Übungsaufgaben zu Höherer Analysis, WS 2002/03

Aufgaben zu Doppelintegralen.

(A1) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Gebietes $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \cos x$.
(Antwort: $\vec{s} = (\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8})$)

(A2) Berechnen Sie die folgenden Integrale und skizzieren Sie das Gebiet D, über das integriert wird:

(a) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=0}^{y} \frac{y}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (b) $\int\limits_{x=0}^{\pi} \int\limits_{y=-x}^{\pi-x} \sin^2 x \cos^2 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} y\,\mathrm{e}^{xy} \cos xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (Antwort: $1, \frac{\pi^2}{4}, \frac{1}{2}(\mathrm{e}\sin 1 - 1)$)

(A3) Das Volumen V des Körpers, der über dem Viertelkreis $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x, y \ge 0$ liegt und von der Sattelfläche $z = xy$ begrenzt wird, ist durch $V = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gegeben. Berechnen Sie V (a) in $xy-$Koordinaten, (b) in Polarkoordinaten. (Antwort: $V = \frac{1}{8}$)

Aufgaben zum Koordinatenwechsel in Doppelintegralen.

(B1) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Kardioide, die in Polarkoordinaten durch $r \le 1 + \cos\varphi$ gegeben ist. (Antwort: $\vec{s} = (\frac{5}{6}, 0)$)

(B2) Skizzieren Sie das Flächenstück, das in Polarkoordinaten durch die Kurven $r = 1$, $r = 2$, $r = \varphi$, $r = \mathrm{e}^{\varphi}$ begrenzt wird und ermitteln Sie seine Größe. (Antwort: $\frac{37}{12} - 2\ln 2 \approx 1.7$)

(B3) D sei das Dreieck mit den Eckpunkten $(0/0)$, $(0/1)$, $(1/0)$. Berechnen Sie $\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, indem Sie $u = x - y$, $v = x + y$ substituieren. (Antwort: $\frac{1}{2}\sin 1 \approx 0.42$)

(B4) Berechnen Sie die Fläche der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ mit der Koordinatentransformation $x = as\cos t$, $y = bs\sin t$. (Antwort: $ab\pi$)

(B5) Berechnen Sie die von der Astroide $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ (vgl. Skriptum Math. B, Üb. 25) eingeschlossene Fläche mit der Koordinatentransformation $x = \rho\cos^3\psi$, $y = \rho\sin^3\psi$. (Antwort: $3\pi/8$)

Aufgaben zur Guldinschen Regel.

(C1) Berechnen Sie mit der Guldinschen Regel den Schwerpunkt des Viertelkreises $x^2 + y^2 \le R$, $x, y \ge 0$! (Antwort: $\vec{s} = (\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$)

(C2) Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0/0/0)$, $(1/0/0)$, $(1/0/1)$ um die $z-$Achse entsteht

(a) als Doppelintegral, (b) mit der Guldinschen Regel, (c) als Differenz von Zylinder- und Kegelvolumen. (Antwort: $\frac{2\pi}{3}$)

(C3) Berechnen Sie (a) den Schwerpunkt des Kreissegmentes $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq a$, $y \geq 0$ $(0 < a < 1$ fest) und damit (b) das Volumen der Kugelkappe, welche durch Rotation um die $x-$Achse entsteht. (Antwort: $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2} - \frac{1}{2}\arcsin a$, $\vec{s} = \frac{1}{A}(\frac{1}{3}(1-a^2)^{3/2}, \frac{1}{6}(2-3a+a^3))$, $V = \frac{\pi}{3}(2-3a+a^3)$)

(C4) Wenn der Halbkreis $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 2$ um die $y-$Achse rotiert, so entsteht ein "halber Torus". (Skizze!) Bestimmen Sie mit der Guldinschen Regel sein Volumen! (Antwort: $V \approx 23.93$)

Aufgaben zu Dreifachintegralen.

(D1) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_1 bezüglich der $x-$Achse für den durch die 3 Koordinatenebenen und $x + y + z = 1$ begrenzten Tetraeder, wenn die Dichte $\rho = 1$ ist. (Antwort: $\frac{1}{30}$)

(D2) Berechnen Sie die Masse des Pyramidenstumpfes (Skizze!), der von den Ebenen $y = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $x = y$, $z = x$ begrenzt wird und mit der Dichte $\rho(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}$ belegt ist! (Antwort: $\frac{1}{2}\ln 2$)

(D3) Berechnen Sie die Masse des Körpers im ersten Oktanten, der durch die Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $x+y = 2$, $2y+x = 6$ aus dem Zylinder $y^2+z^2 \leq 4$ ausgeschnitten wird (Skizze!) und mit der Dichte $\rho(x,y,z) = z$ belegt ist. (Antwort: $\frac{26}{3}$)

Dreifachintegrale in Kugel- und Zylinderkoordinaten.

(E1) Berechnen Sie den Schwerpunkt des homogen mit Masse belegten Körpers, der als Schnitt der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ mit dem Kegel $x_1^2 + x_2^2 \leq a^2x_3^2$, $x_3 \geq 0$, entsteht. (Antwort: $\vec{s} = (0, 0, \frac{3Ra^2}{8(1+a^2-\sqrt{1+a^2})})$)

(E2) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment I_1 für die Halbkugel $D: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$, $x_3 \geq 0$, welche mit der Dichte $\rho(\vec{x}) = x_3$ belegt ist. (Antwort: $\frac{\pi}{8}R^6$)

(E3) Eine Halbkugelschale mit Innenradius R ist bis zur halben Höhe mit Wasser gefüllt. Welche Wassermenge enthält sie?

Hinweis: Verwenden Sie Zylinder- oder Kugelkoordinaten! (Antwort: $\frac{5\pi}{24}R^3$)

(E4) Berechnen Sie das Volumen, das innerhalb des Zylinders $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ und der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ liegt! Skizze! Verwenden Sie Zylinderkoordinaten! (Antwort: $V \approx 9.644a^3$)

Aufgaben zum Koordinatenwechsel in Dreifachintegralen.

(F1) Berechnen Sie das Volumen des Körpers im 1. Oktanten, der von den hyperbolischen Zylindern $xy = 1$, $xy = 9$, $xz = 4$, $xz = 36$, $yz = 25$, $yz = 49$ begrenzt wird. Setzen Sie $u = xy$, $v = xz$, $w = yz$. (Antwort: $V = 64$)

(F2) Es sei $0 < r < R$. Durch Drehung des in der $yz-$ Ebene liegenden Kreises $(y - R)^2 + z^2 \leq r^2$ um die $z-$ Achse entsteht ein Torus. (Skizze!) Der Kreis wird parametrisiert durch $y = R + \varrho \sin\alpha$, $z = \varrho\cos\alpha$, $0 \leq \varrho \leq r$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (Skizze!) und daher der Torus durch die "Toruskoordinaten" $x = (R+\varrho\sin\alpha)\cos\varphi$, $y = (R + \varrho\sin\alpha)\sin\varphi$, $z = \varrho\cos\alpha$.

(a) Bestimmen Sie das Volumselement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ bzgl. ϱ, α, φ.

(b) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Torushälfte $0 \leq \varphi \leq \pi$, d.h. $y \geq 0$. (Antwort: $\mathrm{d}V = \varrho(R + \varrho\sin\alpha)\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi$, $\vec{s} = (0, \frac{2R}{\pi} + \frac{r^2}{2R\pi}, 0)$)

(F3) Berechnen Sie das Volumen, das von der Fläche $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} + |z|^{2/3} = c$ (mit $c > 0$ fest) eingeschlossen wird, mittels der Substitution $x = \varrho\sin^3\vartheta\cos^3\varphi$, $y = \varrho\sin^3\vartheta\sin^3\varphi$, $z = \varrho\cos^3\vartheta$. (Antwort: $\frac{4}{35}\pi c^{9/2}$)

Aufgaben zu Kurvenintegralen 1. Art.

(G1) Berechnen Sie den Schwerpunkt des folgenden Teils einer Schraubenlinie: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq c$ $(a, b, c > 0$ fest).

(Antwort: $\vec{s} = (\frac{a}{c}\sin c, \frac{a}{c}(1 - \cos c), \frac{1}{2}bc)$)

(G2) Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_x, I_y des Halbkreises $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$, bezüglich der $x-$ und der $y-$ Achse. (Antwort: $I_x = \frac{\pi}{2}r^3 = I_y$)

(G3) Der halbkreisförmige Träger $C:$ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 < r$ fest, wird durch die vertikale Linienlast $q(\varphi) = q_0\varphi$ beansprucht. Bestimmen Sie die Resultierende R und ihre Wirkungslinie, d.h. $R = \int_C q\,\mathrm{d}s$, $x_W = R^{-1}\int_C q\cdot x\,\mathrm{d}s$, $y_W = R^{-1}\int_C q\cdot y\,\mathrm{d}s$. (Antwort: $R = \frac{\pi^2}{2}q_0 r$, $x_W = -\frac{4}{\pi^2}r$, $y_W = \frac{2}{\pi}r$)

(G4) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Zykloidenbogens $\vec{x}(t) = a\binom{t-\sin t}{1-\cos t}$, $0 < a$ fest, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Antwort: $\vec{s} = (a\pi, \frac{4}{3}a)$)

Kurvenintegrale 2. Art und Potential.

(H1) Durch $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -2z \end{pmatrix}$ ist ein Vektorfeld gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ wirbelfrei ist und bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v}$.

(b) Berechnen Sie $W = \int\limits_{(1/0/-1)}^{(2/2/0)} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$ entlang der Verbindungsgeraden der 2 Punkte und kontrollieren Sie das Ergebnis mittels (a).
(Antwort: $f(\vec{x}) = xy - z^2, \quad W = 5$)

(H2) Berechnen Sie $\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$
(a) entlang der Schraubenlinie $\vec{x}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$ und
(b) entlang der Verbindungsgeraden der 2 Punkte $A = (1/0/0)$ und $B = (-1/0/\pi)$.
(c) Warum ergibt sich etwas Verschiedenes, obwohl die 2 Kurven beide von A nach B gehen?
(Antwort: $-2 - \frac{\pi}{2}, 0, \mathrm{rot}\,\vec{v} \neq \vec{0}$)

(H3) Berechnen Sie die Arbeit, die geleistet wird, wenn ein Körper unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{v} = (-x^2y, y^2z, xz^2)^T$ um die Ellipse $x^2 + y^2 = 1, \quad z = y$ transportiert wird. (Antwort: $\pm\frac{\pi}{2}$ je nach Umlaufrichtung)

(H4) Zeigen Sie, dass $\vec{v}(\vec{x}) = (4xyz + 3x^2y^2z^2, 2x^2z + 2x^3yz^2, 2x^2y + 2x^3y^2z)^T$ wirbelfrei ist und bestimmen Sie ein Potential f durch $f(\vec{x}) = \int_{(0/0/0)}^{\vec{x}} \langle \vec{v}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$.
(Antwort: $f(\vec{x}) = 2x^2yz + x^3y^2z^2$)

Aufgaben zu Oberflächenintegralen 1. Art.

(I1) Berechnen Sie die Oberfläche des über bzw. unter dem Einheitskreis liegenden Teiles der Sattelfläche $z = xy$. (Antwort: $F = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1.22\pi$)

(I2) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$.
(Antwort: $\vec{s} = (0, 0, \frac{R}{2})$)

(I3) Bestimmen Sie die Oberfläche und den Schwerpunkt der Paraboloidfläche
$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1$. (Antwort: $F \approx 5.33, \quad s_3 \approx 0.559$)

(I4) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment der Paraboloidfläche $z = 2 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$ bezüglich der $z-$Achse. (Antwort: $I_z = \frac{149}{30}\pi$)

(I5) Bestimmen Sie die Größe des Teiles der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, der innerhalb des Zylinders $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ liegt (vgl. auch Aufgabe E4).
(Antwort: $8a^2(\pi - 2)$)

(I6) (a) Zeigen Sie, dass für das Flächenelement einer Fläche in Zylinderkoordinaten, d.h.
$\vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix}$ gilt $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$.
(b) Berechnen Sie damit den Flächeninhalt der Schraubenfläche $z = \varphi, \quad 0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq b, \quad (0 < a, b$ fest). (Antwort: $F = \frac{b}{2}(a\sqrt{1 + a^2} + \mathrm{arsh}\,a)$)

Oberflächenintegrale 2. Art.

(J1) Berechnen Sie $\iint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$ für $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{u}$, $\vec{u} = (2z - 2y, 2x - z, y - 2z)^T$. D sei dabei die Ellipsoidhälfte $x = \sin\vartheta\cos\varphi, y = \sin\vartheta\sin\varphi, z = 2\cos\vartheta$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Die Normale weise nach oben, d.h. $n_3 \ge 0$. (Antwort: 4π)

(J2) Berechnen Sie $\iint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$ für $\vec{v}(\vec{x}) = (x, 2y, 2 - 3z)^T$. Dabei sei D die Paraboloidfläche $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$. Die Normale $\vec{n}$ weise nach oben, d.h. $n_3 \ge 0$. (Antwort: 2π)

(J3) Das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung sei $\vec{v}(t, \vec{x}) = (tx, t + y, tz)^T$. Es sei $\varrho = 1$. Bestimmen Sie den Fluß zur Zeit t durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(1/0/0)$, $(0/1/0)$, $(0/0/1)$. Die Normale weise in Richtung $(1, 1, 1)^T$. (Antwort: $\frac{1}{6}(5t + 1)$)

(J4) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ den Fluss durch den Zylindermantel $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$. (Antwort: 2π)

(J5) D sei die Hyperboloidfläche $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \le z \le 1$. (Skizze!) Berechnen Sie $\iint_D \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$, wenn $\vec{n}$ so gewählt ist, dass $\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle > 0$. (Antwort: 2π)

Aufgaben zum Satz von Gauß.

(K1) Lösen Sie Aufgabe J1 mit dem Satz von Gauß. (Schließen Sie dazu die Fläche D durch den Kreis $D_1 : x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$ ab!)

(K2) Lösen Sie Aufgabe J2 mit dem Satz von Gauß. (Hinweis wie in Aufgabe K1.)

(K3) Lösen Sie Aufgabe J3 mit dem Satz von Gauß. (Ergänzen Sie die Fläche zu einem Tetraeder!)

(K4) Lösen Sie Aufgabe J5 mit dem Satz von Gauß. (Schließen Sie die Fläche D durch 2 Kreise ab!)

(K5) Berechnen Sie $\oiint_D \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$, wobei $\vec{v} = (x^2 - xy, 2yz - 3y, z - x^2)^T$ und D die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt $(1/2/3)$ und Radius 2 ist mit dem Satz von Gauß. (Verwenden Sie die Tatsache, dass der Mittelpunkt einer Kugel auch ihr Schwerpunkt ist!) (Antwort: $\frac{128\pi}{3}$)

(K6) Berechnen Sie $\oiint x^3 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ über die Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ direkt und überprüfen Sie das Ergebnis mit dem Satz von Gauß. (Antwort: $\frac{12}{5} R^5 \pi$)

(K7) Das "archimedische Prinzip" besagt, dass der Auftrieb eines in einer Flüssigkeit befindlichen Körpers gleich dem Gewicht der verdrängten Wassermenge ist. Beweisen Sie das mit dem Satz von Gauß.
Hinweis: Der Wasserdruck ist $p = \gamma(h - z)$, $h =$ Höhe des Flüssigkeitsstandes, $\gamma =$ spezifisches Gewicht der Flüssigkeit, und wirkt normal zur Oberfläche des Körpers, d.h.

$$\text{Auftrieb} = -\oiint p n_3 \,\mathrm{d}\sigma = -\oiint \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}\sigma.$$

Aufgaben zum Satz von Green.

(L1) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Greenschen Satzes am Integral $\oint_C (2xy - x^2)\,\mathrm{d}x + (x + y^2)\,\mathrm{d}y$, wobei C der durch $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, und $x = y^2$, $0 \le y \le 1$, im positivem Drehsinn durchlaufene Weg ist. (Antwort: $\frac{1}{30}$)

(L2) Berechnen Sie mit dem Satz von Green $\oint_C y^3 \cos x\,\mathrm{d}x + 3y^2(\sin x - x)\,\mathrm{d}y$ über die geschlossene Kurve C, welche die Punkte $(0/0)$ und $(1/0)$ durch $y = x\sqrt{1 - x^2}$ und die $x-$ Achse verbindet. C werde im "positiven" Sinn (d.h. so wie $\vec{e}_1, \vec{e}_2 =$ üblicherweise Gegenuhrzeigersinn) orientiert. (Antwort: $-\frac{2}{35}$)

Aufgaben zum Satz von Stokes.

(M1) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Stokes für $\vec{v} = (3y, -xz, yz^2)^T$ und die Fläche $D : 2z = x^2 + y^2$, $z \le 2$. (Antwort: -20π, wenn $n_3 > 0$)

(M2) Bestimmen Sie die Differenz der zwei Kurvenintegrale in Aufgabe H2 mit dem Satz von Stokes unter Verwendung der Fläche $\vec{x}(\varphi, t) = ((1-t)(1-\frac{2\varphi}{\pi}) + t\cos\varphi, t\sin\varphi, \varphi)^T$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le t \le 1$.

(M3) Lösen Sie Aufgabe H3 mit dem Satz von Stokes.

(M4) Lösen Sie Aufgabe J1 mit dem Satz von Stokes.

(M5) Lösen Sie Aufgabe J2 mit dem Satz von Stokes.

(M6) C sei der Rand des Flächenstückes $x^2 + y^2 = 1$, $z^2 \le 2y$, $x, y, z \ge 0$ (Skizze!), und $\vec{v} = (x^2, xy, xz)^T$. C werde von $(1/0/0)$ über $(0/1/0)$ nach $(0/1/\sqrt{2})$ und zurück nach $(1/0/0)$ durchlaufen. Bestimmen Sie $\oint_C \langle \vec{u}, \mathrm{d}\vec{x} \rangle$ mit dem Satz von Stokes. (Antwort: $-\frac{\pi}{4}$)