1. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(1) Es seien $\mathfrak{A}_1 = \{\mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{x^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ und $f = \mathrm{id} : (\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_1]) \longrightarrow (\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_2])$. (a) Zeige, dass f $\mathcal{C}^\infty$, aber f^{-1} nicht $\mathcal{C}^1$ ist!
(b) Bestimme $\mathrm{Rg}_x f$ für $x \in \mathbb{R}$. (c) Warum sind $(\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_i])$ $\mathcal{C}^\infty-$diffeomorph?

(2) $\mathbb{P}^n$ und ψ_j, U_j seien wie in S. 3. (a) Zeige, dass
$$\hat{\psi}_j : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \,\dot{\cup}\, \mathbb{P}^{n-1} : [x] \longmapsto \begin{Bmatrix} \psi_j([x]) & : x^j \neq 0 \\ [x^1, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^{n+1}] & : x^j = 0 \end{Bmatrix} \text{ bijektiv}$$
ist. (Die Punkte in $\mathbb{P}^n \setminus U_j = \hat{\psi}_j^{-1}(\mathbb{P}^{n-1})$ heißen "∞ ferne Punkte" bzgl. ψ_j.)
(b) Wie lässt sich die Abbildung $\hat{\psi}_j$ geometrisch veranschaulichen?

(3) (Fortsetzung) Es sei $V = \{[x] \in \mathbb{P}^2 : x^1 x^2 = (x^3)^2\}$ und $j = 1, 2, 3$.
(a) Zeichne $\psi_j(U_j \cap V) \subset \mathbb{R}^2$ sowie die unendlich fernen Punkte $V \setminus U_j$ als Geraden durch 0 (d.h. $\hat{\psi}_j(V \setminus U_j) \subset \mathbb{P}^1$). (b) Warum ist V eine $\mathcal{C}^\infty-$Untermfkt. von $\mathbb{P}^2$?
(c) Gib einen Diffeomorphismus $V \simeq \mathbb{S}^1$ an!

(4) Wie Üb. 3 für $V = \{[x] \in \mathbb{P}^2 : x^1 (x^2)^2 = (x^3)^3\}$. Warum ist V eine $\mathcal{C}^0-$ aber keine $\mathcal{C}^1-$Untermfkt. von $\mathbb{P}^2$?

(5) Es sei $S = \mathbb{R}^n \,\dot{\cup}\, \{\infty\}$ mit folgender Topologie: $U \subset S$ offen $\iff (U \subset \mathbb{R}^n$ offen$)$ $\vee$ $(S \setminus U \subset \mathbb{R}^n$ kompakt$)$. Zeige,
(a) dass dies eine Topologie ergibt; (b) dass S damit eine $n-$dim. top. Mfkt. ist.
Bemerkung: Die "1–Punkt–Kompaktifizierung" lässt sich analog zu jedem lokalkompaktem Raum bilden (Alexandrov).

(6) (Fortsetzung) (a) Zeige, dass $\mathfrak{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \varphi : S \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ mit
$$\varphi(x) = \begin{Bmatrix} 0 & : x = \infty \\ \frac{x}{|x|^2} & : \text{sonst} \end{Bmatrix} \text{ ein } \mathcal{C}^\infty-\text{Atlas auf } S \text{ ist.}$$
(b) Zeige, dass
$$\hat{P} : S \longrightarrow \mathbb{S}^n : x \longmapsto \begin{Bmatrix} P(x) : x \in \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : x = \infty \end{Bmatrix} \text{ ein } \mathcal{C}^\infty-\text{Diffeomorphismus}$$
ist, wenn P die stereographische Projektion wie in S. 9 ist.

(7) (a) Zeige, dass die Drehung $A_{x,\varphi}$ im $\mathbb{R}^3$ um die Achse λx, $x \in \mathbb{R}^3$, $|x| = 1$, $\lambda > 0$, um den Winkel φ im Rechtsdrehsinn durch
$$A_{x,\varphi} z = x\langle z, x\rangle(1 - \cos\varphi) + z\cos\varphi + x \times z \sin\varphi$$
gegeben ist.
(b) $(M_i, [\mathfrak{A}_i]), i = 1, 2$, seien $\mathcal{C}^k-$Mfkt.en, $k \geq 1$, $N \subset M_2$ eine Untermfkt. mit induzierter Struktur, $f : M_1 \longrightarrow N$, $f_1 : M_1 \longrightarrow M_2 : x \longmapsto f(x)$. Zeige: $(f\ \mathcal{C}^k \iff f_1\ \mathcal{C}^k)$ und $(\forall x \in M_1 : \mathrm{Rg}_x f = \mathrm{Rg}_x f_1)$.
(c) Zeige, dass $f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) : (x, y) \longmapsto A_{x,\varphi}$, wobei $y = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $\mathcal{C}^\infty$ und surjektiv ist. Schreibe dazu die Matrix von $f(x, y)$ an!

(8) (Fortsetzung) Berechne $\mathrm{Rg}_{(x_0,y)} f$ für $x_0 = (0, 0, 1)^T$, $y \in \mathbb{S}^1$.
Hinweis: Verwende bei x_0 die Karte $\varphi_{3,+}$ und auf $\mathbb{S}^1$ den Winkel φ, und zeige, dass $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0, y), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y), \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x_0, y) \in \mathrm{gl}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ für $y \neq \binom{1}{0}$ l.u. sind.

(Z1) Es seien $p < q$ und $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q : x \longmapsto y$ eine $\mathcal{C}^k-$Einbettung, $k \geq 1$. Zeige, dass $f(\mathbb{R}^p)$ Lebesguemaß 0 hat!
Hinweis: Wenn $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i,j \leq p} \neq 0$ in x_0, so ist $f_1 : U = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - x_0| < \epsilon\} \longrightarrow \mathbb{R}^p : x \longmapsto (y^1, \ldots, y^p)$ injektiv für ein $\epsilon > 0$ und Fubini ergibt dann $\int_{f(U)} \mathrm{d}y = \int_{f_1(U)} \left(\int_{f(f_1^{-1}(y^1,\ldots,y^p))} \mathrm{d}y^{p+1} \ldots \mathrm{d}y^q\right) \mathrm{d}y^1 \ldots \mathrm{d}y^p = 0.$

2. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(9) Es sei $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)^T$ (Cartesisches Blatt).
(a) Warum ist f eine Immersion? (b) Warum ist f eine Einbettung?
(c) Warum ist f keine reguläre Einbettung?

(10) Es seien $\big(M, [\mathfrak{A}]\big), \big(N, [\mathfrak{B}]\big)$ $\mathcal{C}^k-$Mannigfaltigkeiten, $k \geq 1$, $f : N \longrightarrow M$ eine Einbettung, $x_0 \in N$.
(a) Zeige, dass $U \subset N$ offen existiert mit $x_0 \in U$ und $f(U) \subset M$ $\mathcal{C}^k-$Untermfkt.
(b) Zeige: $f(N)$ ist $\mathcal{C}^k-$Untermfkt. von $M \Longleftrightarrow f^{-1} : f(N) \longrightarrow N$ ist stetig.

(11) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \mathrm{e}^t \binom{\cos t}{\sin t}$ (logarithmische Spirale). Ist $f(\mathbb{R})$ eine $\mathcal{C}^\infty-$Untermfkt. von $\mathbb{R}^2$ (mit Standardstruktur)?

(12) Stelle für Kugelkoordinaten wie in S. 18 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ durch $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, 3$, dar, und dann mittels $T_{x_0}\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ durch einen Vektor im $\mathbb{R}^3$,
(a) mittels der Formel $\dfrac{\partial}{\partial x^{j'}} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$,
(b) durch Interpretation als Äquivalenzklasse von Wegen.

(13) (Fortsetzung) (a) Wie erhält man $v_r, v_\vartheta, v_\varphi$ für $v = v^i \partial_i \in T\mathbb{R}^3$?
(b) Spezialisiere auf $x_0 = (1, 2, 2)^T$, $v = 4\partial_1 - 2\partial_2 \in T_{x_0}\mathbb{R}^3$ und gib eine Kreiskurve bei x_0 an, deren Äquivalenzklasse v ist.

(14) Für $a \in \mathbb{R}^3$ fest sei $X_a : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x \longmapsto a \times x$.
(a) Warum kann man $X_a \in \mathcal{T}^1(\mathbb{S}^2)$ auffassen?
(b) Was ist X_a in der Karte $\varphi_{3,+}$ von S. 1?
(c) Was ist X_a in Kugelkoordinaten ϑ, φ auf $\mathbb{S}^2$?

(15) (Fortsetzung) (a) Was ist $X_a(f)$, wenn $f(x) = x^1 \cdot x^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$ und $X_a \in \mathrm{Der}(\mathbb{S}^2)$ aufgefasst wird?
(b) Was ist $[X_{e_1}, X_{e_2}]$ für $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T$?
Zusatzfrage: Was ist allgemein $[X_a, X_b]$?

(16) $N \subset M$ sei eine $\mathcal{C}^\infty-$Untermfkt. und $X_1 \in \mathcal{T}^1(M)$ mit $\forall x_0 \in N : X_1(x_0) \in T_{x_0}N$ $(\leq T_{x_0}M)$. Es sei $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f := g\big|_N$. Zeige, dass $X(f) = X_1(g)\big|_N$, wenn $\big(X : N \longrightarrow TN : x \longmapsto X_1(x)\big) \in \mathcal{T}^1(N)$. Wie lässt sich damit Üb. 15 einfacher rechnen?

(Z2) Es sei $\mathrm{sl}_n(\mathbb{R}) := \big\{C \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}\, C = 0\big\}$. Zeige ähnlich wie in Bsp. 4, S. 23, dass $T\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{sl}_n(\mathbb{R}) : (A, B) \longmapsto (A, A^{-1}B)$ ein $\mathcal{C}^\infty-$Vektorraumbündel-Isomorphismus ist.
<u>Hinweis:</u> tr = Spur. Verwende und zeige, dass für eine $\mathcal{C}^1-$Kurve $A(t)$ in $\mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$ gilt $\big(\det A(t)\big)' = \mathrm{tr}\,\big(A^{\mathrm{ad}}(t) \cdot A'(t)\big)$.

3. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(17) Zeige, dass $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)\cdot Y - gY(f)\cdot X$ für $X, Y \in \mathcal{T}^1(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, M $\mathcal{C}^\infty-$Mannigfaltigkeit.

(18) Es seien $X_1 = \partial_1 + \partial_2$, $X_2 = (x^1)^2\partial_1 + (x^2)^2\partial_2 \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^2)$.

(a) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$ sind $X_1(x), X_2(x)$ eine Basis von $T_x\mathbb{R}^2$?

(b) Drücke $[X_1, X_2]$ für $x^1 + x^2 \neq 0$ durch X_1 und X_2 aus.

(19) $N \subset M$ sei eine $\mathcal{C}^\infty-$Untermannigfaltigkeit, $X_1, Y_1 \in \mathcal{T}^1(M)$ mit $X_1(N), Y_1(N) \subset TN$ $(\subset TM)$. $X := X_1\big|_N$, $Y := Y_1\big|_N$. (a) Zeige, dass $X, Y \in \mathcal{T}^1(N)$.

(b) Zeige, dass $[X_1, Y_1](N) \subset TN$ und $[X,Y] = [X_1, Y_1]\big|_N$.

(c) Folgere, dass sich für eine Lieuntergruppe $H \leq G$ die Liealgebra T_IH bzgl. $L_H : T_IH \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_l^1(H)$ als Lieunteralgebra von T_IG bzgl. $L_G : T_IG \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_l^1(G)$ ergibt. Was bedeutet dies speziell für $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$?

(20) G sei eine Liegruppe, $J : G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$.

(a) Zeige, dass für $x \in G : T_xJ = -T_I l^{x^{-1}} \circ T_x r^{x^{-1}}$.

(b) Folgere, dass $T_IJ = -\mathrm{id} : T_IG \longrightarrow T_IG$ und dass $\forall v_1, v_2 \in T_IG : [v_1, v_2]_R = [v_2, v_1]_L$.

(21) Bestimme die Gestalt des Vektorfeldes X_1 in der ersten Spalte von $B(x)$ in S. 29 in der üblichen Darstellung von $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, d.h. berechne $\hat{P}(X_1)$, wenn $\hat{P} : S \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3$ wie in S. 9 und Üb. 6 und $\hat{P}(X_1)$ wie im Lemma in S. 35 ist.
<u>Hinweis:</u> Für $y = \binom{\vec{y}}{y^4} \in \mathbb{S}^3 \setminus \{\binom{\vec{0}}{1}\}$ setze $x = P^{-1}(y) = \frac{\vec{y}}{1-y^4} \in \mathbb{R}^3$ und $v = X_1(x)$ und berechne $T_xP(X_1(x)) \in \mathbb{S}^3$ mittels der Formel für TP in S. 33.

(22) Gib ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$, n ungerade, an.
<u>Hinweis:</u> Betrachte z.B. das Vektorfeld $\hat{P}(X_1)$ in Üb. 21.

(23) Zeige, dass $\mathbb{S}^7$ parallelisierbar ist.
<u>Hinweis:</u> Betrachte die folgenden 7 Vektorfelder $\mathbb{S}^7 \longrightarrow T\mathbb{S}^7$:

$$y \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \\ -y^1 \\ y^4 \\ -y^3 \\ y^6 \\ -y^5 \\ y^8 \\ -y^7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^3 \\ -y^4 \\ -y^1 \\ y^2 \\ y^7 \\ -y^8 \\ -y^5 \\ y^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^4 \\ y^3 \\ -y^2 \\ -y^1 \\ -y^8 \\ -y^7 \\ y^6 \\ y^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^5 \\ -y^6 \\ -y^7 \\ y^8 \\ -y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ -y^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^6 \\ y^5 \\ y^8 \\ y^7 \\ -y^2 \\ -y^1 \\ -y^4 \\ -y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^7 \\ -y^8 \\ y^5 \\ -y^6 \\ -y^3 \\ y^4 \\ -y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^8 \\ y^7 \\ -y^6 \\ -y^5 \\ y^4 \\ y^3 \\ -y^2 \\ -y^1 \end{pmatrix} \in T_y\mathbb{S}^7 \subset T_y\mathbb{R}^8.$$

(24) Es sei $M_1 := [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und $\mathfrak{A}_1 = \{\varphi_1, \psi_1\}$ mit $\varphi_1 = \mathrm{id} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und $\psi_1 : \big([0, 2\pi) \setminus \{\pi\}\big) \times \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} : (t, u) \longmapsto \begin{cases} (t, u) & : 0 \leq t < \pi \\ (t - 2\pi, -u) & : \pi < t < 2\pi. \end{cases}$

(a) Zeige, dass $\mathfrak{A}_1$ die Bedingungen (i), (ii), (iii), (v) in S. 20 erfüllt und dass $\big(M_1, [\mathfrak{A}_1]\big)$ eine $\mathcal{C}^\infty-$Mannigfaltigkeit ist. (∞ breites Möbiusband)
(b) Zeige, dass $p : M_1 \to \mathbb{S}^1 : (t, u) \mapsto \binom{\cos t}{\sin t}$ mit $[[\mathfrak{A}_1]]$ ein $\mathcal{C}^\infty-$VR-bündel ist.

(Z3) Betrachte $\big(\mathbb{R}, \big[\{\mathrm{id}\}\big]\big)$ als $\mathcal{C}^1-$Mannigfaltigkeit. Es sei $\big\{\big[|x|^{3/2}\big], [f_\lambda] : \lambda \in \Lambda\big\}$ eine Basis von $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$, sodass ${}_{\mathbb{R}}\big\langle [f_\lambda] : \lambda \in \Lambda \big\rangle$ $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$ enthält. (Mittels des Zornschen Lemmas lässt sich eine solche Basis finden.) Für $[f] \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ sei $D\big([f]\big)$ der Koeffizient von $[f]$ bezüglich des Basiselementes $\big[|x|^{3/2}\big]$. Zeige, dass D eine Derivation ist! Lässt sich D durch einen Tangentialvektor darstellen?

4. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(25) Betrachte die $\mathcal{C}^\infty-$Karte auf $\mathbb{R}^2 : \psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)^T : x \le 0\} \longrightarrow (0,\infty) \times (-\pi,\pi) :$ $r\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi} \longmapsto \binom{r}{\varphi}$. (a) Stelle $\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2$ durch $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\varphi$ und umgekehrt dar.

(b) Bestimme $\Omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ bzw. $g = \sum_{i=1}^2 \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$ in Polarkoordinaten!

(26) Es sei $x_0 \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathcal{C}^1,\quad x_0 \in U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen.

(a) Wann ist $\mathrm{d}_{x_0} f = 0$ in $T^*_{x_0}\mathbb{R}^{n+1}$?

(b) Wann ist $\mathrm{d}_{x_0} f = 0$ in $T^*_{x_0}\mathbb{S}^n$? (d.h. eigentlich $\mathrm{d}_{x_0}(f|_{\mathbb{S}^n}) = 0$)

(c) In wieviel Punkten verschwinden $\mathrm{d}x^j \in \mathcal{T}_1\mathbb{S}^n,\quad j = 1,\ldots,n+1$?

(27) $\big(M, [\mathfrak{A}]\big)$ $\mathcal{C}^k-$Mannigfaltigkeit, $k \ge 1$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p\ \mathcal{C}^k$, $N = f^{-1}(0)$, $\forall x \in N :$ $\mathrm{Rg}_x f = p$ ($\Longrightarrow$ $N \subset M$ Untermannigfaltigkeit). Es sei weiters $\big(\varphi : U \longrightarrow V :$ $x \longmapsto (x^1,\ldots,x^n)^T\big) \in \mathfrak{A}$ und bzgl. φ sei $f : (x^1,\ldots,x^n)^T \longmapsto (y^1,\ldots,y^p)^T$. Schließlich sei $x_0 \in U \cap N$ und $\det\left(\dfrac{\partial y^k}{\partial x^{i_l}}\right)_{1\le k,l\le p}(x_0) \neq 0$.

(a) Zeige, dass $\mathrm{d}_{x_0}(x^{j_1}|_N),\ldots,\mathrm{d}_{x_0}(x^{j_{n-p}}|_N)$ eine Basis in $T^*_{x_0}N$ ist, wenn $\{i_1,\ldots,$ $i_p, j_1,\ldots,j_{n-p}\} = \{1,\ldots,n\}$.

(b) Für welche x_0 ist $\mathrm{d}_{x_0}x^1,\ldots,\mathrm{d}_{x_0}x^{i-1},\mathrm{d}_{x_0}x^{i+1},\ldots,\mathrm{d}_{x_0}x^{n+1}$ eine Basis in $T^*_{x_0}\mathbb{S}^n$?

(28) Es seien $\tilde\Omega = \omega_j \mathrm{d}x^j \in \mathcal{T}_1(\mathbb{R}^{n+1})$, $\quad i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, und $\Omega = i^*(\tilde\Omega)$.

(a) Für welche $x_0 \in \mathbb{S}^n$ ist $\Omega(x_0) = 0$?

(b) Zeige, dass $\Omega = x^2\mathrm{d}x^1 - x^1\mathrm{d}x^2 + x^4\mathrm{d}x^3 - x^3\mathrm{d}x^4 \in \mathcal{T}_1(\mathbb{S}^3)$ nirgends verschwindet!

(c) Kann man auch in $\mathcal{T}_1(\mathbb{S}^2)$ ein nirgends verschwindendes Ω finden?

(29) Es sei $\Omega = x^1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + x^2\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + x^3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$.

(a) Drücke Ω in $U_{3,+} \cup U_{3,-}$ durch $\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2$ aus!

(b) Folgere, dass Ω auf $\mathbb{S}^2$ nirgends verschwindet!

(c) Was ist das Analogon auf $\mathbb{S}^n$? (Vgl. S. 50!)

(30) Rechne $\dfrac{\partial}{\partial x^2} \otimes \mathrm{d}x^1 \in \mathcal{T}^1_1(\mathbb{R}^2)$ in Polarkoordinaten um! Kontrolliere, dass die Verjüngung 0 ergibt!

(31) Berechne $f^*(\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^2)$ in Kugelkoordinaten auf $\mathbb{S}^2$, wenn $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto$ $(\mathrm{e}^{x^3}, x^1x^2)^T$.

(32) (ϑ,φ) sei die Karte der Kugelkoordinaten auf $\mathbb{S}^2$. Stelle damit (a) $\mathrm{d}x^i \in \mathcal{T}_1(\mathbb{S}^2)$, $i = 1,2,3$, (b) $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$, $\quad 1 \le i < j \le 3$, sowie (c) $g = \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i \in$ $\mathcal{T}_2(\mathbb{S}^2)$ dar!

(Z4) (a) Zeige, dass $\mathrm{d}a^1_1,\ldots,\mathrm{d}a^n_1,\mathrm{d}a^1_2,\ldots\ \ldots,\mathrm{d}a^1_n,\ldots,\mathrm{d}a^{n-1}_n$ eine Basis in $T^*_I\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ ist. (Verwende Üb. 27 !)

(b) Zeige, dass $\Omega(A) = \dfrac{1}{(A^{\mathrm{ad}})^n_n}\,\mathrm{d}a^1_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a^1_n \wedge \mathrm{d}a^1_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a^1_n \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a^{n-1}_n \in$ $\Omega^{n^2-1}_l\big(\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})\big)$ für $(A^{\mathrm{ad}})^n_n \neq 0$. Ist Ω auch rechtsinvariant?

5. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(33) ${}_{\mathbb{R}}V$ sei ein zweidimensionaler VR mit Basis e_1, e_2 und dualer Basis $e^1, e^2 \in V^*$. Weiters seien $e_1' = 5e_1 + 3e_2$, $e_2' = 2e_1 + e_2$.

(a) Was ist die duale Basis $e^{1\prime}, e^{2\prime} \in V^*$ zu e_1', e_2'? (Setze $e^{i\prime} = a^i_j e^j$, $e_k' = b_k^m e_m$!)

(b) Es sei $D_1 = e^1 \wedge e^2$, $D_2 = e^{1\prime} \wedge e^{2\prime}$. Gilt $[D_1] = [D_2] \in \mathcal{O}(V)$? Wie sieht man das anschaulich mit einer Skizze?

(34) (Fortsetzung) Es sei $w = [e_1', [D_1]] \in \hat{V}$.

(a) Was sind die Koordinaten w^1, w^2 bzw. $w^{1\prime}, w^{2\prime}$ von w bezüglich der geordneten Basen (i) e_1, e_2 bzw. (ii) e_1', e_2'?

(b) Bestimme $A = (a^i_j) \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ mit $e_j = a^i_j e_i'$ (und $v^{i\prime} = a^i_j v^j$ für $v \in V$).

(c) Überprüfe, dass $w^{i\prime} = \operatorname{sgn}(\det A) a^i_j w^j$.

(35) (Fortsetzung) (a) Wie ist $|D_1| \in L(V)_+$ definiert? Was ist $|D_1|(f) = \int_V f(x)|D_1|(x)$ für $f(e_i x^i) = \mathrm{e}^{-|x|^2}$? (Die Schreibung links entspricht den Radonmaßen, die rechts den Borelmaßen. Obwohl f keinen kompakten Träger hat, ist es integrabel.)

(b) Warum ist $|D_1| = |D_2|$?

(c) Es sei $o = [D_1] \in \mathcal{O}(V)$. Wie hängen $[D_1, o], [D_2, o] \in \widehat{\Lambda^2}(V^*)$ zusammen? Welche signierten Lebesguemaße in $L(V)$ entsprechen $[D_1, o]$ bzw. $[D_2, o]$? Warum kann man D_1, D_2 keine signierten Lebesguemaße zuordnen?

(36) Es sei $L = x^1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + x^2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + x^3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$, ϑ, φ seien Kugelkoordinaten. (a) Rechne L in Kugelkoordinaten um!

(b) Rechne $\hat{\Omega} := [L, [L]] = |L|$ in Kugelkoordinaten um! (c) Bestimme so $\int_{\mathbb{S}^2} \hat{\Omega}$!

(d) Berechne $\int_{\mathbb{S}^2} \hat{\Omega} = |L|(1)$ mit der Karte $\varphi_{3,+}$!

(37) Es sei
$$\psi : (0,\pi)^{n-1} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{S}^n : (\vartheta^1, \cdots, \vartheta^{n-1}, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} \sin\vartheta^1 \cdots \sin\vartheta^{n-1} \cos\varphi \\ \sin\vartheta^1 \cdots \sin\vartheta^{n-1} \sin\varphi \\ \sin\vartheta^1 \cdots \cos\vartheta^{n-1} \\ \vdots \\ \sin\vartheta^1 \cos\vartheta^2 \\ \cos\vartheta^1 \end{pmatrix}.$$
Dann ist ψ^{-1} eine Karte auf $\mathbb{S}^n$ (= <u>Kugelkoordinaten</u>).

(a) Drücke die Lerayform $L \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ durch diese Koordinaten aus.

(b) Berechne damit $\int_{\mathbb{S}^n} |L| = |L|(1) = \int_{(\mathbb{S}^n, [L])} L(x)$.

<u>Hinweis:</u> $x^1 \neq 0 \Longrightarrow L = \dfrac{1}{x^1} \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n+1}$, s. S. 61; $\displaystyle\int_0^\pi \sin^\alpha \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}$ für $\alpha > -1$.

(38) Berechne $\int_{(\mathbb{S}^2, [L])} \mathrm{e}^{x^3} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$!

(39) $(M, O_M), (N, O_N)$ seien orientierte $\mathcal{C}^1-$Mfkt.en, $f : M \longrightarrow N$ ein Diffeomorphismus, $f^* O_N = O_M$, $n = \dim M$, und $\Omega \in \Omega^n(N)$. Zeige, dass dann $\int_{(N, O_N)} \Omega = \int_{(M, O_M)} f^* \Omega$!

(40) $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ sei die stereographische Projektion wie in S. 9.

(a) Berechne $P^*(L) \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$. (b) Berechne damit $\int_{\mathbb{S}^n} |L| = \int_{\mathbb{R}^n} \left|P^*(L)\right|$.

<u>Hinweis:</u> $\displaystyle\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,\mathrm{d}r}{(1+r^2)^n} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

(Z5) Drücke $\lambda \in \hat{\Omega}^n(\mathbb{P}^n)$ von S. 67 in den Koordinaten
$$\left\{[z] \in \mathbb{P}^n : z^{n+1} \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^n : [z] \longmapsto \left(\frac{z^1}{z^{n+1}}, \cdots, \frac{z^n}{z^{n+1}}\right)^T = (x^1, \cdots, x^n)^T$$
aus und berechne so $\int_{\mathbb{P}^n} \lambda$.

6. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(41) Es seien $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$ und r, ϑ, φ Kugelkoordinaten.
(a) Warum ist $\psi(x) = (r-1, \vartheta, \varphi)^T = y$ eine Karte wie in $(*)$, S. 78?
(b) Was ist $v = \frac{\partial}{\partial y^1} \in T_x\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$? (c) Zeige, dass $\langle x^i \partial_i, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \rangle = L$.
(d) Was ist also $[\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3]|^a_{\mathbb{S}^2}$?

(42) Löse Übung 38 mit dem Satz von Stokes! Integriere dabei nach x^3 ganz außen!

(43) (a) Wie ergibt sich der Greensche Satz im $\mathbb{R}^2$ (i.e. $\oint_{\partial U} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle = \int_{\partial U} v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y = \iint_U \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$) aus dem Satz von Stokes?
(b) Wie ist der Übergang zum Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ ($\oint_{\partial U} \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle \mathrm{d}s = \iint_U \operatorname{div} \vec{u}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$)?

(44) Bestimme mit dem Satz von Stokes $\int_{(\partial U, [\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3]|^a_{\partial U})} (x^2)^2\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3$ für das Ellipsoid $U = \{x \in \mathbb{R}^3;\, a^{-2}(x^1 - s^1)^2 + b^{-2}(x^2 - s^2)^2 + c^{-2}(x^3 - s^3)^2 < 1\}$, $a, b, c \in (0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}^3$.

(45) Die Maxwellschen Gleichungen sind

$$(*)\ \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t},\ \operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t},\ \operatorname{div} D = \varrho,\ \operatorname{div} B = 0,$$

wobei E/H = elektrische/magnetische Feldstärke, D/B = elektrische/magnetische Induktion, ϱ = Ladung, j = Strom. Es sei $F := (E_1\,\mathrm{d}x^1 + E_2\,\mathrm{d}x^2 + E_3\,\mathrm{d}x^3) \wedge \mathrm{d}t + B_1\,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + B_2\,\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + B_3\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ und $G := -(H_1\,\mathrm{d}x^1 + H_2\,\mathrm{d}x^2 + H_3\,\mathrm{d}x^3) \wedge \mathrm{d}t + D_1\,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + D_2\,\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + D_3\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ sowie $\gamma := (j_1\,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + j_2\,\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + j_3\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2) \wedge \mathrm{d}t - \varrho\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$.
(a) Zeige: $(*) \iff \mathrm{d}F = 0, \mathrm{d}G = -\gamma$. (b) Folgere $\mathrm{d}\gamma = 0$. Was bedeutet das klassisch? (c) Folgere, dass in einem zu $\mathbb{R}^4$ diffeomorphen Gebiet U gilt $F = \mathrm{d}\varphi$, $\varphi \in \Omega^1(U)$ (elektromagnetisches Vektorpotential). Was bedeutet das klassisch?

(46) $M = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ sei das Möbiusband in Üb. 24 und $\varphi_1(x) = \binom{x_1^1}{x_1^2}$, $\psi_1(x) = \binom{x_2^1}{x_2^2}$ seien wie dort.
(a) Zeige, dass $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^2(M)$ durch $\hat{\Omega}(t, u) := \left[\mathrm{d}x_i^1 \wedge \mathrm{d}x_i^2, [\mathrm{d}x_i^1 \wedge \mathrm{d}x_i^2]\right]$, wohldefiniert ist (d.h. unabhängig von i). (b) Warum ist $\hat{\Omega}$ eine Basis von $\hat{\Omega}^2(M)$ (über $\mathcal{C}^\infty(M)$)?
(c) Setze $U := [0, 2\pi) \times (-1, 1) \subset M$ und wende den Satz von Stokes an.
<u>Hinweis:</u> $\hat{\Omega} = -\mathrm{d}\hat{\Omega}_1$, $\hat{\Omega}_1 := \left[x_i^2\,\mathrm{d}x_i^1, [\mathrm{d}x_i^1 \wedge \mathrm{d}x_i^2]\right]$.

(47) Der Satz von Stokes des $\mathbb{R}^3$. Es sei $\Omega = \omega_i\,\mathrm{d}x^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $(M, O) \subset \mathbb{R}^3$ 2–dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, $U \subset M$ wie im Satz von Stokes und beschränkt.
(a) Zeige, dass $\int_{(\partial U, O|^a_{\partial U})} i^*\Omega = \int_a^b \langle (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, \dot{x} \rangle\,\mathrm{d}t$, wenn $x : [a, b) \xrightarrow{\sim} \partial U$ eine Parametrisierung ist, sodass die Orientierung von $T_{x(t)}M$ durch die angeordnete Basis $n_1, \dot{x}(t)$ gegeben ist, $n_1 :=$ Außennormale zu ∂U in T_xM.
(b) Zeige, dass $\int_{(U, O|_U)} \mathrm{d}\Omega = \int_U \langle \operatorname{rot}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, n_2 \rangle\,\mathrm{d}\sigma$, wenn $|n_2| = 1$, $n_2 \perp T_xU$, $O(x) = [\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3]^{n_2}_M$ in der Notation von S. 78, $\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right| \cdot |\mathrm{d}\xi^1 \wedge \mathrm{d}\xi^2|$, vgl. S. 82. (c) Formuliere die Koppelung von $\dot{x}(t), n_1, n_2$ anschaulich.

(48) Es seien $U = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1\}$, $B = \overline{U}$, $B \subset M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $L \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ Lerayform. (a) Warum ist $\mathrm{d}(f^*L) = 0$ in $\Omega^{n+1}(U)$ falls $f : U \longrightarrow \mathbb{S}^n$ $\mathcal{C}^1$?
(b) Warum gibt es kein $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ $\mathcal{C}^1$ mit $f|_{\mathbb{S}^n} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$?
(c) Wie folgt daraus der Brouwersche Fixpunktsatz, nach dem $g : B \longrightarrow B$ stetig immer einen Fixpunkt hat?
<u>Hinweis:</u> Wenn g keinen Fixpunkt hat, lässt es sich durch $h : M \longrightarrow U$ $\mathcal{C}^1$ ohne Fixpunkt approximieren. Setze $f(x) = h(x) + t(x - h(x))$, $t > 0$.

(Z6) Beweise den Hilfssatz in S. 73! Hinweis: Es genügt $\Omega = f^0\,\mathrm{d}f^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^q$ zu betrachten. Verwende $\langle \mathrm{d}\Omega, X_0 \otimes \cdots \otimes X_q \rangle = \det\left(X_k(f^l)\right)_{k,l=0,\cdots,q}$.

7. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(49) Für eine $\mathcal{C}^k$ – Mfkt. M, $k \geq 1$, seien $\Omega^q_{\mathbb{C}}(M) = \{\Omega_1 + \mathrm{i}\,\Omega_2 : \Omega_j \in \Omega^q(M)\}$, $\mathcal{C}^k_{\mathbb{C}}(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2\ \mathcal{C}^k\}$, $\mathrm{d}(\Omega_1 + \mathrm{i}\,\Omega_2) = \mathrm{d}\Omega_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{d}\Omega_2$. Speziell sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(M)$. Zeige: (a) f holomorph $\iff$ $f(z)\,\mathrm{d}z \in \Omega^1_{\mathbb{C}}(M)$ geschlossen; (b) $U \subset M$ wie in $(*)$ S. 78, $\overline{U} \subset M$ kompakt, f holomorph $\Rightarrow \int_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (Cauchy); (c) $\forall$ Kreise U mit $\overline{U} \subset M$: $\int_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow f$ holomorph (Morera).

(50) Es sei $i : M = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x^3 = x^1 x^2\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und g die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$.
(a) Bestimme $i^* g$ in der Karte $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto \binom{x^1}{x^2}$!
(b) Bestimme $\hat{\Omega}_{i^* g}$ in dieser Karte! (c) Rechne $\hat{\Omega}_{i^* g}$ in Polarkoordinaten um!

(51) (Fortsetzung) (a) Berechne $\int_U \hat{\Omega}_{i^* g}$ für $U = \{x \in M;\ (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$. Was ist das anschaulich?
(b) Berechne $\int_{(U,[\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2])} i^* L$, wenn L die Lerayform auf $\mathbb{R}^3$ ist.
(c) Kontrolliere (b) mit dem Satz von Stokes!

(52) $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ sei die stereographische Projektion (S. 9). Bestimme die Metrik auf $\mathbb{R}^n$, die von der Standardmetrik auf $\mathbb{S}^n$ (vgl. S. 87) induziert wird.
Hinweis: Betrachte $\mathbb{R}^n \xrightarrow{P} \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ statt P. Nütze die Rotationssymmetrie aus!

(53) Die Poincarésche Metrik auf der Kreisscheibe $D = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\big\}$ ist durch $g(z) = \big(1 - |z|^2\big)^{-2}[\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y] \in T^*_z D^{\otimes 2}$ gegeben.
(a) Berechne die Kurvenlänge R_r von $(0, r) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ für $0 < r < 1$.
(b) Berechne die Oberfläche F_r von $\big\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\big\}$ für $0 < r < 1$.
(c) Berechne die Kurvenlänge U_r von $\big\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\big\}$ für $0 < r < 1$.
(d) Was passiert für $r \nearrow 1$?
(e) Berechne $\lim\limits_{r\searrow 0} \dfrac{F_r}{R_r^2}$, $\lim\limits_{r\searrow 0} \dfrac{U_r}{R_r}$, $\lim\limits_{r\searrow 0} \dfrac{F_r - \pi R_r^2}{R_r^4}$, $\lim\limits_{r\searrow 0} \dfrac{U_r - 2\pi R_r}{R_r^3}$.

(54) g sei die Standardmetrik im $\mathbb{R}^2$. (a) Drücke g in Polarkoordinaten aus!
(b) Was ist $g^{-1} \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^2)$ in Polarkoordinaten?
(c) Bestimme $\operatorname{grad} f \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^2)$ für $f = f(r, \varphi)$!

(55) (Fortsetzung) (a) Bestimme $\operatorname{div} X$ für $X = X^r \partial_r + X^\varphi \partial_\varphi$ mit der allgemeinen Formel $\operatorname{div}(v^l \partial_l) = \dfrac{1}{\sqrt{|\det g|}} \cdot \dfrac{\partial\big(\sqrt{|\det g|}\, v^k\big)}{\partial x^k}$.
(b) Berechne damit $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$ in Polarkoordinaten.
(c) Was ist $\operatorname{rot} X = \tilde{g}^{-1} * \mathrm{d}\,\tilde{g} X$ in Zylinderkoordinaten für $X \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^3)$?

(56) Berechne g, $\hat{\Omega}_g$, grad, J, div, Δ, und rot in Kugelkoordinaten am $\mathbb{R}^3$.

(Z7) Auf $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ist eine linksinvariante Riemannnsche Metrik durch $g(A_0) = \sum_{i,j} b^i_k b^i_l\, \mathrm{d}a^k_j \otimes \mathrm{d}a^l_j$, $A_0^{-1} = (b^i_j)$, gegeben (vgl. S. 88). Zeige, dass $\Delta f(A) = (2-n) a^i_j \dfrac{\partial f}{\partial a^i_j} + \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a^k_j a^l_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial a^k_i \partial a^l_i}$ und berechne $\Delta \det$ und $\Delta\,\mathrm{tr}$.

8. Übungsblatt zu Differentialgeometrie, WS 2008/09

(57) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$. $g = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$ sei die Standardmetrik auf $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $z = x + \mathrm{i}y$, $\mathrm{d}z \in \Omega^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, vgl. Üb. 49. Zeige:

(a) $g = \mathrm{Re}\,(\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\overline{z})$. (b) $f^*(g) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}\overline{f}) \in \mathcal{T}_2(U)$.

(c) $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}$, wobei $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\big(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\big)$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\big(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\big)$.

(d) f holomorph $\Longrightarrow f^*(g) = |f'|^2 \cdot g$.

(58) (Fortsetzung) (D, g) sei die Poincarésche Metrik wie in Üb. 53.

(a) Zeige, dass die Möbiustransformationen $f_{\varrho,z_0} : D \longrightarrow D : z \longmapsto \varrho\,\dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$ für $z_0 \in D$, $\varrho \in \mathbb{C}$, $|\varrho| = 1$, Isometrien sind.

(b) Was sind die "Kreise" in D, d.h. was ist $N = \{z_1 \in D : \mathrm{d}(z_0, z_1) = R\}$ für $z_0 \in D$, $R > 0$? Was ist $|N|$?

(59) Berechne die Christoffelsymbole $\Gamma^r_{rr}, \ldots, \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}$ bzgl. der Polarkoord. r, φ in $\mathbb{R}^2$.

(60) Für welche Funktionen $x(t) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ ist $\int_a^b \mathrm{e}^{\alpha x(t) + \beta \dot{x}(t)}\,\mathrm{d}t$ stationär? $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(61) Es sei $M = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\big\}$ mit der Metrik $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$, $g_{ij} = \delta_{ij} + \dfrac{x^i x^j}{1 - |x|^2}$. (a) Bestimme $\mathrm{d}(x_1, x_2)$ für $x_i \in M$ und die Geodäten.

(b) Berechne $\exp_0(v)$ für $v \in T_0M \simeq \mathbb{R}^n$, $|v| < \frac{\pi}{2}$.
Hinweis: Zeige, dass $M \longrightarrow \{x \in \mathbb{S}^n : x^{n+1} > 0\} : x \longmapsto \big(\frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}}\big)$ eine Isometrie ist, wenn $\mathbb{S}^n$ mit der Standardmetrik versehen wird.

(62) (D, g) sei die Poincarésche Metrik wie in Üb. 53.

(a) Was ist $x_v(t)$ für $v \in T_0D \simeq \mathbb{C}$? (b) Bestimme $\exp_0 : \mathbb{C} \simeq T_0D \longrightarrow D$.

(c) Was sind die geodätischen Normalkoordinaten $v = \exp_0^{-1}(z)$?

(d) Stelle g in geodätischen Polarkoordinaten r, φ dar, d.h. $v = v^1 + \mathrm{i}v^2 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

(63) Es sei $M = G = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $X(x) = Ax + v \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Was ist die Integralkurve $x(t)$ zu X mit $x(0) = x_0$?

(b) Was ist der (globale) Fluss F zu X?

(c) In welchem Fall ist $X \in \mathcal{T}^1_l(G) = \mathcal{T}^1_r(G)$? Was ist also $\mathrm{Exp} : T_I(G) = T_0\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \longrightarrow G = \mathbb{R}^n : v \longmapsto F_v(1, 0)$?

(64) (a) Berechne die Christoffelsymbole in Kugelkoordinaten am $\mathbb{R}^3$ mittels der Transformationsformel $(*)$ in S. 117.

(b) Überprüfe, dass sich dasselbe (und schneller) ergibt, wenn man die Differentialgleichung der Geodäten als Eulersche Differentialgleichung der Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}) = g(x)(\dot{x}, \dot{x}) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2$ aufstellt.

(Z8) g sei die linksinvariante Riemannnsche Metrik auf $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ wie in (Z7). Zeige, dass die Differentialgleichung der Geodäten durch

$$\ddot{A} = \dot{A}A^{-1}\dot{A} + A\dot{A}^T A^{-1T} A^{-1}\dot{A} - \dot{A}\dot{A}^T A^{-1T}$$

gegeben ist.