# Skriptum zur Vorlesung DISTRIBUTIONENTHEORIE

**Peter Wagner**

VO 2 SoSe 1996

Letzte Änderung: 14. 4. 2016

**Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik Baufakultät, Universität Innsbruck**

# Inhaltsverzeichnis

# § 1 Testfunktionen und Distributionen

## A) Definitionen

0) $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei immer eine offene Menge.
$\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$,
$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$,
$\alpha \geq \beta :\Longleftrightarrow \forall j : \alpha_j \geq \beta_j$, $\dbinom{\alpha}{\beta} := \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ für $\alpha \geq \beta$ (**Multiindexnotation**).

1) a) $\mathcal{E}(\Omega) := \mathcal{C}^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad \mathcal{C}^\infty\}$
b) für $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ sei $\operatorname{supp} f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \longleftarrow$ Abschluss in $\Omega$
(Diese Menge heißt **Träger** von $f$.)
c) $\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt}\}$. ($\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ heißt **Testfunktion**.)
d) $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ (bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$) $:\Longleftrightarrow$

   (i) $\big(\forall k \in \mathbb{N} : \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)\big)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

   (ii) $\exists K \subset \Omega$ kompakt: $\forall k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K$;

   (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha \varphi_k \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf $\Omega$, d.h.
   $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N : \forall x \in \Omega : \big|\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\big| < \epsilon$.

(Man sagt: $\boldsymbol{\varphi_k}$ **konvergiert in** $\boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega)}$ **gegen** $\boldsymbol{\varphi}$.)

2) a) $\mathcal{D}'(\Omega) := \big\{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \mathbb{C}\text{-linear: } \forall (\varphi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ mit } \varphi_k \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) : T(\varphi_k) \to 0 \text{ (in } \mathbb{C})\big\}$. ($T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt **Distribution**.)
b) $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann wird $f \cdot T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch $f \cdot T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto T(f \cdot \varphi)$ definiert. (Aus $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ folgt $f \cdot \varphi_k \to 0$ (Leibniz) und daher ist $f \cdot T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.)
c) $T_k \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$) $:\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi)$ (in $\mathbb{C}$). (Man sagt: $\boldsymbol{T_k}$ **konvergiert gegen** $\boldsymbol{T}$ **in** $\boldsymbol{\mathcal{D}'(\Omega)}$ **mit der schwachen Topologie**.) Analog wird $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda$ für $\lambda \longrightarrow \lambda_0$ z.B. in $\mathbb{R}^k$ definiert.

**Notationen:** Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ wird gewöhnlich $\langle \varphi, T \rangle$ statt $T(\varphi)$ geschrieben. Um die „aktiven“ Variablen in einer Distribution $T$ anzuzeigen, schreibt man $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$ oder $T(x)$ oder $T_x$. Dies ist z.B. nötig, wenn $\varphi(x,\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, dann sind $\langle \varphi(x,\xi), T(x) \rangle$, $\langle \varphi(x,\xi), T(\xi) \rangle$; $\varphi(x,\xi) \cdot T(x)$, $\varphi(x,\xi) \cdot T(\xi)$ jeweils verschieden. Beachte aber, dass die Schreibweise $T(x)$ nicht bedeutet, dass $T$ eine Funktion von $x$ ist.

## B) Beispiele

1) a) Es sei $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & : \ x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-1/x} & : \ x > 0. \end{cases}$
Dann ist $\chi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, denn:
$\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\chi(x) - \chi(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = 0 = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}$
$\Longrightarrow \ \chi'(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & : & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} & : & x > 0 \end{array} \right\}$ ist stetig, d.h. $\chi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Mit Induktion sehen wir dann, dass $\chi^{(k)}(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & : & x \leq 0, \\ \frac{P_k(x)}{x^{2k}}\,\mathrm{e}^{-1/x} & : & x > 0 \end{array} \right\}$, wobei $P_k$ ein Polynom ist und daher $\chi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.
Schließlich folgt $\chi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.
b) Wenn $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, so ist $\varphi(x) := \chi\left(1 - \dfrac{|x - x_0|^2}{\epsilon^2}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \epsilon\big\}$. Daher ist $\mathcal{D}(\Omega) \neq \{0\}$.

2) Es sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ lokalintegrabel, d.h.

(i) $f$ messbar (genauer: Lebesgue-messbar),
(ii) $\forall K \subset \Omega$ kompakt: $\int\limits_K \big|f(x)\big| \,\mathrm{d}x < \infty$.

(Z.B. ist jede stetige Funktion lokalintegrabel; $\dfrac{1}{x}$ ist lokalintegrabel in $\Omega = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, aber nicht in $\mathbb{R}$; $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ ist lokalintegrabel auch in $\mathbb{R}$.)
Dann definiert $f$ eine Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ :

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} : \ \varphi \longmapsto \int\limits_\Omega f(x) \cdot \varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

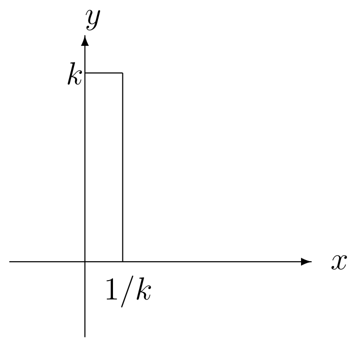
Denn (i) $T_f$ ist wohldefiniert, da für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $K := \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$ kompakt und daher $\int\limits_\Omega \big|f(x)\varphi(x)\big| \,\mathrm{d}x \leq \max\limits_{x \in \Omega} \big|\varphi(x)\big| \cdot \int\limits_K \big|f(x)\big| \,\mathrm{d}x < \infty$;
(ii) $T_f$ ist linear (s. Maßtheorie);
(iii) $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \exists K \subset \Omega$ kompakt: $\forall k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ und $\max\limits_{x \in \Omega} \big|\varphi_k(x)\big| \to 0 \implies \big|\langle \varphi_k, T_f \rangle\big| \leq \int\limits_K \big|f(x)\big| \,\mathrm{d}x \cdot \max\limits_{x \in \Omega} \big|\varphi_k(x)\big| \to 0$.
In Satz 3, S. 11, wird gezeigt, dass $T_f = T_g \iff f = g$ f.ü., d.h. $\big\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\big\}$ hat Lebesguemaß 0. Der $\mathbb{C}$-VR (und $\mathcal{C}(\Omega)$-Modul) $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{T_f : f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ lokalintegrabel$\}$ heißt **Raum der lokalintegrablen „Funktionen“**

(eigentlich wäre richtiger „Distributionen“). Man schreibt meistens wieder $f$ für $T_f$.

3) a) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sei durch $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \varphi(x_0)$ definiert. $\delta_{x_0}$ heißt **Dirac-Maß** in $x_0$. Für $\delta_0$ schreibt man $\delta$.
b) Allgemeiner: $\mu$ heißt **komplexes Radonmaß** in $\Omega :\Longleftrightarrow \mu = \mu_1 - \mu_2 + \mathrm{i}(\mu_3 - \mu_4)$, $\forall j = 1, \cdots, 4 : \mu_j : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ positive Maße ($\mathcal{B}(\Omega) :=$ Borel-$\sigma$-Algebra) und $\forall K \subset \Omega$ kompakt: $\mu_j(K) < \infty$.
$\mu$ liefert die Distribution $T_\mu : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \int\limits_\Omega \varphi(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$ und es gilt $T_\mu = T_\nu \Longleftrightarrow \mu = \nu$.
(Um das zu zeigen, braucht man den Riesz-Markovschen Darstellungssatz. Das sparen wir uns.)

4) Es sei $f_k(x) := \begin{cases} k & : \ 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$
Wir fassen $f_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ auf, d.h. schreiben (wie im Folgenden immer) wieder $f_k$ statt $T_{f_k}$.
Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \varphi, f_k \rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\int_0^{1/k} \varphi(x)\,\mathrm{d}x}{1/k} = \left( \int\limits_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right)'(0) =$
$= \varphi(0) = \langle \varphi, \delta \rangle$.

Bild:




Also gilt $f_k \longrightarrow \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

5) Wir zeigen $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \implies \lim_{\epsilon\searrow 0} \Big\langle \varphi, \tfrac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \Big\rangle = \lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2+\epsilon^2}\,\mathrm{d}x = (\text{Substitution } x = \epsilon u) =$$

$$= \lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\epsilon u)}{\epsilon^2(1+u^2)}\,\epsilon\,\mathrm{d}u = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\epsilon u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = (\text{Lebesgue}) = \varphi(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} =$$

$$= \pi\varphi(0) = \langle \varphi, \pi\delta \rangle$$

Zur Erinnerung **Lebesgue's Satz von der majorisierten Konvergenz:**
$(M, \Sigma, \mu)$ Maßraum, (i) $f_k : M \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbar, $k \in \mathbb{N}$;
(ii) $g : M \longrightarrow [0, \infty]$ $\mu$-integrabel und $\big\{x \in M : \exists k : \big|f_k(x)\big| > g(x)\big\}$ $\mu$-Nullmenge (d.h. $g$ ist eine integrierbare Majorante von $|f_k|$);
(iii) $f_k$ konvergiert f.ü., d.h. $\mu(\{x \in M : \ f_k(x)$ divergiert für $k \to \infty\}) = 0$.
Setze $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ wenn $f_k(x)$ konvergiert und 0 sonst.
Dann gilt: $f_k, k \in \mathbb{N}$, und $f$ sind $\mu$-integrabel und $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Oben ist $f_k(x) = \dfrac{\varphi(\epsilon_k x)}{1+x^2}$; $\epsilon_k \searrow 0$, $f(x) = \dfrac{\varphi(0)}{1+x^2}$, $g(x) = \max\limits_{t\in\mathbb{R}}\big|\varphi(t)\big| \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$.

6) a) Es werde $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \mathrm{vp}\,\tfrac{1}{x}\rangle &:= \lim_{\epsilon\searrow 0}\Big[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\Big] \\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Eine andere Darstellung, die auch zeigt, dass der Limes existiert: Es sei $\operatorname{supp}\varphi \subset [-N, N] \Longrightarrow \displaystyle\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\substack{|x|\geq\epsilon\\ |x|\leq N}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$, da $\displaystyle\int_{\substack{|x|\geq\epsilon\\ |x|\leq N}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$.
$\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ ist in 0 stetig fortsetzbar (mit Wert $\varphi'(0)$)
$\Longrightarrow \ \big\langle \varphi, \mathrm{vp}\frac{1}{x}\big\rangle = \displaystyle\int_{|x|\leq N} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x.$
Offenbar ist $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear. Um $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zu zeigen, bleibt also noch die Folgenstetigkeit zu überprüfen: Nach dem Mittelwertsatz ist $\varphi(x)-\varphi(0) = x \cdot \varphi'\big(\theta(x)\big)$ mit $\theta(x)$ zwischen 0 und $x \Longrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \leq \max_{t\in\mathbb{R}}\big|\varphi'(t)\big|$$

$\Longrightarrow \ \Big|\big\langle \varphi, \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big\rangle\Big| \leq 2N \cdot \max\limits_{t\in\mathbb{R}}\big|\varphi'(t)\big|$;
wenn daher $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}$, so folgt $\big\langle \varphi_k, \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big\rangle \to 0$.
b) Wir zeigen $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \dfrac{1}{x \pm \mathrm{i}\epsilon} = \mathrm{vp}\dfrac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

(Dies ist die Formel von Sochozkij (Сохоцкий) aus dem Jahr 1873.)

Für $\epsilon > 0$ sind $\dfrac{1}{x \pm \mathrm{i}\epsilon}$ $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen und insbesondere lokalintegrabel und können daher als Distributionen aufgefasst werden.

Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset [-N, N]$

$$\Longrightarrow \lim_{\epsilon \searrow 0} \left\langle \varphi, \tfrac{1}{x+\mathrm{i}\epsilon} \right\rangle = \lim_{\epsilon \searrow 0} \left[ \int\limits_{-N}^{N} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x + \mathrm{i}\epsilon} \, \mathrm{d}x + \varphi(0) \int\limits_{-N}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x + \mathrm{i}\epsilon} \right]$$

$$=(\text{Lebesgue})= \int\limits_{-N}^{N} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, \mathrm{d}x + \varphi(0) \underbrace{\lim_{\epsilon \searrow 0} \ln(x + \mathrm{i}\epsilon)\big|_{-N}^{N}}_{-\mathrm{i}\pi} = (\text{nach a}))$$

$= \left\langle \varphi, \operatorname{vp} \frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\delta \right\rangle$.

(Beachte, dass $\ln : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$ holomorph ist und $\int\limits_{-N}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x+\mathrm{i}\epsilon} = \int\limits_{-N+\mathrm{i}\epsilon}^{N+\mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z}$.)

$\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{1}{x - \mathrm{i}\epsilon}$ wird analog berechnet oder ergibt sich durch komplex Konjugieren, s.d).

c) Eine kleine Probe: $\dfrac{1}{x + \mathrm{i}\epsilon} - \dfrac{1}{x - \mathrm{i}\epsilon} = \dfrac{-2\mathrm{i}\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \Longrightarrow \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \left( \dfrac{1}{x + \mathrm{i}\epsilon} - \dfrac{1}{x - \mathrm{i}\epsilon} \right) =$

$= -2\mathrm{i} \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \underset{\text{Bsp. 5}}{=} -2\mathrm{i}\pi\delta$.

d) Für $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ lokalintegrabel wird $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ definiert. Wenn wir $f$ als Distribution auffassen, heißt das: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle \varphi, \overline{f} \rangle = \int \varphi(x) \overline{f(x)} \, \mathrm{d}x = \overline{\int \overline{\varphi(x)} f(x) \, \mathrm{d}x} = \overline{\langle \overline{\varphi}, f \rangle}$.

Daher definiert man $\overline{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch $\langle \varphi, \overline{T} \rangle := \overline{\langle \overline{\varphi}, T \rangle}$. (Beachte, dass $\overline{\varphi} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \overline{\varphi(x)}$ auch in $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt.)

Es folgt unmittelbar, dass $\overline{\phantom{x}} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ folgenstetig ist, d.h. $T_n \longrightarrow T \Longrightarrow \overline{T_n} \longrightarrow \overline{T}$.

Insbesondere ergibt die Rechnung in b) $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{1}{x - \mathrm{i}\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \overline{\dfrac{1}{x + \mathrm{i}\epsilon}} = \overline{\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{1}{x + \mathrm{i}\epsilon}} =$

$= \operatorname{vp} \dfrac{1}{x} + \mathrm{i}\pi\delta$.

Wie üblich setzt man $\operatorname{Re} T := \dfrac{1}{2}(T + \overline{T})$, $\operatorname{Im} T := \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(T - \overline{T})$ und nennt $T$ reellwertig, wenn $\operatorname{Im} T = 0$.

(Algebraisch gesehen bedeutet das obige, dass $\mathcal{D}'(\Omega) \widehat{=} \mathcal{D}'(\Omega)_{\text{reell}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, wobei $\mathcal{D}'(\Omega)_{\text{reell}}$ als Dual der reellwertigen Testfunktionen definiert wird.)

7) Die Überlegung in 6 d) zeigt, wie man Operationen von Funktionen auf Distributionen ausdehnt: Man formuliert sie auf den als Distributionen aufgefassten

lokalintegrablen Funktionen in einer verallgemeinerungsfähigen Weise.
Ein anderer Fall: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ lokalintegrabel heißt homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{C} :\Longleftrightarrow \forall c > 0 : f(cx) = c^\lambda f(x)$ $x$-f.ü.
Für $f$ als Distribution aufgefasst (d.h. für $T_f$) bedeutet das: $\forall c > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ : $\displaystyle\int f\underbrace{(cx)}_{y}\varphi\underbrace{(x)}_{\frac{y}{c}}\underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}y/c^n} = c^\lambda \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \forall c > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \big\langle \varphi\big(\tfrac{x}{c}\big), f\big\rangle =$
$= c^{\lambda+n}\langle \varphi, f\rangle$. Daher definiert man ($c$ wird durch $\frac{1}{c}$ ersetzt):
$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt **homogen vom Grad $\boldsymbol{\lambda}$**: $\Longleftrightarrow \forall c > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ : $\big\langle \varphi(cx), T\big\rangle = c^{-n-\lambda}\langle \varphi, T\rangle$.
(Für lokalintegrable Funktionen ergibt sich wieder das Ursprüngliche aufgrund von Satz 3, S. 11.) Z.B. ist $\delta$ homogen vom Grad $-n$, denn $\big\langle \varphi(cx), \delta\big\rangle = \varphi(0) = c^{-n-(-n)}\langle \varphi, \delta\rangle$. Ebenso sieht man, dass vp $\frac{1}{x}$ homogen vom Grad $-1$ ist.

8) Bsp. 7 beruht darauf, dass wir $T \circ A$ definieren können, wenn $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto c \cdot x$.
Allgemeiner, wenn $h : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ ein Diffeomorphismus ist und $f : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ lokalintegrabel, so ist es auch $f \circ h : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ und für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ ist $\langle \varphi, f \circ h\rangle =$ $\displaystyle\int_{\Omega_1} \varphi(x) f\big(\underbrace{h(x)}_{y}\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_2} (\varphi \circ h^{-1})(y) f(y) \Big|\det\Big(\tfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big)\Big|\,\mathrm{d}y = \Big\langle (\varphi \circ h^{-1}) \cdot \Big|\det\Big(\tfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big)\Big|, f\Big\rangle,$
wobei $h : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 : (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (y_1, \cdots, y_n)$.
Also definieren wir $T \circ h \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ durch

$$\langle \varphi, T \circ h\rangle := \left\langle (\varphi \circ h^{-1}) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)\right|, T\right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

Wenn z.B. $y_0 \in \Omega_2$, so gilt $\langle \varphi, \delta_{y_0} \circ h\rangle$
$= \big\langle (\varphi \circ h^{-1}) \cdot \big|\det\big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\big)\big|, \delta_{y_0}\big\rangle = \varphi\big(h^{-1}(y_0)\big) \cdot \big|\det\big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\big)\big|(y_0) =$
$= \big|\det\big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\big)\big|^{-1}(x_0) \cdot \langle \varphi, \delta_{x_0}\rangle$, wenn $x_0 := h^{-1}(y_0)$.
Also folgt $\delta_{y_0} \circ h = \big|\det\big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\big)\big|^{-1}(x_0) \cdot \delta_{x_0}$.

9) a) Es ist kein Problem, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ auf $\Omega_2 \subset \Omega_1$ einzuschränken. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ können wir $\langle \varphi, T\big|_{\Omega_2}\rangle := \langle \varphi, T\rangle$ setzen, wobei wir die Einbettung

$$\mathcal{D}(\Omega_2) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega_1)$$
$$\varphi \longmapsto \left(x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & : \; x \in \Omega_2 \\ 0 & : \; x \in \Omega_1 \backslash \Omega_2 \end{cases}\right) \quad \text{verwenden.}$$

Umgekehrt entsteht die Frage, ob $S \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ auf $\Omega_1$ **fortsetzbar** ist, d.h. ob $\exists T \in \mathcal{D}'(\Omega_1) : T\big|_{\Omega_2} = S$. Diese Frage ist oft verknüpft mit der **Regularisierung divergenter Integrale**.
b) Als einfachsten Fall betrachten wir $S \in L^1_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}\backslash\{0\}\big)$ gegeben durch $S(x) :=$

$Y(x)/x$, wobei $Y(x) := \begin{cases} 1 : x > 0, \\ 0 : x \le 0 \end{cases}$ **Heavisidefunktion** heißt. Für $K \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ kompakt ist $\int\limits_K \bigl|S(x)\bigr|\,\mathrm{d}x < \infty$, jedoch $\int\limits_0^1 \bigl|S(x)\bigr|\,\mathrm{d}x = \infty$, d.h. $S \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Aus der letzten Gleichung folgt auch, dass $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} f_\epsilon$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ divergiert, wenn

$f_\epsilon(x) := \begin{cases} 1/x & : \ x > \epsilon, \\ 0 & : \ x \le \epsilon. \end{cases}$

Dennoch gibt es in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine Fortsetzung $T$ definiert durch

$$\langle \varphi, T\rangle := \int\limits_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Dass $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, sieht man wie für $\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ in Bsp. 6a). Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist $\varphi(0) = 0$ und daher $\langle\varphi, T\rangle = \langle\varphi, S\rangle$. Also gilt $T\big|_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} = S$.
Beachte, dass $T$ nicht eindeutig ist; z.B. ist auch $T + \delta$ eine Fortsetzung von $S$. Mit $f_\epsilon$ wie oben gilt übrigens $T = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}[f_\epsilon + \ln\epsilon\cdot\delta]$.
c) Nicht in jedem Fall lässt sich eine Distribution fortsetzen. Wenn z.B. $S \in L^1_{\mathrm{loc}}\bigl(\mathbb{R}\backslash\{0\}\bigr) \subset \mathcal{D}'\bigl(\mathbb{R}\backslash\{0\}\bigr)$ definiert ist durch $S(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{1/x} & : \ x > 0, \\ 0 & : \ x < 0, \end{cases}$ so gilt: $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) : T\big|_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \ne S$, d.h. $S$ ist nicht fortsetzbar auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $\varphi_k(x) := \dfrac{1}{k}\begin{cases} 0 & : \ x \le 1/k \\ \mathrm{e}^{-1/(2(x-1/k))+1/(x-1)} & : \ \dfrac{1}{k} < x < 1, \\ 0 & : \ x \ge 1. \end{cases}$

Dann ist $\varphi_k \in \mathcal{D}\bigl(\mathbb{R}\backslash\{0\}\bigr) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (vgl. Bsp. 1) und für $k \ge 8$ ist $\langle\varphi_k, S\rangle = \dfrac{1}{k}\int\limits_{1/k}^1 \exp\biggl(\dfrac{x - \frac{2}{k}}{2x\bigl(x - \frac{1}{k}\bigr)}\biggr)\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{1/(x-1)}}_{\substack{\ge \mathrm{e}^{-2} \text{ für} \\ x \le \frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \ge \dfrac{1}{\mathrm{e}^2\cdot k}\int\limits_{3/k}^{4/k} \exp\biggl(\dfrac{1}{2kx(x-1/k)}\biggr)\,\mathrm{d}x =$ (Substitution $y = kx$) $= \dfrac{1}{\mathrm{e}^2k^2}\int\limits_3^4 \exp\biggl(\dfrac{k}{2y(y-1)}\biggr)\,\mathrm{d}y \ge \dfrac{1}{k^2}\,\mathrm{e}^{-2+k/24} \to \infty$ für $k \to \infty$.
Weiters gilt $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, denn $\operatorname{supp}\varphi_k \subset [0,1]$ und $\forall l \in \mathbb{N} : \exists C_l > 0 : \forall k \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R} : \left|\dfrac{\mathrm{d}^l\varphi_k}{\mathrm{d}x^l}(x)\right| \le \dfrac{C_l}{k}$. Wäre nun $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $T\big|_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} = S$, so wäre $0 = \lim\limits_{k\to\infty}\langle\varphi_k, T\rangle = \lim\limits_{k\to\infty}\langle\varphi_k, S\rangle = \infty$ ↯ .

(Beachte, dass $\varphi_k \not\to 0$ in $\mathcal{D}\bigl(\mathbb{R}\backslash\{0\}\bigr)$, da $\nexists K \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ kompakt: $\forall k : \operatorname{supp}\varphi_k \subset K$.)

$\mathcal{D}'$ ist eine Garbe (vgl. Satz 5, S. 23), die nach dem Obigen nicht flach ist. Dieser Mangel wird durch Einführung von „Hyperfunktionen" behoben.

10) a) Wir können $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$ einen Sinn verleihen, indem wir setzen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi := \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{k\to\infty} \left( \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}}{\mathrm{i}x} \bigg|_{\xi=-k}^{k} \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{i}x} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}) =$$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2\sin(kx)}{x} = \lim\limits_{k\to\infty} T_k$, wobei $T_k := \dfrac{2}{x}\sin(kx) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Wir fassen also $\lim\limits_{k\to\infty}$ als Limes in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x)$ auf.
b) Berechnung: Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset [-N, N]$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \varphi, T_k \rangle =$

$$= \lim_{k\to\infty} 2 \int\limits_{-N}^{N} \varphi(x) \frac{\sin(kx)}{x}\,\mathrm{d}x = 2 \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \underbrace{\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}}_{=:\psi(x)} \cdot \sin(kx)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ 2\varphi(0) \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \frac{\sin(kx)}{x}\,\mathrm{d}x = (\text{partiell integrieren und Substitution } y = kx) =$$

$$= -2 \lim_{k\to\infty} \left( \psi(x) \frac{\cos(kx)}{k} \bigg|_{x=-N}^{N} \right) + 2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_{-N}^{N} \psi'(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ 2\langle \varphi, \delta \rangle \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-kN}^{kN} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = 0 + 0 + \langle \varphi, 2\pi\delta \rangle,$$

d.h. in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x)$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\delta(x)$.
In S. 41 werden wir sehen, dass das aus der Gleichung $\mathcal{F}1 = 2\pi\delta$ folgt (indem man $\lim\limits_{k\to\infty} Y\big(k - |\xi|\big) = 1$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1_\xi)$ verwendet).

11) Einen Zusammenhang mit Fourieranalysis werden wir auch bei den folgenden 2 Limites erkennen (S. 45).
a) Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} t^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x)$, denn $\lim\limits_{t\to\infty} \langle \varphi(x), t^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \rangle =$

$= \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left( \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{i}\mathrm{d}x} \right)^{m+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \mathrm{i}^{m+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(m+1)}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x = 0$, da für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt $\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(m+1)}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x \right| \le \max\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \varphi^{(m+1)}(x) \right| \cdot \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} \mathrm{d}x.$

b) In $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x)$ gilt $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} := \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim\limits_{N\to\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nx} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2N+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1} =$
$= \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1/2)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N+1/2)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\sin\bigl((N+\frac{1}{2})x\bigr)}{\sin\bigl(\frac{x}{2}\bigr)}$.
Wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset (-2\pi, 2\pi)$ (d.h. $\varphi \in \mathcal{D}\bigl((-2\pi,2\pi)\bigr)$ so ist $\psi(x) := \varphi(x) \cdot \dfrac{x}{\sin\bigl(\frac{x}{2}\bigr)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow \langle \varphi, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \rangle = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\sin\bigl((N+1/2)x\bigr)}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{(Bsp. 10)}}{=} \pi\psi(0) = 2\pi\varphi(0) =$$

$$= \langle \varphi, 2\pi\delta \rangle, \text{ d.h. } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Big|_{(-2\pi,2\pi)} = 2\pi\delta.$$

Da $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+2l\pi)} = \mathrm{e}^{ikx}$ für $l \in \mathbb{Z}$, folgt $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Big|_{(2(l-1)\pi,2(l+1)\pi)} = 2\pi \cdot \delta_{2l\pi}$.

Wenn wir eine Partition $\chi_l$ der 1 zur Überdeckung $\Bigl\{\bigl(2(l-1)\pi, 2(l+1)\pi\bigr) : l \in \mathbb{Z}\Bigr\}$ von $\mathbb{R}$ wählen (z.B. $\chi_l(x) := \psi(x-2l\pi)\Big/\sum\limits_{j=l-1}^{l+1} \psi(x-2j\pi)$, $\psi(x) := \begin{cases} 0 & : \ |x| \ge 3\pi/2, \\ \mathrm{e}^{-1/(1-4|x|^2/9\pi^2)} & : \ |x| < 3\pi/2 \end{cases}$)

$$\Longrightarrow \langle \varphi, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} \rangle = \Bigl\langle \underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}}_{\substack{\text{(nur endlich}\\ \text{viele } \neq 0)}} \varphi(x)\chi_l(x), \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} \Bigr\rangle$$

$$= 2\pi \sum_l \varphi(2l\pi) \underbrace{\chi_l(2l\pi)}_{=1} = \langle \varphi, 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{2l\pi} \rangle, \text{ d.h. } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}.$$

(In § 2, Bsp. 8, S. 19, werden wir mit dieser nur distributionell sinnvollen Gleichung die absolutkonvergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k^2}$ auswerten.)

## C) Etwas Theorie

**Satz 1** Es sei $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent: (i) $T$ Distribution, d.h. $\forall \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) : \langle \varphi_k, T\rangle \to 0$; (ii) $\forall K \subset \Omega$ kompakt: $\exists C > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset K : \big|\langle \varphi, T\rangle\big| \leq C \sum\limits_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \max\limits_{x \in K} \big|\partial^\alpha \varphi(x)\big|$.

**Interpretation** Wenn $\mathcal{D}(\Omega)$ als lokalkonvexer topologischer Vektorraum definiert wird, so heißt (i) dass $T$ folgenstetig ist, (ii) dass $T$ stetig ist, und Satz 1 sagt, dass dies äquivalent ist.
**Beweis** (ii) $\Longrightarrow$ (i): $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \exists K \subset \Omega$ kompakt: $[\forall k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K]$ und $[\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \max\limits_{x \in K} \big|\partial^\alpha \varphi_k(x)\big| \to 0] \Longrightarrow \langle \varphi_k, T\rangle \to 0$ wegen (ii).
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Indirekt: Annahme: $\exists K \subset \Omega$ kompakt: $\forall k \in \mathbb{N} : [\exists \psi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \psi_k \subset K$ und $\big|\langle \psi_k, T\rangle\big| > k \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \max\limits_{x \in K} \big|\partial^\alpha \psi_k(x)\big| =: a_k]$

Setze $\varphi_k := \dfrac{1}{a_k} \psi_k \Longrightarrow \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\forall k \in \mathbb{N} : \big|\langle \varphi_k, T\rangle\big| \geq 1 \Longrightarrow \lightning$.

**Satz 2** Es sei $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, d.h. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$, $\chi(x) = 0$ für $|x| > 1$, $\displaystyle\int \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
(Z.B. $\chi(x) = \left( \displaystyle\int\limits_{|x|<1} \mathrm{e}^{-1/(1-|x|^2)}\,\mathrm{d}x \right)^{-1} \cdot \mathrm{e}^{-1/(1-|x|^2)} \cdot Y(1 - |x|)),$
$\Omega_k := \big\{ x \in \Omega : d(x, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) > \frac{2}{k}$ und $|x| < k \big\}$ für $k \in \mathbb{N}$,
$f_k(x) := \displaystyle\int\limits_{\Omega_k} f(y) \chi\big(k(x-y)\big) k^n\,\mathrm{d}y$. Dann gilt:
(i) $\forall k \in \mathbb{N} :\ f_k \in \mathcal{D}(\Omega)$;
(ii) $f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\Omega$, d.h. $\forall K \subset \Omega$ kompakt: $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : \forall x \in K : \big|f_k(x) - f(x)\big| < \epsilon$.

**Interpretation** $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ dicht, wenn $\mathcal{C}(\Omega)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta hat.
**Beweis** (i) $f_k(x) = 0$ für $d(x, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) \leq \frac{1}{k}$ oder $|x| \geq k + \frac{1}{k} \Longrightarrow \operatorname{supp} f_k \subset \Omega$ kompakt. Außerdem kann man (mit Lebesgue) unter dem $\int$ differenzieren. Also ist $f_k \in \mathcal{D}(\Omega)$.
(ii) Es sei $K \subset \Omega$ kompakt.
Falls $\big\{ y : |x - y| < \frac{1}{k} \big\} \subset \Omega_k$ so ist $f(x) = \displaystyle\int\limits_{\Omega_k} f(x) \chi\big(k(x-y)\big) k^n\,\mathrm{d}y$. Wenn also $k$ so groß ist, dass $\big\{ y : \exists x \in K, |x - y| < \frac{1}{k} \big\} \subset \Omega_k$ (z.B. wenn $d(K, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) > \frac{3}{k}$ und

$\max\limits_{x\in K}|x| \le k-\frac{1}{k}$), dann folgt $\forall x \in K$ :

$$\big|f(x)-f_k(x)\big| \le \int\limits_{\{y:|x-y|\le\frac{1}{k}\}} \big|f(x)-f(y)\big|\chi\big(k(x-y)\big)k^n\,\mathrm{d}y \le \epsilon$$

wenn außerdem $k$ so groß ist, dass

$$\forall x \in K : \forall y \text{ mit } |x-y| \le \frac{1}{k} : \big|f(x)-f(y)\big| \le \epsilon. \qquad \square$$

**Satz 3** Es seien $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ lokalintegrabel. Dann gilt:
$T_f = T_g$ (vgl. S. 2) $\Longleftrightarrow f = g$ f.ü.

**Interpretation** Für lokalintegrable Funktionen ist Gleichheit f.ü. äquivalent zur Gleichheit im Sinn der Distributionentheorie.
**Beweis** „$\Longleftarrow$“ ist klar.
Um „$\Longrightarrow$“ zu zeigen, können wir oEdA $g=0$ voraussetzen. Dann ist die Voraussetzung $T_f = 0$, d.h. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ : $\int\limits_\Omega \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und wir müssen daraus $f(x) = 0$ f.ü. folgern.
a) Nach Satz 2 gilt für $h \in \mathcal{C}(\Omega)$, dass $h_k \longrightarrow h$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\Omega$ (wobei $h_k(x) = \int\limits_{\Omega_k} h(y)\chi\big(k(x-y)\big)k^n\,\mathrm{d}y$ wie in Satz 2).
Wenn $\operatorname{supp} h \subset \Omega$ kompakt ist, so verschwindet $h_k - h$ außerhalb einer festen kompakten Teilmenge von $\Omega$ für großes $k \implies h_k \longrightarrow h$ gleichmäßig auf $\Omega \implies$ (Lebesgue) $\int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty}\int h_k(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

b) Es sei $K \subset \Omega$ kompakt und $F(x) := \begin{cases} \overline{f(x)}/|f(x)| & : \ x \in K,\ f(x) \neq 0 \\ 0 & : \ x \notin K \text{ oder } f(x) = 0. \end{cases}$
Dann ist $F$ messbar und beschränkt. Wenn wir noch zeigen, dass $\exists K \subset L \subset \Omega$ kompakt: $\exists F_k \in \mathcal{C}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} F_k \subset L$, $\forall x \in \Omega : \big|F_k(x)\big| \le 1$, und $F_k \longrightarrow F$ f.ü. in $\Omega$, so folgt nach Lebesgue

$$\int\limits_K \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x = \int\limits_L f(x)F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int\limits_L f(x)F_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{a)}}{=} 0$$

$$\implies \text{Maß}\ (\{x \in K : f(x) \neq 0\}) \le \sum_{m=1}^{\infty} \text{Maß}\ \big\{x \in K : \big|f(x)\big| \ge \tfrac{1}{m}\big\} = 0.$$

Da $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$, $K_j \subset \Omega$ kompakt (z.B. $\{K_j : j \in \mathbb{N}\}$ = Menge aller abgeschlossenen Kugeln in $\Omega$ mit rationalem Mittelpunkt und Radius) folgt $f(x) = 0$ f.ü. in $\Omega$.
c) Laut Maßtheorie existieren Treppenfunktionen $t_k$, d.h. $t_k$ von der Form $\sum\limits_{\substack{\text{endlich}\\ A_i \text{ disjunkt}\\ A_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}} \underset{\in\mathbb{C}}{\alpha_i} \underset{\substack{\text{char. Funkt.}\\ \text{von } A_i}}{\chi_{A_i}}$, die gegen $F(x)$ f.ü. konvergieren. Wir können $A_i \subset K$ und $\forall x \in$

$\Omega : \left|t_k(x)\right| \leq 1$ voraussetzen (sonst nehme $A_i \cap K$ statt $A_i$ und $\dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$ statt $\alpha_i$). Wenn $g_{k,l}$ stetig, $g_{k,l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} t_k$ f.ü., $\exists L \subset \Omega$ kompakt: $\forall k : \forall l$ : $(\operatorname{supp} g_{k,l} \subset L) \wedge (\forall x \in \Omega : \left|g_{k,l}(x)\right| \leq 1)$, so $\exists r_k \in \mathbb{N}$ : Maß $\left\{x : \left|g_{k,r_k}(x) - t_k(x)\right| \geq \frac{1}{k}\right\} < 2^{-k}$ (da sonst $\lim\limits_{l\to\infty} \displaystyle\int\limits_L \left|g_{k,l}(x) - t_k(x)\right| \mathrm{d}x \neq 0$). Dann folgt $g_{k,r_k} \longrightarrow F$ f.ü.

Denn: $\forall k \in \mathbb{N} : \left\{x \in \Omega : \lim\limits_{j\to\infty} g_{j,r_j}(x) \neq F(x)\right\} \subset \underbrace{\left\{x \in \Omega : \lim\limits_{j\to\infty} t_j(x) \neq F(x)\right\}}_{\text{Maß } 0} \cup$

$$\cup \underbrace{\left\{x \in \Omega : \exists l \geq k : \left|g_{l,r_l}(x) - t_l(x)\right| \geq \tfrac{1}{l}\right\}}_{\text{Maß} \leq 2^{1-k}}.$$

d) Es genügt daher $\chi_A, A \subset K,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ durch stetige Funktionen zu approximieren. Das Lebesguemaß ist regulär $\Longrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists U \supset A$ offen: $\displaystyle\int\limits_{U\setminus A} \mathrm{d}x < \epsilon$. Nach dem Argument in c) genügt es $\chi_U$ zu approximieren. Wir können $U \subset L := \left\{x \in \Omega : d(x, \mathbb{R}^n\setminus\Omega) \geq \frac{1}{2} d(K, \mathbb{R}^n\setminus\Omega) \text{ und } |x| \leq 1 + \max\limits_{y\in K} |y|\right\}$ voraussetzen. $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, $B_j$ offene Kugeln (vgl. b)) $\Longrightarrow \chi_U = \sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^{l} B_j}$. Es genügt daher $\chi_{\bigcup\limits_{j=1}^{l} B_j}$ zu approximieren (Argument wie in c). Es sei $g_{j,m} \in \mathcal{C}(\Omega)$ mit $0 \leq g_{j,m} \leq \chi_{B_j}$ und $\forall x \in \Omega : \lim\limits_{m\to\infty} g_{j,m}(x) = \chi_{B_j}(x) \Longrightarrow \forall x \in \Omega : \lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{j=1,\cdots,l} g_{j,m}(x) = \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^{l} B_j}(x)$. $\square$

## D) Übungen

**Übung 1** Bestimme in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x)$

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{k}\,\mathrm{e}^{-kx^2}$, b) $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \dfrac{\sin(x/\epsilon)}{x}$, c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sin^2(tx)}{tx^2}$, d) $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \dfrac{\epsilon^3}{(x^2+\epsilon^2)^2}$,

und mache Skizzen der Funktionen!

**Übung 2** Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert $\lim\limits_{k\to\infty} k^\lambda Y(x)\mathrm{e}^{-kx}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x)$?

**Übung 3** Bestimme in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$

a) $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \dfrac{\epsilon^n}{|x|^{2n}+\epsilon^{2n}}$, b) $\lim\limits_{k\to\infty} k^\lambda \mathrm{e}^{-k|x|}$, $\lambda \le n$, c) $\lim\limits_{R\searrow 0} R^\lambda \delta_{R\mathbb{S}^{n-1}}$, $\lambda \ge 1-n$,

d) $\lim\limits_{R\to\infty} R^\lambda \delta_{R\mathbb{S}^{n-1}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, wobei $\langle \varphi, \delta_{R\mathbb{S}^{n-1}}\rangle = \displaystyle\int\limits_{|x|=R} \varphi(x)\,\mathrm{d}s(x) = R^{n-1}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(R\omega)\,\mathrm{d}s(\omega)$,

vgl. auch S. 32.

**Übung 4** Zeige $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\left[\dfrac{Y(x-\epsilon)}{x} + \ln\epsilon\cdot\delta\right] = x_+^{-1}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ wobei

$\langle \varphi, x_+^{-1}\rangle := \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, siehe S. 7 u. 19.

**Übung 5** Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Welche der Folgen

a) $\dfrac{1}{k}\,\varphi(x)$ b) $k^n\varphi(kx)$, c) $\dfrac{1}{k}\,\varphi\left(\dfrac{x}{k}\right)$

konvergieren für $k\to\infty$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, welche in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$? Skizze!

**Übung 6** Für $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > -1$ sei $T_\lambda := x_+^\lambda := Y(x)x^\lambda \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ und für $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $-k-1 < \operatorname{Re}\lambda \le -k,\ k\in\mathbb{N}$, sei (für $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$)

$$\langle \varphi, T_\lambda\rangle := \int\limits_0^1 \left[\varphi(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}x^j\right] x^\lambda\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \varphi(x)x^\lambda\,\mathrm{d}x$$

und $\langle \varphi, x_+^\lambda\rangle := \langle\varphi, T_\lambda\rangle + \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{\varphi^{(j)}(0)}{j!(j+\lambda+1)}$ (letztes für $-\lambda\notin\mathbb{N}$).

a) Zeige, dass $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ und $x \cdot T_\lambda = T_{\lambda+1}$.
b) Zeige, dass $\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x} = T_{-1} - T_{-1}(-x)$ (wobei $T_{-1}(-x) = T_{-1} \circ (x \longmapsto -x)$, vgl. S. 6).
c) Zeige, dass für $\operatorname{Re}\lambda \leq -1 \quad T_\lambda$ nicht homogen ist, $x_+^\lambda$ aber für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ homogen ist vom Grad $\lambda$ und ebenfalls $x \cdot x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}$ erfüllt.
d) Zeige, dass für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}_0)$ gilt $\langle \varphi', x_+^\lambda\rangle = -\lambda\langle\varphi, x_+^{\lambda-1}\rangle$ (d.h. $(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}$, vgl. S. 15, 18).
e) Zeige, dass für $-k-1 < \operatorname{Re}\lambda < -k,\ k \in \mathbb{N}$, gilt

$$\langle \varphi, x_+^\lambda\rangle = \int_0^\infty \left[\varphi(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j\right] x^\lambda \,\mathrm{d}x,\ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1).$$

**Übung 7** Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathcal{C}^1,\ M := f^{-1}(0),\ \forall x \in M : \nabla f(x) \neq 0$
$g := \sum\limits_{j=1}^n \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^j \in \mathcal{T}_2(\mathbb{R}^n)$ sei die Standardmetrik. Zeige für $\partial_n f(x_0) \neq 0$ in den Koordinaten $x^1, \cdots, x^{n-1}$ auf $M$ bei $x_0$ :

a) $g\big|_M = \sum\limits_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ mit $h_{ij} = \delta_{ij} + \dfrac{\partial_i f \cdot \partial_j f}{(\partial_n f)^2}$.

b) $\det\big((h_{ij})_{i,j=1}^{n-1}\big) = \|\nabla f\|^2/(\partial_n f)^2$, d.h. das kanonische Oberflächenmaß auf $M$ ist (bei $x_0$) $\mathrm{d}s = \dfrac{\|\nabla f\|}{|\partial_n f|}\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}$ (wobei $\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1} = |\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1}|$).
c) Bestimme $\delta(f) := \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \dfrac{Y(f) - Y(f-\epsilon)}{\epsilon} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ durch $\mathrm{d}s$ (siehe S. 32).
d) Was ist z.B. $\delta\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ für $a, b > 0$?

**Übung 8** Zeige: $|x|^{-n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist durch

$$\big\langle \varphi, |x|^{-n}\big\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^n}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^n}\,\mathrm{d}x,\ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

wohldefiniert und erfüllt $|x|^{-n} = \lim\limits_{\epsilon \searrow 0}\left[\dfrac{Y\big(|x| - \epsilon\big)}{|x|^n} + \dfrac{2\pi^{n/2}\ln\epsilon}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\,\delta\right]$.
Ist $|x|^{-n}$ eine homogene Distribution?

# § 2 Träger und Ableitung in $\mathcal{D}'$

## A) Definitionen

1) a) Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sei $\operatorname{supp} T := \Omega \backslash \big\{x \in \Omega : \exists \epsilon > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \{y : |x-y| < \epsilon\} : \langle \varphi, T\rangle = 0\big\}$. ($\operatorname{supp} T$ heißt wieder **Träger** von $T$.)
b) Wenn $\operatorname{supp} T$ kompakt ist, so heißt $T$ **Distribution mit kompaktem Träger**.
c) Wenn $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger, $K := \operatorname{supp} T$, so sei $\langle f, T\rangle := \langle f \cdot \chi, T\rangle$, wobei $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\chi\big|_U \equiv 1,\ K \subset U \subset \Omega$ offen (wohldefiniert nach Satz 4, S. 23).
d) Nach c) lässt sich eine Distribution mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen (d.h. auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) und sogar auf $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ definieren. Daher

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} T \text{ kompakt}\}.$$

(Dies ist tatsächlich der Dual von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, wenn dieser Raum mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen auf Kompakta versehen wird. Wir benötigen das nicht.)

2) a) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ werde $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert durch $\langle \varphi, \partial^\alpha T\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle \partial^\alpha \varphi, T\rangle$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (Motivation: § 1, Bsp. 7, S. 5 und Bsp. 2, S. 16.) Dann ist $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ linear und folgenstetig.
b) Wenn $P(x, \partial) = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,\ a_\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$, ein linearer partieller Differentialoperator der Ordnung $\le m$ mit $\mathcal{C}^\infty$-Koeffizienten ist, so ist $P(x, \partial)T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nach a) und S. 1, 2)b) definiert.
c) Wenn $P(\partial) = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha$ wie in b) aber mit konstanten Koeffizienten, so heißt $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ **Fundamentallösung** von $P(\partial) :\Longleftrightarrow P(\partial)E = \delta$.

## B) Beispiele

1) a) Offenbar ist $\operatorname{supp} T \subset \Omega$ abgeschlossen, denn wenn $x \in \Omega \backslash \operatorname{supp} T$, so $\exists \epsilon > 0 : \{y : |x-y| < \epsilon\} \subset \Omega \backslash \operatorname{supp} T$, d.h. $\Omega \backslash \operatorname{supp} T$ ist offen.
b) Wenn $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, so ist $\operatorname{supp} T_f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}^{\text{in } \Omega}$. (Der Deutlichkeit halber unterscheide ich hier zwischen $f$ und $T_f$.) Denn wenn $x_0 \in \Omega \backslash \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$, so $\exists \epsilon > 0 : \forall x$ mit $|x - x_0| < \epsilon : f(x) = 0 \implies \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \{x : |x - x_0| < \epsilon\} : \langle \varphi, T_f\rangle = \int \varphi(x) f(x)\, \mathrm{d}x = 0$. D.h.: $\Omega \backslash \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \subset \Omega \backslash \operatorname{supp} T_f$. Umgekehrt, wenn $x_0 \in \Omega \backslash \operatorname{supp} T_f$ und $\epsilon > 0$ mit $T_f\big|_{\{x : |x - x_0| < \epsilon\}} = 0$ so folgt aus Satz 3, S. 11 (bzw. hier mit einem direkten Beweis mittels Satz 2, S. 10), dass $f = 0$ f.ü. in $\{x : |x - x_0| < \epsilon\} \implies$ (da $f$ stetig) $\implies \forall x$ mit $|x - x_0| < \epsilon : f(x) = 0$. Also: $\Omega \backslash \operatorname{supp} T_f \subset \Omega \backslash \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Somit: $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

c) Wenn $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\operatorname{supp}\delta_{x_0} = \{x_0\}$, denn wenn $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, so ist $\langle\varphi, \delta_{x_0}\rangle = \varphi(x_0) = 0$ und nach Bsp. 1, S. 2 $\exists\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi(x_0) \neq 0$.
Also ist $\delta_{x_0} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Für $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ist natürlich wieder $\langle f, \delta_{x_0}\rangle = f(x_0)$.
d) Wenn $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so gilt $\langle\varphi, \partial^\alpha\delta_{x_0}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\cdot\langle\partial^\alpha\varphi, \delta_{x_0}\rangle = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha\varphi)(x_0)$.
Daher ist auch $\operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_{x_0} = \{x_0\}$. (Allgemein gilt, wie leicht zu sehen ist, $\operatorname{supp}\partial^\alpha T \subset \operatorname{supp} T$.) Die Distributionen mit Träger $\{x_0\}$ können genau beschrieben werden: Nach Satz 7, S. 24, ist $\operatorname{supp} T \subset \{x_0\} \iff \exists P(\partial) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \underset{\in\mathbb{C}}{a_\alpha}\, \partial^\alpha : T = \Big(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\partial^\alpha\Big)\delta_{x_0}$.
e) Wir wollen noch $f \cdot \partial^\alpha\delta_{x_0}$ bestimmen für $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nach S. 1, 2)b) ist $\langle\varphi, f\cdot\partial^\alpha\delta_{x_0}\rangle = \langle\varphi\cdot f, \partial^\alpha\delta_{x_0}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\varphi\cdot f)(x_0) = (-1)^{|\alpha|}\sum\limits_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^\beta\varphi)(x_0)\cdot(\partial^{\alpha-\beta}f)(x_0) = \sum\limits_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^{\alpha-\beta}f)(x_0)\cdot(-1)^{|\alpha-\beta|}\langle\varphi, \partial^\beta\delta_{x_0}\rangle$,
d.h. $f\cdot\partial^\alpha\delta_{x_0} = \sum\limits_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\big((-\partial)^{\alpha-\beta}f\big)(x_0)\cdot\partial^\beta\delta_{x_0}$.

2) Wenn $T \in \mathcal{C}^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, so stimmen $\partial_i T$ im klassischen und im distributionellen Sinn überein, denn (mit $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$) gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned}\langle\varphi, (\partial_i T)_{\text{klassisch}}\rangle &= \int\limits_\Omega \varphi(x)\partial_i T(x)\,\mathrm{d}x = \text{ (partiell integrieren)}\\ &= -\int\limits_\Omega \partial_i\varphi(x)T(x)\,\mathrm{d}x = -\langle\partial_i\varphi, T\rangle = \langle\varphi, (\partial_i T)_{\text{distributionell}}\rangle.\end{aligned}$$

Analog für höhere Ableitungen $\partial^\alpha$. Das ist der Grund, dass $\partial^\alpha$ so definiert wird wie in S. 15, 2)a).

3) Wenn $Y(x) := \left\{\begin{array}{l} 1 : x > 0, \\ 0 : x \leq 0\end{array}\right\} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$ (vgl. S. 7, Bsp. 9b)), so gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$\big\langle\varphi, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y\big\rangle \underset{\text{(Def. Abl.)}}{=} -\langle\varphi', Y\rangle \underset{\text{(Def. } L^1_{\text{loc}}\subset\mathcal{D}')}{=} -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\text{(Hauptsatz}\\ \int-\text{rechn.)}}}{=} -\varphi(x)\big|_0^\infty = \varphi(0)$$

$\underset{(\text{Def. }\delta)}{=} \langle\varphi, \delta\rangle$, d.h. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y = Y' = \delta$, wenn wieder $' := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ in einer Dimension.
$Y$ ist also eine Fundamentallösung von $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Klarerweise ist auch $(Y+c)' = \delta$ für $c \in \mathbb{C}$. (Z.B. ist also auch $-Y(-x) = Y - 1$ eine Fundamentallösung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.) Nach Satz 6, S. 24, haben alle Fundamentallösungen von $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ die Form $Y + c$, $c \in \mathbb{C}$. Beachte, dass $Y$ die einzige Fundamentallösung mit Träger in $[0, \infty)$ ist.

4) Allgemeiner als in Bsp. 3 sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar mit einer „diskreten“ Menge $S$ von Sprungstellen, d.h. $\forall K \subset \mathbb{R}$ kompakt: $K \cap S$ endlich.

Die Funktionen $f$ und $f'$ seien links- und rechtsseitig stetig in allen $s \in S$. Dann ist

$$[f'] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \begin{cases} f'(x) & : \ x \in \mathbb{R}\backslash S, \\ 0 & : \ x \in S \end{cases}$$

stückweise stetig und daher $[f'] \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Für $s \in S$ sei $f_s := \lim\limits_{x \searrow s} f(x) - \lim\limits_{x \nearrow s} f(x) \in \mathbb{C}$. Wenn wir auch $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ auffassen, so gilt dann $f' = [f'] + \sum\limits_{s \in S} f_s \delta_s$, denn wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, so ist

$$\langle \varphi, f' \rangle = -\langle \varphi', f \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = (\min \emptyset := +\infty)$$

$$= -\left( \int\limits_{-\infty}^{\inf S} + \sum_{s \in S} \int\limits_{s}^{\min\{t \in S : t > s\}} \right) \varphi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{(partiell)}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \big[f'(x)\big]\,\mathrm{d}x + \sum_{s \in S} f_s \varphi(s).$$

Z.B. für $f = |\sin x|$ ist $f' = \operatorname{sign}(\sin x) \cos x$ und $f'' = -|\sin x| + 2 \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{j\pi}$.

5) Wenn $P\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big) = \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)^m + c_{m-1}\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)^{m-1} + \cdots + c_0$, $c_i \in \mathbb{C}$, ein linearer, gewöhnlicher Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, so kann man seine Fundamentallösungen bestimmen. Es sei $P(x) = \prod\limits_{j=1}^{m} (x - \lambda_j)$ und der Einfachheit halber seien die Wurzeln $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ von $P$ paarweise verschieden. Wenn $E := \sum\limits_{j=1}^{m} a_j Y(x) \mathrm{e}^{\lambda_j x}$ mit noch unbestimmten $a_j \in \mathbb{C}$, so ist $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ und $P\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)E\big|_{\mathbb{R}\backslash 0} = 0$.

Weiters ist $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, da $E$ bei $0$ beschränkt ist. Nach Satz 7, S. 24, ist daher $P\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)E$ eine Linearkombination von Ableitungen von $\delta$. Für $x \searrow 0$ ist $E(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j \big(1 + \lambda_j x + \frac{(\lambda_j x)^2}{2} + \cdots\big) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j + \big(\sum\limits_{j=1}^{m} a_j \lambda_j\big) x + \frac{1}{2}\big(\sum\limits_{j=1}^{m} a_j \lambda_j^2\big) x^2 + \cdots$.

Wenn $(a_1, \cdots, a_m)^T$ die Lösung von $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{m-1} & \cdots & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ist, so gilt daher $E \in \mathcal{C}^{m-2}(\mathbb{R})$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} E^{(m-1)}(x) = 1$. Dann ist nach Bsp. 4 $E^{(j)} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ für $j \le m-1$ und $E^{(m)} = [E^{(m)}] + \delta$ mit $[E^{(m)}] \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Also folgt $P\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)E = \Big[P\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)E\Big] + \delta = \delta$.

$a_1, \cdots, a_m$ lassen sich explizit bestimmen: Nach dem Residuensatz ist für $k = 0, \cdots, m-1$ und $N_0 > \max\limits_{j=1,\cdots,m} |\lambda_j|$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^k}{P'(\lambda_j)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{|z|=N_0}\frac{z^k}{P(z)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{|z|=N}\frac{z^k}{P(z)}\,\mathrm{d}z=$$

$$=\begin{cases}0: k=0,\cdots,m-2,\\ 1: k=m-1\end{cases}\quad\Longrightarrow\ a_j=\frac{1}{P'(\lambda_j)},\ E=\sum_{j=1}^{m}\frac{Y(x)\mathrm{e}^{\lambda_j x}}{P'(\lambda_j)}.$$

Z.B. hat $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-1$ die Fundamentallösung $Y(x)\sinh(x)$.
Mittels Satz 6, S. 24, lässt sich induktiv zeigen, dass jede Lösung $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ von $P\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)T=0$ eine klassische Lösung ist, d.h. jede Fundamentallösung von $P\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)$ hat die Form $\sum\limits_{j=1}^{m}\bigg(\underset{\in\mathbb{C}}{b_j}+\dfrac{Y(x)}{P'(\lambda_j)}\bigg)\mathrm{e}^{\lambda_j x}$. Insbesondere ist $E$ oben die einzige Fundamentallösung mit $\operatorname{supp}E\subset[0,\infty)$.

6) a) In Bsp. 9b), S. 6, 7 haben wir $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $T\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}=\dfrac{Y(x)}{x}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ konstruiert. Viel eleganter und allgemeiner gelingt dies mit Differentiation. Für $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda>-1$ sei $x_+^\lambda\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ durch die lokalintegrable Funktion $\begin{cases}x^\lambda: x>0,\\ 0\ \ : x\le 0\end{cases}$ gegeben.

Für $\operatorname{Re}\lambda>0$ gilt: $\big\langle\varphi,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x_+^\lambda\big\rangle=-\int\limits_0^\infty\varphi'(x)x^\lambda\,\mathrm{d}x=-\lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\int\limits_\epsilon^\infty\varphi'(x)x^\lambda\,\mathrm{d}x$

$$=\text{(partiell integrieren)}=-\lim_{\epsilon\searrow 0}\Bigg[\underbrace{\varphi(x)x^\lambda\Big|_\epsilon^\infty}_{\to 0}-\lambda\int\limits_\epsilon^\infty\varphi(x)x^{\lambda-1}\,\mathrm{d}x\Bigg]=\text{(Lebesgue)}$$

$=\lambda\int\limits_0^\infty\varphi(x)x^{\lambda-1}\,\mathrm{d}x=\langle\varphi,\lambda x_+^{\lambda-1}\rangle$, d.h. $(x_+^\lambda)'=\lambda x_+^{\lambda-1}$. (Für $\operatorname{Re}\lambda>1$ ist das sowieso klar nach Bsp. 2, S. 16, da dann $x_+^\lambda$ $\mathcal{C}^1$ ist.) Für $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\cdots\}$ ist daher die folgende Definition wohldefiniert (d.h. unabhängig von $m$)

$$x_+^\lambda:=\frac{1}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+m)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m(x_+^{\lambda+m}),$$

wobei $m\in\mathbb{N}$ mit $\operatorname{Re}\lambda+m>-1$.
Offenbar (da Einschränkung und Differentiation kommutieren) ist dann $x_+^\lambda\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ die lokalintegrable Funktion $\left\{\begin{matrix}x^\lambda: x>0,\\ 0\ \ : x<0\end{matrix}\right\}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.
Analog definieren wir z.B. $x_+^{-1}:=\big(Y(x)\ln x\big)'$.
b) Wir wollen z.B. $x_+^{-3/2}$ und $x_+^{-1}$ auf Testfunktionen $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ auswerten.
$\alpha$) $\langle\varphi,x_+^{-3/2}\rangle\underset{(\text{Def. }x_+^{-3/2})}{=}-2\big\langle\varphi,(x_+^{-1/2})'\big\rangle\underset{(\text{Def. Abl.})}{=}2\langle\varphi',x_+^{-1/2}\rangle\underset{(\text{Def. }x_+^{-1/2})}{=}$

$$= 2\int_0^\infty \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \underset{(\text{Lebesgue})}{=} 2\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \underset{(\text{partiell})}{=} \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\frac{2\varphi(x)}{\sqrt{x}}\Big|_\epsilon^\infty + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$\underset{(\text{einsetzen})}{=} \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}}\right] \underset{\left(\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\sqrt{\epsilon}}\to 0\right)}{=} \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x - \varphi(0)\int_\epsilon^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}\right] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

Eine Darstellung als Grenzwert:

$$\langle\varphi, x_+^{-3/2}\rangle = \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\sqrt{\epsilon}}\right] = \lim_{\epsilon\searrow 0}\left\langle\varphi, \frac{Y(x-\epsilon)}{x^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\,\delta\right\rangle \text{ d.h.}$$

$$x_+^{-3/2} = \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\frac{Y(x-\epsilon)}{x^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\,\delta\right].$$

$$\beta)\ \langle\varphi, x_+^{-1}\rangle \underset{(\text{Def. } x_+^{-1})}{=} \left\langle\varphi, \big(Y(x)\ln x\big)'\right\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\epsilon^\infty \varphi'(x)\ln x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\varphi(\epsilon)\ln\epsilon + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] = (\text{wegen } \big(\varphi(\epsilon)-\varphi(0)\big)\ln\epsilon \to 0) =$$

$$= \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[-\varphi(0)\int_\epsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

vgl § 1, Bsp. 9)b), S. 6 und 7.

7) Wir können nun auch die Sochozkij'schen Formeln (§ 1, Bsp. 6b), S. 4 und 5) eleganter beweisen:
Wie in $\beta$) oben sieht man, dass $\big(\ln|x|\big)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$. Außerdem ist für $\epsilon > 0$ $\ln(x\pm\mathrm{i}\epsilon) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $\lim_{\epsilon\searrow 0}\ln(x\pm\mathrm{i}\epsilon) = \ln|x| \pm \mathrm{i}\pi Y(-x)$ (Lebesgue).
Daher folgt $\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\epsilon} = \lim_{\epsilon\searrow 0}\big(\ln(x\pm\mathrm{i}\epsilon)\big)' \underset{(2\text{a}),\ \text{S. } 15)}{=} \big(\lim_{\epsilon\searrow 0}\ln(x\pm\mathrm{i}\epsilon)\big)' =$
$= \big(\ln|x| \pm \mathrm{i}\pi Y(-x)\big)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta.$

8) Wir wollen die absolutkonvergente Fourierreihe $f(x) := \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(kx)}{k^2}$ mit distributionellen Mitteln berechnen. In $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ gilt $f'' = \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)'' \underset{(2\text{a}),\ \text{S. } 15)}{=}$
$= -\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N \cos(kx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \underset{(\S\ 1,\ \text{Bsp. } 11\ \text{b}),\ \text{S. } 9)}{=} \frac{1}{2} - \pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2k\pi}$. Nach Bsp. 4,

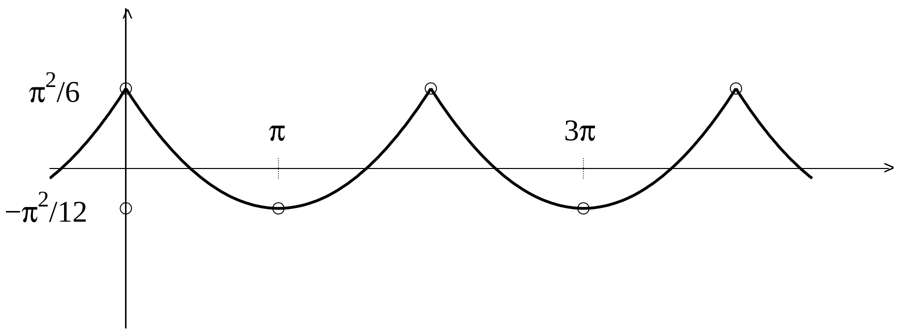
S. 16 und Satz 6, S. 24, ist $f' = \dfrac{x}{2} - \pi \left[\dfrac{x}{2\pi}\right] + \text{const}$ (wobei $[-]$ = größtes Ganzes) und daher $f = \dfrac{x^2}{4} - \pi x \left[\dfrac{x}{2\pi}\right] + \pi^2 \left[\dfrac{x}{2\pi}\right]\left(\left[\dfrac{x}{2\pi}\right] + 1\right) + C_1 + C_2 x,\ C_i \in \mathbb{C}$.

Speziell für $|x| < 2\pi$ ist $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} + C_1 + C_2 x & : \ x \geq 0 \\ \frac{x^2}{4} + C_1 + C_2 x + \pi x & : \ x \leq 0 \end{cases}$

Da $f$ eine gerade Funktion ist, folgt $-C_2 x - \pi x = C_2 x \implies C_2 = -\dfrac{\pi}{2}$.

Wenn wir noch $f(0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ verwenden, so erhalten wir $C_1 = \dfrac{\pi^2}{6}$ und

$f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{(x-\pi)^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{12},\ 0 \leq x \leq 2\pi.$




Da $f$ periodisch mit Periode $2\pi$ ist, ist es damit festgelegt. Ähnlich ließe sich $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k^2 + \alpha^2}$, $\alpha > 0$, bestimmen, vgl. Üb. 8.

9) Wir wollen zeigen, dass $-\dfrac{1}{4\pi|x|} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine Fundamentallösung von $\Delta_3 := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ ist.

Es sei $r := r(x) := |x|$ und $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ mit $\chi(t) = 1$ für $t$ nahe bei 0. Dann ist in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1-\chi(kr)}{r} = \dfrac{1}{r}$ (denn mit Lebesgue gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \left\langle \varphi(x), \frac{1-\chi(kr)}{r} \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$).

Außerdem ist $\dfrac{1-\chi(kr)}{r} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ und wegen $\Delta_3\big(f(r)\big) = \left(\partial_r^2 + \dfrac{2}{r}\partial_r\right) f = \dfrac{1}{r}\partial_r^2(rf)$ gilt $\Delta_3\left(\dfrac{1-\chi(kr)}{r}\right) = \dfrac{1}{r}\partial_r^2\left(r \cdot \dfrac{1-\chi(kr)}{r}\right) = -\dfrac{k^2\chi''(kr)}{r}$.

Daher folgt $\Delta_3 \dfrac{1}{r} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{-k^2\chi''(kr)}{r}$.

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ ist $I := \left\langle \varphi, \Delta_3 \frac{1}{r} \right\rangle = \lim\limits_{k\to\infty} -k^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \dfrac{\chi''\big(k|x|\big)}{|x|}\, \mathrm{d}x =$

$= -\lim\limits_{k\to\infty} k^2 \int\limits_0^\infty \chi''(kr) r \,\mathrm{d}r \iint\limits_{|\omega|=1} \varphi(r\omega)\, \mathrm{d}s(\omega)$ (d.h. in Kugelkoordinaten

$\omega = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\mathrm{d}s(\omega) = \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta$, $\mathrm{d}x = r^2\, \mathrm{d}r \mathrm{d}s(\omega)$, $\iint\limits_{|\omega|=1} = \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}$ ). Mit der Substitution $kr = u$ und Lebesgue folgt:

$I = -\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \chi''(u) u \,\mathrm{d}u \int\limits_{|\omega|=1} \varphi\left(\dfrac{u\omega}{k}\right) \mathrm{d}s(\omega) = -\varphi(0) \int\limits_{|\omega|=1} \mathrm{d}s(\omega) \cdot \int\limits_0^\infty \chi''(u) u \,\mathrm{d}u =$

$= -4\pi\varphi(0) \Big[ \underbrace{u\chi'(u)\big|_0^\infty}_{=0} - \int\limits_0^\infty \chi'(u)\, \mathrm{d}u \Big] = -4\pi\varphi(0) \underbrace{\chi(0)}_{=1} = \langle \varphi, -4\pi\delta \rangle$

und somit $\Delta \dfrac{1}{r} = -4\pi\delta$.

Ebenso zeigt man, dass $\dfrac{1}{2\pi} \ln r$ bzw. $\dfrac{-\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(n-2)\pi^{n/2} r^{n-2}}$ für $n = 2$ bzw. $n \neq 2$ Fundamentallösungen von $\Delta_n = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ sind.

10) Wir wollen das Ergebnis von Bsp. 9 noch auf anderem Wege herleiten.
Wenn $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{C}$ ist (vgl. § 1, Bsp. 7, S. 5, 6), so ist $\partial_j T$, $j = 1 \cdots, n$, homogen vom Grad $\lambda - 1$, denn $\langle \varphi(cx), \partial_j T \rangle = -\big\langle \partial_j\big(\varphi(cx)\big), T \big\rangle$ $= -c\big\langle (\partial_j\varphi)(cx), T \big\rangle \underset{\text{(T hom.)}}{=} -c \cdot c^{-n-\lambda} \langle \partial_j \varphi, T \rangle = c^{-n-(\lambda-1)} \cdot \langle \varphi, \partial_j T \rangle$.
Daher ist $\Delta_3\left(\frac{1}{r}\right)$ homogen vom Grad $-3$. Außerdem ist $\frac{1}{r} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ und $\Delta_3\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}} = 0$, d.h. $\operatorname{supp} \Delta_3\left(\frac{1}{r}\right) \subset \{0\}$. Nach Satz 7, S. 24, ist dann $\Delta_3 \frac{1}{r} = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha \delta$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$.
Wenn $\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha \delta$ homogen vom Grad $\lambda$ ist, so gilt $\forall \varphi \in \mathcal{D} : \forall c > 0 :$
$\Big\langle \varphi(cx), \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha \delta \Big\rangle = \sum a_\alpha (-c)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0) = c^{-\lambda-n} \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0)$.
Da $\{c^r : r \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängige Funktionen von $c \in (0, \infty)$ sind und $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\partial^\alpha \varphi(0) \neq 0$, $|\alpha| \le m$ gefunden werden kann (z.B. $\varphi =$ Polynom $\cdot\chi$, $\chi \in \mathcal{D}$, $\chi = 1$ bei 0), folgt $\lambda = -n - k$, $k \in \mathbb{N}_0$, und $a_\alpha = 0$ für $|\alpha| \neq k$. In unserem Fall gilt also $\Delta_3 \frac{1}{r} = a \cdot \delta$, $a \in \mathbb{C}$. (Da $\frac{1}{r}$ reellwertig ist, vgl. § 1, Bsp. 6 d), S. 5, muß $a \in \mathbb{R}$ sein.)
Wenn $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\chi = 1$ bei 0, so ist $\varphi(x) := \chi(r) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und $\left\langle \varphi, \Delta_3 \frac{1}{r} \right\rangle =$

$$\left\langle \Delta_3\varphi, \tfrac{1}{r}\right\rangle = 4\pi\int\limits_0^\infty \frac{1}{r}\partial_r^2\big[r\chi(r)\big]\cdot\frac{1}{r}\cdot r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi\partial_r\big(r\chi(r)\big)\Big|_0^\infty = -4\pi.$$

Somit: $\Delta_3\frac{1}{r} = -4\pi\delta$.

11) Es gibt noch einige Wege, $\Delta_3\frac{1}{r} = -4\pi\delta$ zu zeigen. (Z.B. kann man $\Delta_3\frac{1}{r} = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Delta_3\left(\frac{1}{\sqrt{|x|^2+\epsilon^2}}\right)$ berechnen.) Man beachte, dass alle diese Beweise, dass $-\frac{1}{4\pi r}$ eine Fundamentallösung von $\Delta_3$ ist, nur „verifikatorisch" sind, d.h. $-\frac{1}{4\pi r}$ nicht konstruktiv gefunden wird. Dies ist z.B. mit Fouriertransformation möglich (s. § 4). Wir wollen $\Delta_3\frac{1}{r} = -4\pi\delta$ noch auf dem traditionellen Weg über den Satz von Gauß verifizieren. Für $\epsilon > 0$ sei $f_\epsilon := \frac{Y(r-\epsilon)}{r} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $\frac{1}{r} = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0} f_\epsilon$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ (Lebesgue).

Für $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ ist $\langle\psi,\Delta f_\epsilon\rangle = \langle\Delta\psi, f_\epsilon\rangle = \int\limits_{|x|>\epsilon}\frac{1}{r}\Delta\psi(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int\limits_{|x|>\epsilon}\left[\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\nabla\psi\right) - \nabla\psi\cdot\nabla\frac{1}{r}\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{|x|>\epsilon}\left[\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\nabla\psi\right) - \operatorname{div}\left(\psi\nabla\frac{1}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \psi\underbrace{\Delta\frac{1}{r}}_{\substack{=0,\text{ da}\\ |x|>\epsilon}}\right]\mathrm{d}x = (\text{Gauß}) = \int\limits_{|x|=\epsilon}\left(\frac{1}{r}\nabla\psi - \psi\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\Bigg(\underbrace{-\frac{x}{r}}_{\substack{\text{Außen-}\\ \text{normale}}}\Bigg)\,\mathrm{d}s(x)$$

$$= -\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\left(\frac{1}{\epsilon}\nabla\psi(\epsilon\omega) + \psi(\epsilon\omega)\frac{\omega}{\epsilon^2}\right)\cdot\omega\cdot\epsilon^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta,\ \text{wobei } \omega := \frac{x}{r} =$$

$$= \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \implies \left\langle\psi,\Delta\tfrac{1}{r}\right\rangle = \lim_{\epsilon\searrow 0}\langle\psi,\Delta f_\epsilon\rangle = 0 - \lim_{\epsilon\searrow 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\psi(\epsilon\omega)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= -4\pi\langle\psi,\delta\rangle.$$

## C) Etwas Theorie

**Satz 4** Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$. Dann ist $\langle \varphi, T \rangle = 0$.

**Interpretation** $T\big|_{\Omega\setminus\operatorname{supp} T} = 0$ wobei $\Omega\setminus\operatorname{supp} T = \bigcup\{\Omega_1 \subset \Omega \text{ offen: } T|_{\Omega_1} = 0\}$.

**Beweis** $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega\setminus\operatorname{supp} T \implies \forall x \in \operatorname{supp}\varphi : \exists$ offene Kugel $B \subset \Omega$ mit $x \in B$ und $T|_B = 0$; $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt $\implies \exists l$ solche Kugeln $B_1, \cdots, B_l : \operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} B_j \implies \Omega\setminus\operatorname{supp}\varphi,\ B_1, \cdots, B_l$ ist eine offene Überdeckung von $\Omega \implies$ (Zerlegung der 1-Lemma, S. 59 Vorl. „Diffb. Mfkt.“)
$\implies \exists \chi_0, \cdots, \chi_l \in \mathcal{E}(\Omega) : (\operatorname{supp}\chi_0 \subset \Omega\setminus\operatorname{supp}\varphi,\ \operatorname{supp}\chi_j \subset B_j,\ j = 1, \cdots, l)$ und $(\forall x \in \Omega : \sum\limits_{j=0}^{l} \chi_j(x) = 1) \implies \sum\limits_{j=1}^{l} \chi_j \in \mathcal{E}(\Omega),\ \varphi = \varphi \cdot \sum\limits_{j=1}^{l} \chi_j,\ \varphi\chi_j \in \mathcal{D}(B_j)$, $j = 1, \cdots, l \implies \langle \varphi, T \rangle = \Big\langle \sum\limits_{j=1}^{l} \varphi\chi_j, T \Big\rangle = \sum\limits_{j=1}^{l} \langle \varphi\chi_j, T|_{B_j} \rangle = 0.$ $\square$

**Satz 5** Es sei $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i,\ \emptyset \neq \Omega,\ \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ offen, $i \in I$.
Dann gilt: a) Wenn $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\forall i \in I : S\big|_{\Omega_i} = T\big|_{\Omega_i} \implies S = T$;
b) wenn $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ und $\forall i, j \in I : T_i\big|_{\Omega_i\cap\Omega_j} = T_j\big|_{\Omega_i\cap\Omega_j}$
$\implies \exists!\, T \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall i \in I : T_i = T\big|_{\Omega_i}$.

**Interpretation** $\mathcal{D}'$ ist eine Garbe.

**Beweis** a) Aus der Voraussetzung folgt $\forall i : \Omega_i \subset \Omega\setminus\operatorname{supp}(S-T) \implies \operatorname{supp}(S-T) = \emptyset \implies$ (Satz 4) $S = T$.
b) $T$ ist eindeutig nach a). Zur Existenz: $\chi_i \in \mathcal{E}(\Omega_i),\ i \in I$, sei eine lokalendliche $\mathcal{C}^\infty$-Zerlegung der 1 zu $\Omega_i$ („Diffb. Mfkt.“, S. 59), d.h. $[\forall i \in I : \operatorname{supp}\chi_i \subset \Omega_i]$ und $[\forall K \subset \Omega$ kompakt: $\chi_i\big|_K \equiv 0$ für fast alle $i \in I]$ und $[\forall x \in \Omega : \sum\limits_{i\in I} \chi_i(x) = 1]$.
Definiere für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \varphi, T \rangle := \sum_{i\in I} \langle \underbrace{\varphi\chi_i}_{\in\mathcal{D}(\Omega_i)}, T_i \rangle \qquad \text{(die Summe ist endlich)}$$

Offenbar ist $T$ linear. Wenn $\varphi_k \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, so ist $\varphi_k\chi_i \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega_i)$ und $\varphi_k\chi_i = 0$ für alle $k$ und fast alle $i \in I$ und daher $\langle \varphi_k, T \rangle \longrightarrow 0$. Also ist $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$, so ist $\langle \varphi, T \rangle = \sum\limits_{i\in I} \langle \varphi\chi_i, T_i \rangle = \sum\limits_{i\in I} \langle \varphi\chi_i, T_i|_{\Omega_i\cap\Omega_j} \rangle =$
$= \sum\limits_{i\in I} \langle \varphi\chi_i, T_j|_{\Omega_i\cap\Omega_j} \rangle = \langle \varphi, T_j \rangle$, d.h. $\forall i \in I : T|_{\Omega_i} = T_i$.

**Satz 6** a) Zu $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : T \longmapsto T'$ gibt es eine folgenstetige, lineare Rechtsinverse $I : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \circ I = \mathrm{id}_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}$).
b) $\ker \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{C}$, d.h. $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1),\ S' = T' \implies \exists c \in \mathbb{C} : T = S + c$.

**Interpretation** In $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ existieren Stammfunktionen wie in der Differential- und Integralrechnung. Das Analoge gilt auch bzgl. $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

**Beweis** a) Es sei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sei
$\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \psi(x) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \implies \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x = 0$
$\implies \tilde{\tilde{\varphi}}(x) := -\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \tilde{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1_x)$.
Dann ist $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} : \varphi \longmapsto \tilde{\tilde{\varphi}}$ linear und folgenstetig $\implies I : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : T \longmapsto (\varphi \longmapsto \langle \tilde{\tilde{\varphi}}, T\rangle)$ ist wohldefiniert, linear und folgenstetig.
Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist $\widetilde{\varphi'(x)} = \varphi'(x) - \psi(x) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi'(x) \implies \tilde{\tilde{\varphi'}}(x) =$

$= -\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\varphi(x) \implies$ für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist $\langle \varphi, (IT)'\rangle = -\langle \varphi', IT\rangle =$

$= -\langle \tilde{\tilde{\varphi'}}, T\rangle = \langle \varphi, T\rangle$, d.h. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \circ I = \mathrm{id}_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}$.
b) Wenn $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $T' = 0$, so folgt für $\varphi \in \mathcal{D}$ wegen $\tilde{\tilde{\varphi}}' = -\tilde{\varphi}$ dass

$$\begin{aligned}\langle \varphi, T\rangle &= \Big\langle -\tilde{\tilde{\varphi}}' + \psi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t, T \Big\rangle = \langle \tilde{\tilde{\varphi}}, T'\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \cdot \langle \psi, T\rangle \\ &= 0 + \langle \varphi, c\rangle, \text{ wenn } c := \langle \psi, T\rangle.\end{aligned}$$
□

**Satz 7** Es seien $x_0 \in \Omega,\ T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. Dann $\exists m \in \mathbb{N} : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le m : \exists a_\alpha \in \mathbb{C} : T = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$.

**Interpretation** Distributionen mit punktförmigen Träger sind endliche Linearkombinationen von Ableitungen von deltas.

**Beweis** a) Es genügt $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $x_0 = 0$ zu betrachten. (Genaugenommen verwendet man zuerst Satz 5 mit $I = \{1, 2\},\ \Omega_1 = \Omega,\ \Omega_2 = \mathbb{R}^n \backslash \{x_0\},\ T_1 = T,\ T_2 = 0$ und verschiebt dann $x_0$ nach 0.)
b) Nach Satz 1, S. 10, $\exists C > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit

$\operatorname{supp}\varphi \subset \{x : |x| \leq 1\} : \left|\langle\varphi, T\rangle\right| \leq C \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq m}} \max_{|x|\leq 1} \left|\partial^\alpha\varphi(x)\right|$

Es sei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\chi \subset \{x : |x| < 1\}$ und $\chi(x) = 1$ für $|x| < \dfrac{1}{2}$.
Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0$ sei $\varphi_t(x) := \varphi(x) \cdot \chi(tx)$. Wegen $0 \notin \operatorname{supp}(\varphi - \varphi_t)$ ist dann (nach Satz 4, S. 23) $\langle\varphi, T\rangle = \langle\varphi_t, T\rangle$.
Weiters sei $\psi_t(x) := \sum_{|\alpha|\leq m} \dfrac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \cdot \chi(tx)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_t, T\rangle &= \langle\psi_t, T\rangle + \langle\varphi_t - \psi_t, T\rangle \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} \big\langle x^\alpha\chi(tx), T\big\rangle + \langle\varphi_t - \psi_t, T\rangle \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \langle\varphi, \partial^\alpha\delta\rangle + \langle\varphi_t - \psi_t, T\rangle,
\end{aligned}$$

wenn $a_\alpha := \dfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\big\langle x^\alpha\chi(tx), T\big\rangle$. Beachte, dass $a_\alpha$ von $t$ unabhängig sind, da $0 \notin \operatorname{supp}\big(x^\alpha\chi(t_1x) - x^\alpha\chi(t_2x)\big)$ für $t_1, t_2 > 0$.
Es genügt daher zu zeigen, dass $\lim_{t\to\infty} \langle\varphi_t - \psi_t, T\rangle = 0$.
Wenn $f(x) := \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq m} \dfrac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha$, so ist $\varphi_t - \psi_t = f(x)\chi(tx)$ und $\exists C_1 > 0 : \forall x$ mit $|x| \leq 1 : \forall\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| \leq m : \left|\partial^\gamma f(x)\right| \leq C_1|x|^{m+1-|\gamma|}$. Daher ist für $|\alpha| \leq m$ und $t \geq 1$ :

$$\begin{aligned}
\max_{|x|\leq 1} \left|\partial^\alpha\big(\varphi_t(x) - \psi_t(x)\big)\right| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \max_{|x|\leq 1/t} \left|\partial^\beta\big(\chi(tx)\big)\right| \max_{|x|\leq 1/t} \left|\partial^{\alpha-\beta} f(x)\right| \\
&\leq C_1 \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} t^{|\beta|} \max_{|x|\leq 1} \left|\partial^\beta\chi(x)\right| \cdot t^{-m-1+|\alpha-\beta|} \leq C_2 t^{|\alpha|-m-1} \to 0
\end{aligned}$$

für $t \to \infty$ und folglich $\lim_{t\to\infty} \langle\varphi_t - \psi_t, T\rangle = 0$ wegen der Ungleichung in der 2. Zeile von b). $\square$

## D) Übungen

**Übung 1** Zeige $\big(\ln|x|\big)' = \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$

a) mit der Definition der Ableitung in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ (vgl. S. 19);

b) mittels $\ln|x| = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Big[Y\big(|x|-\epsilon\big)\ln|x|\Big]$ (vgl. S. 17);

c) mittels $\ln|x| = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\ln\sqrt{x^2+\epsilon^2}$ und S. 4 u. 5;

d) mittels Homogenität und Parität (vgl. S. 21 und 22).

**Übung 2** Bestimme in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a) $x^\gamma\partial^\alpha\delta$, b) $\mathrm{e}^{xy}\partial^\alpha\delta_{x_0}$.

**Übung 3** Bestimme in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ $\big(\sin|x|\big)^{(2n)},\ n\in\mathbb{N}$.

**Übung 4** Berechne $\Delta_3\dfrac{1}{r}$ als $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\Delta_3\big((r^2+\epsilon^2)^{-1/2}\big),\ r=|x|,\ x\in\mathbb{R}^3$.

**Übung 5**

a) Bestimme die radialsymmetrischen Lösungen von $(\Delta_3 - a^2)f = 0,\ a\in\mathbb{C}$.

b) Zeige, dass $-\mathrm{e}^{ar}\big/(4\pi r),\ r=|x|,\ x\in\mathbb{R}^3$, eine Fundamentallösung des „Helmholtzoperators" $\Delta_3 - a^2,\ a\in\mathbb{C}$, ist:

$\alpha$) wie in S. 20, Bsp. 9;

$\beta$) mit $\Delta_3\left(\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{ar}\right)\in\Delta_3\dfrac{1}{r}+L^1_{\mathrm{loc}}$ und unter der Verwendung von $\Delta_3\left(\dfrac{1}{r}\right) = -4\pi\delta$.

**Übung 6** Bestimme $(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)\dfrac{1}{x+\mathrm{i}y}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_{xy})$ wie in S. 21, Bsp. 10.

**Übung 7**

a) Bestimme die Lösungen von $\Delta_n f(r) = 0,\ r=|x|>0$.

b) Zeige wie in S. 21, Bsp. 10, dass

$E = \dfrac{1}{2\pi}\ln r$ für $n=2$ und $E = -\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(n-2)\pi^{n/2}r^{n-2}}$ für $n\neq 2$

Fundamentallösungen von $\Delta_n$ sind.

**Übung 8**

a) Folgere aus $\mathrm{sh}\,(\alpha\pi) = \alpha\pi\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{\alpha^2}{k^2}\right)$, dass $\pi\mathrm{cth}\,(\alpha\pi) = \pi\dfrac{\mathrm{ch}\,(\alpha\pi)}{\mathrm{sh}(\alpha\pi)} =$

$= \Big[\ln\big|\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)\big|\Big]' = \dfrac{1}{\alpha} + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\alpha}{k^2+\alpha^2}$ für $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) Berechne $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k^2+\alpha^2}$, $x \in [0, 2\pi]$, $\alpha > 0$, wie in S. 19, Bsp. 8.

**Übung 9** Berechne für $a > 0$ die Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ von $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\right)^2$ mit Träger in $[0, \infty)$ a) direkt,

b) durch Differentiation von $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\right)E_a = \delta$, $E_a = \dfrac{Y(x)}{\sqrt{a}}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{a}\,x)$, nach $a$.

Was ergibt sich für $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a\right)^k$ ?

**Übung 10**

a) Zeige, dass $E := \dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{n/2}}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)}$ $\mathcal{C}^\infty$ ist in $\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ und lokalintegrabel in $\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$.

b) Zeige, dass $(\partial_t - \Delta_n)E = 0$ in $(t, x) \neq 0$.

c) Folgere aus der Quasihomogenität von $E$, d.h. $E(c^2t, cx) = c^{-n}E$, dass $(\partial_t - \Delta_n)E = a\delta$. Zeige $a = 1$ wie in S. 21 durch Anwendung auf $\chi(t)$. (Das ist zwar nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, lässt sich aber mit dem Grenzübergang $\chi(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \chi(t)\chi\left(\dfrac{r}{k}\right)$ rechtfertigen.)

**Übung 11**

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stückweise $\mathcal{C}^m$ mit einer diskreten Menge $S$ von Sprungstellen. Zeige induktiv, dass in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ gilt $f^{(m)} = [f^{(m)}] + \sum\limits_{k=0}^{m-1} \sum\limits_{s\in S} \left(f^{(m-1-k)}\right)_s \delta_s^{(k)}$ (mit den Bezeichnungen aus S. 17).

b) Berechne so $\left(\sin|x|\right)^{(2n)}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

# § 3 Tensorprodukt, Faltung, Regularisierung und Zusammensetzung

## A) Definitionen

1) Es seien $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, $\emptyset \neq \Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ offen, $i = 1, 2$. Dann wird $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, das **Tensorprodukt** von $S$ und $T$, definiert durch $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) : \langle \varphi(x, y), S \otimes T \rangle := \big\langle \langle \varphi(x, y), S_x \rangle, T_y \big\rangle$, wobei $x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2$. (Nach Satz 8, S. 35, ist dies wohldefiniert und gilt auch $\langle \varphi, S \otimes T \rangle = \big\langle \langle \varphi(x, y), T_y \rangle, S_x \big\rangle$. Statt $S \otimes T$ schreibt man oft $S(x)T(y)$ oder ähnlich.

2) Die Folge $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}), k \in \mathbb{N}$, heißt **1-Folge** $:\Longleftrightarrow$
(a) $\forall C > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \forall z \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $|z| \leq C : \eta_k(z) = 1$;
(b) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{2n} : \exists C_\alpha > 0 : \forall k \in \mathbb{N} : \|\partial^\alpha \eta_k\|_\infty \leq C_\alpha$.
$S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißen **faltbar** $:\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \forall$ 1-Folge $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ : $\lim\limits_{k \to \infty} \big\langle \eta_k(x, y)\varphi(x+y), S \otimes T \big\rangle$ existiert (und ist dann notwendigerweise unabhängig von der Wahl der 1-Folge $(\eta_k)$). (Dies ist z.B. erfüllt, wenn $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, da dann $\langle \eta_k(x, y)\varphi(x+y), S_x \rangle = \langle \varphi(x+y), \eta_k(x, y)S_x \rangle = \langle \varphi(x+y), S_x \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_y)$ für großes $k$.)
$S*T$, das **Faltungsprodukt** von $S$ und $T$, ist dann durch $\langle \varphi, S*T \rangle = \lim\limits_{k \to \infty} \big\langle \eta_k(x, y) \cdot \varphi(x+y), S \otimes T \big\rangle$ gegeben und es gilt $S, T$ faltbar $\Longrightarrow$ $T, S$ faltbar und $S * T = T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

3) Für $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sei $\chi_k(x) := k^n \chi(kx)$ und $T_k := \chi_k * T$. Dann gilt $T_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $T_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (siehe Satz 9, S. 36). $T_k$ heißt **Regularisierung** von $T$ (vgl. auch § 1, Satz 2, S. 10).

4) Es sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ mit $\forall x \in \Omega : \nabla f(x) \neq 0$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dann wird $T \circ f$, die **Zusammensetzung** von $T$ mit $f$, definiert durch

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle \varphi, T \circ f \rangle := \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left( \int\limits_{\{x : f(x) < s\}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right), T_s \right\rangle.$$

(Nach Satz 10, S. 37, ist das wohldefiniert, bzgl. $T$ folgenstetig und ergibt für $T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ das übliche.)

## B) Beispiele

1) a) Wenn $f_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_i)$, $\emptyset \neq \Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ offen, $i = 1, 2$, so ist $T_{f_1} \otimes T_{f_2} = T_{f_1(x) f_2(y)}$, wobei $f_1(x) f_2(y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, denn

$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) : \big\langle \varphi(x,y),\ T_{f_1} \otimes T_{f_2} \big\rangle = \Big\langle \big\langle \varphi(x,y), T_{f_1,x} \big\rangle, T_{f_2,y} \Big\rangle$
$= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} \varphi(x,y) f_1(x)\,\mathrm{d}x \right) f_2(y)\,\mathrm{d}y =$ (Fubini)
$= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \varphi(x,y) f_1(x) f_2(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \big\langle \varphi(x,y), T_{f_1(x)f_2(y)} \big\rangle.$

Ab nun werde wieder $f$ statt $T_f$ geschrieben.

b) Es seien $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp} f$ kompakt, d.h.
$\exists N > 0 : \operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < N\}$. Dann gilt:
$\forall M > 0 : f(x) g(u-x) Y\big(M - |u|\big) \in L^1(\mathbb{R}^{2n}_{x,u})$, denn

$$\iint\limits_{|u|<M} \big| f(x) g(u-x) \big|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}u \underset{\text{(Fubini)}}{=} \int \big|f(x)\big| \Bigg( \int\limits_{|u|<M} \big| g(\underbrace{u-x}_{v}) \big|\,\mathrm{d}u \Bigg)\,\mathrm{d}x$$
$$\le \int\limits_{|x|<N} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \int\limits_{|v|<M+N} \big|g(v)\big|\,\mathrm{d}v < \infty.$$

Daher ist $u \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(u-x)\,\mathrm{d}x$ lokalintegrabel.

Weiters ist $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \langle \varphi, f * g \rangle = \int \left( \int \varphi(x+y) f(x)\,\mathrm{d}x \right) g(y)\,\mathrm{d}y$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \int \left( \int \varphi(\underbrace{x+y}_{u}) g(y)\,\mathrm{d}y \right) f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{(Fubini)}}{=} \int \varphi(u) \left( \int f(x) g(u-x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u$$

d.h. $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $(f*g)(u) = \int f(x) g(u-x)\,\mathrm{d}x.$

2) a) Für $x_0 \in \mathbb{R}^m,\ x_1 \in \mathbb{R}^n$ gilt $\delta_{x_0} \otimes \delta_{x_1} = \delta_{(x_0,x_1)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n})$ denn $\langle \varphi, \delta_{x_0} \otimes \delta_{x_1} \rangle = \Big\langle \big\langle \varphi(x,y), (\delta_{x_0})_x \big\rangle, (\delta_{x_1})_y \Big\rangle = \varphi(x_0,x_1) = \langle \varphi, \delta_{(x_0,x_1)} \rangle$.
Speziell: $\underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1})}{\underset{\in}{\delta}} \otimes \cdots \otimes \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_l})}{\underset{\in}{\delta}} = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_l})$.

b) $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\delta * T = T$, denn $\langle \varphi, \delta * T \rangle = \Big\langle \big\langle \varphi(x+y), \delta_x \big\rangle, T_y \Big\rangle = \big\langle \varphi(y), T_y \big\rangle = \langle \varphi, T \rangle$.

c) Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto x - x_0$ und für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sei $T(x-x_0) := T \circ A$ (vgl. § 1, Bsp. 8, S. 6).
Dann gilt $\big\langle \varphi, T(x-x_0) \big\rangle = \big\langle \varphi(x+x_0), T \big\rangle = \big\langle \varphi(y+x_0), T_y \big\rangle = \Big\langle \big\langle \varphi(x+y), \delta_{x_0} \big\rangle, T_y \Big\rangle = \langle \varphi, \delta_{x_0} * T \rangle$, d.h. $\delta_{x_0} * T = T(x-x_0)$.

3) Es ist ganz leicht zu sehen, dass für $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1),\ T \in \mathcal{D}'(\Omega_2),\ \Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i},\ \alpha \in$

$\mathbb{N}_0^{n_1}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^{n_2}$ gilt

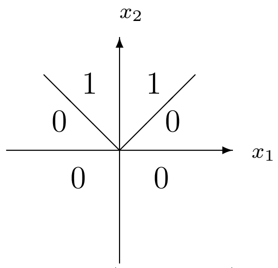
$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{n_1}}}{\partial x_{n_1}^{\alpha_{n_1}}} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_{n_1+1}^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_{n_2}}}{\partial x_{n_1+n_2}^{\beta_{n_2}}} (S \otimes T) = \partial^\alpha S \otimes \partial^\beta T.$$

Speziell gilt $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(Y \otimes Y) = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Also ist $f := Y \otimes Y = Y(x_1)Y(x_2) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ eine Fundamentallösung von $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Wenn $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (Drehung um 45° im Uhrzeigersinn) so ist $f \circ A = Y(x_1 + x_2)Y(-x_1 + x_2) = Y(x_2 - |x_1|)$.

Bild:




Anderseits ist $\delta \circ A = \delta$ (vgl. S. 6) und für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ gilt
$(\partial_2^2 - \partial_1^2)(T \circ A) = 2(\partial_1 \partial_2 T) \circ A$, denn
$\big\langle \varphi, (\partial_2^2 - \partial_1^2)(T \circ A) \big\rangle = \big\langle (\partial_2^2 - \partial_1^2)\varphi, T \circ A \big\rangle \overset{\text{S. 6}}{=} \Big\langle \big((\partial_2^2 - \partial_1^2)\varphi\big) \circ A^{-1}, T \Big\rangle$
$= \Big\langle \big((\partial_2^2 - \partial_1^2)\varphi\big)\big(\tfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \tfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\big), T \Big\rangle = 2 \Big\langle \partial_1 \partial_2 \Big(\varphi\big(\tfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \tfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\big)\Big), T \Big\rangle$
$= 2\langle \varphi \circ A^{-1}, \partial_1 \partial_2 T \rangle = 2\big\langle \varphi, (\partial_1 \partial_2 T) \circ A \big\rangle$.
Daher folgt $(\partial_2^2 - \partial_1^2)(f \circ A) = 2\delta$, d.h. $E = \dfrac{1}{2} f \circ A = \dfrac{1}{2} Y\big(x_2 - |x_1|\big)$ ist eine Fundamentallösung von $\partial_2^2 - \partial_1^2$. Üblicherweise schreibt man $t = x_2,\ x = x_1,\ \partial_t^2 - \partial_x^2 = \Box_2$ und erhält also $\Box_2 \left( \dfrac{1}{2} Y\big(t - |x|\big) \right) = \delta$.
Für den Wellenoperator in 3 Raumdimensionen vgl. Bsp. 7 b), S. 34. Allgemein liefert die obige Koordinatentransformationsmethode für $A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ und ein Polynom $P(x_1, \cdots, x_n)$ : $E$ FL von $P(\partial) \iff |\det A| \cdot E \circ A$ ist FL von $(P \circ A^{T-1})(\partial)$.

4) a) Wenn $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $\exists M \in \mathbb{R} : \operatorname{supp} S \cup \operatorname{supp} T \subset \{x \in \mathbb{R} : x \geq M\}$, so sind $S, T$ faltbar, denn wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \{x : |x| \leq N\}$, so ist $\varphi(x + y)(S \otimes T) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, weil

$$\operatorname{supp}\big(\varphi(x + y)(S \otimes T)\big) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq M, y \geq M, x + y \leq N\}$$

und diese Menge kompakt ist.
b) Es seien $S = x_+^\lambda$, $T = x_+^\mu$ (vgl. § 2, Bsp. 6, S. 18) und zunächst $\operatorname{Re}\lambda > -1$, $\operatorname{Re}\mu > -1$. Dann sind $S, T \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und analog zu Bsp. 1, b), S. 29, können wir $S * T$ durch Integration berechnen:

$$S * T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda (u-x)_+^\mu \,\mathrm{d}x = \int_0^u x^\lambda (u-x)^\mu \,\mathrm{d}x = (\text{ Substitution } x = ut)$$

$$= u^{\lambda+\mu+1} \int_0^1 t^\lambda (1-t)^\mu \,\mathrm{d}t = \text{ (Euler'sches Integral ) } =$$

$$= u^{\lambda+\mu+1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} \text{ falls } u > 0.$$

Somit $x_+^\lambda * x_+^\mu = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\, x_+^{\lambda+\mu+1}$, z.B. $Y * Y = Y \cdot x$.

c) Das obige legt die Definition $f_\lambda := \dfrac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\} =: \tilde{\mathbb{C}}$ nahe.
Dann gilt für $\operatorname{Re}\lambda,\ \operatorname{Re}\mu > 0 : f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$.
Weiters ist für $m \in \mathbb{N},\ \lambda \in \tilde{\mathbb{C}} : f_\lambda \overset{\text{S. 18}}{=} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \left(\dfrac{x_+^{\lambda+m-1}}{(\lambda+m-1)\cdots\lambda\cdot\Gamma(\lambda)}\right)$
$= \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \left(\dfrac{x_+^{\lambda+m-1}}{\Gamma(\lambda+m)}\right) = f_{\lambda+m}^{(m)}$. Da sich $*$ und $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ vertauschen lassen (vgl. Bsp. 6 a), S. 32), folgt allgemein $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ für $\lambda, \mu, \lambda+\mu \in \tilde{\mathbb{C}}$. Aber es gilt noch mehr: $f_\lambda$ lässt sich in den Punkten $\lambda = 0, -1, -2, \cdots$ stetig ergänzen, denn für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\lim\limits_{\lambda\to -k} f_\lambda = \big(\lim\limits_{\lambda\to -k} f_{\lambda+k+1}\big)^{(k+1)} = f_1^{(k+1)} = Y(x)^{(k+1)} = \delta^{(k)}$. Wenn somit für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad f_\lambda$ definiert wird durch $f_\lambda := \left(\dfrac{x_+^{\lambda+m-1}}{\Gamma(\lambda+m)}\right)^{(m)}$, $m \in \mathbb{N},\ \operatorname{Re}\lambda + m > 0$, so ist immer $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ und $f_0 = \delta$.
Wenn z.B. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ seinen Träger in $[M, \infty)$ für ein $M \in \mathbb{R}$ hat, so sind $T$ und $f_\lambda$ faltbar. Man nennt $T * f_\lambda$ die $(-\boldsymbol{\lambda})$ **-fache Ableitung** bzw. $\lambda$-fache Integration von $T$.
Speziell wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, so ist also $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{1/2} \varphi = \varphi * f_{-1/2} = \varphi * \dfrac{x_+^{-3/2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, \varphi * x_+^{-3/2} = \text{(Satz 9, S. 36)} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\langle \varphi(x-y), y_+^{-3/2} \right\rangle$$

$$\underset{\text{S. 18}}{=} -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)}{y^{3/2}} \,\mathrm{d}y.$$

d) **Die Abel'sche Integralgleichung**

Die Aufgabe $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(y)\,\mathrm{d}y}{(x-y)^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $g$ gegeben, $f$ gesucht (beide mit

Träger in $[0,\infty)$) kann als Faltungsgleichung geschrieben werden: $g = f * f_{1-\alpha} \cdot \Gamma(1-\alpha)$ und hat daher die Lösung

$$f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, g * f_{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, g * f'_\alpha \overset{\text{Bsp. 6 a), S. 32)}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, g' * f_\alpha$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\, g' * x_+^{\alpha-1} = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^x \frac{g'(y)\,\mathrm{d}y}{(x-y)^{1-\alpha}}.$$

5) a) Wenn $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathcal{C}^\infty,\ a \in \mathbb{R}$, und $\forall x \in f^{-1}(a),\ (\nabla f)(x) \neq 0$, so ist $M := f^{-1}(a)$ eine (reguläre) $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Da $T \longmapsto T \circ f$ folgenstetig ist (s. Satz 10, S. 37) und $\lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{1}{2\epsilon} Y\big(\epsilon - |t-a|\big) = \delta_a$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_t)$ (vgl. § 1, Bsp. 4, S. 3), ist

$$\delta_a \circ f = \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{1}{2\epsilon} Y\big(\epsilon - \big|f(x) - a\big|\big),$$

d.h. $\delta_a \circ f$ ist der Grenzwert der Belegung der Schicht $a - \epsilon < f(x) < a + \epsilon$ mit der Dichte $\frac{1}{2\epsilon}$.

b) Es sei z.B. $f(x) = |x| : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ a = R > 0$. Dann ist $\delta_R \circ f =: \delta_{R\mathbb{S}^{n-1}}$ gegeben durch

$$\langle \varphi, \delta_{R\mathbb{S}^{n-1}}\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int_{|x|<s} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right), \delta_R(s)\right\rangle$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=R} \int_0^s \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(\omega t)\,\mathrm{d}\omega \cdot t^{n-1}\,\mathrm{d}t = R^{n-1} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(\omega R)\,\mathrm{d}\omega, \text{ d.h.}$$

$\delta_{R\mathbb{S}^{n-1}}$ ist das von $\sum\limits_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$ auf $R\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R\}$ induzierte Oberflächenmaß (vgl. Diffb. Mfkt. S. 91).

6) a) Wenn $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ faltbar sind, so auch $\partial^\alpha S$ und $T$, und es gilt $\partial^\alpha S * T = \partial^\alpha(S * T) = S * \partial^\alpha T$.
Es genügt dies für den Fall $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ zu beweisen. Mit $\eta_k$ ist auch $\eta_k + \partial_1\eta_k$ eine 1-Folge und daher ist $\lim_{k\to\infty}\langle(\partial_1\eta_k)(x,y)\varphi(x+y), S \otimes T\rangle = 0$. Das impliziert

$$\langle \varphi, (\partial_1 S) * T\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \eta_k(x,y)\varphi(x+y), (\partial_1 S) \otimes T\rangle$$
$$= -\lim_{k\to\infty} \langle \eta_k(x,y)(\partial_1\varphi)(x+y), S \otimes T\rangle = -\langle \partial_1\varphi, S * T\rangle = \langle \varphi, \partial_1(S * T)\rangle.$$

b) Wenn $E$ FL von $P(\partial)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, und $E, S$ faltbar sind, so gilt nach a) $P(\partial)(E * S) = P(\partial)E * S = \delta * S = S$, d.h. $T := E * S$ ist eine Lösung der Gleichung $P(\partial)T = S$. Dies ist der Grund für die Bedeutung von Fundamentallösungen.

c) Speziell soll das elektrostatische Potential $T$ einer geladenen Hohlkugel bestimmt werden.

Dann ist $-\Delta T = \delta_{R\mathbb{S}^2} \underset{(\S\ 2,\ \text{S. } 20\text{-}22)}{\Longleftrightarrow} T = \dfrac{1}{4\pi|x|} * \delta_{R\mathbb{S}^2} \Longrightarrow \langle\varphi, T\rangle \overset{\substack{(\text{Notation: S. 1})\\ \downarrow}}{=}$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\langle\left\langle\varphi(x+y), \frac{1}{|x|}\right\rangle, \delta_{R\mathbb{S}^2}(y)\right\rangle \underset{(\text{Bsp. 5 b), S. 32})}{=} \frac{R^2}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(x+R\omega)}{|x|}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{R^2}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(u)}{|u-R\omega|}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\omega = (\text{Fubini}) = \frac{R^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(u)\,\mathrm{d}u\cdot\int\limits_{\mathbb{S}^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{|u-R\omega|}$$

$$\Longrightarrow\ T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3), T(u) = \frac{R^2}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{|u-R\omega|}.$$

Offenbar ist $T$ rotationssymmetrisch. Wir können also $u = \begin{pmatrix}0\\0\\|u|\end{pmatrix}$ setzen und erhalten

$$T(u) = \frac{R^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\|u|\end{pmatrix} - R\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\right|} = \frac{R^2}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{|u|^2-2|u|R\cos\vartheta+R^2}}$$

$$\underset{(t=\cos\vartheta)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{R^2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|u|^2-2|u|Rt+R^2}} = -\frac{R}{2|u|}\cdot\sqrt{|u|^2-2|u|Rt+R^2}\Big|_{t=-1}^{1}$$

$$= -\frac{R}{2|u|}\Big[\big||u|-R\big| - \big||u|+R\big|\Big] = \begin{cases} R^2/|u| & : \ R \le |u| < \infty\\ R & : \ 0 \le |u| \le R.\end{cases}$$

Somit: $T(u) = \min\big(R, |u|\big)\cdot\dfrac{R}{|u|}.$

7) a) Es sei $r := |x|$ und $f : \mathbb{R}^4_{(t,x_1,x_2,x_3)} \longrightarrow \mathbb{R} : (t,x) \longmapsto t^2 - r^2$. Dann ist $\nabla f(t,x) \neq 0$ für $(t,x) \neq 0$. Es sei also $\Omega := \mathbb{R}^4\backslash\{0\}$. Dann ist $\delta\circ f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert und es gilt

$$\langle\varphi, \delta\circ f\rangle = \left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\int\limits_{f(t,x)<s}\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\Big), \delta\right\rangle$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\int\limits_{t^2-|x|^2<s}\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x\int\limits_{t=-\sqrt{r^2+s}}^{\sqrt{r^2+s}}\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t$$

$$= \ (\text{Lebesgue}) \ = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(r,x)+\varphi(-r,x)}{r}\,\mathrm{d}x = \left\langle\varphi, \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\,\delta(t-r) + \frac{1}{r}\,\delta(t+r)\Big)\right\rangle,$$

wobei $\dfrac{1}{r}\,\delta(t\pm r) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ definiert werden durch

$\left\langle\varphi, \dfrac{1}{r}\,\delta(t\pm r)\right\rangle := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(\mp r, x)\,\frac{\mathrm{d}x}{r}$. (Die Notation kommt daher, dass die zunächst in $\mathbb{R}^4 \backslash \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ definierten Distributionen $\frac{1}{|x|} \cdot \Big(\delta \circ \big(t \pm |x|\big)\Big)$ auf $\mathbb{R}^4$ gewissermaßen „kanonisch" fortgesetzt werden können.)

b) Wir wollen zeigen, dass $(\partial_t^2 - \Delta_3)\frac{1}{r}\,\delta(t \pm r) = 4\pi\delta$, d.h. dass $\frac{1}{4\pi r}\,\delta(t \pm r)$ Fundamentallösungen des Wellenoperators $\partial_t^2 - \Delta_3$ sind. Allgemein lassen sich die Ableitungen $\partial^\alpha(T \circ f)$ mit der Kettenregel berechnen (vgl. Satz 10, S. 37). Daher gilt in $\mathbb{R}^4 \backslash \{0\} = \Omega$ :

$$(\partial_t^2 - \Delta_3)(\delta \circ f) = (\delta'' \circ f) \cdot \Big[(\partial_t f)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\partial_i f)^2\Big] + (\delta' \circ f) \cdot (\partial_t^2 - \Delta_3) f$$

$$= (\delta'' \circ f) \cdot 4f + 8 \cdot \delta' \circ f \overset{\substack{\text{(Satz 10, S. 37)}\\ \downarrow}}{=} (\delta'' \cdot 4x + 8\delta') \circ f = 0 \text{ (vgl. § 2, Bsp. 1e), S. 16).}$$

Da $\operatorname{supp}\left(\frac{1}{r}\,\delta(t+r)\right) \cap \operatorname{supp}\left(\frac{1}{r}\,\delta(t-r)\right) = \{0\}$, folgt $\operatorname{supp}\Big[(\partial_t^2 - \Delta_3)\big(\frac{1}{r}\,\delta(t \pm r)\big)\Big] \subset \{0\}$. Aus Homogenitätsgründen ($\frac{1}{r}\,\delta(t \pm r)$ sind homogen vom Grad -2) folgt wie in § 2, Bsp. 10, S. 21, dass

$$(\partial_t^2 - \Delta_3)\left(\frac{1}{r}\,\delta(t \pm r)\right) = c_\pm \delta, \quad c_\pm \in \mathbb{C}.$$

Wenn $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\chi = 1$ bei $0$, $\chi$ gerade, so ist $\varphi := \chi(t)\chi(r) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ und

$$\left\langle \varphi, (\partial_t^2 - \Delta_3)\left(\frac{1}{r}\delta(t \pm r)\right)\right\rangle = \left\langle \chi''(t)\chi(r) - \chi(t)\left(\chi''(r) + \frac{2}{r}\,\chi'(r)\right), \frac{1}{r}\,\delta(t \pm r)\right\rangle$$

$$= -8\pi \int_0^\infty \chi'(r)\chi(r)\,\mathrm{d}r = -4\pi\chi(r)^2\Big|_{r=0}^{\infty} = 4\pi.$$

Also folgt: $(\partial_t^2 - \Delta_3)\left[\frac{1}{4\pi r}\,\delta(t \pm r)\right] = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$.

8) a) Das Potential $\Phi$ einer elektrischen Ladungsverteilung $\varrho(t,x)$ erfüllt (im cgs) die Wellengleichung $(\partial_t^2 - c^2\Delta_3)\Phi = 4\pi c^2 \varrho$, $c =$ Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum). Mittels einer linearen Transformation $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : (t,x) \longmapsto (t, x/c)$ sehen wir, dass $\frac{1}{4\pi c^2 r}\,\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \frac{1}{4\pi c^2}\int_{\mathbb{R}^3} \varphi\left(\frac{r}{c}, x\right)\frac{\mathrm{d}x}{r}$ eine Fundamentallösung von $\partial_t^2 - c^2\Delta_3$ ist (vgl. Bsp. 3, S. 29) und Bsp. 7 b), 34). (Dies ist die einzige FL mit Träger in $\{(t,x) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$ und wird als „retardiert" bezeichnet.) Wenn $\varrho$ und $\frac{1}{r}\,\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$ faltbar sind, erfüllt also $\Phi = \varrho * \frac{1}{r}\,\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$ die obige Wellengleichung.

b) Wir wollen speziell das **Lienard-Wiechert-Potential** berechnen. Dies ist das Potential einer bewegten Punktladung (der Größe 1). Wenn die Punktladung sich auf der $\mathcal{C}^1$-Kurve $x = u(t)$ bewegt, so ist $\varrho = \delta\big(x - u(t)\big) : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\big(t, u(t)\big)\,\mathrm{d}t$ (d.h. $\varrho = \delta \circ f$, $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (t,x) \longmapsto x - u(t)$, $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$,

in leichter Verallgemeinerung von Def. 4 in S. 28).
Wenn $\exists \alpha < c : \forall t \in \mathbb{R} : \big|\dot{u}(t)\big| \leq \alpha$ (was nach Einstein plausibel ist), so sind $\delta\big(x - u(t)\big)$ und $\frac{1}{r}\,\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$ faltbar. Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ :

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \Phi \rangle &= \left\langle \varphi, \delta\big(x - u(t)\big) * \frac{1}{r}\,\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \Big\langle \varphi(t+s, x+y), \delta\big(x - u(t)\big) \Big\rangle, \frac{1}{|y|}\,\delta\left(s - \frac{|y|}{c}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\big(t+s, u(t)+y\big)\,\mathrm{d}t, \frac{1}{|y|}\,\delta\left(s - \frac{|y|}{c}\right) \right\rangle \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{|y|}\,\varphi\left(t + \frac{|y|}{c}, u(t) + y\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Die Substitution $w : \mathbb{R}^4_{t,y} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\tilde{t},\tilde{x}} : (t,y) \longmapsto \left(t + \frac{|y|}{c}, u(t) + y\right) =: (\tilde{t}, \tilde{x})$ ist bijektiv, denn $w(t,y) = (\tilde{t},\tilde{x}) \implies c(\tilde{t} - t) = |y| = \big|\tilde{x} - u(t)\big|$
$\implies g_{\tilde{t},\tilde{x}}(t) := c(\tilde{t} - t) - \big|\tilde{x} - u(t)\big| = 0$;
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,g_{\tilde{t},\tilde{x}}(t) = -c - \frac{\big(\tilde{x} - u(t)\big)\cdot \dot{u}(t)}{\big|\tilde{x} - u(t)\big|} < 0 \implies g_{\tilde{t},\tilde{x}}$ ist monoton fallend und hat genau eine Nullstelle $t$ und dann ist $y = \tilde{x} - u(t)$. Die Funktionaldeterminante von $w$ ist $\det\left(\frac{\partial(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial(t,y)}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & y/c|y| \\ \dot{u}(t) & I \end{pmatrix} = 1 - \frac{\dot{u}(t)\cdot y}{c|y|} \geq 1 - \frac{\alpha}{c} > 0$
$\implies \langle \varphi, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(\tilde{t},\tilde{x}) \frac{\mathrm{d}\tilde{t}\mathrm{d}\tilde{x}}{\big(1 - \frac{\dot{u}(t)\cdot y}{c|y|}\big)|y|}$ , d.h. $\Phi$ ist lokalintegrabel und gleich
$\Phi(\tilde{t},\tilde{x}) = \frac{c}{c|y| - \dot{u}(t)\cdot y} = \frac{c}{c\big|\tilde{x} - u(t)\big| - \dot{u}(t)\cdot\big(\tilde{x} - u(t)\big)}$ , wobei $t$ aus $\big|\tilde{x} - u(t)\big| = c(\tilde{t} - t)$ bestimmt wird, d.h. $t$ ist so bestimmt, dass ein von $u(t)$ mit Lichtgeschwindigkeit ausgehendes Signal $\tilde{x}$ zur Zeit $\tilde{t}$ erreicht.

## C) Etwas Theorie

**Satz 8** Es seien $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1),\ T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Dann gilt:
a) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) : \big\langle \varphi(x,y), S_x \big\rangle \in \mathcal{D}(\Omega_{2,y})$;
b) $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$;
c) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) : \big\langle \langle \varphi(x,y), T_y \rangle, S_x \big\rangle = \big\langle \langle \varphi(x,y), S_x \rangle, T_y \big\rangle$

**Interpretation** Das Tensorprodukt von Distributionen verallgemeinert das Produkt $f(x)\cdot g(y)$ zweier Funktionen.

**Beweis** a) Wenn $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und $y_k \longrightarrow y$ in $\Omega_2$, so gilt $\varphi(-, y_k) \longrightarrow \varphi(-, y)$ in $\mathcal{D}(\Omega_1)$; $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1) \Longrightarrow f : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C} : y \longmapsto \big\langle \varphi(x, y), S_x \big\rangle$ ist stetig. Weiters gilt
$\dfrac{1}{h}\big[\varphi(x, y_1, \cdots, y_{j-1}, y_j + h, y_{j+1}, \cdots, y_{n_2}) - \varphi(x, y)\big] \longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial y_j}\varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega_{1,x}) \implies f$ ist $\mathcal{C}^1$ und $\dfrac{\partial}{\partial y_j} f(y) = \left\langle \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j}, S_x \right\rangle$.
Induktiv folgt, dass $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_2)$ und $\partial_y^\alpha f = \big\langle \partial_y^\alpha \varphi(x, y), S_x \big\rangle$. Weiters ist $f(y) = 0$, wenn $\forall x \in \Omega_1 : \varphi(x, y) = 0$, d.h. $f\big|_{\Omega_2 \setminus \mathrm{pr}_2(\operatorname{supp} \varphi)} = 0$, wobei $\mathrm{pr}_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \Omega_2 : (x, y) \longmapsto y$.
Daher ist $\operatorname{supp} f \subset \mathrm{pr}_2(\operatorname{supp} \varphi) \subset \Omega_2$ kompakt $\implies f \in \mathcal{D}(\Omega_2)$.
b) $S \otimes T : \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \big\langle \langle \varphi(x, y), S_x \rangle, T_y \big\rangle$ ist nach a) wohldefiniert und offenbar linear.
Wenn $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, so $\exists K \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ kompakt: $\forall k : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K \implies \forall k :$ $\operatorname{supp}\Big(\big\langle \varphi_k(x, y), S_x \big\rangle\Big) \subset \mathrm{pr}_2 K$. Nach Satz 1, S. 10, gilt $\exists C > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ mit $\operatorname{supp} \psi \subset \mathrm{pr}_1 K : \big|\langle \psi, S \rangle\big| \leq C \sum\limits_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n_1} \\ |\alpha| \leq m}} \max\limits_{x \in \Omega_1} \big|\partial^\alpha \psi(x)\big|$.

Daher gilt für $\beta \in \mathbb{N}_0^{n_2} : \max\limits_{y \in \Omega_2} \Big|\partial_y^\beta \big\langle \varphi_k(x, y), S_x \big\rangle\Big| = \max\limits_{y \in \Omega_2} \Big|\big\langle \partial_y^\beta \varphi_k(x, y), S_x \big\rangle\Big|$
$\leq C \max\limits_{y \in \Omega_2} \sum\limits_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n_1} \\ |\alpha| \leq m}} \max\limits_{x \in \Omega_1} \big|\partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi_k(x, y)\big| \to 0$ für $k \to \infty$. Also ist $\big\langle \varphi_k(x, y), S_x \big\rangle \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega_2) \implies \langle \varphi_k, S \otimes T \rangle \to 0$, d.h. $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
c) Nach b) liegt auch $\widetilde{S \otimes T} : \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \Big\langle \big\langle \varphi(x, y), T_y \big\rangle, S_x \Big\rangle$ in $\mathcal{D}'(\Omega_1 \otimes \Omega_2)$. $S \otimes T$ und $\widetilde{S \otimes T}$ stimmen auf $\varphi(x, y) = \sum\limits_{j=1}^N \psi_j(x) \varrho_j(y)$, $N \in \mathbb{N}$, $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\varrho_j \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, $j = 1, \cdots, N$, überein. Es bleibt zu zeigen, dass der Unterraum solcher Linearkombinationen in $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ dicht ist. Mit Partition der 1 und Skalierung können wir $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset (-\pi, \pi)^n$ voraussetzen und müssen es durch $\sum\limits_{j=1}^N \prod\limits_{l=1}^n \psi_{jl}(x_l)$ mit $\psi_{jl} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} \psi_{jl} \subset (-\pi, \pi)$ approximieren. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ sei $\hat{\varphi}(k) := \displaystyle\int \varphi(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x$. Dann gilt $\dfrac{1}{(2\pi)^n} \sum\limits_{|k| < N} \hat{\varphi}(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ gleichmäßig mit allen Ableitungen für $x \in [-\pi, \pi]^n$. Wenn daher $\varrho_l \in \mathcal{D}\big((-\pi, \pi)\big)$ mit $\varrho_l(t) = 1$ für $t \in \mathrm{pr}_l \operatorname{supp} \varphi$, $l = 1, \ldots, n$, so gilt
$\dfrac{1}{(2\pi)^n} \sum\limits_{|k| < N} \hat{\varphi}(k) \prod\limits_{l=1}^n \varrho_l(x_l) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l x_l} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. □

**Satz 9** Für $T_k$ wie in Definition 3, S. 28, gilt $T_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $T_k \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
**Interpretation** $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

**Beweis** a) Für $\varphi, \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ seien $N > 0$ mit $\operatorname{supp}\varphi,\ \operatorname{supp}\chi \subset \{x : |x| < N\}$ und $\varrho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varrho(x) = 1$ für $|x| \le 2N$.

Dann ist $\langle \varphi, \chi * T\rangle = \big\langle \langle \varphi(x+y), \chi(x)\rangle, T_y\big\rangle = \left\langle \int\limits_{|x|<N} \varphi(\underbrace{x+y}_{x'})\chi(x)\,\mathrm{d}x \cdot \varrho(y), T_y \right\rangle$

$= \left\langle \varrho(y) \int \varphi(x')\chi(x'-y)\,\mathrm{d}x', T_y \right\rangle = \Big\langle \big\langle \underbrace{\chi(x-y)\varrho(y)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}_{x,y})}, \varphi(x)\big\rangle, T_y \Big\rangle$

$= \big\langle \chi(x-y)\varrho(y), \varphi \otimes T\big\rangle \overset{\text{Satz 8}}{\underset{\downarrow}{=}} \Big\langle \underbrace{\big\langle \chi(x-y)\varrho(y), T_y\big\rangle}_{\in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n_x)\ (\text{Satz 8})}, \varphi(x)\Big\rangle \implies$

$\implies \chi * T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), (\chi * T)(x) = \big\langle \chi(x-y)\varrho(y), T_y\big\rangle;$

für $|x| < N$ ist $\forall y \in \mathbb{R}^n : \chi(x-y)\varrho(y) = \chi(x-y) \implies (\chi * T)(x) = \big\langle \chi(x-y), T_y\big\rangle.$

b) Nach a) ist $T_k = \chi_k * T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist $\langle \varphi, T_k\rangle = \Big\langle \big\langle \varphi(x+y), \chi_k(x)\big\rangle, T_y\Big\rangle$.

Um $T_k \longrightarrow T$ zu zeigen, genügt es also $\big\langle \varphi(x+y), \chi_k(x)\big\rangle \longrightarrow \varphi(y)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_y)$ nachzuweisen.

$\alpha$) Wenn $N$ wie in a) ist, so ist $\operatorname{supp}\Big(\big\langle \varphi(x+y), \chi_k(x)\big\rangle\Big) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \le 2N\}$ für $k = 1, 2, \cdots$.

$\beta$) $\big\langle \varphi(x+y), \chi_k(x)\big\rangle = \int \varphi(\underbrace{x+y}_{x'})\chi(kx)k^n\,\mathrm{d}x = \int \varphi(x')\chi\big(k(x'-y)\big)k^n\,\mathrm{d}x' \longrightarrow \varphi(y)$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n_y$ nach Satz 2, S. 10.

$\gamma$) $\alpha \in \mathbb{N}_0^n \implies \partial_y^\alpha \big\langle \varphi(x+y), \chi_k(x)\big\rangle = \partial_y^\alpha \int \varphi(x+y)\chi(kx)k^n\,\mathrm{d}x$

$= \int (\partial^\alpha\varphi)(x+y)\chi(kx)k^n\,\mathrm{d}x = \big\langle (\partial^\alpha\varphi)(x+y), \chi_k(x)\big\rangle \overset{\beta)}{\longrightarrow} (\partial^\alpha\varphi)(y)$ gleichmäßig. Also gilt $\big\langle \varphi(x+y), \chi_k(x)\big\rangle \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_y)$. $\square$

**Satz 10** Es sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ mit $\forall x \in \Omega : \nabla f(x) \neq 0$. Dann ist

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : T \longmapsto \left(T \circ f : \varphi \longmapsto \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Bigg(\int\limits_{f(x)<s} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\Bigg), T_s \right\rangle\right)$$

wohldefiniert, folgenstetig und ergibt für $T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ das übliche. Weiters gilt die Kettenregel, d.h. $\partial_i(T \circ f) = (T' \circ f) \cdot \partial_i f$, und für $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist $(T \cdot h) \circ f = (T \circ f) \cdot (h \circ f)$.

**Interpretation** $T \longmapsto T \circ f$ ist die (nach Satz 9 eindeutige) Ausdehnung der Komposition mit $f$ von $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Beweis** a) Wenn $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$, so können in einer offenen Umgebung $U$ von $x_0$ $y_1 =$

$x_1, \cdots, y_i = f, y_{i+1} = x_{i+1}, \cdots, y_n = x_n$ als Koordinaten gewählt werden. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ kann mittels einer Partition der 1 angenommen werden, dass $\operatorname{supp}\varphi$ in so einer Umgebung liegt. OEdA sei $i = 1$. Dann ist $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Bigg(\int\limits_{f(x)<s} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\Bigg) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Bigg(\int\limits_{y_1<s} \psi(y)\,\mathrm{d}y\Bigg)$

$= \displaystyle\int \psi(s, y_2, \cdots, y_n)\,\mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_n =: \chi(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(y) := \varphi\big(x(y)\big)\left|\dfrac{\partial x}{\partial y}\right| \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Wenn $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, so gehen die entsprechenden $\chi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Also ist $T \circ f$ wohldefiniert. Die Folgenstetigkeit ist dann klar.

b) Wenn $T \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ wie in a), so ist

$\langle \varphi, T \circ f\rangle = \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \chi(s) T(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\big(x(y)\big)\left|\dfrac{\partial x}{\partial y}\right| T(y_1)\,\mathrm{d}y = \int_U \varphi(x) T\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x,$

d.h. $T \circ f \in L^1_{\text{loc}}$ mit $T \circ f(x) = T\big(f(x)\big)$.

c) Für $T \in \mathcal{C}^1$ gelten die Multiplikations- und Kettenregel wie im Satz. Aufgrund der Dichte von $\mathcal{C}^1$ in $\mathcal{D}'$ (vgl. Satz 9; da hier nur eine lokale Aussage gezeigt wird, können wir nach Abschneiden $\Omega = \mathbb{R}^n$ setzen) gelten diese Regeln dann allgemein. $\square$

## D) Übungen

**Übung 1** Bestimme in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

a) $Y(x) * Y(x)$, b) $Y(x)x * Y(x)x^2$, c) $\mathrm{e}^{-|x|} * \mathrm{e}^{-|x|}$,
d) $Y(x)\sin x * \delta''$, e) $Y(x)\sin x * Y(x)x$, f) $Y(x)\sin x * Y(x)x^{2n-1}/(2n-1)!$

**Übung 2** Bestimme in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

a) $f * \delta_{R\mathbb{S}^2}, f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ durch ein Integral über $\mathbb{S}^2$, b) $|x|^{2\lambda} * \delta_{R\mathbb{S}^2}$, $\operatorname{Re}\lambda > -\dfrac{3}{2}$,
c) $\mathrm{e}^{-|x|^2} * \delta_{R\mathbb{S}^2},\ R > 0$.

**Übung 3** $f \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R} \times [0, \infty[\big)$ erfülle $\Delta_2 f = 0$. Es sei $F(x, y) := f\big(x, |y|\big)\operatorname{sign} y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

a) Bestimme $\Delta_2 F$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ in Termen von $f_0(x) := f(x, 0)$.

b) Folgere aus $\Delta_n G = 0$, $G$ beschränkt $\implies$ $G$ konstant (s. § 4, Üb. 5), dass

$$F(x, y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\operatorname{sign} y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(x - uy)}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u,$$

falls $f$ beschränkt ist, durch Faltung von $\Delta_2 F$ mit $\dfrac{\ln r}{2\pi}$.

**Übung 4** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathcal{C}^1,\ \Gamma = f^{-1}(0),\ \forall x \in \Gamma : \nabla f(x) \neq 0,\ G = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}$. Nach Übung 7 zu § 1 ist $\delta(f) = \mathrm{d}s\big/|\nabla f|,\ \mathrm{d}s =$ Oberflächenmaß auf $\Gamma$.
a) Bestimme $\partial_j Y(f)$ durch $\mathrm{d}s$ und die von $G$ nach außen gerichtete Einheitsnormale $\vec{n}$. (Verwende Satz 10, S. 37.)
b) Was ist $\partial_j\big(g \cdot Y(f)\big),\ g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ g\ \mathcal{C}^1$ in einer Umgebung von $\Gamma$? (Verwende $g_k = \chi_k * g$, s. S. 28).
c) Es sei $n = 2,\ \mathbb{R}^2_{xy} \simeq \mathbb{C} : (x, y) \longmapsto x + \mathrm{i}y = z,\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right),\ G$ sei beschränkt, $z_0 \in G,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$. Nach Übung 6 zu § 2 ist $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \pi\delta$. Zeige durch Berechnung von $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(Y(-f) \cdot g \cdot \dfrac{1}{z - z_0}\right)$ nach b) und Anwendung auf $1 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, dass

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\Gamma g(z) \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \iint_G \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}}{z - z_0}.$$

**Übung 5** $f, \Gamma, G, \mathrm{d}s = |\nabla f|\delta(f) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ \vec{n}$ seien wie in Übung 4.
a) Folgere aus Übung 4a), dass $\Delta Y(-f) = -\mathrm{div}\,(\vec{n}\,\mathrm{d}s)$, d.h.
$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \big\langle \varphi, \Delta Y(-f)\big\rangle = \displaystyle\int_\Gamma \vec{n} \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}s.$
b) Interpretiere die letzte Formel als Satz von Gauß.
c) Zeige für $x_0 \in G$ und eine Fundamentallösung $E$ von $\Delta_n$ (wie z.B. in Übung 7 zu § 2; $E$ ist automatisch $\mathcal{C}^\infty$ außerhalb von 0), dass
$\Delta\big(Y(-f)E(x - x_0)\big) = \delta_{x_0} - \mathrm{div}\,\big(E(x - x_0)\vec{n}\,\mathrm{d}s\big) - \nabla E(x - x_0) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s.$
d) Folgere durch Anwendung von c) auf $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ für $G$ beschränkt, $x_0 \in G$ :

$$g(x_0) = \int_G E(x-x_0)\Delta g(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Gamma E(x-x_0)\nabla g(x)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s(x) + \int_\Gamma g(x)\nabla E(x-x_0)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s(x)$$

(„Darstellungssatz“, „Greensche Formel“)

**Übung 6** Es seien $S = \delta_{t,x_1,x_2} \otimes 1_{x_3},\ T = \dfrac{\delta\big(t - |x|\big)}{4\pi t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$
a) Zeige, dass $S, T$ faltbar sind.
b) Zeige, dass $\partial_3(S * T) = 0$ und daher $S * T = U \otimes 1_{x_3},\ U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ (vgl. Satz 6, S. 24) und folgere $(\partial_t^2 - \Delta_2)U = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2})$ („Hadamardsche Abstiegsmethode“).
c) Zeige, dass $U = \dfrac{Y\big(t - |x|\big)}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_{t,x})$.
(Eine elegantere Version wird in Übung 3 zu § 5 betrachtet).

# § 4 Fouriertransformation

## A) Definitionen und Eigenschaften

1) a) $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \big\{\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\big\}$.
b) $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S} :\Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : x^\alpha \partial^\beta(\varphi_k - \varphi) \to 0$ in $L^\infty$.
c) $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \big\{T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear: $\forall (\varphi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ mit $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S} : T(\varphi_k) \to 0$ (in $\mathbb{C}$)$\big\}$.
($T \in \mathcal{S}'$ heißt **temperierte** Distribution.) Es sei wieder $\langle \varphi, T\rangle := T(\varphi)$.
$\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}' : T \longmapsto (\varphi \longmapsto \langle \varphi, T\rangle)$.
d) $T_k \longrightarrow T$ in $\mathcal{S}' :\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{S} : \langle \varphi, T_k\rangle \longrightarrow \langle \varphi, T\rangle$.

2) a) $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} : \varphi \longmapsto \Big(x \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big)$ heißt **Fouriertransformation** (auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).
b) $\mathcal{F}$ ist folgenstetig und ein Vektorraumisomorphismus. Es gilt $\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi) = (2\pi)^n \check{\varphi}$, wobei $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$.
c) $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}' : T \longmapsto \big(\varphi \longmapsto \langle \mathcal{F}\varphi, T\rangle\big)$ heißt Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$. (Für $T \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ stimmen (nach Fubini) $\mathcal{F}T$ in (c) mit $\mathcal{F}T$ in (a) überein.) Wieder ist $\mathcal{F}$ folgenstetig, ein Vektorraumisomorphismus und $\mathcal{F}(\mathcal{F}T) = (2\pi)^n \check{T}$, wobei $\langle \varphi, \check{T}\rangle := \langle \check{\varphi}, T\rangle$.
d) Für $T \in \mathcal{E}'$ ist $\mathcal{F}T \in \mathcal{E}$ und ist die Einschränkung der holomorphen Funktion $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot z}, T_\xi\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$.
e) Für $S \in \mathcal{S}', T \in \mathcal{E}'$ ist $S * T \in \mathcal{S}'$ und $\mathcal{F}(S * T) = \underset{\in \mathcal{S}'}{\mathcal{F}S} \cdot \underset{\in \mathcal{E}}{\mathcal{F}T}$. („Austauschsatz")
f) (Spezialfälle von (e)) $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = \mathcal{F}(\partial^\alpha \delta * T) = (\mathrm{i}x)^\alpha \cdot \mathcal{F}T$;
$\mathcal{F}\big(T(x - x_0)\big) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0 x}\mathcal{F}T$
g) $\forall p \in [1, \infty) : L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und
$\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \mathcal{C}_0 : f \longmapsto \Big(x \longmapsto \int f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big)$,
$\mathcal{F} : L^2 \xrightarrow{\sim} L^2, \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2}$.

## B) Beispiele

1) a) $\mathrm{e}^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denn $x^\alpha \partial^\beta \mathrm{e}^{-|x|^2} = P_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{e}^{-|x|^2} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, da $P_{\alpha,\beta}$ ein Polynom ist. Ähnlich zeigt man z.B. $\dfrac{1}{\cosh(x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$.
b) $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, denn $f \in L^\infty \implies T_f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ ist wohldefiniert, da $\varphi(x) \cdot \big(1 + |x|^2\big)^n \in L^\infty$ und $\dfrac{f(x)}{\big(1 + |x|^2\big)^n} \in L^1$, und folgenstetig, da $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S} \implies \varphi_k \cdot \big(1 + |x|^2\big)^n \to 0$ in $L^\infty \implies$

$$\implies \left|\int f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left\|\varphi_k\big(1 + |x|^2\big)^n\right\|_\infty \cdot \int \frac{|f(x)|}{\big(1 + |x|^2\big)^n}\,\mathrm{d}x \to 0 \implies$$

$\Longrightarrow\ \langle\varphi_k, T_f\rangle \to 0.$
Also ist $T_f \in \mathcal{S}'$ und ergibt auf $\mathcal{D}$ das frühere $T_f$. Wir schreiben wieder $f$ statt $T_f$.
c) $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sind $x^\alpha : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} : \varphi \longmapsto x^\alpha\varphi$ und $\partial^\alpha : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} : \varphi \longmapsto \partial^\alpha\varphi$ folgenstetig. Durch Transposition folgt:
$\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : x^\alpha \cdot T,\ \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'.$
Umgekehrt, nach Schwartz (VII, 4; 1): $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \exists m \in \mathbb{N}_0 : \exists f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : T = \partial^\alpha\Big[\big(1+|x|^2\big)^m \cdot f\Big].$
d) Wir zeigen direkt, dass $\mathrm{e}^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.
Annahme: $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) : \langle\varphi, T\rangle = \displaystyle\int \varphi(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$
Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi = [-1,1]$ und $\forall x \in (-1,1) : \varphi(x) > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{-k}\varphi(x-k) \implies \forall m,l : x^m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\varphi_k(x) = (x-k+k)^m\mathrm{e}^{-k}\varphi^{(l)}(x-k) =$$

$$= \sum_{r=0}^m \tbinom{m}{r} k^{m-r}(x-k)^r\varphi^{(l)}(x-k)\cdot\mathrm{e}^{-k} \text{ und}$$

$$\left\|x^m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\varphi_k(x)\right\|_{L^\infty} \le C\sum_{r=0}^m \tbinom{m}{r}k^{m-r}\mathrm{e}^{-k} \to 0 \text{ für } k\to\infty.$$

Somit gilt $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$. Andererseits ist

$$\langle\varphi_k, T\rangle = \mathrm{e}^{-k}\int_{k-1}^{k+1}\mathrm{e}^x\varphi(x-k)\,\mathrm{d}x = \int\varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

2) a) $(\mathcal{F}\delta_{x_0})(x) \overset{\text{S. 40, 2d)}}{=} \big\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}, \delta_{x_0}(\xi)\big\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\cdot x}.$
b) $\mathcal{F}1 = \mathcal{F}(\mathcal{F}\delta) \overset{\text{S. 40, 2c)}}{=} (2\pi)^n\check{\delta} = (2\pi)^n\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$
c) Es gilt $Y\big(k-|x|\big) \to 1$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, denn

$$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) : \Big\langle\varphi, Y\big(k-|x|\big)\Big\rangle = \int_{-k}^{k}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \text{ (Lebesgue)}$$

$$\longrightarrow \int\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle\varphi, 1\rangle \text{ für } k\to\infty.$$

Also gilt in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ :

$$2\pi\delta = \mathcal{F}1 = \mathcal{F}\Big(\lim_{k\to\infty} Y\big(k-|x|\big)\Big) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{F}Y\big(k-|x|\big) = \lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

In S. 8 wurde das in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ direkt gezeigt. (Um zu $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$ zu kommen, kann man entweder komplex konjugieren (vgl. S. 5) oder $\check{}$ verwenden.)

Im Gegensatz zu Cauchyschen Hauptwerten gilt hier auch $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}} \int\limits_{-l}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\delta$.

3) Es sei $\delta_{R\mathbb{S}^2} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ wie in S. 32, d.h. $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3) : \langle \varphi, \delta_{R\mathbb{S}^2}\rangle = R^2 \int\limits_{\mathbb{S}^2} \varphi(R\omega)\,\mathrm{d}\omega$.

Nach S. 40, 2d) gilt $\mathcal{F}\delta_{R\mathbb{S}^2} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$. Allgemein ist $\mathcal{F}(T \circ A) = \frac{1}{|\det A|}(\mathcal{F}T) \circ A^{-1T}$ für $A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}), T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und daher ist $\mathcal{F}\delta_{R\mathbb{S}^2}$ rotationssymmetrisch. Also gilt: $(\mathcal{F}\delta_{R\mathbb{S}^2})(x) = (\mathcal{F}\delta_{R\mathbb{S}^2})\big(0,0,|x|\big) = R^2 \int\limits_{\mathbb{S}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_3 R|x|}\,\mathrm{d}s(\omega) =$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cos\vartheta R|x|} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi R^2 \cdot \frac{-1}{-\mathrm{i}R|x|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R|x|\cos\vartheta}\Big|_{\vartheta=0}^{\pi} = \frac{4\pi R \sin\big(R|x|\big)}{|x|}.$$

Beachte, dass dies die Einschränkung der holomorphen Funktion

$$\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \frac{4\pi R\sin\Big(R\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}\,\Big)}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{2n+2}(z_1^2+z_2^2+z_3^2)^n}{(2n+1)!}$$

auf $\mathbb{R}^3$ ist.

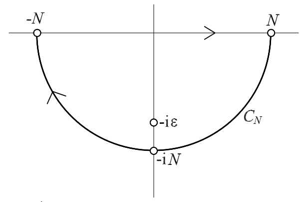
4) a) Für $\epsilon > 0$ ist $\mathrm{e}^{-\epsilon|x|} \in L^1(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{S}' \overset{\text{S. 40, g)}}{\Longrightarrow} (\mathcal{F}\mathrm{e}^{-\epsilon|x|})(x) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\epsilon|\xi|-\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\epsilon+\mathrm{i}x)\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\epsilon-\mathrm{i}x)\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\epsilon+\mathrm{i}x} + \frac{1}{\epsilon-\mathrm{i}x} = \frac{2\epsilon}{\epsilon^2+x^2}.$$

Aus der Folgenstetigkeit von $\mathcal{F}$ erhalten wir in $\mathcal{S}'$ :
$\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \mathcal{F}\mathrm{e}^{-\epsilon|x|} = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \mathrm{e}^{-\epsilon|x|}) = \frac{1}{2}\mathcal{F}1 = \pi\delta$ in Übereinstimmung mit S. 3.

b) $\mathcal{F}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2}\right) \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{2}\mathcal{F}\mathcal{F}\mathrm{e}^{-\epsilon|x|} \overset{\text{S. 40, 2c)}}{=} \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \mathrm{e}^{-\epsilon|-x|} = \pi\mathrm{e}^{-\epsilon|x|}$.

Direkt mit Residuensatz: Sei $x > 0$,




($C_N$ negativ orientiert)

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\epsilon^2+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{C_N} \frac{\epsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\epsilon^2+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = -2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{\xi=-\mathrm{i}\epsilon}\left(\frac{\epsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{(\xi+\mathrm{i}\epsilon)(\xi-\mathrm{i}\epsilon)}\right) =$$

$= \pi e^{-\epsilon x}$ falls $x > 0$.
Analog für $x < 0$ oder mit $\mathcal{F}\check{T} = (\mathcal{F}T)\check{}$.

5) a) Für $c > 0$ ist $e^{-cx^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \subset L^1 \subset \mathcal{S}'$.
Wir berechnen zunächst die Fouriertransformierte mit dem Cauchyschen Integralsatz:

$$(\mathcal{F}e^{-cx^2})(x) \overset{\text{S. 40, 2a)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi - c\xi^2}\, d\xi = e^{-x^2/(4c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(\xi + \frac{ix}{2c}\right)^2}\, d\xi =$$

$$= e^{-x^2/(4c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\xi^2}\, d\xi = (u = \sqrt{c}\,\xi) = \frac{e^{-x^2/(4c)}}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-x^2/(4c)}.$$

b) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{F}(x^\alpha T) \overset{\text{S. 40, 2c)}}{=} \mathcal{F}\big((-i)^{|\alpha|}(ix)^\alpha (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\mathcal{F}\check{T}\big) \overset{\text{S. 40, 2f)}}{=} (-i)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n} \cdot \mathcal{F}\mathcal{F}(\partial^\alpha \mathcal{F}\check{T}) =$$

$$\overset{\text{S. 40, 2c)}}{=} (-i)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \mathcal{F}\check{T})\check{} = i^{|\alpha|}\partial^\alpha(\mathcal{F}\check{T})\check{} = (i\partial)^\alpha(\mathcal{F}T).$$

c) Anwendung auf $T := e^{-cx^2}$ :

$$T' + 2cx \cdot T = 0 \implies 0 = \mathcal{F}(T' + 2cxT) = ix\mathcal{F}T + 2ic(\mathcal{F}T)' \implies$$

$\implies$ (Satz 6 b), S. 24) $\implies \exists d \in \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{F}T = de^{-x^2/(4c)};\ \mathcal{F}T(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \implies d = \sqrt{\frac{\pi}{c}}.$$

d) Im $\mathbb{R}^n$ erhalten wir aus a) bzw. c)

$$\mathcal{F}(e^{-c|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{c}\right)^{n/2} e^{-|x|^2/(4c)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

6) a) Um eine Fundamentallösung des Wärmeleitungsoperators $\partial_t - \Delta_n$ im $\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ zu finden, verwenden wir Fouriertransformation.
Wenn $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}_{t,x})$ und $(\partial_t - \Delta_n)E = \delta$, so ist

$$1 = \mathcal{F}\delta = \mathcal{F}\big((\partial_t - \Delta_n)E\big) \overset{\text{S. 40, 2f)}}{=} \big(it + |x|^2\big)\mathcal{F}E.$$

Es gilt $\big(it + |x|^2\big)^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_{t,x})$, denn

$$\int_{|x|<1}\int_{-1}^{1} \big|it + |x|^2\big|^{-1}\, dt dx = \int_{|x|<1}\int_{-1}^{1} \big(t^2 + |x|^4\big)^{-1/2}\, dt dx =$$

$$= (\text{Substitution } t = |x|^2 u,\ dt = |x|^2\, du) =$$

$$= \int_{|x|<1} dx \int_{-|x|^{-2}}^{|x|^{-2}} (u^2+1)^{-1/2}\, du \le 2\int_{|x|<1}\left(1 + \int_1^{|x|^{-2}} \frac{du}{u}\right) dx =$$

$$= 2\int_{|x|<1}\big(1 - 2\ln|x|\big)\, dx < \infty.$$

Außerdem ist $\big(it+|x|^2\big)^{-1} \in \mathcal{E}' + L^\infty \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}_{t,x})$ und daher $E := \mathcal{F}^{-1}\Big(\big(it+|x|^2\big)^{-1}\Big)$ eine mögliche Fundamentallösung.

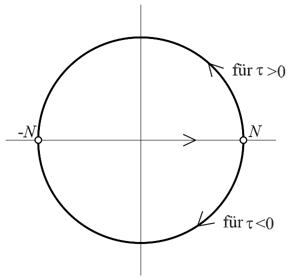
b) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}) \implies \langle \varphi, E \rangle = \Big\langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\Big(\big(\mathrm{i}t + |x|^2\big)^{-1}\Big)\Big\rangle =$

$$= \Big\langle \mathcal{F}^{-1}\varphi, \big(\mathrm{i}t + |x|^2\big)^{-1}\Big\rangle = (2\pi)^{-n-1} \int \Big[\int \varphi(\tau,\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau t + \xi\cdot x)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big] \frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{\mathrm{i}t + |x|^2} =$$

$$= (\text{Lebesgue}) = (2\pi)^{-n-1} \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\substack{|t|<N\\|x|<M}} \Big[\int \varphi(\tau,\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau t + \xi\cdot x)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\Big] \frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{\mathrm{i}t + |x|^2} =$$

$$= (\text{Fubini}) = (2\pi)^{-n-1} \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \int \varphi(\tau,\xi) \Bigg[\int\limits_{|x|<M} \Bigg(\int\limits_{-N}^{N} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau t}}{\mathrm{i}t + |x|^2}\,\mathrm{d}t\Bigg)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x\Bigg]\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi.$$

Der Residuensatz ergibt mit




$$\int\limits_{-N}^{N} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau t}}{\mathrm{i}t + |x|^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi Y(\tau)\mathrm{e}^{-\tau|x|^2} - \underbrace{\int\limits_{0}^{\pi\,\mathrm{sign}\,(\tau)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau N\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}}{\mathrm{i}N\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + |x|^2}\cdot N\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}_{I} \quad \text{falls } N > |x|^2.$$

Für $|x| < M$ und $N > 2M^2$ ist $|I| \le \int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-|\tau|N\sin\varphi}}{N - |x|^2}\,N\,\mathrm{d}\varphi \le 2\pi$

und Lebesgue liefert

$$\langle \varphi, E\rangle = (2\pi)^{-n} \lim_{M\to\infty} \int \varphi(\tau,\xi)Y(\tau)\Bigg[\int\limits_{|x|<M} \mathrm{e}^{-\tau|x|^2 + \mathrm{i}\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x\Bigg]\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi.$$

Die (noch mühsamere) Anwendung von Lebesgue auf diesen Limes[1] ergibt mit S. 43, 5d)

$$\langle \varphi, E\rangle = (2\pi)^{-n} \int \varphi(\tau,\xi)Y(\tau)\Big(\frac{\pi}{\tau}\Big)^{n/2} \mathrm{e}^{-|\xi|^2/(4\tau)}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi, \text{ d.h.}$$

$E = \dfrac{Y(t)\mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)}}{(4\pi t)^{n/2}}$. Wie in a) sieht man, dass $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Außerdem ist $E \in \mathcal{E}\big(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\big)$ (d.h. $\partial_t - \Delta_n$ „hypoelliptisch"). Die Fundamentallösung $E$ ist durch die Zusatzbedingungen (i) $E \in \mathcal{S}'$ (ii) $\operatorname{supp} E \subset \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \ge 0\big\}$

[1] dazu nimmt man z.B. als Integrationsbereich $|x|_\infty < M$ und zeigt

$$\exists C > 0 : \ \forall M > 0 : \ \forall \tau > 0 : \ \forall \xi_j > 0 : \ \Big|\int\limits_0^M \mathrm{e}^{-\tau u^2}\cos(\xi_j\cdot u)\,\mathrm{d}u\Big| \le \tfrac{C}{\sqrt{\tau}}\,\arctan\big(\tfrac{\sqrt{\tau}}{\xi_j}\big).$$

eindeutig bestimmt.

7) Einige Fouriertransformierte, die klassisch (d.h. im $L^1$ oder $L^2$) nicht definiert sind:
a) In $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ gilt $Y(x) = \lim\limits_{\epsilon\searrow 0} Y(x)\mathrm{e}^{-\epsilon x} \implies$

$$\mathcal{F}Y = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\epsilon+\mathrm{i}x)\xi}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}\epsilon)} \overset{\text{S. 5}}{=} -\mathrm{i}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} + \pi\delta.$$

b) $\mathcal{F}Y(-x) = (\mathcal{F}Y)\check{} = \mathrm{i}\,\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x} + \pi\delta$. Daher folgt $\mathcal{F}\,\mathrm{sign}\,(x) = \mathcal{F}\big[Y(x) - Y(-x)\big] = -2\mathrm{i}\,\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$.

Andere Herleitung: $(\mathrm{sign}\,x)' = 2\delta \implies \mathrm{i}x\mathcal{F}(\mathrm{sign}\,x) = 2 \implies$
$\mathcal{F}\mathrm{sign}\,(x) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x} + T,\ \mathrm{supp}\,T \subset \{0\}$;
$\mathrm{sign}\,(x)$ ist homogen vom Grad 0 und ungerade $\implies \mathcal{F}\,\mathrm{sign}\,(x)$ ist homogen vom Grad $-1$ und ungerade $\implies T = 0,\ \mathcal{F}\,\mathrm{sign}\,(x) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) $\mathcal{F}\big(|x|\big) = \mathcal{F}(x\cdot\mathrm{sign}\,x) \overset{\text{S. 43, 5b}}{=} \mathrm{i}\,\big(\mathcal{F}\,\mathrm{sign}\,(x)\big)' = 2\left(\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}\right)'$

d) $x\cdot x_+^{-1} = Y(x) \implies -\mathrm{i}\,\mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \pi\delta = \mathcal{F}Y = \mathcal{F}(x\cdot x_+^{-1}) \overset{\text{S. 43, 5b)}}{=} \mathrm{i}(\mathcal{F}x_+^{-1})' \implies$
$(\mathcal{F}x_+^{-1})' = -\mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \mathrm{i}\pi\delta,\quad \mathcal{F}x_+^{-1} = -\ln|x| - \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,(x) - C,\ C\in\mathbb{C}.$

Um $C$ zu bestimmen, geht man am besten direkt vor: In $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ gilt $\mathcal{F}(x_+^{-1}) =$
$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{F}\big(x_+^{-1}Y(N-x)\big) \overset{\text{S. 40, 2d)}}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}-1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi + \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

In $(0,\infty)$ ist der letzte Limes kompakt gleichmäßig konvergent $\implies$
$$\forall x>0 : (\mathcal{F}x_+^{-1})(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}-1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi =$$
$$= -\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\sin(x\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^x \frac{\cos(u)-1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u =$$
$$= (\text{Gröbner-Hofreiter II, 333.31}) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2} - \ln x - E$$

wobei $E = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{k} - \ln n\right] = 0.577\cdots$ die Euler'sche Konstante ist. Also gilt $C = E$.

8) a) In Termen der Fouriertransformation lassen sich die 2 Limites in § 1, Bsp. 11, S. 8 so interpretieren:

$\lim\limits_{t\to\infty} t^m \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}xt} = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ heißt $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) : \lim\limits_{t\to\mp\infty} t^m \mathcal{F}\varphi(t) = 0$.
Dies gilt auch für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$, da $\mathcal{F}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$.
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ bedeutet
$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) : \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2k\pi)$.
Man nennt das die **Poisson'sche Summationsformel**. Auch sie gilt für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ (man kann in der Herleitung in S. 8–9 ohne Problem $\varphi \in \mathcal{S}$ zulassen).

b) Ein zweiter Beweis von $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ :
Es sei $T := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ (da $\langle \varphi, T\rangle = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{1+k^2} \cdot \underbrace{\big((1+x^2)\varphi\big)(k)}_{|\cdot|\le C}$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$).
Wegen $T(x-1) = T$ ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathcal{F}T = \mathcal{F}T$ und folglich $\operatorname{supp} \mathcal{F}T \subset \{x : \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\big\langle \varphi, (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1)\delta^{(n)}\big\rangle = (-1)^n \big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1)\varphi\big)^{(n)}(0) = (-1)^n n\mathrm{i}\varphi^{(n-1)}(0) + \sum\limits_{k<n-1} a_k \varphi^{(k)}(0)$.
Daher ist $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1) \sum\limits_{n=0}^{N} a_n \delta^{(n)} = 0 \Longleftrightarrow a_n = 0$ für $n \ge 1$.
Also folgt $\mathcal{F}T = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_{2k\pi}$ für gewisse $a_k \in \mathbb{C}$. Andererseits gilt $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}T = T$ und daher $(\mathcal{F}T)(x+2\pi) = \mathcal{F}T$, d.h. $\mathcal{F}T = a \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} = \dfrac{a}{2\pi} T\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$.
Wegen $2\pi T = 2\pi \check{T} = \mathcal{F}\mathcal{F}T = \dfrac{a}{2\pi}\mathcal{F}\left(T\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)\right) = a(\mathcal{F}T)(2\pi x) = \dfrac{a^2}{2\pi} T$ ist
$a = \pm 2\pi$ und da für $\varphi = \mathrm{e}^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ gilt $\langle \varphi, T\rangle > 0$ und
$\langle \varphi, \mathcal{F}T\rangle = \langle \mathcal{F}\mathrm{e}^{-x^2}, T\rangle > 0$ muss $a = +2\pi$ sein.

c) Zusammenhang mit Fourierreihen:
$\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ werde mit der Mannigfaltigkeitsstruktur, die von $\mathbb{R}$ induziert ist, versehen (d.h. $\mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 : \bar{t} \longmapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$). $\mathcal{D}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ sei der Dualraum analog zu S. 1 und $\mathcal{F}_{\mathbb{T}} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : S \longmapsto \big(k \longmapsto \hat{S}(k) := \langle \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}, S_x\rangle\big)$.
Dann ist $s' := \Big\{(a_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \exists N \in \mathbb{N} : \big(a_k\big(1+|k|\big)^{-N}\big) \in l^\infty(\mathbb{Z})\Big\}$ das Bild von $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}$.
$\mathcal{D}'_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) := \big\{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : T(x+1) = T\big\}$.
Dann ist $\Phi : \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) : S \longmapsto \big(\varphi \longmapsto \langle \psi, S\rangle\big)$ ein topologischer Vektorraumisomorphismus, wobei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ mit $\psi(\bar{t}) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(t+k)$.
Es gilt $\mathcal{D}'_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ und

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}'(\mathbb{T}) & \underset{\Phi}{\xrightarrow{\sim}} & \mathcal{D}'_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \\
\mathcal{F}_{\mathbb{T}}\big|\wr & \circlearrowleft & \big|\wr\, \mathcal{F} \\
s' & \xrightarrow{\sim} & \left\{\sum a_k \delta_{2k\pi} : (a_k) \in s'\right\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\
(a_k) & \longmapsto & 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_{2k\pi},
\end{array}$$

denn für $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$\langle \varphi, \mathcal{F}\Phi S\rangle = \langle \mathcal{F}\varphi, \Phi S\rangle = \langle \psi, S\rangle$, wobei $\psi(\bar{t}) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(t+k) =$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(t+k)} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\varphi(\xi), \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi k}\right\rangle \overset{\text{S. 46}}{=} \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\varphi(\xi), 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}\right\rangle =$$

$$= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2k\pi\mathrm{i}t} \varphi(2k\pi).$$

Also ist $\langle \varphi, \mathcal{F}\Phi S\rangle = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{S}(k)\varphi(2k\pi) = \left\langle \varphi, 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{S}(k)\delta_{2k\pi}\right\rangle$.

In Worten: Die Fouriertransformierte einer periodischen Distribution $\Phi S$ ist durch einen „$\delta$-Kamm“ bei $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, gegeben, dessen „Zackenhöhen“ das $2\pi$-fache der Fourierkoeffizienten $\hat{S}(k)$ von $S$ sind.

9) Zum Abschluss noch mein Beweis (1994)
des **Theorems von Malgrange-Ehrenpreis** (1954)
$\forall P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]\backslash\{0\} : \exists E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : P(\partial)E = \delta$

**Interpretation** Jeder nicht-triviale lineare Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten hat eine FL in $\mathcal{D}'$. (Nach einem viel schwieriger zu beweisenden Satz von Hörmander und Łojasiewicz (1958) gilt dasselbe auch mit $\mathcal{S}'$ statt $\mathcal{D}'$.)

**Beweis** $P$ sei vom Grad $m, \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $P_{\mathrm{pr}}(\eta) \neq 0$,

$$E := \frac{1}{(2\pi)^n \overline{P_{\mathrm{pr}}(-\eta)}} \int\limits_{\substack{z\in\mathbb{S}^1 \\ \text{(pos.} \\ \text{orient.)}}} z^m \mathrm{e}^{-z\eta\cdot x} \mathcal{F}\left(\frac{\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}}{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}\right) \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}z}.$$

Dies ist wohldefiniert, da $\dfrac{\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}}{P(-\mathrm{i}x - z\eta)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und in $\mathcal{S}'$ stetig von $z$ abhängt (Satz von Lebesgue) $\Longrightarrow$ $\mathrm{e}^{-z\eta\cdot x}\mathcal{F}\left(\dfrac{\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}}{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ hängt auch stetig von $z$ ab. Ausführlich ist also für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\langle \varphi, E\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n \overline{P_{\mathrm{pr}}(-\eta)}} \int\limits_{\mathbb{S}^1} z^m \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-z\eta x}\varphi) \cdot \frac{\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}}{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}\,\mathrm{d}x\right] \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}z}.$$

Es bleibt noch $P(\partial)E = \delta$ zu zeigen.

$$P(\partial)E = \frac{1}{(2\pi)^n \overline{P_{\mathrm{pr}}(-\eta)}} \int\limits_{\mathbb{S}^1} z^m P(\partial)\left[\mathrm{e}^{-z\eta x} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}}{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}\right)\right] \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}z};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathrm{e}^{-z\eta\cdot x}T) = \mathrm{e}^{-z\eta\cdot x}\left(-z\eta_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)T \implies$$

$$\implies P(\partial)\left(\mathrm{e}^{-z\eta\cdot x}\mathcal{F}\left(\frac{\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}}{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}\right)\right) = \mathrm{e}^{-z\eta\cdot x}\underbrace{P(\partial - z\eta)\mathcal{F}\left(\frac{\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}}{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}\right)}$$

$$\text{S. 43} \implies \partial^\alpha \mathcal{F}T = \mathcal{F}\big((-\mathrm{i}x)^\alpha T\big) \implies \qquad = \mathcal{F}\big(\overline{P(-\mathrm{i}x - z\eta)}\,\big) =$$

$$= \mathcal{F}\big(\overline{P}(\mathrm{i}x - \overline{z}\eta)\big) = \overline{P}(-\partial - \overline{z}\eta)\mathcal{F}1 = \overline{P}(-\partial - \overline{z}\eta)(2\pi)^n\delta =$$

$$= (2\pi)^n \overline{P_{\mathrm{pr}}(-\eta)}\left[\overline{z}^m\delta + \sum_{j=0}^{m-1}\overline{z}^j Q_j(\partial)\delta\right]$$

$$\implies P(\partial)E = \int\limits_{\mathbb{S}^1} \underbrace{\mathrm{e}^{-z\eta\cdot x}\delta}_{=\delta} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}z} + \sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\mathbb{S}^1} \mathrm{e}^{-z\eta\cdot x} z^{m-j}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}z}\, Q_j(\partial)\delta$$

$= \delta$ nach dem Residuensatz. $\square$

## C) Etwas Theorie

**Satz 11**
1) $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ ist wohldefiniert, linear, folgenstetig, ein Vektorraumisomorphismus, und $\mathcal{F}^2 = (2\pi)^n \vee : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} : \varphi \longmapsto (2\pi)^n\check{\varphi}$.
2) Für $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ gilt dasselbe.

**Beweis** 1) a) $\varphi \in \mathcal{S} \implies \forall \alpha, \beta : x^\alpha\partial^\beta\varphi \in L^\infty \implies$
$\forall \alpha, \beta : \big(1 + |x|^2\big)^n x^\alpha\partial^\beta\varphi \in L^\infty \implies \forall \alpha, \beta : x^\alpha\partial^\beta\varphi \in L^1$
$\implies \forall \alpha, \beta : \mathcal{F}(x^\alpha\partial^\beta\varphi) \in L^\infty \implies \forall \alpha, \beta : (\mathrm{i}\partial)^\alpha(\mathrm{i}x)^\beta\mathcal{F}\varphi \in L^\infty$
$\implies$ (rekursiv) $\forall \alpha, \beta : x^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}\varphi \in L^\infty \implies \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$.
b) Die Linearität ist klar.
c) $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S} \implies \forall \alpha, \beta : x^\alpha\partial^\beta\varphi_k \longrightarrow x^\alpha\partial^\beta\varphi$ in $L^\infty \implies$ (analog a)
$\implies \mathcal{F}\varphi_k \longrightarrow \mathcal{F}\varphi$ in $\mathcal{S}$.
d) Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ ist $\langle \mathcal{F}\varphi, \psi\rangle = \int\left(\int \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)\psi(x)\,\mathrm{d}x =$ (Fubini)
$= \int\left(\int \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\right)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \langle \varphi, \mathcal{F}\psi\rangle$.
Daher ist $\langle \mathcal{F}^2\varphi, \psi\rangle = \langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi\rangle =$ (Lebesgue)

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-k}^{k} \mathrm{d}x_n \mathcal{F}\varphi(x)\mathcal{F}\psi(x) = \text{(Fubini)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(\xi)\psi(\eta)\Bigg(\int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1(\xi_1+\eta_1)}\,\mathrm{d}x_1\Bigg)\cdots\Bigg(\int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_n(\xi_n+\eta_n)}\,\mathrm{d}x_n\Bigg)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta;$$

$$\int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1(\xi_1+\eta_1)}\,\mathrm{d}x_1 \longrightarrow 2\pi\delta(\xi_1+\eta_1) \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2_{\xi_1,\eta_1}) \text{ analog zu S. 8}$$

$$\Longrightarrow \langle \mathcal{F}^2\varphi,\psi\rangle = (2\pi)^n\big\langle \varphi(\xi)\psi(\eta), \delta(\xi_1+\eta_1)\otimes\cdots\otimes\delta(\xi_n+\eta_n)\big\rangle =$$
$$= (2\pi)^n \int \varphi(\xi)\psi(-\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^n\langle\check{\varphi},\psi\rangle \implies \mathcal{F}^2 = (2\pi)^n \vee .$$

2) folgt aus 1). □

**Satz 12**

1) $T\in\mathcal{E}' \implies \mathcal{F}T$ holomorph, $\mathcal{F}T = \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot z}, T_\xi\rangle\Big|_{\mathbb{R}^n}$

2) $S\in\mathcal{S}', T\in\mathcal{E}' \implies S*T\in\mathcal{S}'$ und $\mathcal{F}(S*T) = \mathcal{F}S\cdot\mathcal{F}T$.

**Beweis** 1) a) $T\in\mathcal{E}',\ \chi\in\mathcal{D}$ mit $\chi=1$ auf $U\supset \operatorname{supp} T \overset{\text{S. 15}}{\Longrightarrow} \forall\varphi\in\mathcal{E}: \langle\varphi,T\rangle =$
$= \langle\varphi\chi,T\rangle \implies \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}, T_\xi\rangle = \big\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\chi(\xi), T_\xi\big\rangle;$
$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D} : x\longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\chi(\xi)$ ist stetig $\implies$
$x \longmapsto \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}, T_\xi\rangle =: \mathcal{F}_1T(x)$ ist stetig $\implies$
$\forall\varphi\in\mathcal{D}: \langle\varphi,\mathcal{F}_1T\rangle = \int \varphi(x)\big\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\chi(\xi),T_\xi\big\rangle\,\mathrm{d}x \overset{\text{S. 28}}{=} \big\langle \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\chi(\xi), 1_x\otimes T_\xi\big\rangle \overset{\text{S. 28}}{=}$

$$= \left\langle \int \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x, \underbrace{\chi(\xi)T_\xi}_{=T}\right\rangle = \langle\mathcal{F}\varphi,T\rangle = \langle\varphi,\mathcal{F}T\rangle \implies \mathcal{F}T = \mathcal{F}_1T.$$

b) $\sum_{j=0}^{m}\dfrac{(-\mathrm{i}\xi z)^j}{j!}\,\chi(\xi) \longrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi z}\chi(\xi)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\xi)$ für $m\to\infty$ und $z\in\mathbb{C}^n$ fest $\implies$

$$\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi z},T_\xi\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\big\langle(-\mathrm{i}\xi z)^j,T_\xi\big\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=j}\underbrace{\frac{1}{j!}\binom{j}{\alpha}}_{=1/\alpha!} z^\alpha\big\langle(-\mathrm{i}\xi)^\alpha,T_\xi\big\rangle \implies$$

$\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C} : z\longmapsto \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi z},T_\xi\rangle$ ist holomorph.

2) a) $\varphi\in\mathcal{D},\chi$ wie in 1) $\implies \langle\varphi,S*T\rangle \overset{\text{S. 28}}{=} \big\langle\chi(y)\varphi(x+y), S_x\otimes T_y\big\rangle;$
$\mathcal{E}'\subset\mathcal{S}' \implies S,T\in\mathcal{S}' \implies$ (analog, Satz 8, S. 35) $\implies$
$S\otimes T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$; für $\varphi\in\mathcal{S}$ ist $\chi(y)\varphi(x+y)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \implies$
$S*T : \mathcal{S}\longrightarrow\mathbb{C} : \varphi\longmapsto \big\langle\chi(y)\varphi(x+y), S\otimes T\big\rangle$ ist wohldefiniert und linear;
wenn $\varphi_k\to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ so gilt $\chi(y)\varphi_k(x+y)\to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ und daher ist $S*T:\mathcal{S}\longrightarrow\mathbb{C}$ stetig, d.h. $S*T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

b) $\mathcal{S}' \times \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{S}' : (S,T) \longmapsto S * T$ ist folgenstetig, denn $S_k \longrightarrow S,\ T_k \longrightarrow T \implies S_k \otimes T_k \longrightarrow S \otimes T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \implies S_k * T_k \longrightarrow S * T$;

$S,T \in \mathcal{D} \implies \mathcal{F}(S*T)(x) = \displaystyle\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \Big( \int S(\eta) T(\xi-\eta)\, \mathrm{d}\eta \Big)\, \mathrm{d}\xi =$ (Fubini)

$= \displaystyle\iint S(\eta) T(\underbrace{\xi-\eta}_{u}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\xi-\eta)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\eta}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \mathcal{F}S(x)\mathcal{F}T(x)$;

$\mathcal{D} \ni S_k \longrightarrow S$ in $\mathcal{S}'$, $\mathcal{D} \ni T_k \longrightarrow T$ in $\mathcal{E}'$ (analog Satz 9, S. 36) $\implies$
$S_k * T_k \longrightarrow S * T$ in $\mathcal{S}' \implies \mathcal{F}(S_k * T_k) = \mathcal{F}S_k \cdot \mathcal{F}T_k \longrightarrow \mathcal{F}(S*T)$ in $\mathcal{S}'$;
$\mathcal{F}S_k \longrightarrow \mathcal{F}S$ in $\mathcal{S}'$, $\mathcal{F}T_k \longrightarrow \mathcal{F}T$ in $\mathcal{E} \implies \mathcal{F}S_k \cdot \mathcal{F}T_k \longrightarrow \mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T$ in $\mathcal{D}' \implies$
$\mathcal{F}(S*T) = \mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T$ in $\mathcal{D}'$. $\square$

**Satz 13**
$\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \mathcal{C} : f \longmapsto \Big( x \longmapsto \displaystyle\int f(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi \Big)$ und $\mathcal{F} : L^2 \xrightarrow{\sim} L^2$ mit $\|\mathcal{F}f\| = (2\pi)^{n/2} \|f\|$

und für $f \in L^2$ ist $\mathcal{F}f = \lim\limits_{k\to\infty}(\text{in } L^2) \displaystyle\int\limits_{|\xi|<k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \cdot f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$.

**Beweis** a) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \overset{\text{(Lebesgue)}}{\implies} \mathcal{F}_1 f(x) := \displaystyle\int f(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi$ ist stetig;

$\varphi \in \mathcal{S} \implies \langle \varphi, \mathcal{F}f \rangle = \langle \mathcal{F}\varphi, f \rangle = \displaystyle\int \Big( \int \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi \Big) \cdot f(x)\, \mathrm{d}x =$ (Fubini)

$= \Big\langle \varphi(\xi), \displaystyle\int f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}x \Big\rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}_1 f \rangle \implies \mathcal{F}f = \mathcal{F}_1 f$.

b) $\varphi \in \mathcal{S} \implies \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S} \subset L^2$ und $\|\mathcal{F}\varphi\|^2 = \underset{L^2}{\langle} \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\varphi \underset{L^2}{\rangle} = \underset{\mathcal{S}}{\langle} \mathcal{F}\varphi, \overline{\mathcal{F}\varphi} \underset{\mathcal{S}'}{\rangle} = \langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\check{\overline{\varphi}} \rangle =$
$\langle \mathcal{F}^2\varphi, \check{\overline{\varphi}} \rangle = (2\pi)^n \langle \check{\varphi}, \check{\overline{\varphi}} \rangle = (2\pi)^n \underset{\mathcal{S}}{\langle} \varphi, \overline{\varphi} \underset{\mathcal{S}'}{\rangle} = (2\pi)^n \|\varphi\|^2$.

c) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht (analog Satz 3, S. 11), $\varphi_k \in \mathcal{S}$ mit $\varphi_k \longrightarrow f \in L^2 \overset{\text{b)}}{\implies} \mathcal{F}\varphi_k$ $C$-Folge in $L^2 \implies \mathcal{F}\varphi_k \longrightarrow g \in L^2 \implies \mathcal{F}\varphi_k \longrightarrow g$ in $\mathcal{S}'$;
$\varphi_k \longrightarrow f$ in $\mathcal{S}' \implies \mathcal{F}\varphi_k \longrightarrow \mathcal{F}f$ in $\mathcal{S}' \implies \mathcal{F}f = g \in L^2$ und
$\|\mathcal{F}f\| = \lim \|\mathcal{F}\varphi_k\| = (2\pi)^{n/2} \lim \|\varphi_k\| = (2\pi)^{n/2} \|f\|$.
d) $f \in L^2 \implies f = \lim\limits_{k\to\infty}(\text{in } L^2)\ f \cdot Y\big(k - |x|\big) \overset{\text{c)}}{\implies}$

$\mathcal{F}f = \lim\limits_{k\to\infty}(\text{in } L^2) \mathcal{F}\Big[\underbrace{f \cdot Y\big(k-|x|\big)}_{\in L^1}\Big] = \lim\limits_{k\to\infty}(\text{in } L^2) \displaystyle\int\limits_{|\xi|<k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$. $\square$

## D) Übungen

**Übung 1**

a) Zeige: $T$ homogen vom Grad $\lambda \implies \mathcal{F}T$ homogen vom Grad $-\lambda - n$.

b) Zeige: $T \in \mathcal{S}', T$ radialsymmetrisch (d.h. $\forall A \in \mathrm{O}_n : T \circ A = T$) $\implies \mathcal{F}T$ radialsymmetrisch (vgl. S. 42).

c) Folgere aus der Tatsache, dass homogene, radialsymmetrische Distributionen außerhalb des Ursprungs die Form $c|x|^\lambda$ haben, dass $\mathcal{F}\big(|x|^\lambda\big) = c \cdot |x|^{-\lambda-n}$ für $-n < \operatorname{Re}\lambda < 0$. Bestimme $c$ durch Anwendung auf $\mathrm{e}^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

d) Gewinne aus c) eine Fundamentallösung von $\Delta_n,\ n > 2$.

**Übung 2** Bestimme die Fouriertransformation der folgenden Distributionen in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ $(k \in \{0, 1, 2, \cdots\}, a \in \mathbb{R})$ :

a) $\delta^{(k)}$ b) $Y(x-a)$ c) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ d) $\sin x$ e) $Y(x)\sin x$ f) $Y(x)x^k$ g) $\left(\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}$

**Übung 3** Bestimme in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2_{x,y})$

a) $\mathcal{F}(z^k),\ z = x + \mathrm{i}y,\ k \in \mathbb{N}$;

b) $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ mittels der Gleichung $(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)\dfrac{1}{z} = 2\pi\delta$ (vgl. Übung 6 zu § 2).

**Übung 4**

a) Überlege, dass $\delta_{\mathbb{S}^2} \in \mathcal{F}\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3)\backslash L^1(\mathbb{R}^3)$ und $\delta_{\mathbb{S}^2} \in \bigcap_{q>3} \mathcal{F}\big(L^q(\mathbb{R}^3)\big)$, wobei

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3) = \big\{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}, \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\big\}$.

In b)–d) wird etwas analoges in $\mathbb{R}^1$ konstruiert.

b) Zeige $\mathrm{e}^{\lambda x + \mathrm{i}\mathrm{e}^x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ für $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

c) Bestimme $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\lambda x + \mathrm{i}\mathrm{e}^x})$ für $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$.

d) Verwende $\big|\Gamma(\lambda - \mathrm{i}x)\big| \approx \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-|x|\pi/2}|x|^{\operatorname{Re}\lambda - 1/2},\ |x| \to \infty$, um zu zeigen, dass $\mathrm{e}^{\lambda x + \mathrm{i}\mathrm{e}^x} \in \mathcal{F}\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^1)\backslash L^1(\mathbb{R}^1)$ für $0 < \operatorname{Re}\lambda < \frac{1}{2}$. Was gilt bzgl. $\mathcal{F}L^q(\mathbb{R}^1)$ ?

**Übung 5** $P(\partial)$ sei homogen vom Grad $m$, im $\mathbb{R}^n$, sowie elliptisch.

a) Zeige: $P(\partial)u = 0,\ u \in \mathcal{S}' \implies u$ ist ein Polynom.

b) Es sei $m < n$. Zeige, dass $P(\partial)$ genau eine homogene Fundamentallösung besitzt, nämlich $E = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{1}{P(\mathrm{i}\xi)}\right)$. (Beachte, dass $P(\mathrm{i}\xi)^{-1} \in \mathcal{E}' + L^\infty \subset \mathcal{S}'$ und dass homogene Distributionen temperiert sind.)

c) Falls $m \in \{2, 4, 6, \cdots\},\ n \in \{3, 5, 7, \cdots\}$ zeige, dass $P(\partial)$ höchstens eine homogene, gerade Fundamentallösung besitzt.

**Übung 6**

a) Bestimme in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1_t)$ $\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}t-\lambda_1}\right)$ für $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$

$\alpha$) mit dem Residuensatz, $\beta$) als Fundamentallösung von $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_1$, vgl. S. 17.

b) Zeige, dass $E_c := \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{1}{(\mathrm{i}t)^m + \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j(\mathrm{i}t)^j}\right)$ die einzige Fundamentallösung von

$P\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, c\right) = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m + \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j$ mit Träger in $[0,\infty[$ ist,

wenn $c \in \mathbb{C}^m$ mit $P(\lambda, c) \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

c) Bestimme $\mathcal{F}^{-1}\big(\prod\limits_{j=1}^{m}(\mathrm{i}t-\lambda_j)^{-1}\big)$ für paarweise verschiedene $\lambda_j \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$

$\alpha$) mit b), $\beta$) mit Partialbruchzerlegung.

(Letzteres geht auch für $\lambda_j \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{i}\mathbb{R}$.)

# § 5 Distributionenwertige Funktionen

## A) Definitionen

1) Es seien $\emptyset \neq \Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ offen, $i = 1, 2,$ $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.
   a) $\mathcal{C}^k\big(\Omega_1, \mathcal{D}'(\Omega_2)\big) =$
   $$\big\{f : \Omega_1 \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_2) : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2) : x \longmapsto \big\langle \varphi(y), f(x)_y \big\rangle \in \mathcal{C}^k(\Omega_1)\big\}$$
   b) $\mathcal{C}^0\big(\Omega_1, \mathcal{D}'(\Omega_2)\big) \subset \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$
   $$f \longmapsto \left(\varphi(x,y) \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} \big\langle \varphi(x,y), f(x)_y \big\rangle \,\mathrm{d}x\right)$$

2) $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^{n_1}$ offen, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ offen.
   a) $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_2)$ heißt **analytisch** (bzw. **holomorph**) $\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ : $z \longmapsto \big\langle \varphi(y), f(z)_y \big\rangle$ ist analytisch. (Analog für $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_2})$ statt $\mathcal{D}'(\Omega_2)$.) Dann lässt sich $f$ um $z_0 \in \Omega_1$ in eine in $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ konvergente Potenzreihe entwickeln.
   b) Für $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ heißt $f$ **meromorph** $\Longleftrightarrow \forall z_0 \in \Omega_1 : \exists k \in \mathbb{N} : (z-z_0)^k f(z)$ bei $z_0$ analytisch. Dann lässt sich $f$ um $z_0$ in eine Laurentreihe entwickeln. $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ und $\operatorname*{Pf}\limits_{z=z_0} f(z)$ bezeichnen die Koeffizienten von $(z-z_0)^{-1}$ bzw. $(z-z_0)^0$.

3) a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1+n_2}_{x,y}) \xrightarrow{\mathcal{F}_y} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1+n_2}_{x,y}) : \varphi(x,y) \longmapsto \displaystyle\int \varphi(x,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}\,\mathrm{d}\eta$ und

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) \xrightarrow{\mathcal{F}_y} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) : T \longmapsto \big(\varphi \longmapsto \langle \mathcal{F}_y\varphi, T\rangle\big)$ heißen **partielle Fouriertransformation** (bzgl. $y_1, \cdots, y_{n_2}$).

b) Auch $\mathcal{C}\big(\Omega_1, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_2}_y)\big) \xrightarrow{\mathcal{F}_y} \mathcal{C}\big(\Omega_1, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_2}_y)\big) : f \longmapsto \Big(x \longmapsto \mathcal{F}\big(f(x)\big)\Big)$ heißt partielle Fouriertransformation (für $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}_x$ offen).

Auf $\mathcal{C}\big(\mathbb{R}^{n_1}_x, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_2}_y)\big) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2}_{x,y})$ stimmen a) und b) überein.

## B) Beispiele

1) $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \big(f : x \longmapsto S(x+y)\big) \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n_x, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_y)\big)$ und $(\partial^\alpha f)(0) = \partial^\alpha S$, denn
$\big\langle \varphi(y), f(x)_y \big\rangle = \big\langle \varphi(y), S(\underbrace{x+y}_{u})\big\rangle \overset{\text{S. 6}}{=} \big\langle \varphi(u-x), S_u \big\rangle$ ist $\mathcal{C}^\infty$ bzgl. $x$ (vgl. S. 35, Beweis) und $\big\langle \varphi, (\partial^\alpha f)(x)\big\rangle := \partial^\alpha_x\Big(\big\langle \varphi(u-x), S_u\big\rangle\Big) \overset{\text{S. 35}}{=}$
$= \big\langle \partial^\alpha_x \varphi(u-x), S_u\big\rangle = (-1)^{(\alpha)}\big\langle (\partial^\alpha\varphi)(u-x), S_u\big\rangle =$
$= \big\langle \varphi(u-x), (\partial^\alpha S)_u\big\rangle \Longrightarrow (\partial^\alpha f)(0) = \partial^\alpha S.$
(Allgemein ist für $f \in \mathcal{C}^k\big(\Omega_1, \mathcal{D}'(\Omega_2)\big)$ und $|\alpha| \leq k,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{n_1}$,
$\partial^\alpha f \in \mathcal{C}^{k-|\alpha|}\big(\Omega_1, \mathcal{D}'(\Omega_2)\big)$ durch $\big\langle \varphi, (\partial^\alpha f)(x)\big\rangle = \partial^\alpha_x \big\langle \varphi, f(x)\big\rangle$ (wohl)definiert.
Bzgl. der Einbettung $\mathcal{C}^k\big(\Omega_1, \mathcal{D}'(\Omega_2)\big) \subset \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ stimmen die zwei sich ergebenden Begriffe von $\partial^\alpha_x$ dann überein:
$\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y) \Longrightarrow \int\limits_{\Omega_1} \big\langle \varphi(x,y), (\partial^\alpha f)(x)_y\big\rangle \,\mathrm{d}x \overset{\text{Def.}}{=}$
$\int\limits_{\Omega_1} \varphi_1(x)\partial^\alpha_x\Big(\big\langle \varphi_2(y), f(x)_y\big\rangle\Big)\,\mathrm{d}x \overset{\text{part. integr.}}{=} \int\limits_{\Omega_1} \big((-\partial_x)^\alpha\varphi_1(x)\big)\big\langle \varphi_2(y), f(x)_y\big\rangle\,\mathrm{d}x =$
$= \big\langle (-\partial_x)^\alpha\varphi, f\big\rangle$ und das genügt nach S. 36.)

2) $\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,-3,\cdots\} \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \lambda \longmapsto x^\lambda_+$ ist holomorph, denn für $\operatorname{Re}\lambda > -1$ kann man $\langle \varphi, x^\lambda_+\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(x)x^\lambda\,\mathrm{d}x$ nach $\lambda$ differenzieren und für $\operatorname{Re}\lambda + m > -1$ ist
$\langle \varphi, x^\lambda_+\rangle = \dfrac{1}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+m)}\big\langle (-1)^m\varphi^{(m)}, x^{\lambda+m}_+\big\rangle$ vgl. S. 18. In $\lambda = -m,\ m \in \mathbb{N}$, hat $x^\lambda_+$ einfache Pole mit $\operatorname*{Res}\limits_{\lambda=-m} x^\lambda_+ = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}$, denn

$$\lim_{\lambda\to-m}(\lambda+m)x^\lambda_+ = \lim_{\lambda\to-m}\frac{(x^{\lambda+m}_+)^{(m)}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+m-1)} = \frac{Y^{(m)}}{(1-m)\cdots(-1)}.$$

Weiters gilt z.B. $\operatorname*{Pf}\limits_{\lambda=-1} x^\lambda_+ = \operatorname*{Pf}\limits_{\lambda=-1}\left(\dfrac{x^{\lambda+1}_+}{\lambda+1}\right)' = \left(\operatorname*{Pf}\limits_{z=0}\dfrac{x^z_+}{z}\right)'$; $x^z_+$ ist bei $z=0$ analytisch,
$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(x^z_+)\Big|_{z=0} = (\ln x)^k \cdot Y(x) \Longrightarrow x^z_+ = \sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{Y(x)\ln^k x}{k!}z^k$ ist die Potenzreihe von

$x_+^z$ um $z=0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ (mit Konvergenzradius 1)
$\Longrightarrow \operatorname*{Pf}_{z=0}\left(\dfrac{x_+^z}{z}\right) = Y(x)\ln x \Longrightarrow \operatorname*{Pf}_{\lambda=-1} x_+^\lambda = \big(Y(x)\ln x\big)' =: x_+^{-1}$ vgl. S. 18.

3) Wir wollen eine Fundamentallösung von $\partial_t^2 - \Delta_3$ mit partieller Fouriertransformation berechnen. Wenn $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$ mit $\operatorname{supp} E \subset \left\{\binom{t}{x} : t \geq 0\right\}$, so erfüllt $F := \mathcal{F}_x E$ dasselbe. $(\partial_t^2 - \Delta_3)E = \delta \Longleftrightarrow \big(\partial_t^2 + |x|^2\big)F = \delta_t \otimes 1_x$. In $\mathcal{C}\big(\mathbb{R}^3_x, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_t)\big)$ ist die Lösung der letzten Gleichung (mit der Trägerbedingung) nach S. 17 eindeutig durch

$$F(x) = \begin{cases} Y(t)t : x = 0, \\ Y(t)\dfrac{\sin\big(t|x|\big)}{|x|} : x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{gegeben.}$$

Da $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$, ist also $E = \mathcal{F}_x^{-1}(F)$ eine Fundamentallösung von $\partial_t^2 - \Delta_3$ mit Träger in $\left\{\binom{t}{x} : t \geq 0\right\}$.

Es gilt auch $F \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^1_t, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3_x)\big)$, da $F(t) = \dfrac{Y(t)\sin\big(t|x|\big)}{|x|} \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3_x)$ für $t \searrow 0$.

Daher folgt $E \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^1_t, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3_x)\big) : t \longmapsto \mathcal{F}_x^{-1}\left(\dfrac{Y(t)\sin\big(t|x|\big)}{|x|}\right) = \dfrac{Y(t)}{4\pi t}\,\delta_{t\mathbb{S}^2}$, vgl. S. 42, d.h. $\langle\varphi, E\rangle = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\left(\int_{|x|=t} \varphi(t,x)\,\mathrm{d}s(x)\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\big(|x|,x\big)}{|x|}\,\mathrm{d}x$, wie in S. 34 bereits gefunden.

Es gilt $F \in \mathcal{C}^\infty\big(]0,\infty[, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3_x)\big)$ und $\lim\limits_{t\searrow 0} F(t) = 0$, $\lim\limits_{t\searrow 0} \partial_t F(t) = 1$
$\Longrightarrow \lim\limits_{t\searrow 0} E(t) = 0$, $\lim\limits_{t\searrow 0} \partial_t E(t) = \delta$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3_x)$ und allgemeiner
$\lim\limits_{t\searrow 0} \partial_t^{2k} E(t) = \lim\limits_{t\searrow 0} \Delta^k E(t) = \Delta^k 0 = 0$, $\lim\limits_{t\searrow 0} \partial_t^{2k+1} E(t) = \Delta^k \lim\limits_{t\searrow 0} \partial_t E = \Delta^k \delta$.

4) Wir betrachten den Schrödinger Operator $\partial_t - \mathrm{i}\Delta_n$. Partielle Fouriertransformation von $(\partial_t - \mathrm{i}\Delta_n)E = \delta$ nach $x$ liefert wie in 3) $\big(\partial_t + \mathrm{i}|x|^2\big)F = \delta_t \otimes 1_x$,
$F = Y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|x|^2 t}$, $E = Y(t)\mathcal{F}_x^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|x|^2 t})$ (in $t=0$ nur links-/rechtsseitig stetig!)
Für $z > 0$ gilt $\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-z|x|^2}) = (4\pi z)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/(4z)} =: T_z \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$, vgl. S. 43.
Wenn $\operatorname{Re} z > 0$, so sind $z \longmapsto \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-z|x|^2})$ und $z \longmapsto T_z$ analytisch und stimmen daher in $\operatorname{Re} z > 0$ überein. Weiters ist $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\} \longrightarrow \mathcal{S}' : z \longmapsto T_z$ stetig und daher $\mathcal{F}_x^{-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|x|^2}) = (4\pi\mathrm{i}t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/(4\mathrm{i}t)}$, d.h.
$E \in \mathcal{C}\big([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)\big) : t \longmapsto (4\pi\mathrm{i}t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/(4\mathrm{i}t)}$, d.h.

$$\big\langle\varphi(t,x), E\big\rangle = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/4}}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x)\mathrm{e}^{-|x|^2/(4\mathrm{i}t)}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{n/2}}.$$

Beachte, dass $E \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ für $n \geq 2$. $E$ ist die einzige Fundamentallösung von $\partial_t - \mathrm{i}\Delta_n$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und mit Träger in $\left\{\binom{t}{x} : t \geq 0\right\}$ (denn wenn $E_1$ das auch erfüllt $\Longrightarrow$ $G := \mathrm{e}^{-t}(E - E_1) \in \mathcal{S}'$, $(\partial_t - \mathrm{i}\Delta_n + 1)G = 0$
$\Longrightarrow$ $\big(\underbrace{\mathrm{i}t + \mathrm{i}|x|^2 + 1}_{\neq 0}\big)\mathcal{F}G = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}G = 0 \Longrightarrow E = E_1$)

## C) Übungen

**Übung 1** Es sei $n \geq 2$ und $T_\lambda := |x|^\lambda \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für $\operatorname{Re}\lambda > -n$.
a) Zeige, dass $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -n\} \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \lambda \longmapsto T_\lambda$ analytisch ist und entwickle $T_\lambda$ in eine Potenzreihe um $\lambda = 0$.
b) Zeige, dass $\Delta T_{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda+n)T_\lambda$ für $\operatorname{Re}\lambda > -n$ und setze damit $T_\lambda$ meromorph fort nach $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -n-2\}$.
c) Bestimme mit Übung 7 zu § 2 $\operatorname*{Res}_{\lambda=-n} T_\lambda$.
d) Nach Übung 1 zu § 4 ist $\mathcal{F}T_\lambda = \dfrac{2^{\lambda+n}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda/2)} T_{-n-\lambda}$ für $-n < \operatorname{Re}\lambda < 0$.
Setze damit $T_\lambda$ analytisch fort nach $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq -n, -n-2, \cdots\}$ und bestimme $\operatorname*{Res}_{\lambda=-n-2k} T_\lambda,\ k \in \mathbb{N}_0$.
e) Zeige, dass $|x|^{2k} \operatorname*{Pf}_{\lambda=-2k} T_\lambda = 1$ für $k \in \mathbb{N}$, und bestimme mittels d) aus $\mathcal{F}^{-1}(\operatorname*{Pf}_{\lambda=-2k} T_\lambda)$ eine Fundamentallösung von $\Delta_n^k$.

**Übung 2** Es sei $f \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ und $T_\lambda := f\left(\dfrac{x}{|x|}\right)|x|^\lambda$ für $\operatorname{Re}\lambda > -n$.
a) Zeige, dass $\big(\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\big)$

$$\langle \varphi, T_\lambda \rangle := \int\limits_{|x|<1} \Bigg[\varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha \varphi(0) x^\alpha}{\alpha!}\Bigg] f\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^\lambda \,\mathrm{d}x \;+$$

$$+ \left\langle \varphi, Y\big(|x|-1\big) f\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^\lambda + \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{(-\partial)^\alpha \delta}{\alpha!\big(|\alpha|+\lambda+n\big)} \cdot \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega)\omega^\alpha \,\mathrm{d}s(\omega) \right\rangle$$

die analytische Fortsetzung von $T_\lambda$ in das Gebiet $\operatorname{Re}\lambda > -n-k-1$, $\lambda \neq -n, -n-1, \cdots, -n-k$ liefert. (Vgl. auch Übung 6 zu § 1).
b) Bestimme $\operatorname*{Res}_{\lambda=-n-k} T_\lambda,\ k \in \mathbb{N}_0$. Vergleiche das Ergebnis für $f = 1, k = 0$ mit dem von Übung 1 c).

## Übung 3

a) Überlege, dass für $E = \dfrac{1}{4\pi|x|}\,\delta\big(t-|x|\big) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4_{t,x})$
gilt $E = \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} E_\epsilon$ mit $E_\epsilon \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1_{x_3})\big)$,

$E_\epsilon(t,x_1,x_2) = \chi_\epsilon \cdot \dfrac{\delta_{\sqrt{t^2-x_1^2-x_2^2}} + \delta_{-\sqrt{t^2-x_1^2-x_2^2}}}{4\pi\sqrt{t^2-x_1^2-x_2^2}}$,

$\chi_\epsilon = \chi\Big(\big(t-\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\big)/\epsilon\Big)^2,\ \chi(t) = Y(t)t - Y(t-1)\cdot(t-1).$

b) Bestimme $\mathcal{F}_{x_3}E$.

c) Zeige, dass $\mathcal{F}_{x_3}E \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^1_{x_3}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2})\big)$ und bestimme so eine Fundamentallösung von $\partial_t^2 - \Delta_2 + \lambda^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

d) Bestimme durch analytische Fortsetzung bzgl. $\lambda$ eine Fundamentallösung des Klein-Gordon-Operators $\partial_t^2 - \Delta_2 + \lambda^2,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

## Übung 4

a) Zeige, dass $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -1\} \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}) : \lambda \longmapsto T_{n,\lambda} := T_\lambda := Y(t)\dfrac{\big(t^2-|x|^2\big)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ analytisch ist.

b) Zeige $\partial_t T_{\lambda+1} = 2tT_\lambda,\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}T_{\lambda+1} = -2x_iT_\lambda$ für $\operatorname{Re}\lambda > -1$ und folgere, dass sich $T_\lambda\big|_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$ analytisch nach ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt.

c) Zeige $\Box T_{\lambda+1} = 2(2\lambda+n+1)T_\lambda$ für $\operatorname{Re}\lambda > -1$ und setze $T_\lambda$ analytisch in
$V := \mathbb{C}\setminus\big\{-\frac{n+1}{2} - j : j \in \mathbb{N}_0\big\}$ fort.

d) Zeige, dass $T_\lambda, \lambda \in V$, bzw. $\operatorname{Res}\limits_{\mu=\lambda} T_\mu, \lambda \in \mathbb{C}\setminus V$, homogen vom Grad $2\lambda$ sind und folgere (mittels b),c)), dass $\operatorname{Res}\limits_{\lambda=-(n+1)/2-j} T_\lambda = \dfrac{c_n}{(-4)^j j!}\Box^j\delta,\ j \in \mathbb{N}_0.$

e) Zeige, dass $\dfrac{1}{4c_n}\,T_{-(n-1)/2}$ eine Fundamentallösung von $\Box$ ist.

f) Bestimme $T_{3,-1}$ (d.h. $T_{-1}$ für $n=3$).

g) Zeige $T_{n,\lambda} * (\delta_{t,x'} \otimes 1_{x_n}) = \sqrt{\pi}\,T_{n-1,\lambda+1/2} \otimes 1_{x_n}$ und folgere, dass $c_n = \sqrt{\pi}\,c_{n-1} = \cdots = \pi^{(n-1)/2}c_1 = \dfrac{1}{2}\pi^{(n-1)/2}$.

# Literatur


[1] Al-Gwaiz, M.A., *Theory of Distributions*, Dekker, 1992.

[2] Barros-Neto, J., *An Introduction to the Theory of Distributions*, Dekker, 1973.

[3] Bremermann, H., *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison-Wesley, 1965.

[4] Choquet-Bruhat, Y., *Distributions. Théorie et Problèmes*, Masson, 1973.

[5] Donoghue, W.F.Jr., *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, 1969.

[6] Duistermatt J.J., Kolk, J.A.C., *Distributions. Theory and Applications*, Birkhäuser, 2010.

[7] Friedlander, F.G., *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge, 1982.

[8] Gelfand, I.M., Shilov, G.E. et al., *Generalized Functions*, 5 vols., Academic Press, 1964.

[9] Hervé, M., *Transformation de Fourier et Distributions*, Presses Universitaires France, 1986.

[10] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I, Grundlehren 256, 1990.

[11] Horváth, J., *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley, 1966.

[12] Kierat, W., Sztaba, U., *Distributions, Integral Transforms, and Applications*, CRC, 2003.

[13] Ricards, J.I., Youn, H.K., *Theory of Distributions: A Non-Technical Introduction*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[14] Schwartz, L., *Théorie des Distributions*, Hermann, 1966.

[15] Schwartz, L., *Méthodes Mathématiques Pour les Sciences Physiques*, Hermann, 1965.

[16] Shilov, G.E., *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Gordon & Breach, 1968.

[17] Strichartz, R.S., *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, CRC, 1994.

[18] Trèves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967.

[19] Vladimirov, V.S., *Generalized Functions in Mathematical Physics*, MIR, 1979.

[20] Zuily, C., *Problems in Distributions and Partial Differential Equations*, Elsevier, 1988.