimme die Fourierkoeffizienten λ_k, $k \in \mathbb{Z}$. (b) Setze $t = \pi$ in der Fourierreihe von f, nimm den Realteil, und leite die Partialbruchzerlegung $\dfrac{1}{\sin \alpha\pi} = \dfrac{1}{\pi} \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=-N}^{N} \dfrac{(-1)^k}{\alpha - k}$ her!

(37) Es sei $\tilde{f}(t) = \sqrt[3]{t}$ für $-\pi \leq t < \pi$ und $\tilde{f}$ werde periodisch fortgesetzt. Skizze!

(a) In welchen Punkten ist die Dirichletbedingung erfüllt?

(b) Zeige, dass in 0 die Dinibedingung erfüllt ist, und die Fourierreihe daher überall punktweise konvergiert!

(38) Zeige, dass für Funktionen $f \in L^2((0, p))$, $p > 0$, die wir uns periodisch fortgesetzt denken, die Fourierreihe auch in der Form $f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k + b_k s_k)$ geschrieben werden kann, wobei $c_k(t) = \cos \frac{2\pi kt}{p}$, $s_k(t) = \sin \frac{2\pi kt}{p}$, $a_0 = \frac{1}{p} \int\limits_a^{a+p} f(t)\, dt$, und
$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{2}{p} \int\limits_a^{a+p} f(t) \begin{Bmatrix} c_k(t) \\ s_k(t) \end{Bmatrix} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$
(Starte mit $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, e_k) e_k, e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{p}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kt/p}$.)

(39) Betrachte die "Sägezahnfunktion" $f = [\tilde{f}] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}(t) = t - 2\pi k$ für $2\pi k \leq t < 2\pi(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ (vgl. Üb. 34). Zeige, dass $f' = 1 - 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, d.h. $-T_f(\phi') = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, dt - 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2\pi k)$ für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

(40) (Fortsetzung) Folgere aus den Übungen 34 und 39, dass $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, d.h. $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \phi(t)\, dt = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2\pi k)$ für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. (Die letzte Gleichung heißt *Poissonsche Summationsformel.*)

(Z5) Entwickle $f(t) = |\cos t|$ mit Periode $p = \pi$ in eine Fourierreihe entsprechend Übung 38. Warum ist $b_k = 0$? Plotte f sowie die ersten Fourierapproximationen!

2004 - 11 - 25

6. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(41) (a) Finde einen Banachraum X mit $\dim X = 2$ und $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, sodass $\min\limits_{y\in M} |y|$ in unendlich vielen Punkten von M angenommen wird.
(b) Es sei $X = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ und $M := \{f \in X;\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1\}$. Warum ist M abgeschlossen und konvex? Warum ist $1 = \inf\limits_{f\in M} \|f\|_\infty$ kein Minimum?

(42) H sei ein Hilbertraum, $x \in H$, $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ein ONSystem, $H_1 = \{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k;\ \alpha_k \in \mathbb{K}\}$. (a) Was ist $H_1^\perp$? (b) Zeige: $y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \in H_1$, $z = x - y \in H_1^\perp$.
(c) Zeige: $d(x, H_1) = \min\limits_{u\in H_1} |x - u| = |x - y|$ für y wie in (b) und für kein anderes y in H_1. (d) Für welche $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ist $\int_0^{2\pi} \left| t - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\mathrm{e}^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 \mathrm{d}t$ minimal?

(43) (Verallgemeinerung) H sei ein Hilbertraum, S ein ONSystem und H_1 der Abschluss von $V := \{\sum\limits_{e\in S} \lambda_e e;\ \lambda_e = 0$ bis auf endlich viele$\}$. Zeige: (a) $H_1^\perp = S^\perp$
(b) S ONB $\Leftrightarrow H_1 = H$ (c) $P : H \longrightarrow H : x \longmapsto y = \sum_{e\in S} (x, e) e$ ist der Projektor zu H_1. (d) Was ist Pf für $H = L^2((0, 2\pi))$, $f(t) = t$, $S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikt};\ k \in 2\mathbb{Z}\}$?

(44) Entsprechend Satz 8.1 betrachten wir den Hilbertraumisomorphismus
$F : L^2((0, 2\pi)) \xrightarrow{\sim} l^2(\mathbb{Z}) : f \longmapsto (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, wobei $\lambda_k = (f, e_k)$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikt}$. Weiters sei $x \in l^2(\mathbb{Z})$ mit $x_k = 0$ für $k < 0$ und $x_k = a^k$ für $k \geq 0$ mit $0 < a < 1$ fest. (a) Bestimme $f = F^{-1}(x)$! (b) Überprüfe die Parsevalsche Gleichung $|x|_2 = \|f\|_2$ mit dem Residuensatz!

(45) Es sei $H = L^2((0, \pi))$ und K wie in Übung 32. (a) Warum ist $K \in \mathrm{Fr}(H)$?
(b) Bestimme $e_j, \tilde{e}_j$ entsprechend Lemma 9.1. (c) Was ist K^*?

(46) Es sei $\phi(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$. Berechne $y(x) = (\mathcal{F}\phi)(x)$ wie folgt:
(a) $\phi' = -2x \cdot \phi$ (b) $y' = -\frac{x}{2} \cdot y$ (Lemma 10.1!)
(c) $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x^2/4}$ (d) $c = y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}$ (wie in FA86).

(47) Es sei $f_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ für $x \in \mathbb{R}^1$, $a > 0$.
(a) Ist $f_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$? (b) Ist $f_a \in L^1(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$?
(c) Berechne $\mathcal{F} f_a$! (d) Kontrolliere $\mathcal{F}1 = 2\pi\delta$ mittels $\mathcal{F}1 = \mathcal{F}(\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} f_\epsilon) = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \mathcal{F} f_\epsilon$!

(48) (Fortsetzung) (a) Warum ist $f_a \in L^2(\mathbb{R}^1)$?
(b) Kontrolliere für f_a die Plancherelsche Formel $\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} f_a \right\|_2 = \|f_a\|_2$.

(Z6) Kontrolliere mit dem Residuensatz, dass $\mathcal{F}(\mathcal{F} f_a) = 2\pi \check{f}_a$ für f_a wie in Übung 47.

2004 - 12 - 03

2. Klausur zu 'Funktionalanalysis', WS 2004/05

Du kannst alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Dir angerechnet. Beachte bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) Es sei $X = L^1((0,1))$ mit $\|\cdot\|_1$ und $A : X \longrightarrow X : f \longmapsto x\cdot f$ (wobei genaugenommen $x \cdot f = [(0,1) \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto x \cdot \tilde{f}(x)]$).

(a) Warum ist $A \in L(X)$? (b) Was ist $\|A\|$? (Verwende z.B. $f_n(x) = (n+1)x^n$)

(c) Hat A Eigenwerte? (d) Löse $(A - \lambda I)f = g$ für $|\lambda| > \|A\|$ mit der Neumannschen Reihe und überprüfe das Ergebnis!

(2) Betrachte im Banachraum $\big(X = L^1((0,1)), \|\cdot\|_1\big)$ den Integraloperator $K : X \longrightarrow X : f \longmapsto \big[x \longmapsto \int_0^1 (2 - 12xy^2) f(y)\,\mathrm{d}y\big]$.

(a) Bestimme $X_1 = \ker K$ und $X_2 = \operatorname{im} K$!

(b) Zeige $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ und $X_1 + X_2 = X$. (c) Was ist $\sigma(K)$?

(3) Es sei $\tilde{f}(t) = \begin{cases} 1 : 0 \le t < \pi, \\ 0 : \pi \le t < 2\pi. \end{cases}$ (a) Setze $\tilde{f}$ periodisch fort. Skizze!

(b) Berechne die Fourierkoeffizienten $\lambda_k = (f, e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$.

(c) Was ist die Fourierreihe von f? Fasse $\lambda_k e_k$ und $\lambda_{-k} e_{-k}$ zusammen!

(d) Was ergibt die Fourierreihe für $t = \pi$? Warum?

(e) Was ergibt die Parsevalsche Gleichung? Berechne $\sum\limits_{k=1,3,\dots} \dfrac{1}{k^2}$!

(4) $f = [\tilde{f}] \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ sei wie in Aufgabe 3, d.h. $\tilde{f}(t) = 1$ für $2\pi k \le t < \pi(2k+1)$ und 0 sonst. Differenziere f in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und leite eine Darstellung von $\sum\limits_{k=1,3,\dots} \cos kt$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ her!

(5) Entsprechend Satz 8.1 betrachten wir den Hilbertraumisomorphismus $F : L^2((0,2\pi)) \xrightarrow{\sim} l^2(\mathbb{Z}) : f \longmapsto (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, wobei $\lambda_k = (f, e_k)$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. Weiters sei $x \in l^2(\mathbb{Z})$ mit $x_k = 0$ für $k < 0$ und $x_k = \frac{a^k}{k!}$ für $k \ge 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ fest. (a) Bestimme $f = F^{-1}(x)$! (b) Verwende die Parsevalsche Gleichung $|x|_2^2 = \|f\|_2^2$ um $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2a\cos t}\,dt$ als Reihe darzustellen!

(c) Berechne daraus $\int_0^{2\pi} \cos^{2k} t\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{N}_0$, durch Benützung von $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2a\cos t}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2a)^n}{n!} \int\limits_0^{2\pi} \cos^n t\,\mathrm{d}t$. (Hinweis: Für ungerades n ist $\int_0^{2\pi} \cos^n t\,\mathrm{d}t = 0$.)

(6) Es sei $f_a(x) = Y(x)\mathrm{e}^{-ax}$ für $x \in \mathbb{R}^1$, $a > 0$ (wobei $Y(x) = 1$ für $x > 0$ und 0 sonst).

(a) Berechne $\mathcal{F} f_a$! (b) Kontrolliere $\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} f_a \right\|_2^2 = \|f_a\|_2^2$.

2004 - 12 - 09

7. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(49) Beweise Satz 10.2, d.h. zeige für $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ linear:

$$T \in \mathcal{S}' \iff \exists C > 0 : \exists m \in \mathbb{N}_0 : \forall \phi \in \mathcal{S} : |T(\phi)| \leq C \Big\| (1+|x|)^m \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \phi(x)| \Big\|_\infty$$

(50) Für $h \in L^2((0, 2\pi)) = H$ mit Fourierreihe $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_k e_k$, $\mu_k = (h, e_k)$, $e_k = \frac{\mathrm{e}^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$, sei K der "Faltungsoperator" $K : H \longrightarrow H : f \longmapsto \int_0^{2\pi} h(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$ (wobei h periodisch fortgesetzt wird).

(a) Was ist $\|K(x,y)\|_{L^2((0,2\pi)^2)}$? (b) Warum ist K kompakt?

(c) Zeige $K(e_k) = \sqrt{2\pi}\mu_k e_k$ und folgere $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\sqrt{2\pi}\mu_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Was ist $\sigma(K)$, wenn $h(t) = t$ für $0 < t < 2\pi$?

(51) (Fortsetzung) (a) Welcher Operator A entspricht K, wenn F wie in Üb. 44 ist und

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{K} & H \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ l^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{A} & l^2(\mathbb{Z}) \end{array}$$

kommutiert?

(b) Was ist $(A - \lambda I)^{-1}$ bzw. $(K - \lambda I)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(K)$?

(c) Was ist A^*? Was ist $K^*(e_k)$? Was ist $\ker(K^* - \bar{\lambda} I)$ für $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$?

(d) Ist $(K - \lambda I)f = g$ lösbar, wenn $h(t) = t$ für $0 < t < 2\pi$, $\lambda = 2\pi\,\mathrm{i}$, und $g(t) = \mathrm{e}^t$?

(52) X, Y seien Banachräume. Zeige mit dem Graphensatz, dass

(a) $[A \in L(X,Y),\ A$ bijektiv $\Longrightarrow A^{-1} \in L(Y,X)]$ und folgere

(b) $A \in L(X) \Longrightarrow \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ A - \lambda I : X \longrightarrow X$ bijektiv$\}$;

(c) $A \in L(X) \Longrightarrow \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \vee \mathrm{im}(A - \lambda I) \neq X\}$.

(53) Zeige für $A, B \in \mathrm{Lu}(H)$: (a) $D(A^*) \leq H$ und $A^* : D(A^*) \longrightarrow H$ ist linear.

(b) $A \subset B \Longrightarrow B^* \subset A^*$ (c) $A \subset B \in \mathrm{Ls}(H) \Longrightarrow B \subset A^*$

(54) Es sei $A \in \mathrm{Lab}(H)$. Zeige, dass $A^* = (\bar{A})^*$.

(55) Sei $H = L^2((0,1))$ und $A : \{f \in W^{2,1}((0,1));\ f(0) = f(1) = 0\} \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$.
Zeige: (a) $A \in \mathrm{Ls}(H)$ (b) $A \in \mathrm{La}(H)$

(c) $A^* : W^{2,1}((0,1)) \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$ (d) $A^{**} = A$

(56) (Fortsetzung) Wir betrachten $A \subsetneqq B \subsetneqq A^*$.

(a) Zeige, dass $B = A_\alpha : \{f \in W^{2,1}((0,1));\ f(0) = \alpha f(1)\} \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$ für ein $\alpha \in \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei $D(A_\infty) = \{f \in W^{2,1}((0,1));\ f(1) = 0\}$.

(b) Was ist A_α^*? (c) Für welche α ist A_α selbstadjungiert?

(Z7) A sei wie in Aufgabe (55) und $C = A|_{\mathcal{D}((0,1))}$. Zeige, dass $A = \bar{C}$ und dass A und A_α, $|\alpha| = 1$, die einzigen abgeschlossenen, symmetrischen Erweiterungen von C sind!

2004 - 12 - 16

8. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(57) Es sei $H = L^2((0,1))$ und $A : H \longrightarrow H : f \longmapsto xf$. (a) Zeige $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$!

(b) Warum ist $A - \lambda I : H \longrightarrow H$ injektiv für $\lambda \in \mathbb{C}$? Was ist $\sigma_p(A)$?

(c) Warum ist $A - \lambda I : H \longrightarrow H$ surjektiv für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$?

(d) Warum ist die konstante Funktion 1 nicht in $\mathrm{im}(A - \lambda I)$ für $0 \le \lambda \le 1$? Was ist $\sigma(A)$? Was ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$?

(58) H, A seien wie in Übung 57 und $f_n(x) = \sqrt{n^2 + n}$ für $\frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}$ und 0 sonst.

(a) Warum ist (f_n) ein ONSystem? (b) Warum eine Weylsche Folge zu $\lambda = 0$?

(c) Wie findet man Weylsche Folgen zu $\lambda \in (0,1]$?

(59) Es sei $H = L^2((0,1))$, $B = A_0 : \{f \in W^{2,1}((0,1));\ f(0) = 0\} \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$ (vgl. Üb. 56), $\lambda \in \mathbb{C}$, und $R_\lambda : H \longrightarrow D(B) : f \longmapsto -\mathrm{i}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Warum ist $R_\lambda \in L(H)$?

(b) Überprüfe $(B - \lambda I)R_\lambda = I$, $R_\lambda(B - \lambda I) = I|_{D(B)}$. Was ist $\sigma(B)$?

(60) Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ fest und $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ sei A_α wie in Übung 56.

(a) Für welche $\mu \in \mathbb{C}$ ist $f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}$ ein Eigenvektor von A_α (zum EW μ)?

(b) Warum ist $f_k(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)t}$, $k \in \mathbb{Z}$, eine ONB in $L^2((0,1))$ und $F : L^2((0,1)) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) : f \longmapsto (k \mapsto (f, f_k))$ unitär?

(c) Warum ist $B \in \mathrm{Lsa}(l^2(\mathbb{Z}))$, wenn $B : \{x \in l^2(\mathbb{Z}); \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|x_k|^2 < \infty\} \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) : x \longmapsto (k \mapsto (\varphi + 2\pi k) \cdot x_k)$? Was ist $\sigma(B)$?

(d) Warum entsprechen sich A_α und B modulo F? Was ist also $\sigma(A_\alpha)$?

(61) $A : H = \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ sei gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimme eine ONB e_i aus Eigenvektoren von A. (EWe: $\mu_j = -1, 2, 5$.)

(b) Bestimme die Projektoren $P_j(x) = \sum_{\lambda_i=\mu_j}(x, e_i)e_i$, d.h. $P_j = \sum_{\lambda_i=\mu_j} e_i \cdot \bar{e}_i^T$.

(c) Zeige, dass $E_\lambda = 0$ für $\lambda \le -1$, $E_\lambda = P_1$ für $-1 < \lambda \le 2$, $E_\lambda = P_1 + P_2$ für $2 < \lambda \le 5$, $E_\lambda = P_1 + P_2 + P_3 = I$ für $5 < \lambda$ eine Spektralschar ist! Was ist $E_{\mu_j+0} - E_{\mu_j}$?

(62) (Verallgemeinerung) Es sei $A \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ und S eine ONB aus Eigenvektoren, d.h. $Ae = \lambda_e e$ für $e \in S$, vgl. Satz 18.3/4.

(a) Zeige, dass durch $E_\lambda x := \sum_{\lambda_e<\lambda}(x, e)e$ eine Spektralschar definiert ist!

(b) K sei der Faltungsoperator zu $h(t) = \mathrm{i}(t - \pi)$, $0 < t < 2\pi$, vgl. Übung 50. Warum ist $K \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$? Was ist hier E_{-3}?

(63) Es sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und $E_\lambda : H \longrightarrow H : f \longmapsto f \cdot Y(\lambda - x)$. Skizziere $E_\lambda f$ und zeige, dass E_λ eine Spektralschar ist! Was ist $\dim(H^\mu \cap H^{\lambda\perp})$ für $\lambda < \mu$?

(64) Zeige $\int\limits_{\{a,b]} \phi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda) = \int\limits_{\{a,b)} \phi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda) + \phi(b) \cdot \big(\lim\limits_{\lambda\searrow b} h(\lambda) - \lim\limits_{\lambda\nearrow b} h(\lambda)\big)$.

(Z8) Drücke $\int_{\{a,b\}} \phi(\lambda)\,\mathrm{d}h(\lambda)$ durch Riemannintegrale und Summen aus, wenn h stückweise C^1 ist!

2005 - 01 - 13

9. Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(65) H sei ein Hilbertraum, $A \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$, und E_λ sei definiert wie in Übung 62. Zeige, dass $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$. Setze dafür $a = \min \sigma(A)$, $b = \max \sigma(A)$ und zeige, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda = \int_{[a,b]} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ sowie $\left|Ax - \sum_{i=0}^{k-1} a_i (E^1_{a_{i+1}} x - E^1_{a_i} x)\right|^2 \leq d(Z)^2 |x|^2$ für $x \in H$ und eine Zerlegung Z von $[a, b]$.

(66) Es sei $H = L^2((0,1))$ und $K : H \longrightarrow H : f \longmapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{xy} f(y) \, \mathrm{d}y$.

(a) Warum ist $K \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$?

(b) Stelle $K(x^j)$ als Potenzreihe dar für $j \in \mathbb{N}_0$!

(67) (Fortsetzung) f sei eine Eigenfunktion zu K zum Eigenwert $\lambda \neq 0$.

(a) Warum lässt sich f in eine Potenzreihe (mit Konvergenzradius ∞) entwickeln?

(b) Setze $f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$, schreibe Kf als $\sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} c_j) x^i$ und bestimme (mit dem Computer) die 3 absolutgrößten Eigenwerte von $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq 50}$ als Näherung an die entsprechenden Eigenwerte von K. Was ist $\|K\|$ auf 5 Stellen?

(68) Es sei $A = -\mathrm{i} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : W^{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ (vgl. Bsp. S. 79).

(a) Welcher Operator B entspricht A via $\mathcal{F}$, d.h. erfüllt $B \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ A$?

(b) Was ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}$ für $t \in \mathbb{R}$? (Vgl. Bsp. S. 99.) (c) Was ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$?

(69) Es sei $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{H} : W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H : f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta f$ (mit $\hbar, m > 0$).

(a) Warum ist $\mathcal{H} \in \mathrm{Lu}(H)$? (b) Warum ist $\mathcal{H} \in \mathrm{Ls}(H)$?

(c) Welcher Operator B entspricht $\mathcal{H}$ via $\mathcal{F}$?

(d) Zeige, dass $B - \mathrm{i}tI$ surjektiv ist für $t \in \mathbb{R}^*$ und folgere, dass $\mathcal{H} \in \mathrm{Lsa}(H)$.

(70) (Fortsetzung) (a) Bestimme $\sigma(\mathcal{H}), \sigma_p(\mathcal{H}), \sigma_d(\mathcal{H}), \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{H})$.

(b) Bestimme die Spektralschar zu B! (Vgl. Bsp. S. 103.)

(c) Was ist $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tB/\hbar}$ für $t \in \mathbb{R}$?

(Z9) (a) Zeige $\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-cx^2}) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi c}} \mathrm{e}^{-x^2/(4c)}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ für $c > 0$.

(b) Überlege, dass $z \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z\xi^2 + \mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}\xi$ holomorph ist für $\mathrm{Re}\, z > 0$ und x fest.

(c) Folgere $\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x^2}) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \exp\Big(\mathrm{i}(\dfrac{x^2}{4\alpha} - \dfrac{\pi}{4})\Big)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ für $\alpha > 0$.

(d) Folgere $\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hbar|x|^2/(2m)}) = \Big(\dfrac{m}{2t\hbar\pi}\Big)^{n/2} \exp\Big(\mathrm{i}(\dfrac{m|x|^2}{2t\hbar} - \dfrac{n\pi}{4})\Big)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für $m, \hbar, t > 0$.

2005 - 01 - 20

10. und letztes Übungsblatt zu Funktionalanalysis, WS 2004/05

(71) Es sei $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $\phi \in C(\mathbb{R})$.

(a) Was ist $\phi(A)x$, wenn x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ ist, d.h. $Ax = \mu x$ bzw. $x \in \ker(A - \mu I)$?

(b) Was ist $\phi(A)x$, $x \in H$, wenn $A \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$ und S wie in Übung 62? (Vgl. auch Üb. 65.) (c) Was ist $|A|$ bzw. $\sin(\frac{\pi}{2} A)$ für A in Übung 61?

Zusatzfrage: Was muss ϕ erfüllen, damit $\phi(A) \in \mathrm{Com}(H)$ für $A \in \mathrm{Com}(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$, $\dim H = \infty$?

(72) Es sei $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $\phi \in BC(\mathbb{R})$. Zeige:

(a) $\phi(A) \in L(H)$ und $\|\phi(A)\| \leq \|\phi\|_\infty$;

(b) $\forall x \in H : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \phi \cap [-N, N] = \emptyset \Longrightarrow |\phi(A)x| \leq \epsilon \|\phi\|_\infty$.

(73) Es sei $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $\phi \in C(\mathbb{R})$.

(a) Zeige, dass $\phi(A)$ unitär ist, falls $\forall \lambda \in \mathbb{R} : |\phi(\lambda)| = 1$. Kontrolliere das in Übung 68 c).

(b) Es sei $U_t := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}(A)$ für $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass (i) $\forall t \in \mathbb{R} : U_t$ ist unitär; (ii) $\forall s, t \in \mathbb{R} : U_{s+t} = U_s U_t$; (iii) $\forall t \in \mathbb{R} : \forall x \in H : \lim_{s \to t} U_s x = U_t x$.

(Bemerkung: Der *Satz von Stone* besagt, dass auch umgekehrt (i), (ii), (iii) die Darstellung $U_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$ für ein $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ implizieren.)

(74) Sei $H = L^2((0,1))$ und $\mathcal{H} : \{f \in W^{2,2}((0,1)); f(0) = f(1) = 0\} \to H : f \mapsto -f''$. ("Potentialtopf") (a) Zeige, dass $\mathcal{H} \in \mathrm{Ls}(H)$.

(b) Zeige, dass $\mathcal{H} - \lambda I$ surjektiv ist für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und folgere, dass $\mathcal{H} \in \mathrm{Lsa}(H)$. Hinweis: Wenn $g \in H$ und $g_1 \in L^2(\mathbb{R})$ die durch 0 fortgesetzte Funktion ist und $f_1 \in W^{2,2}(\mathbb{R})$ mit $-f_1'' - \lambda f_1 = g_1$ (vgl. Üb. 69), so ist $(\mathcal{H} - \lambda I)f = g$ für $f = f_1|_{(0,1)} - \alpha \mathrm{e}^{\mu x} - \beta \mathrm{e}^{-\mu x}$, $\mu^2 = -\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ geeignet.

(75) (Fortsetzung) (a) Zeige, dass $f_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$, eine ONB in H ist. Hinweis: $f \perp f_k$ in H, $k \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \operatorname{sign}(x) f(|x|) \perp \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}$ in $L^2((-1,1))$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Was entspricht $\mathcal{H}$ via $F : H \xrightarrow{\sim} l^2(\mathbb{N}) : f \longmapsto (k \mapsto (f, f_k))$? Was ist $\sigma(\mathcal{H})$? Was ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{H})$?

(Z10) Es sei $A \in \mathrm{Lsa}(H)$ mit $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \emptyset$. (Man sagt: "$A$ hat reines Punktspektrum".) Zeige: $\sigma(A)$ hat keinen Häufungspunkt; $A \notin L(H)$, falls $\dim H = \infty$; $\exists$ ONB $S \subset H$ aus Eigenvektoren von A; wenn $Ae = \lambda_e e$ für $e \in S$, so ist $D(A) = \{x \in H; \sum_{e \in S} \lambda_e^2 |(x,e)|^2 < \infty\}$ und $Ax = \sum_{e \in S} (x,e) \lambda_e e$ für $x \in D(A)$. Betrachte die Übungen 60 und 74/75 als Beispiele dafür!

2005 - 01 - 28

3. Klausur zu 'Funktionalanalysis', WS 2004/05

Du kannst alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Dir angerechnet. Beachte bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) Es sei $H = L^2((0,1))$ und $K : H \longrightarrow H : f \longmapsto \int\limits_0^1 \frac{y\cos(xy)}{\sin y} f(y)\,\mathrm{d}y$.

(a) Warum ist $K \in \mathrm{Com}(H)$? (b) Was ist K^*?

(c) Zeige $K^* f_0 = f_0$, wenn $\forall x \in (0,1) : f_0(x) = 1$!

(d) Ist $(K - I)f = \mathrm{e}^x$ lösbar?

(2) Es sei $H = L^2((0,1))$ und $A : \{f \in W^{2,1}((0,1));\ f(0) = f(1)\} \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{i}f'$. (Beachte: $f(0) = f(1)$ muss nicht 0 sein!) Zeige: (a) $A \in \mathrm{Ls}(H)$

(b) $g \in D(A^*) \Longrightarrow g \in W^{2,1}((0,1))$ und $A^* g = \mathrm{i}g'$

(Hinweis: Nehme $f \in \mathcal{D}((0,1))$!)

(c) $A = A^*$

(3) Es sei $H = L^2(\mathbb{R})$, $A : H \longrightarrow H : f \longmapsto f(x+1) + f(x-1)$, und $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2k}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,kx}$ für $|x| \le k$ und 0 sonst, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Warum ist $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$? (b) Warum ist $\{f_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ ein ONSystem?

(c) Warum ist $\{f_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Weylsche Folge zu $\lambda = 2$?

(4) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat folgende ONB aus Eigenvektoren: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (zum doppelten Eigenwert $\mu_1 = -1$), und $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert $\mu_2 = 2$).

(a) Bestimme die Projektoren P_1, P_2 auf die Eigenräume. Kontrolliere $P_1 + P_2 = I$.

(b) Gib die Spektralschar E_λ von A an! Was ist E_{2+0}?

(c) Zeige, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda = A$! (d) Berechne $|A|$ sowie $\cos(\pi A)$!

(5) H und A seien wie in Aufgabe 3.

(a) Welcher Operator B entspricht A via $\mathcal{F}$, d.h. erfüllt $B \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ A$?

(b) Was ist $\sigma(B) = \sigma(A)$? Was ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(B) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$?

(6) Sei $H = L^2((0,1))$ und $\mathcal{H} : \{f \in W^{2,2}((0,1));\ f'(0) = f'(1) = 0\} \to H : f \mapsto -f''$.

(a) Zeige, dass $f_0(x) = 1$, $f_k(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$, eine ONB in H ist!

(b) Was entspricht $\mathcal{H}$ via $F : H \xrightarrow{\sim} l^2(\mathbb{N}_0) : f \longmapsto (k \mapsto (f, f_k))$? Was ist $\sigma(\mathcal{H})$? Was ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{H})$?

2005 - 04 - 11

Wiederholungsklausur I zu den Übungen 'Funktionalanalysis', WS 2004/05

Alle 6 Aufgaben können angerechnet werden. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) Es sei $X = l^1$ mit $|\cdot|_1$ und $Y = \{y \in l^1; \forall k \in \mathbb{N} : y_{2k} = 0\}$.

(a) Zeige, dass $Y \leq X$ abgeschlossen ist!

(b) Bestimme $\inf\limits_{y \in Y} |x - y|_1$ für $x \in X$ fest!

(c) Ist das "sup" im Rieszschen Lemma in diesem Fall ein Maximum?

(2) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ sei $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$.

Zeige $\lim\limits_{a \to 0} \tau_a f = f$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ zuerst für $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ und dann für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(3) (a) Es sei $f \in L^p([0, a])$ mit $0 < a < \infty$, $1 < p, q < \infty$, und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Zeige, dass $\|f\|_1 \leq a^{1/q} \cdot \|f\|_p$.

(b) Kontrolliere diese Ungleichung für $p = 2$ und $f(x) = x^\lambda$, $\lambda \geq 0$.

(4) Bestimme $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{\epsilon^4}{|x|(|x|^2 + \epsilon^2)^3}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$!

(5) ${}_{\mathbb{C}}X$ sei ein Banachraum und $A \in L(X)$.

(a) Warum konvergiert $\mathrm{e}^A := \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{j!}$ in $L(X)$?

(b) Was ist $\mathrm{e}^A x_a$, wenn $X = l^1$, $A(x) = (x_2, x_3, \dots)$ ("Shiftoperator"), und $x_a = (1, a, a^2, \dots)$ für $-1 < a < 1$?

(c) Warum ist $[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}] \subset \sigma(\mathrm{e}^A)$ für A wie in (b)?

(6) Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f \in L^2((0, 2\pi))$ mit $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$ für $0 < t < 2\pi$.

(a) Bestimme die Fourierkoeffizienten λ_k, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Warum ist die Dirichletbedingung in $t = 0$ erfüllt?

(c) Setze $t = 0$ in der Fourierreihe von f, multipliziere mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$ und leite die Partialbruchzerlegung $\cot \alpha\pi = \dfrac{1}{\pi} \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=-N}^{N} \dfrac{1}{\alpha - k}$ her!

2005 - 04 - 18

Wiederholungsklausur II zu den Übungen 'Funktionalanalysis', WS 2004/05

Alle 6 Aufgaben können angerechnet werden. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwende keinen Bleistift!

(1) H sei ein Hilbertraum, $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ein ONSystem, $H_1 = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k; \alpha_k \in \mathbb{K}\}$, $x \in H$.

(a) Für welches $y \in H_1$ ist $|x - y| = \min_{u \in H_1} |x - u|$?

(b) Für welche $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ist $\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{e}^t - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 \mathrm{d}t$ minimal?

(2) Es sei $H = L^2((0, 2\pi))$, $h(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & : 0 < t < 2\pi, \\ \mathrm{e}^{t+2\pi} & : -2\pi < t \leq 0 \end{cases}$ und

$K : H \longrightarrow H : f \longmapsto \left[x \mapsto \int_0^{2\pi} h(x - y) f(y) \,\mathrm{d}y\right]$.

(a) Warum ist $K \in \mathrm{Com}(H)$?

(b) Entwickle h in eine Fourierreihe und bestimme $K(e_k)$ für $e_k(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}$.

(c) Was ist $\sigma(K)$?

(3) H sei ein Hilbertraum und $A \in \mathrm{Lab}(H)$. Zeige, dass $A^* = (\bar{A})^*$!

(4) Es sei $H = L^2((0, 1))$ und $A : H \longrightarrow H : f \longmapsto \mathrm{e}^x \cdot f$.

(a) Zeige $A \in L(H) \cap \mathrm{Ls}(H)$!

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $A - \lambda I$ injektiv bzw. surjektiv?

(c) Was sind $\sigma_p(A)$, $\sigma(A)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$? Ist $A \in \mathrm{Com}(H)$?

(5) Es sei $A = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : W^{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$.

(a) Welcher Operator B entspricht A via $\mathcal{F}$, d.h. erfüllt $B \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ A$?

(b) Was ist $\cos(tB)$? (c) Was ist $\cos(tA)$?

(6) H sei ein Hilbertraum, E eine Spektralschar, $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda \in \mathrm{Lsa}(H)$ und $\cos(tA) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t\lambda) \,\mathrm{d}E_\lambda$.

Zeige, dass $\lim_{s \to t} \cos(sA)x = \cos(tA)x$ für $x \in H$.