1. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe (bzw. in 13b) eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (7) und (10) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Schreiben Sie die Regeln an, die für $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ bzw. für $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ gelten!

(b) Überprüfen Sie sie an $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = -2+\mathrm{i}$. ($\frac{\pi}{4} \approx 0.78$, $\arctan(-\frac{1}{2}) \approx -0.46$, $\pi \approx 3.14$, $\arctan 3 \approx 1.24$)

(2) (a) Wie lässt sich $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ als Realteil einer e–Potenz schreiben?

(b) Berechnen Sie so $\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

(3) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t)$, $t \in [a,b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Zykloide $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(Hinweis: $\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$)

(4) (a) Wie berechnet man die Bogenlänge einer in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegebenen Kurve?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der logarithmischen Spirale $r = \mathrm{e}^{4\varphi/3}$, $\varphi \in]-\infty, 0]$.

(5) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x,y)$ in $\vec{x}_0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$?

(6) (a) In welche Richtung weist der Vektor $\nabla F(\vec{x}_0)$ und was ist seine Länge?

(b) Im Punkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gelte $F(\vec{x}_0) = 4$ und $\nabla F(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen

Sie die Tangentialebene an die Niveaufläche $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\vec{x}) = 4\}$ in $\vec{x}_0$ sowie $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$, wenn $\vec{r}$ den Winkel $60°$ mit $\nabla F(\vec{x}_0)$ einschließt.

(7) (a) Wie drückt man f_{xx} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y)$, $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x + y$, $t = x - y$?

(8) (a) Wann heißt die symmetrische $n \times n-$ Matrix A positiv definit und wie lässt sich das im Fall $n = 2$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, charakterisieren?

(b) Hat $f(x,y) = (x-y) \cdot (x^2 + y^2 - 1)$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ein lokales Maximum oder Minimum?

(9) (a) Wann heißt f Potential zu $\vec{v}$ und was gilt dann für $\operatorname{rot} \vec{v}$?

(b) Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} z^2/2 \\ -xy \\ xz \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{v}$. Hat $\vec{v}$ ein Potential?

(10) (a) Wie ist die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ definiert?

(b) Rechnen Sie nach, dass $\dfrac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{r}$, wenn r, φ Polarkoordinaten sind.

(11) (a) Schreiben Sie das Vergleichskriterium an!

(b) Untersuchen Sie damit die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n} + 2}{15n^{3/2} + 12n}$.

(12) (a) Schreiben Sie das Quotientenkriterium an!

(b) Berechnen Sie damit den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$.

(13) (a) Schreiben Sie die Lagrange'sche Restgliedformel für $\varrho_n(x - x_0)$ an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $x_0 = 0$? Was ist hier $\lim\limits_{n \to \infty} \varrho_n(x)$? (Die Antwort auf die letzte Frage müssen Sie nicht begründen. Ein Beweis ergäbe einen Zusatzpunkt.)

(14) (a) Was ist die MacLaurinreihe von $(1+t)^{-1/2}$?

(b) Bestimmen Sie daraus die MacLaurinreihe von $\arcsin$ durch Integration!

(15) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ mit ϱ_2?

1999 - 10 - 29

2. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (2) und (7) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie lässt sich $\sin\varphi$ durch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ ausdrücken?

(b) Stellen Sie so $\sin^4\varphi$ durch $1, \cos 2\varphi, \cos 4\varphi$ dar und berechnen Sie $\int_0^\pi \sin^4 x\,\mathrm{d}x$!

(2) (a) Was besagt der Hauptsatz der Algebra von Gauß?

(b) Lösen Sie $z^2 - 4(1-\mathrm{i})z + 1 - 8\mathrm{i} = 0$.

(3) (a) Wann heisst eine Kurve $\vec{x}(s)$, $\alpha \le s \le \beta$, nach der Bogenlänge parametrisiert?

(b) Parametrisieren Sie die Helix $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$, $t \in [0,\infty[$, nach der Bogenlän-
ge!

(4) (a) Was erfüllt der Winkel β zwischen $\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ für eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = r(\varphi)$?

(b) Wie groß ist β bei der logarithmischen Spirale $r(\varphi) = 5\mathrm{e}^{\varphi}$?

(5) (a) Was gibt die Kettenregel für $\frac{\partial z}{\partial v}$, wenn $z(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ gegeben sind?

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial z}{\partial v}$ für $z(x,y) = x^3 + 3x^2y$, $x(u,v) = u^2v$, $y(u,v) = u + v^2$ nach (a) und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Einsetzen!

(6) (a) Durch welche Formel ist die Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an die Niveaufläche $F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) = c$ gegeben?

(b) Was ergibt sich für $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\vec{x}) = \ln(xy+z)$?

(7) (a) Wie drückt man f_{yy} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y)$, $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x + y^2$, $t = x - y^2$?

(8) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$, $g(x,y) = x^2+y^2-4$?

(9) (a) Was sind $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ bzw. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}$?

(b) Bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ z\mathrm{e}^{z^2} \end{pmatrix}$!

(10) (a) Was ist die anschauliche Bedeutung der Funktionaldeterminante?

(b) Vergrößern oder verkleinern die Koordinaten $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^4 \\ \arctan(x-y) \end{pmatrix}$ bei $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Fläche? Um welchen Faktor?

(11) (a) Wie und unter welchen Voraussetzungen lässt sich $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ mit dem Integralkriterium nach unten bzw. oben abschätzen?

(b) Bestimmen Sie damit A, B, sodass $A \le \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n}{(n^2+1)^2} \le B$.

(12) (a) Was besagt das Leibnizkriterium?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ auf $\dfrac{1}{500}$ genau! ($\frac{1}{18} = 0.0\dot{5}$)

(13) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \ln x$ und $x_0 = 2$?

(14) (a) Geben Sie die 4 Darstellungen von $\binom{n}{k}$ aus der Vorlesung an! (Kombinatorik, 2 Formeln, Pascal'sches $\triangle$)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen?

(15) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ mit ϱ_2?

2000 - 02 - 01

3. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 1999

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (4), (9), und (10) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ als Grenzwert definiert und was ergibt die Euler'sche Formel?

(b) Folgern Sie aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ den Summensatz für den Cosinus!

(2) (a) Wie lassen sich die Lösungen $z_0, \ldots, z_{n-1}$ von $z^n = w = \varrho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ in der Form $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ darstellen?

(b) Lösen Sie $z^4 = -16$.

(3) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch $\dot{x}, \dot{y}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Überprüfen Sie (a) für die Ellipse $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$.

(4) (a) Wie ist eine Klothoide charakterisiert?

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Klothoide aus $\kappa = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = as$, $\|\dot{\vec{x}}\| = 1$, $\vec{x}(0) = \vec{0}$, $\psi(0) = 0$.

(5) (a) Wann nennt man $f(x,y)$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar?

(b) Was ist $\varrho(\vec{x} - \vec{x}_0)$ für $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(6) (a) Was gibt die Kettenregel für $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}f\circ\vec{x}}{\mathrm{d}t}$, wenn $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ gegeben sind?

(b) Berechnen Sie mit (a) $\dot{z}$ für $z = f(x,y) = 3xy - 5x^2$, $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Einsetzen!

(7) (a) Was sagt der Satz von Schwarz? (b) Kontrollieren Sie ihn für $f(x,y) = x^y$.

(8) (a) Wann heißt die symmetrische $n \times n-$ Matrix A positiv definit und wie lässt sich das im Fall $n = 2$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, charakterisieren?

(b) Hat $f(x,y) = (x-y) \cdot (x^2 + y^2 - 1)$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ein lokales Maximum oder Minimum?

(9) (a) Wann nennt man $\vec{v}(\vec{x})$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar und wie lässt sich das mit der Jacobi-Matrix $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und einem Vektorfeld $\vec{\varrho}(\vec{h})$ vom Typ $o(\|\vec{h}\|)$ charakterisieren?

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{J}\vec{v}(\vec{x}_0)$ und $\vec{\varrho}(\vec{x} - \vec{x}_0)$ zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(10) (a) Wann heißen die Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$ orthogonal?

(b) Wie sind die Kugelkoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ definiert? Skizze!

(11) (a) Was gilt für $\lim a_n$, wenn $\sum a_n$ konvergiert? Ist das ein notwendiges oder hinreichendes Kriterium?

(b) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe divergiert!

(12) (a) Was besagt das Leibnizkriterium?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ auf $\frac{1}{500}$ genau! ($\frac{1}{18} = 0.0\dot{5}$; zur MacLaurinreihe des Sinus vgl. Frage 14 b)

(13) (a) Wie ist das Konvergenzintervall einer Potenzreihe $\sum c_n x^n$ definiert?

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$.

(14) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$?

(15) (a) Schreiben Sie die binomische Reihe für $(1+x)^\nu$ an!

(b) Bestimmen Sie $\binom{-1/2}{k}$ und daraus die MacLaurinreihe von $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

2002 - 07 - 10

1. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 2002

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (2), (8), (9) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welcher Satz gilt für inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung? Was bedeutet der Begriff “partikuläre Lösung”?

(b) Überprüfen Sie, dass $2x^{3/2}$ eine partikuläre Lösung von

$y'' + 2y' + 5y = 10x^{3/2} + 6\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ ist, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung!

(2) (a) Welchen Ansatz macht man für x_p bei der inhomogenen Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)$?

(b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ϑ_0 aus $x_{\mathrm{st}} = A\sin(\vartheta t - \alpha)$,

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}}.$$

(3) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t)$, $t \in [a, b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Helix $\vec{x} : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix}$.

(4) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x, y)$ in $\vec{x}_0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$?

(5) (a) Wie ist die Richtungsableitung $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ definiert und wie wird sie durch $\|\nabla F(\vec{x}_0)\|$ und $\angle(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r})$ dargestellt? (für $\|\vec{r}\| = 1$; $\angle =$ “Winkel”)

(b) Was ist $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für $F(x, y, z) = y\,\mathrm{e}^{xy} + 2\tan z$, $\vec{x}_0 = \vec{0}$, $\vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$?

In welcher Richtung wächst F am stärksten?

(6) (a) Was sagt der Satz von Schwarz? (b) Kontrollieren Sie ihn für $f(x, y) = x^y$.

(7) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Wieviele stationäre Punkte hat $f(x, y) = x^2y - y$? Wieviele Extrema?

(8) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Leiten Sie die Formel in (a) her! (Hinweis: $\vec{0} = \vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0 + (\vec{x} - \vec{x}_0)) \approx ...$)

(9) (a) Wann heißen die Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$ orthogonal?

(b) Wie berechnet man x, y, z aus den Kugelkoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$? Skizze!

(10) (a) Schreiben Sie das Vergleichskriterium an!

(b) Untersuchen Sie damit, ob $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert!

(11) (a) Für welche p konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n$ und was ergibt sie dann?

(b) Bestimmen Sie die MacLaurinreihe von $\arctan x$ durch Integration der geometrischen Reihe. (Setzen Sie $p = -x^2$!) Was ist der Konvergenzradius?

(12) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \operatorname{sh} x$ und $x_0 = 0$? Was ist der Konvergenzradius?

(13) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x, y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x, y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$ mit ϱ_2?

(14) (a) Was sagt der Satz von Fubini?

(b) Berechnen Sie $S_y = \iint_D x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ für den Viertelkreis $D: x^2+y^2 \leq 1, \quad x, y \geq 0$.

(15) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Berechnen Sie so das Trägheitsmoment I_y für D aus (14) (b)!

2002 - 10 - 25

2. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 2002

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (1), (2), (6) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie stellt man $y_{\text{hom}} = C_1 e^{ax} \sin bx + C_2 e^{ax} \cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Was ergibt sich speziell für $C_1 = C_2 = -2, \quad a = 3, \quad b = 4$? $(\sqrt{8} \approx 2.8)$

(2) (a) Wir betrachten die Differentialgleichung $y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1 y' + d_0 y = g(x)$, wobei $g(x)$ nur aus Polynomen, e^{cx}, $\sin cx$, $\cos cx$ besteht. Welchen Ansatz macht man für y_p und was tut man im "Resonanzfall"?

(b) Was ist der Ansatz für y_p, wenn $y_{\text{hom}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \sin 3x + C_3 e^{-x} \cos 3x$ und $g(x) = 4e^{-x} \cos 2x + 3x^2 + 2e^x$?

(3) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{dy}{dx}$ durch $\dot{x}, \dot{y}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Drücken Sie mittels (a) $\kappa = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ durch $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ aus!

(4) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ durch $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ aus, wenn r, φ Polarkoordinaten sind?

(b) Was ergibt sich für $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$, wenn $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2, \quad r = 3, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$?

(5) (a) Wie bestimmt man die Tangentialebene an die Niveaufläche $M_c = \{\vec{x} \in D : F(\vec{x}) = c\}$ in $\vec{x}_0 \in M_c$?

(b) Was ergibt sich für $F(\vec{x}) = 6\sqrt[3]{x} \cos y - \ln(3z + e^{y^2}), \quad c = 11$ und $\vec{x}_0 = (8, 0, 0)^T$?

(6) (a) Wie drückt man f_{xx} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s, t)$ und $s(x, y), \quad t(x, y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x - y, \quad t = y^2$?

(7) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z)=0$?

(b) Was ergibt sich für $f(x,y,z)=xy+2z(x+y)$ und $g(x,y,z)=xyz-32$?

(8) (a) Wie sind die Begriffe "$\vec{v}$ ist wirbelfrei" und "$\vec{v}$ hat ein Potential" definiert? Welcher Zusammenhang gilt?

(b) Es sei $\vec{v}=\begin{pmatrix} z+y\cos(xy) \\ x\cos(xy) \\ x \end{pmatrix}$. Ist $\vec{v}$ wirbelfrei? Hat es ein Potential?

(9) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x})=\vec{0}$?

(b) Was ist speziell $\vec{x}_1$, wenn $\vec{x}_0=\vec{0}$ und $\vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix} x+2\tan y \\ \arctan(\mathrm{e}^{6x}+\sin 8y) \end{pmatrix}$?
(Hinweis: $\frac{\pi}{8}\approx 0.4$)

(10) (a) Schreiben Sie das Quotientenkriterium an!

(b) Berechnen Sie damit den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}\,x^n$.

(11) (a) Schreiben Sie die Lagrange'sche Restgliedformel für $\varrho_n(x-x_0)$ an!

(b) Was ergibt sich speziell für $\varrho_2(x)$, wenn $f=\sin$, $x_0=0$?

(12) (a) Was ist $\binom{\nu}{k}$ und was ist die MacLaurinreihe von $(1+x)^\nu$, $\nu\in\mathbb{R}$ fest?

(b) Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^4 in der MacLaurinreihe von $\sqrt[3]{(1+x)^4}$.
$(3^{-5}\approx 0.004)$

(13) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y)=\sqrt{x+\mathrm{e}^y}$ und $\vec{x}_0=\vec{0}$ mit ϱ_2?

(14) (a) Wie sind die statischen Momente S_x, S_y definiert und wie hängen sie mit dem Schwerpunkt $\vec{s}=(s_1,s_2)$ zusammen?

(b) Bestimmen Sie S_y und s_1 zu $D: 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\cos x$, wenn für die Dichte gilt $\varrho(x,y)=1$.

(15) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Berechnen Sie so das Trägheitsmoment $I_y=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für den Viertelkreis $D:\ x^2+y^2\le 1,\quad x,y\ge 0$.

2003 - 01 - 17

3. Prüfung aus Mathematik B, SoSe 2002

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11), (12), (14) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welche reellen Lösungen hat die homogene Schwingungsgleichung $m\ddot{x}+r\dot{x}+cx = 0$ im Schwingfall $r^2 < 4cm$?

(b) Was ergibt sich für $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0$ und welche Form hat die Lösung angeschrieben mit Phasenverschiebung?

(2) (a) Bei welcher Frequenz ϑ hat die ungedämpfte Schwingungsgleichung $m\ddot{x}+cx = F_0 \sin(\vartheta t)$ Resonanz?

(b) Lösen Sie $m\ddot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)$ im Resonanzfall!

(3) (a) Wie berechnet man die Bogenlänge einer in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegebenen Kurve?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Spirale $r = \varphi^2, \quad 0 \le \varphi \le \pi$! $\quad ((\pi^2 + 4)^{3/2} \approx 51.5)$

(4) (a) Wann nennt man $f(x, y)$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar?

(b) Was ist $\varrho(\vec{x} - \vec{x}_0)$ für $f(x, y) = \sin(x + 2 \arctan y), \quad \vec{x}_0 = \vec{0}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(5) (a) Was ergibt die Kettenregel für $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, wenn $z(x, y), \quad x(u, v), \quad y(u, v)$ gegeben sind?

(b) Überprüfen Sie (a) für $z = \arcsin \frac{y}{x}, \quad y = v \sin u$ und $x = v$ (wobei $|u| \le \frac{\pi}{2}$, $v \ne 0$).

(6) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Besitzt $f(\vec{x}) = xy + x^3 + y^3$, $\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, ($\alpha$) in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ bzw. (β) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{1}$ Extrema?

(7) (a) Was sind $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ bzw. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$?

(b) Bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ z\mathrm{e}^{z^2} \end{pmatrix}$!

(8) (a) Wie ist die Jacobi-Matrix der differenzierbaren Abbildung $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, definiert?

(b) Geben Sie die lineare Approximation von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ \sin(y-z) \end{pmatrix}$ bei $\vec{x}_0 = (1,1,1)^T$ an!

(9) (a) Was besagt das Leibnizkriterium?

(b) Berechnen Sie damit $\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ auf $\frac{1}{300}$ genau! $(\frac{11}{24} \approx 0.46)$

(10) (a) Wie ist der Konvergenzradius R einer Potenzreihe definiert?

(b) Berechnen Sie R für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n2^n}$.

(11) (a) Schreiben Sie die Lagrange'sche Restgliedformel für $\varrho_n(x - x_0)$ an!

(b) Was ergibt sich speziell für $\varrho_2(x)$, wenn $f = \sin$, $x_0 = 0$?

(12) (a) Geben Sie die 4 Darstellungen von $\binom{n}{k}$ aus der Vorlesung an! (Kombinatorik, 2 Formeln, Pascal'sches $\triangle$)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen?

(13) (a) Was ist $\ddot{g}_{\vec{r}}(0)$ für $g_{\vec{r}}(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{r})$?

(b) Schreiben Sie den Beginn der Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0 = \binom{1}{2}$ an, wenn $f(1,2) = 3$, $\nabla f(1,2) = \binom{4}{5}$ und $\mathrm{H}f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$!

(14) (a) Was sagt der Satz von Fubini?

(b) Bestimmen Sie das statische Moment S_x für den Viertelkreis $D: x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$.

(15) (a) Wie ist das Trägheitsmoment I_g des mit der Dichte ϱ belegten Gebietes $D \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Geraden $g: a_1x + a_2y = b$ definiert?

(b) Berechnen Sie I_x für $\varrho(x,y) = x + y$ und $D: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \mathrm{e}^x$. $(\frac{2\mathrm{e}^3+1}{27} + \frac{\mathrm{e}^4-1}{16} \approx 4.9)$

2006 - 07 - 07

1. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2006

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (2), (5), (7) – (12) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) $\begin{pmatrix} H(x) \\ V(x) \end{pmatrix}$ sei die Schnittkraft in der Kettenlinie $y = f(x)$. Welche Vektorgleichung gilt nach Newton?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $z' = \dfrac{\sigma}{H}\sqrt{1+z^2}$!

(2) (a) Wie lassen sich $\cos\varphi, \sin\varphi$ durch die komplexe e–Funktion darstellen?

(b) Berechnen Sie mit dieser Darstellung $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \,\mathrm{d}x$!

(3) (a) Welcher Ansatz wird bei $y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1 y' + d_0 y = 0, \quad d_j \in \mathbb{R}$, verwendet? Was ist die charakteristische Gleichung?

(b) Bestimmen Sie die reellen Lösungen von $y''' + y'' + 8y' - 10y = 0$.

(4) (a) Welcher Ansatz für y_p wird bei $y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1 y' + d_0 y = g(x)$, $d_j \in \mathbb{R}$, verwendet, wenn g nur aus Polynomen, $\mathrm{e}^{cx}, \sin cx, \cos cx$ besteht? Was tut man im "Resonanzfall"?

(b) Was ist der Ansatz für y_p, wenn $y_{\text{hom}} = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin 3x + C_3\,\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$ und $g(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - 7\,\mathrm{e}^{-x}\sin 3x$?

(5) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t), \quad t \in [a,b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge von $\vec{x} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$!

(Hinweis: Heben Sie t aus der Wurzel heraus! $\frac{61}{27} \approx 2.26$)

(6) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ durch $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ aus, wenn r, φ Polarkoordinaten sind?

(b) Was ergibt sich für $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$, wenn $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$, $r = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$?

(7) (a) Wie lässt sich Δ in Polarkoordinaten ausdrücken?

(b) Zeigen Sie 1. direkt, sowie 2. in Polarkoordinaten, dass $\Delta x = 0$.

(8) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$?

(b) Wo ist $2x + y$ minimal am Kreis $x^2 + y^2 = 5$?

(9) (a) Was ist die Jacobimatrix von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$? Wie lässt sich $\vec{v}$ dadurch bei $\vec{x}_0$ linear approximieren?

(b) Berechnen Sie die lineare Approximation von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \arccos(y\,\mathrm{e}^{2x}) \\ \sqrt{4z^2 + \tan x} \end{pmatrix}$ bei $\vec{x}_0 = (0, 0, 1)^T$!

(10) (a) Was sagt der Satz von Fubini?

(b) Berechnen Sie $S_y = S_1$, wenn D im 1. Quadranten liegt, von $y = 1$ und $y = \dfrac{x^2}{3}$ begrenzt wird, und $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y}}$.

(11) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Berechnen Sie so I_x für den Viertelkreis $D : x^2 + y^2 \le 1, \quad x, y \ge 0$ (mit $\rho = 1$).

(12) (a) Was ist $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$? Für welche x existiert der Limes für $n \to \infty$?

(b) Entwickeln Sie $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ in eine Taylorreihe um 0. Welchen Konvergenzradius hat diese Taylorreihe?

2006 - 10 - 20

2. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2006

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (4), (7), (12) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = \pm\sqrt{C + x^2} : C \in \mathbb{R}\}$!

(2) (a) Was besagt die Eulersche Formel?

(b) Folgern Sie aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ die Summensätze für Sinus und Cosinus!

(3) (a) Wie stellt man $C_1\mathrm{e}^{ax}\sin bx + C_2\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Stellen Sie die Lösung von $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$ mit Phasenverschiebung dar!

(4) (a) Welchen Ansatz macht man für x_p bei der inhomogenen Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0\sin(\vartheta t)$?

(b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ϑ_0 aus $x_{\mathrm{st}}(t) = A\sin(\vartheta t - \alpha)$,

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m\vartheta^2)^2 + r^2\vartheta^2}}.$$

(5) (a) Wann heißt eine Kurve $\vec{x}(s)$, $\alpha \le s \le \beta$, nach der Bogenlänge parametrisiert?

(b) Überprüfen Sie, dass die Klothoide $x(s) = \int_0^s \cos\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$, $\quad y(s) = \int_0^s \sin\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist!

(6) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x,y)$ in $\vec{x}_0$?

(b) Welche Ebenengleichung ergibt sich für $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$, $\quad \vec{x}_0 = \binom{1}{1}$?

(7) (a) Wie drückt man f_{xx} durch Ableitungen von f nach s,t aus, wenn $f(s,t)$, $s(x,y)$ und $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = \ln(x+y)$, $t = x + y$?

(8) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Besitzt $f(\vec{x}) = xy + x^3 + y^3$, $\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, ($\alpha$) in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ bzw. (β) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{1}$ Extrema?

(9) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Was ist speziell $\vec{x}_1$, wenn $\vec{x}_0 = \vec{0}$ und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\arcsin(x+y^2) + 0.1 \\ \mathrm{e}^{\sin(x+y)} - 1.1 \end{pmatrix}$?

(10) (a) Wie sind die statischen Momente S_x, S_y definiert und wie erhält man daraus den Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$?

(b) Berechnen Sie $S_y = S_1$, für das von $y = x^2$ und $x = 1$ im 1. Quadranten begrenzte Gebiet D, das mit der Dichte $\varrho(x,y) = \cos y$ belegt ist. $(\cos 1 \approx 0.54)$

(11) (a) Was sagt der Satz von Steiner?

(b) Berechnen Sie I_x für das Quadrat $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ (mit Dichte $\varrho = 1$) und mit (a) I_g für $g : y = y_0$.

(12) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um 0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \mathrm{e}^x$? Welchen Konvergenzradius hat diese Taylorreihe?

2007 - 07 - 10

1. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2007

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (4), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich, wenn der Graph von $y = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$, $x \in [0, \infty[$, um die $x-$ Achse rotiert?

(2) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = \dfrac{C}{\sin x} : C \in \mathbb{R}\}$!

(3) (a) Was gilt für $|z_1 \cdot z_2|$ bzw. $\arg(z_1 \cdot z_2)$ wenn $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$?

(b) Berechnen Sie Betrag und Argument von $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}} \cdot \dfrac{-3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

(4) (a) Welche reellen Lösungen hat die homogene Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \xi^2 x = 0$$

im Schwingfall $0 \leq \delta < \xi$?

(b) Stellen Sie die Lösung von $\ddot{x} + 4x = 0$, $x(0) = -4$, $\dot{x}(0) = 6$, mit Phasenverschiebung dar! ($\arctan \frac{4}{3} \approx 0.9$)

(5) (a) Was ist $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$? Für welche x existiert der Limes für $n \to \infty$?

(b) Entwickeln Sie $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ in eine Taylorreihe um 0. Welchen Konvergenzradius hat diese Taylorreihe?

(6) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t), \quad t \in [a,b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Zykloide $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$!

(Hinweis: $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$)

(7) (a) Wie ist die Richtungsableitung $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ definiert und wie wird sie durch $\|\nabla F(\vec{x}_0)\|$ und $\angle(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r})$ dargestellt? (für $\|\vec{r}\| = 1$; $\angle =$ "Winkel")

(b) In welcher Richtung wächst $F(\vec{x}) = x + \arccos(y\,\mathrm{e}^z)$ von $\vec{x}_0 = \vec{0}$ aus am stärksten? Wie stark? Was ist $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für $\vec{r} = \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T$?

(8) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y), \quad t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = xy, \quad t = \frac{x}{y}$?

(9) (a) Wann heißt die symmetrische $n \times n-$Matrix A positiv definit und wie lässt sich das im Fall $n = 2$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, charakterisieren?

(b) Für welches α hat $f(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \alpha xy - \arctan(y^2)$ in $\vec{x}_0 = \binom{1}{1}$ einen stationären Punkt? Hat f dann in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum oder Minimum?

(10) (a) Was ist die Jacobimatrix von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$? Wie lässt sich $\vec{v}$ dadurch bei $\vec{x}_0$ linear approximieren?

(b) Bestimmen Sie die lineare Approximation von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \arcsin\big(y\,\mathrm{ch}(2x)\big) \\ \sqrt{4z^2 + \tan x} \end{pmatrix}$ bei $\vec{x}_0 = (0,0,1)^T$! (Beachte: $m = 2$, $n = 3$)

(11) (a) Wie sind die statischen Momente S_x, S_y definiert und wie erhält man daraus den Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$?

(b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Viertelkreises $D: x^2 + y^2 \le 1, \quad x, y \ge 0$.

(12) (a) Was besagt der Satz von Steiner?

(b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten I_x für den Kreis $D: x^2 + y^2 \le 1$ und daraus I_g für $g: 3x + 4y = 5$. (Hinweis: Aus Symmetriegründen ist $I_x = I_h$ für jede Gerade h durch den Ursprung; $\frac{5\pi}{4} \approx 3.9$)

2007 - 10 - 19

2. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2007

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (4), (5), (10) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie hängt die Krümmung κ mit der Bogenlänge s und dem Winkel φ zusammen?

(b) Bestimmen Sie $s(x)$ für $f(x) = \operatorname{ch} x$! Was sind hier $\varphi(s)$ sowie $\kappa(s)$?

(2) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Lösen Sie $\dot{x} = t\,\mathrm{e}^{-x-t^2}$, $x(0) = 0$.

(3) (a) Was besagt die Eulersche Formel? (b) Berechnen Sie damit $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \cos 2x \,\mathrm{d}x$!

(4) (a) Welchen Ansatz macht man für x_p bei der inhomogenen Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)?$$

(b) Bestimmen Sie damit x_p für $\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 5\sin(2t)$!

(5) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um 0 allgemein an!

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $f_2(x)$ von $f(x) = \arctan(\cos x)$!

(6) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene (α) wenn $z = f(x,y)$, (β) wenn $F(x,y,z) = 0$?

(b) Bestimmen Sie die Tangentialebene durch $\vec{x}_0 = (0,0,1)^T$, wenn die Fläche durch $\ln z + \arccos\left(x - \frac{y}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$ gegeben ist!

(7) (a) Wie lässt sich Δ in Polarkoordinaten r, φ ausdrücken?

(b) Zeigen Sie damit $\Delta \ln r = 0$ für $r > 0$.

(8) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$?

(b) Wo ist $x + 2y + 3z$ minimal auf dem Ellipsoid $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 = 12$?

(9) (a) Wann heißt f Potential zu $\vec{v}$ und was gilt dann für $\operatorname{rot} \vec{v}$?

(b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$ zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} \arctan(yz) \\ y \sin z \\ x^2 + \cos z \end{pmatrix}$. Hat $\vec{v}$ ein Potential?

(10) (a) Wie ist die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ definiert?

(b) Bestimmen Sie $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}$ sowie $\dfrac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)}$, wenn r, φ Polarkoordinaten sind.

(11) (a) Was besagt der Satz von Fubini?

(b) Bestimmen Sie damit $\iint_D \sqrt[3]{1 - x^2}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ für das Dreieck D mit den Ecken $(0/0)$, $(1/1)$, $(1/-1)$.

(12) (a) Welche Formel gibt das Trägheitsmoment I_g um $g : a_1 x + a_2 y = b$?

(b) Bestimmen Sie I_g für D wie in (11) (b), $g : y = 1$, und $\varrho = 1$. (Sie können, müssen aber nicht, den Satz von Steiner verwenden.)

2008 - 01 - 11

3. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2007

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (2), (5), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Bestimmen Sie die Kugeloberfläche! (Hinweis: $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$)

(2) (a) Wie sind Orthogonaltrajektorien definiert?

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Parabelschar $y = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.

(3) (a) Was besagt die Eulersche Formel?

(b) Folgern Sie aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ die Summensätze für Sinus und Cosinus!

(4) (a) Wie stellt man $C_1\mathrm{e}^{ax}\sin bx + C_2\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Stellen Sie die Lösung von $y'' + 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$, mit Phasenverschiebung dar!

(5) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um 0 allgemein an!

(b) Entwickeln Sie $f(x) = \operatorname{ch} x$ in eine Taylorreihe!

(6) (a) Wann heißt eine Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert?

(b) Parametrisieren Sie die Helix $\vec{x} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto (3\cos t, 3\sin t, 4t)^T$ nach der Bogenlänge!

(7) (a) Wie ist die Richtungsableitung $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ definiert und wie wird sie durch $\|\nabla F(\vec{x}_0)\|$ und $\angle(\nabla F(\vec{x}_0), \vec{r})$ dargestellt? (für $\|\vec{r}\| = 1$; $\angle =$ "Winkel")

(b) Was ist $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für $F(x, y, z) = y\,\mathrm{e}^{xy} + 2\tan z$, $\vec{x}_0 = \vec{0}$, $\vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$?
In welcher Richtung wächst F am stärksten? Wie stark?

(8) (a) Wie drückt man f_{xx} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s, t)$ und $s(x, y)$, $t(x, y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x + y$, $t = xy$?

(9) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Was ist speziell $\vec{x}_1$, wenn $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ und $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.1 + \arctan(xy) \\ \sin(y + \ln x) \end{pmatrix}$?

(10) (a) Was gilt für die Zusammensetzungen von div, grad, und rot? (Geben Sie wenigstens zwei Gleichungen an!)

(b) Bestimmen Sie $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sowie $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$, wenn $f(\vec{x}) = 2\sqrt{x}\sin(y) + 3\arcsin z$!

(11) (a) Wie sind die statischen Momente $S_1 = S_y$, $S_2 = S_x$ definiert und wie erhält man daraus den Schwerpunkt $\vec{s} = \binom{s_1}{s_2}$?

(b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt $\vec{s}$ des endlichen Gebietes D, das von $y = 1$ und $y = x^2$ begrenzt wird. Skizze!

(12) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Berechnen Sie damit I_x für den Vollkreis $D : x^2 + y^2 \leq 1$ mit der Dichte $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$.

2008 - 04 - 11

4. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2007

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer (3), (5), (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich, wenn $y = \frac{1}{3}x^3, \quad 0 \leq x \leq 1,$ um die $x-$Achse rotiert?

(2) (a) Welche der folgenden Differentialgleichungen sind mit trennbaren Variablen?
(i) $y' = -\dfrac{y}{x}$ (ii) $y' = x + y$ (iii) $\dot{x} = \dfrac{x}{t^2}$ (iv) $m\dot{v} = mg - av^2$

(b) Lösen Sie (iii) mit Anfangswert $x(1) = 1$!

(3) (a) Was besagt der Hauptsatz der Algebra von Gauß?

(b) Lösen Sie $z^4 = -16$!

(4) (a) Welcher Satz gilt für die Lösung der inhom. Dgl. $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$?

(b) Bestimmen Sie y_{inh} für $y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^x$! (Hinweis: Ansatz $y_p(x) = C\mathrm{e}^x$!)

(5) (a) Was ist die Lagrangesche Restgliedformel?

(b) Was ist das Restglied $\varrho_n(x)$ für $f(x) = \mathrm{e}^x$?

(6) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene (α) wenn $z = f(x, y)$, (β) wenn $F(x, y, z) = 0$?

(b) Vereinfachen Sie $z = f(x, y) = \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x \cdot xy)}{\mathrm{e}^{\ln x}}$ (für $x > 0, y > 0$) und bestimmen Sie *die* Tangentialebene, die parallel zur Ebene $z = 4x + y$ ist!

(7) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ durch $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ aus, wenn r, φ Polarkoordinaten sind?

(b) Was folgt daraus für $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, wenn $f = \varphi \arcsin(r)$, $r = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$? $(\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \approx 0.3)$

(8) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y)$, $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = xy$, $t = \frac{x}{y}$?

(9) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Besitzt $f(x,y) = x^y$ (α) in $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ bzw. (β) in $\vec{x}_0 = \binom{\mathrm{e}}{-1}$ Extrema?

(10) (a) Was gilt für die Zusammensetzungen von div, grad, und rot? (Geben Sie wenigstens zwei Gleichungen an!)

(b) Bestimmen Sie $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$ sowie $\operatorname{div} \vec{w}$ für $\vec{v}(\vec{x}) = (\tan(xz), \cos(\frac{y}{x}), x\sqrt[3]{y})^T$!

(11) (a) Was besagt der Satz von Fubini?

(b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $D = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Skizze! $(\frac{2}{3(\pi-2)} \approx 0.58)$

(12) (a) Was besagt der Satz von Steiner?

(b) Berechnen Sie I_x für das Quadrat $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ (Skizze!) und daraus I_g für die Gerade $g : y = \frac{1}{2}$ (alles mit $\varrho = 1$).

2008 - 07 - 10

1. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2008

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer (6) und (8) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a)Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{y}{x}\sin(\ln x)$ zum Anfangswert $y(1) = 2$!

(2) (a) Was sagt die Eulersche Formel? Was ist $\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$?

(b) Berechnen Sie damit $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$!

(3) (a) Welcher Satz gilt für die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$?

(b) Bestimmen Sie y_{inh} für $y'' + 2y' + y = \sin x$!

(4) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t), \quad t \in [a, b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge von $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi$!
(Hinweis: Verdoppelungsformel! $\sqrt{5} \approx 2.2$)

(5) (a) Wie lässt sich $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für kleines ϵ mit der Richtungsableitung annähern?

(b) Es sei $F(\vec{x}) = y + \arcsin(\frac{x}{z})$ und $\vec{x}_0 = (0, 1, 2)^T$. Was ist $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ in erster Näherung für $\vec{r} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$ und kleines ϵ?

(6) (a) Wie drückt man f_{xx} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s, t)$ und $s(x, y), \quad t(x, y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = x^2 + y, \quad t = xy$?

(7) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$?

(b) Untersuchen Sie damit, wo $x+y$ maximal ist auf der Ellipse $2x^2+y^2=6$.

(8) (a) Machen Sie eine Skizze zu den Kugelkoordinaten, aus der $x = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, $y=\varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=\varrho\cos\vartheta$ ersichtlich ist!

(b) Bestimmen Sie $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$ rechnerisch oder mittels einer Skizze!

(9) (a) Was besagt das Quotientenkriterium?

(b) Lässt es sich bei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ anwenden? Ist diese Reihe konvergent? Begründung?

(10) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 an!

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $s_2(x)$ (= Schmiegeparabel) zu $f(x)=\sqrt{x}$ und $x_0=4$. Welche Näherung ergibt sich für $\sqrt{5}$? ($\frac{1}{64}\approx 0.015$)

(11) (a) Wie sind die statischen Momente $S_1=S_y$, $S_2=S_x$ definiert und wie erhält man daraus den Schwerpunkt $\vec{s}$?

(b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Viertelkreises $D: x^2+y^2\le 1,\quad x,y\ge 0$. (Sie dürfen auch die Guldinsche Regel verwenden.)

(12) (a) Schreiben Sie die Substitutionsformel für $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in den Koordinaten $v_1(x,y), v_2(x,y)$ an!

(b) Bestimmen Sie die Fläche der Kardioide $r\le 1+\cos\varphi$.

2008 - 10 - 24

2. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2008

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer (1) und (6) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld zu $y' = -\frac{x}{y}$!

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Kurvenschar $A: y = \pm\sqrt{C + \frac{2}{x}}$!

(2) (a) Durch welchen Grenzwert ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was besagt die Eulersche Formel?

(b) Stellen Sie $\sin^3\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\sin 3\varphi$ dar!

(3) (a) Wie stellt man $y(x) = C_1\mathrm{e}^{ax}\sin bx + C_2\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Was ist die Phasenverschiebung α zu $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = -1 = y'(0)$?

(4) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch $\dot{x}, \dot{y}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Überprüfen Sie (a) für den Kreis $\vec{x}(t) = a\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

(5) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene in $\vec{x}_0$ an die Niveaufläche $F(\vec{x}) = c$?

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene für $F(\vec{x}) = \ln z + \arccos(x - \frac{y}{z})$ und $\vec{x}_0 = (0,0,1)^T$! Was ist hier c?

(6) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y), \quad t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Was ergibt sich für $s = xy, \quad t = \frac{x}{y}$?

(7) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Für welches α hat $f(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \alpha xy - \arctan(y^2)$ in $\vec{x}_0 = \binom{1}{1}$ einen stationären Punkt? Hat f dann in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum oder Minimum?

(8) (a) Wann heißt f Potential zu $\vec{v}$ und was gilt dann für $\operatorname{rot}\vec{v}$?

(b) Bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \end{pmatrix}$.

(9) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Was ist speziell $\vec{x}_1$, wenn $\vec{x}_0 = \vec{0}$ und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2\tan y \\ \arctan(\mathrm{e}^{6x} + \sin 8y) \end{pmatrix}$? (Hinweis: $\frac{\pi}{8} \approx 0.4$)

(10) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Bestimmen Sie die MacLaurinreihe von $\operatorname{ch} x$ und ihren Konvergenzradius!

(11) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ bis zu Termen 2. Ordnung an!

(b) Bestimmen Sie das Schmiegeparaboloid von $z = f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$ um $\vec{x}_0 = \binom{2/3}{2/3}$.

(12) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Bestimmen Sie die Fläche der Kardioide $r \le 1 + \cos\varphi$.

2009 - 01 - 09

3. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2008

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist die Wachstumsgleichung? Was sind ihre Lösungen?

(b) Lösen Sie $\dot{x} = x^2 + 3x + 2, \quad x(0) = 1$!

(2) (a) Wie lassen sich $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ durch die komplexe e-Funktion darstellen?

(b) Beweisen Sie damit $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$!

(3) (a) Welchen Ansatz macht man für x_p bei der inhomogenen Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)?$$

(b) Bestimmen Sie damit x_p für $\ddot{x} + \dot{x} + 6x = 4\sin(2t)$!
(Falls Sie die Darstellung mit Phasenverschiebung erklären und durchführen, erhalten Sie den Zusatzpunkt.)

(4) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch $\dot{x}, \dot{y}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Drücken Sie mittels (a) $\kappa = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ durch $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ aus!

(5) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ durch $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ aus, wenn r, φ Polarkoordinaten sind?

(b) Was ergibt sich für $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$, wenn $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$, $r = 3$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$?

(6) (a) Wie lässt sich $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für kleines ϵ mit der Richtungsableitung annähern?

(b) Es sei $F(\vec{x}) = y + \arcsin\left(\dfrac{x}{z}\right)$ und $\vec{x}_0 = (0, 1, 2)^T$. Was ist $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ in erster Näherung für kleines ϵ und $\vec{r} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$?

(7) (a) Was sind die Kandidaten für Extrema von $f(\vec{x})$?

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4x^3 + 4y^3 - 3x - 3y$!

(8) (a) Was ist die Jacobimatrix von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$? Wie lässt sich $\vec{v}$ dadurch bei $\vec{x}_0$ linear approximieren?

(b) Bestimmen Sie die lineare Approximation von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \arctan\big(y\,\mathrm{ch}(2x)\big) \\ \sqrt{4z^2 + \tan x} \end{pmatrix}$ bei $\vec{x}_0 = (0,0,1)^T$! (Beachte: $m = 2$, $n = 3$)

(9) (a) Was besagt das Integralkriterium?

(b) Schätzen Sie damit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ nach oben ab!

(10) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ bis zu Termen 3. Ordnung an!

(b) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2 y$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \binom{1}{2}$!

(11) (a) Wie sind die Trägheitsmomente I_x, I_y des mit der Dichte ϱ belegten Gebietes $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert?

(b) Bestimmen Sie I_x für das Dreieck $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1$ (mit Dichte $\varrho = 1$).

(12) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Bestimmen Sie damit $S_1 = S_y$ für den Viertelkreis $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq R^2$.

2012 - 07 - 06

1. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2012

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{3x^2y}{\sqrt{1+x^3}}$ zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(2) (a) Wie lassen sich $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ durch die komplexe e-Funktion darstellen?

(b) Zeigen Sie damit $\sin^4\varphi = \frac{1}{8}[\cos(4\varphi) - 4\cos(2\varphi) + 3]$!

(3) (a) Welcher Satz gilt für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$?

(b) Lösen Sie $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$!

(4) (a) Wann heißt eine Kurve $\vec{x}(s)$, $\alpha \le s \le \beta$, nach der Bogenlänge parametrisiert?

(b) Überprüfen Sie, dass die Klothoide $x(s) = \int_0^s \cos\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \quad y(s) = \int_0^s \sin\frac{a\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$, $s \ge 0$, nach der Bogenlänge parametrisiert ist, und dass $\kappa = as$ gilt! (Hinweis: $\kappa = |\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|/\|\dot{\vec{x}}\|^3$)

(5) (a) Was sagt die Kettenregel für $\dfrac{\mathrm{d}f(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t}$?

(b) Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$ wenn in Polarkoordinaten gilt $\dfrac{\partial f}{\partial r} = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = 2$ und $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (3, 4)$! (Hinweis: $\frac{1}{25} = 0.04$)

(6) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Welche der drei Punkte $\vec{x}_0 = \vec{0}$, $\vec{x}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{x}_2 = \binom{0}{1}$ sind stationär für $f(x,y) = \sin(xy) + 2(\sqrt{1+x})(2y^3 - 3y^2)$, welche sind Minima, Maxima, Sattelpunkte?

(7) (a) Was ist die Jacobimatrix von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$? Wie lässt sich $\vec{v}$ dadurch bei $\vec{x}_0$ linear approximieren?

(b) Wie erhält man daraus (für $m = n$) die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(8) (a) Schreiben Sie das Quotientenkriterium an!

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall M der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.

(9) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{x + \mathrm{e}^y}$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$ mit ϱ_2?

(10) (a) Was besagt der Satz von Fubini?

(b) Bestimmen Sie das statische Moment $S_2 = S_x$ für das Dreieck mit den Ecken $(0/0)$, $(0/1)$, $(1/1)$. Skizze!

(11) (a) Was sagt der Satz von Steiner?

(b) Berechnen Sie damit I_g für den Kreis $x^2 + y^2 \le 1$, wenn $g : a_1 x + a_2 y = b$. Hinweis: $I_x = \frac{\pi}{4}$

(12) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Bestimmen Sie damit I_x für den halben Kreisring $y \ge 0$, $r_1^2 \le x^2 + y^2 \le r_2^2$ (mit $0 < r_1 < r_2$ fest).

2012 - 10 - 12

2. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2012

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer (1), (6) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld zu $y' = -\frac{y}{x}$!

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung in (a) und passen Sie einige Lösungskurven in das Richtungsfeld ein!

(2) (a) Durch welchen Grenzwert ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was besagt die Eulersche Formel?

(b) Folgern Sie aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ die Summensätze für Sinus und Cosinus!

(3) (a) Wie stellt man $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{ax} \sin bx + C_2 \mathrm{e}^{ax} \cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Stellen Sie die Lösung von $y'' + 4y = 0,\ y(0) = -4,\ y'(0) = 6,$ mit Phasenverschiebung dar! ($\arctan \frac{4}{3} \approx 0.9$)

(4) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t),\ t \in [a, b]$?

(b) Was ergibt sich für die Bogenlänge einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten, d.h. $r = r(\varphi), \quad x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$?

(5) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene (α) wenn $z = f(x, y)$, (β) wenn $F(x, y, z) = 0$?

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ im Punkt $(1, 1, 1)$ entsprechend (α) sowie entsprechend (β) in (a)!

(6) (a) Wie drückt man f_{yy} durch Ableitungen nach u, w aus, wenn $f(u, w)$ und $u(x, y)$, $w(x, y)$ gegeben sind?

(b) Kontrollieren Sie die Formel in (a) für $f(u, w) = uw$, $u = x - y^2$, $w = x + y^2$!

(7) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$?

(b) Wo ist $x + 2y + 3z$ minimal auf dem Ellipsoid $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 = 12$?

(8) (a) Was gilt für die Zusammensetzungen von div, grad, und rot? (Geben Sie wenigstens zwei Gleichungen an!)

(b) Bestimmen Sie $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sowie $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$, wenn $f(\vec{x}) = 2\sqrt{x}\sin(y) + 3\arctan z$!

(9) (a) Was besagt das Leibnizkriterium? Wodurch wird dann $|S - s_n|$ abgeschätzt?

(b) Entwickeln Sie $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ in eine Reihe! Bestimmen Sie das Ergebnis auf 0.01! $(2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \approx 1.486)$

(10) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x, y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Entwickeln Sie $f(x, y) = \sin(xy)$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \binom{2}{\pi}$ bis zu den quadratischen Gliedern!

(11) (a) Was besagt der Satz von Fubini?

(b) Bestimmen Sie das statische Moment $S_2 = S_x$ für das Gebiet $D : 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$, (α) indem Sie außen nach x integrieren, sowie (β) indem Sie außen nach y integrieren. Skizze!

(12) (a) Schreiben Sie die Substitutionsformel für $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in den Koordinaten $v_1(x, y), v_2(x, y)$ an!

(b) Leiten Sie aus (a) die Substitutionsformel für die Polarkoordinaten her!

2013 - 01 - 07

3. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2012

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer (1) und (10) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) $\begin{pmatrix} H(x) \\ V(x) \end{pmatrix}$ sei die Schnittkraft in der Kettenlinie $y = f(x)$. Was gilt für $\dfrac{V(x)}{H(x)}$?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $z' = \dfrac{\sigma}{H}\sqrt{1+z^2}$!

(2) (a) Was ergibt $\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x})$ bzw. $\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x})$?

(b) Bestimmen Sie $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ mittels (a)!

(3) (a) Welchen Ansatz macht man für x_p bei der inhomogenen Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)?$$

(b) Bestimmen Sie damit x_p für $\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 5\sin(2t)$! (Falls Sie x_p allgemein in (a) berechnen, erhalten Sie den Zusatzpunkt.)

(4) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch $\dot{y}, \dot{x}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Überprüfen Sie (a) für die Halbellipse $y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ mit einer geeigneten Parametrisierung!

(5) (a) Wie lässt sich $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ für kleines ϵ mit der Richtungsableitung annähern?

(b) Es sei $F(\vec{x}) = y + \arcsin(\frac{x}{z})$ und $\vec{x}_0 = (0,1,2)^T$. Was ist $F(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{r})$ in erster Näherung für $\vec{r} = \frac{1}{3}(1,-2,2)^T$ und kleines ϵ?

(6) (a) Wie lässt sich Δ in Polarkoordinaten r, φ ausdrücken?

(b) Zeigen Sie damit $\Delta \ln r = 0$ für $r > 0$.

(7) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Hat die Funktion $f(x, y) = x^2y - y$ stationäre Punkte? Hat sie Extrema?

(8) (a) Wie lässt sich die Funktionaldeterminante als Grenzwert darstellen?

(b) Vergrößern oder verkleinern die Koordinaten $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y^4 \\ \arctan(x - y) \end{pmatrix}$ bei $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Fläche? Um welchen Faktor?

(9) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$?

(10) (a) Wie wird $\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ als Grenzwert von Darbouxsummen definiert?

(b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt $\vec{s}$ des Viertelkreises $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 1$!

(11) (a) Wie sind die Trägheitsmomente I_x, I_y des mit der Dichte ϱ belegten Gebietes $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert?

(b) Bestimmen Sie I_x für das Dreieck $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$ (mit Dichte $\varrho = 1$).

(12) (a) Schreiben Sie die Substitutionsformel für $\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in den Koordinaten $v_1(x, y), v_2(x, y)$ an!

(b) Was ergibt sich speziell für die Koordinaten $v_1 = x - 3y$, $v_2 = x + y$?

2013 - 07 - 05

1. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2013

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer (6) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was ist die Steigung einer Geraden senkrecht auf eine Gerade mit Steigung k?

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Hyperbelschar $A : y^2 - x^2 = C$!

(2) (a) Welchen Ansatz macht man für x_p bei der inhomogenen Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = F_0 \sin(\vartheta t)?$$

(b) Bestimmen Sie damit x_p für $\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 5\sin(2t)$ und stellen Sie es mit Phasenverschiebung dar! $(\sqrt{5} \approx 2.2,\ \arctan(-2) \approx -1.1)$

(Falls Sie das allgemein in (a) machen, erhalten Sie den Zusatzpunkt.)

(3) (a) Was gilt für $\|\dot{\vec{x}}\|$ wenn $\vec{x}(t)$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist?

(b) Parametrisieren Sie den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ (α) nach dem Winkel φ (β) nach der Bogenlänge s!

(4) (a) Wie erhält man die Tangentialebene an die Niveaufläche $F(x, y, z) = c$ in $\vec{x}_0$?

(b) Für welche zwei $\vec{x}_0$ geht die Tangentialebene an $x + y^2 + z^2 = -1$ durch $\vec{0}$ und durch $(0, 1, 0)^T$?

(5) (a) Welche Kandidaten für Extrema hat $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\quad D \subset \mathbb{R}^n$?

(b) Es sei $D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| \leq 2\}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto (x - y) \cdot (x^2 + y^2 - 1)$. Bestimmen Sie die Extrema von f am Rand auf zwei Arten!

(6) (a) Wie drückt man f_{xy} durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y),\ t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Kontrollieren Sie die Formel in (a) für $f(s,t) = \sin t,\ s = x+y,\ t = xy$!

(7) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Was ist speziell $\vec{x}_1$, wenn $\vec{x}_0 = \binom{1}{0}$ und

$$v_1(x,y) = \sqrt[3]{x+2y} - \cos(xy) = 0, \quad v_2(x,y) = \frac{x}{3} + y + \arcsin(xy) = 0?$$

(8) (a) Was besagt das Integralkriterium?

(b) Schätzen Sie damit die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ nach unten und nach oben ab! $(\arctan(\ln 2) \approx 0.6)$

(9) (a) Schreiben Sie das Taylorpolynom s_2 von f mittels $\nabla f(\vec{x}_0)$ und $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ an!

(b) Bestimmen Sie s_2 für $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + \ln z$ und $\vec{x}_0 = (0,1,1)^T$!

(10) (a) Wie ist $\dfrac{\partial(v_1,\ldots,v_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ definiert? Was gilt für Koordinaten?

(b) Berechnen Sie $\dfrac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}$ sowie $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$ für die Polarkoordinaten (r,φ).

(11) (a) Wie lässt sich $I_g = a_1^2 I_{\tilde{y}} + a_2^2 I_{\tilde{x}} + 2a_1a_2 I_{\tilde{x}\tilde{y}}$ mittels einer Matrix schreiben? Was sind dann die Maximal-/Minimalwerte von I_g?

(b) Berechnen Sie I_{xy} für den Viertelkreis $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1$!

(12) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Bestimmen Sie das statische Moment $S_2 = S_x$ für die obere Kardioidenhälfte $0 \leq \varphi \leq \pi,\ r \leq 1 + \cos\varphi$! Skizze!

Für diejenigen, die ihr Studium im WS 2011 begonnen haben, für die also ungefähr 22 Monate seit dem Studienbeginn vergangen sind, ein Zitat aus Dino Buzzatis Buch “Il deserto dei tartari” (Mondadori, 1945), dt. “Die Tatarenwüste”, Fischer TBV, Frankfurt 1998, S. 81:

Eines Nachts, fast zwei Jahre später, schlief Giovanni Drogo in seinem Zimmer in der Festung. Zweiundzwanzig Monate waren vergangen, ohne daß sich das geringste geändert hatte, und er wartete geduldig weiter ab, als müßte das Leben besondere Nachsicht mit ihm zeigen. Dabei sind zweiundzwanzig Monate eine lange Zeit, in der viel passieren kann: Zeit genug, daß sich neue Familien bilden, Kinder zur Welt kommen und auch anfangen zu sprechen, daß sich ein großes Haus erhebt, wo vorher nur Wiese war, und eine schöne Frau altert und niemand sie mehr begehrt; Zeit genug, daß sich eine langwierige Krankheit festsetzt (während der Mensch sorglos weiterlebt), langsam den ganzen Körper befällt, sich für kurze Phasen scheinbarer Genesung zurückzieht, um nur noch heftiger wiederzukommen und die letzten Hoffnungen zu zerstören; Zeit genug auch, daß der Tote begraben und vergessen wird, sein Sohn wieder lachen kann und beim abendlichen Spaziergang mit seinem Mädchen gedankenlos an der Friedhofsmauer vorbeigeht.

2013 - 10 - 11

2. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2013

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was gilt für $D(x,y)$, wenn die Dgl. $y' = D(x,y)$ mit trennbaren Variablen ist?

(b) Lösen Sie $y' = \frac{x}{y}\,\mathrm{e}^{-x^2}$ zum Anfangswert $y(0) = 1$!

(2) (a) Welche 3 Fälle gibt es bei der hom. Schwingungsgleichung $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \xi^2 x = 0$?

(b) Lösen Sie $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2$!

(3) (a) Wie lässt sich $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch $\dot{x}, \dot{y}$ darstellen, wenn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

(b) Drücken Sie mittels (a) $\kappa = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ durch $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ aus!
(Hinweis: $y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\underline{\underline{x}}}\, y'$!)

(4) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene (α) wenn $z = f(x,y)$, (β) wenn $F(x,y,z) = c$?

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $xyz = 1$ im Punkt $(1, 2, \frac{1}{2})$ entsprechend (α) sowie entsprechend (β) in (a)! Überprüfen Sie, dass sich dasselbe ergibt!

(5) (a) Was sagt die Kettenregel für $\dfrac{\mathrm{d}f(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t}$?

(b) Drücken Sie f_{xx} durch $f_{rr}, f_{r\varphi}, f_{\varphi\varphi}, f_r, f_\varphi$ und $r_x, \varphi_x, r_{xx}, \varphi_{xx}$ aus!

(6) (a) Wann heißt $\vec{x}_0$ stationärer Punkt von f, und was sagt dann der Extremstellentest, falls $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist?

(b) Hat $f(x,y) = xy + x^3 + y^3$ (α) in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ bzw. (β) in $\vec{x}_1 = \binom{1}{1}$ ein Extremum?

(7) (a) Wann heißt f Potential zu $\vec{v}$ und was gilt dann für $\operatorname{rot}\vec{v}$?

(b) Bestimmen Sie ein Potential zu $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos(x+z^2) \\ y^3/(1+y^4) \\ 2z\cos(x+z^2) \end{pmatrix}$!

(8) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \ln x$ um $x_0 = 1$!
(Hinweis: $f' = x^{-1}$, $f'' = -x^{-2}$, $f''' = +2!\,x^{-3}, \ldots$)

(9) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ bis zu Termen 2. Ordnung an!

(b) Was ergibt sich für $z = f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^x + \sin y}$ um $\vec{x}_0 = \vec{0}$?

(10) (a) Was besagt der Satz von Fubini?

(b) Bestimmen Sie die Masse des Dreiecks mit den Ecken $(0/0)$, $(\frac{\pi}{2}/0)$, $(0/\frac{\pi}{2})$, das mit der Dichte $\varrho(x,y) = \cos x$ belegt ist.

(11) (a) Wie lässt sich $I_g = a_1^2 I_{\tilde{y}} + a_2^2 I_{\tilde{x}} + 2a_1 a_2 I_{\tilde{x}\tilde{y}}$ mittels einer Matrix schreiben? Was sind dann die Maximal-/Minimalwerte von I_g?

(b) Berechnen Sie I_{xy} für den Viertelkreis $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$!

(12) (a) Wie berechnet man $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten?

(b) Bestimmen Sie damit I_y für den Viertelkreis $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq R^2$.

2014 - 01 - 14

3. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2013

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 1 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld zu $y' = -xy$!

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung in (a) und passen Sie die Lösungskurven zu $y(0) = 0$ bzw. $y(0) = 1$ bzw. $y(0) = -1$ in das Richtungsfeld ein!

(2) (a) Wie stellt man $y(x) = C_1 e^{ax} \sin bx + C_2 e^{ax} \cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Stellen Sie die Lösung von $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, mit Phasenverschiebung dar!

(3) (a) Was ist die Formel der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\vec{x}(t)$, $t \in [a, b]$?

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Zykloide $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi$!

(Hinweis: Verwenden Sie $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$ und Pythagoras!)

(4) (a) In welche Richtung $\vec{r}$ (mit $\|\vec{r}\| = 1$) wächst $F(\vec{x})$ von $\vec{x}_0$ aus am stärksten und wie groß ist $\mathrm{RA}(F, \vec{x}_0, \vec{r})$ für dieses $\vec{r}$?

(b) Was ergibt sich für $F(\vec{x}) = \arctan(\frac{y^2}{z}) + \ln x$ und $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)^T$?

(5) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$?

(b) Bestimmen Sie damit das Minimum von $f(x, y) = 2x + y$ am Kreis $x^2 + y^2 = 5$.

(6) (a) Was ist die Jacobimatrix von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$? Wie lässt sich $\vec{v}$ dadurch bei $\vec{x}_0$ linear approximieren?

(b) Berechnen Sie die lineare Approximation von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \arccos(2x) \\ \sqrt{4y^2 + \tan x} \end{pmatrix}$ bei $\vec{x}_0 = (0,1)^T$!

(7) (a) Wie groß ist in erster Näherung die Bildfläche in den Koordinaten v_1, v_2 für ein kleines Rechteck R mit Fläche $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ bei $\vec{x}_0$ in der $xy-$Ebene?

(b) Was ergibt sich für $\vec{v}$ und $\vec{x}_0$ wie in Aufgabe 6 (b)?

(8) (a) Was besagt das Quotientenkriterium?

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall von $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n}$!

(9) (a) Schreiben Sie das Taylorpolynom s_2 von f mittels $\nabla f(\vec{x}_0)$ und $\mathrm{H}f(\vec{x}_0)$ an!

(b) Bestimmen Sie s_2 für $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + \ln z$ und $\vec{x}_0 = (0,1,1)^T$!

(10) (a) Was besagt der Satz von Fubini?

(b) Berechnen Sie S_y für den Viertelkreis $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$ (α) indem Sie außen nach x integrieren, sowie (β) indem Sie außen nach y integrieren!

(11) (a) Wie ist das Trägheitsmoment I_g des Gebietes D mit Dichte ρ bezüglich der Geraden $g : a_1 x + a_2 y = b$ definiert?

(b) Berechnen Sie I_g für das Einheitsquadrat $D : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$ (mit $\rho = 1$) bzgl. $g : x + 2y = 0$.

(12) (a) Schreiben Sie die Substitutionsformel für $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in den Koordinaten $v_1(x,y), \quad v_2(x,y)$ an!

(b) Leiten Sie daraus die Substitutionsformel speziell für Polarkoordinaten her!

2014 - 07 - 02

1. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2014

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 1, 5 und 7 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was gilt für $\dfrac{V(x)}{H(x)}$, wenn $\begin{pmatrix} H(x) \\ V(x) \end{pmatrix}$ die Schnittkraft an einer Kettenlinie ist?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung der Kettenlinie $Hf'' = \sigma\sqrt{1+f'^2}$!

(2) (a) Wie stellt man $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{ax} \sin bx + C_2 \mathrm{e}^{ax} \cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Stellen Sie die Lösung von $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, mit Phasenverschiebung dar!

(3) (a) Wann heißt eine Kurve $\vec{x}(s)$, $\alpha \le s \le \beta$, nach der Bogenlänge parametrisiert?

(b) Überprüfen Sie, dass die Klothoide $x(s) = \int_0^s \cos \frac{a\sigma^2}{2}\, \mathrm{d}\sigma$, $y(s) = \int_0^s \sin \frac{a\sigma^2}{2}\, \mathrm{d}\sigma$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist!

(4) (a) Wann nennt man $f(x, y)$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar?

(b) Was ist $\varrho(\vec{x} - \vec{x}_0)$ für $f(x, y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(5) (a) Wie drückt man f_{yy} durch Ableitungen nach u, w aus, wenn $f(u, w)$ und $u(x, y)$, $w(x, y)$ gegeben sind?

(b) Kontrollieren Sie die Formel in (a) für $f(u, w) = uw$, $u = x - y^2$, $w = x + y^2$!

(6) (a) Was ist die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(b) Was ist speziell $\vec{x}_1$, wenn $\vec{x}_0 = \vec{0}$ und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2\tan y \\ \arctan(\mathrm{e}^{6x} + \sin 8y) \end{pmatrix}$? (Hinweis: $\frac{\pi}{8} \approx 0.4$)

(7) (a) Wie drückt man $\vec{x}$ durch die Kugelkoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ aus? Skizze!

(b) Berechnen Sie $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\vartheta,\varphi)}$! (Fassen Sie jeweils zwei Terme zusammen!)

(8) (a) Schreiben Sie das Integralkriterium für $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ an! Was muss f erfüllen?

(b) Schätzen Sie damit $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ nach unten und oben ab! ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

(9) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Bestimmen Sie die MacLaurinreihe von $f(x) = \sin x$ und ihren Konvergenzradius!

(10) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ mit Restglied ϱ_ℓ allgemein an!

(b) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2 y$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}_0 = \binom{1}{2}$!

(11) (a) Wie sind die statischen Momente S_1, S_2 definiert und wie erhält man daraus den Schwerpunkt $\vec{s} = (s_1, s_2)$?

(b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Gebiets D wo $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x + y \geq 1$.

(12) (a) Was sagt der Satz von Steiner?

(b) Berechnen Sie I_y für den Halbkreis $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq R^2$ (mit Dichte $\varrho = 1$) und mit (a) I_g für $g : x = x_0$. Skizze!

2018 - 07 - 05

1. Prüfung aus Mathematik 2, SoSe 2018

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 6 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Lösen Sie die Dgl. $y' \cos y = \cos x \sin y$ zum Anfangswert $y(0) = \frac{\pi}{6}$!

(2) (a) Durch welchen Grenzwert ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was besagt die Eulersche Formel?

(b) Schreiben Sie $\dfrac{-1+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$ sowie in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

(3) (a) Wie stellt man $C_1 \mathrm{e}^{ax} \sin bx + C_2 \mathrm{e}^{ax} \cos bx$ mit Phasenverschiebung dar?

(b) Stellen Sie die Lösung von $y'' + 4y = 0, y(0) = -4, y'(0) = 6,$ mit Phasenverschiebung dar! ($\arctan \frac{4}{3} \approx 0.9$)

(4) (a) Geben Sie die Formel für die Krümmung κ der Kurve $\vec{x}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ an!

(b) Parametrisieren Sie die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und bestimmen Sie die Krümmung im Punkt $(a/0)$!

(5) (a) Was ist die Gleichung der Tangentialebene (α) wenn $z = f(x, y)$, (β) wenn $F(x, y, z) = 0$?

(b) Bestimmen Sie die Tangentialebene durch $\vec{x}_0 = (0, 0, 1)^T$, wenn die Fläche durch $\ln z + \arccos\bigl(x - \frac{y}{z}\bigr) = \frac{\pi}{2}$ gegeben ist!

(6) (a) Wie drückt man $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ durch Ableitungen nach s, t aus, wenn $f(s,t)$ und $s(x,y)$, $t(x,y)$ gegeben sind?

(b) Leiten Sie für $s = xy$, $t = \dfrac{x}{y}$ die Formel $f_{xy} = s\, f_{ss} - \dfrac{t^2}{s}\, f_{tt} + f_s - \dfrac{t}{s}\, f_t$ her!

(7) (a) Wann heißt die symmetrische $n \times n-$ Matrix A positiv definit und wie lässt sich das im Fall $n = 2$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, charakterisieren?

(b) Für welches α hat $f(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \alpha xy - \arctan(y^2)$ in $\vec{x}_0 = \binom{1}{1}$ einen stationären Punkt? Hat f dann in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum oder Minimum?

(8) (a) Was ist die Jacobimatrix $\mathrm{J}\vec{v}$ von $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$? Wie lässt sich $\vec{v}$ dadurch bei $\vec{x}_0$ linear approximieren?

(b) Wie erhält man daraus (für $m = n$) die Newtonsche Formel zur näherungsweisen Lösung von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$?

(9) (a) Was sagt der Satz von Fubini?

(b) Berechnen Sie das statische Moment $S_y = S_1$, für das Gebiet $D: 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \ln x$, indem Sie (α) außen nach x, sowie (β) außen nach y integrieren. Skizze!

(10) (a) Schreiben Sie die Substitutionsformel für $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in den Koordinaten $v_1(x,y)$, $v_2(x,y)$ an!

(b) Leiten Sie aus (a) die Substitutionsformel für die Polarkoordinaten her!

(11) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 allgemein an!

(b) Bestimmen Sie die MacLaurinreihe von $f(x) = \sin x$!

(12) (a) Schreiben Sie die Taylorreihe von $f(x,y)$ um $\vec{x}_0$ bis zu Termen 2. Ordnung an!

(b) Was ergibt sich für $f(x,y) = \sqrt{y^2 + \sin x}$ und $\vec{x}_0 = \binom{0}{1}$?