1997 - 01 - 08

# Prüfung aus Mathematik A, WS 1996/97

PROBEEXEMPLAR

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen (4), (7), (9), (13), (14), (15) möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(In diesem Probeexemplar wurden die Fragen zu den Kapiteln I, II, und III gestellt. In den Prüfungen wird natürlich auch Kapitel IV abgefragt.)

(1) (a) Was sind, in dieser Reihenfolge, die mathematischen Zeichen für "und", "Vereinigung", "für alle", "äquivalent"?

(b) Bestimmen Sie die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : y \geq 2 \land x + y = 5\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 8 > 0\}$.

(2) (a) Wie erhält man den Graph von $y = 3f(x+2)$ aus dem von $y = f(x)$?

(b) Was ist $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$ in Radiant? Skizze!

(3) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert?

(b) Zeigen Sie mit der Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+2} = 1$!

(4) (a) Was besagt der Zwischenwertsatz?

(b) Ist er auf $\operatorname{sign} x$ am Intervall $[-1, 1]$ anwendbar? Warum bzw. warum nicht?

(5) (a) Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ und $g(x) = \ln x$.

(b) Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{4}{n^2}\right)^n$?

(6) (a) Was ist die Definition von $f'(x_0)$?

(b) Berechnen Sie damit $(\sqrt{x})'(2)$.

(7) (a) Machen Sie ein Bild, aus dem $(f^{-1})'(t_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ für $t_0 = f(x_0)$ hervorgeht.

(b) Berechnen Sie $\arccos'(t_0)$ mit den Gleichungen in (a).

(8) (a) Was ist die Gleichung der Tangente an $f$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$?

(b) Wie folgt daraus die Newton'sche Näherungsmethode?

(9) (a) Was sind die wesentlichen Voraussetzungen für die Regel von l'Hôpital? (In der Vorlesung $(\alpha)$ und $(\beta)$. )

(b) Sind sie im Fall $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$ erfüllt? Was ergibt dieser Limes?

(10) (a) Wann heißt $x_0$ Wendepunkt von $f$?

(b) Ist $0$ ein Wendepunkt von $f(x) = x^4$?

(11) (a) Wie ist die untere Darbouxsumme definiert?

(b) Was ist $UD(Z)$ für $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ und $Z = \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$?

(12) (a) Welche Substitution verwendet man bei Integralen, die $\sqrt{x^2+1}$ enthalten?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_2^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 7}$ !

(13) (a) Schreiben Sie die Simpsonregel allgemein an!

(b) Wenden Sie sie auf $\int\limits_0^2 x^3\,\mathrm{d}x$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ an!

(14) (a) Wie erhält man die Krümmung aus der Bogenlänge $s$ und dem Winkel $\varphi$ der Tangente zur $x-$ Achse?

(b) Berechnen Sie $\varphi(s)$ für $f : [0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{ch} x$.

(15) (a) Für welche $\alpha$ ist $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergent?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$ !

# LÖSUNGEN

(1) (a) $\wedge, \cup, \forall, \Longleftrightarrow$

(b) $x + y = 5 \Longrightarrow x = 5 - y$; $x \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow y \leq 4$; $y \geq 2 \Longrightarrow y \in \{2,3,4\} \Longrightarrow x \in \{1,2,3\}$. Also ist $A = \{1,2,3\}$.

$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) > 0 \Longleftrightarrow x > 4 \vee x < -2$ nach Skizze. Also ist $B = ]-\infty, -2[ \cup ]4, \infty[$.

(2) (a) Durch Verschiebung um 2 nach links und Streckung um den Faktor 3 in $y-$ Richtung.

(b) Nach der Skizze ist $\cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$; $\frac{5\pi}{6} \in ]0, \pi[$; arccot ist die Umkehrfunktion von $]0, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cot x$. Daher ist $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

(3) (a) $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \epsilon$.

(b) $\left|\frac{n-1}{n+2} - 1\right| < \epsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{n-1-(n+2)}{n+2}\right| < \epsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{-3}{n+2}\right| < \epsilon \Longleftrightarrow \frac{3}{n+2} < \epsilon \Longleftrightarrow$ $3 < \epsilon(n+2) \Longleftrightarrow 3 - 2\epsilon < \epsilon n \Longleftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 2 < n$. Daher ist die Bedingung in (a) erfüllt, wenn $N > \frac{3}{\epsilon} - 2$ gewählt wird.

(4) (a) Wenn $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $f(a) < c < f(b)$ oder $f(b) < c < f(a)$, dann gilt: $\exists \alpha \in ]a,b[ : f(\alpha) = c$.

(b) Nein. Weil $\operatorname{sign} x$ in $0$ nicht stetig ist.

(5) (a)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-2} \cdot \mathrm{e}^2 = 1$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

(6) (a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(b) $(\sqrt{x})'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} =$ (GWS) $= \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}+\sqrt{2}} =$ ($\sqrt{x}$ ist stetig) $= \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(7) (a)

(b) $\arccos = f^{-1}$ zu $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$; $t_0 = \cos x_0$ mit $x_0 \in ]0,\pi[ \Longrightarrow$ $\arccos'(t_0) = \dfrac{1}{\cos'(x_0)} = \dfrac{1}{-\sin(x_0)} =$ (weil $\sin(x_0) > 0$) $= \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(x_0)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t_0^2}}$.

(8) (a) $g : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

(b) $g \cap x-\text{Achse} = \{(x_1,0)\} \Longrightarrow f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x_0)(x_1-x_0) = -f(x_0) \Longrightarrow x_1 - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Longrightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Iteration ergibt die Formel $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

(9) (a) ($\alpha$) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ist vom Typ $\dfrac{0}{0}$ bzw. $\dfrac{\infty}{\infty}$ und ($\beta$) $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert

(b) Hier ist $f(x) = x + \sin x$ und $g(x) = x$. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. Also ist ($\alpha$) erfüllt. $f'(x) = 1+\cos x$ und $g'(x) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ existiert nicht. Also ist ($\beta$) nicht erfüllt.
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} =$ (Einschließungssatz) $= 1$.

(10) (a) Wenn $x_0$ nicht am Rand des Definitionsbereiches liegt und $f'$ ein Extremum in $x_0$ hat.

(b) 0 ist kein Extremum von $f' = x^3$. Also ist $x_0$ kein Wendepunkt von $f = x^4$.

(11) (a) Wenn $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ und $\underline{f}_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, dann ist die untere Darbouxsumme von $f$ zu $Z$ gegeben durch $UD(Z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \underline{f}_i \cdot (x_i - x_{i-1})$.

(b) $\underline{f}_1 = 0, \quad \underline{f}_2 = -1 \Longrightarrow UD(Z) = 0 \cdot (\frac{\pi}{2} - 0) + (-1) \cdot (2\pi - \frac{\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$

(12) (a) $x = \operatorname{sh} t$

(b) $\int\limits_2^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 7} = \int\limits_2^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2 + 3} =$ (Substitution $t = x - 2$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $x = 2 \Rightarrow t = 0$, $x = 5 \Rightarrow t = 3$) $= \int\limits_0^3 \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2 + 3} =$ (Substitution $t = \sqrt{3}\,u$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u, t = 0 \Rightarrow u = 0, t = 3 \Rightarrow u = \sqrt{3}$) $= \sqrt{3} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{\mathrm{d}u}{3u^2 + 3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan u \Big|_{u=0}^{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$, vgl. die Skizze.

(13) (a) Wenn $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, $k \in \mathbb{N}$ gerade, $h = \dfrac{b-a}{k}$, $x_i = a + ih$ und $y_i = f(x_i)$, so ist $S_k = \dfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{k-2} + 4y_{k-1} + y_k)$ die Näherung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nach der Simpsonregel.

(b) $h = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2 \Longrightarrow y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{8}, y_2 = 1, y_3 = \frac{27}{8}, y_4 = 8 \Longrightarrow S_4 = \frac{1}{6}(0 + 4 \times \frac{1}{8} + 2 \times 1 + 4 \times \frac{27}{8} + 8) = 4$. (Dies ist auch der Wert des Integrals.)

(14) (a) $\kappa = \left|\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|$

(b) $f(x) = \operatorname{ch} x \Longrightarrow s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sh} t|_{t=0}^x = \operatorname{sh} x \Longrightarrow \varphi = \arctan f'(x) = \arctan \operatorname{sh}(x) = \arctan s$.

(15) (a) Für $\alpha < 1$.

(b) $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{a \searrow 0} \int\limits_a^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a \searrow 0} \dfrac{x^{2/3}}{2/3}\Big|_{x=a}^1 = \lim\limits_{a \searrow 0} \left(\dfrac{1^{2/3}}{2/3} - \dfrac{a^{2/3}}{2/3}\right) = \dfrac{3}{2}$

## BEISPIELE VON FALSCHEN ODER UNZUREICHENDEN ANTWORTEN

(2) (a) Durch verschiedene Operationen. A

(2) (a) Durch Verschiebung und Streckung. B

(2) (b) $\frac{5\pi}{6}$ C

(3) (a) $a_n$ nähert sich $\alpha$, wenn $n$ immer größer wird. D

(6) (a) $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an $f$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$. E

(9) (a) $f$ und $g$ sind stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$. F

(10) (a) Wenn $f''(x_0) = 0$. G

(12) (a) $t = \sqrt{x^2+1}$ H

KOMMENTAR: A, B, C sind zu wenig ausführlich. D ist nur eine anschauliche Erklärung, keine mathematische Definition. E ist zwar wahr, aber ist nicht die Definition der Ableitung, sondern ein Teil der Definition der Tangente. (Die Vorstellung von Sekanten, die sich einer Tangente nähern, wurde in der Vorlesung nur als **Motivation** für die Definition der Ableitung verwendet, vgl. den Kommentar zu D.) Zu F: Man kann verschiedener Meinung sein, was “wesentlich” ist. Bei Unsicherheit darüber, müßte der Satz mit **allen** Voraussetzungen hingeschrieben werden. G ist falsch. Zu H: Es gibt natürlich Integrale, wo diese Substitution angebracht ist, z.B. $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$. Wer die Vorlesung studiert hat, sollte allerdings wissen, was gemeint ist.

---

## BEISPIELE VON ZUSATZPUNKTEN

(4) (a) Beweis des Zwischenwertsatzes: Der Satz von Bolzano sagt: Wenn $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $g(a)g(b) < 0$ (d.h. $g(a)$ und $g(b)$ haben verschiedenes Vorzeichen), dann gilt: $\exists \alpha : g(\alpha) = 0$. (Dies wird mit Intervallschachtelung bewiesen.)

Es sei $g(x) = f(x) - c$. Dann ist $g(a)g(b) = \big(f(a)-c\big)\big(f(b)-c\big) < 0 \Longrightarrow \exists \alpha : g(\alpha) = 0$. Für dieses $\alpha$ gilt dann $f(\alpha) = c$.

(7) (a) Beweis der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion: $0 \neq f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $=$ (Substitution $f(x) = t$, $x = f^{-1}(t)$, $x \to x_0 \Rightarrow t = f(x) \to f(x_0) = t_0$) $=$ $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{t - t_0}{f^{-1}(t) - f^{-1}(t_0)} \Longrightarrow {f^{-1}}'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f^{-1}(t) - f^{-1}(t_0)}{t - t_0} = (\text{GWS}) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

1997 - 02 - 04

## 1. Prüfung aus Mathematik A, WS 1996/97

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen (3), (6), (7), (9), (12), (13), (14) möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie ist für reelle Zahlen der Betrag definiert?

(b) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{R} : x + 1 > |x|\}$.

(2) (a) Zeichnen Sie die Graphen von arccos und arccot !

(b) Bestimmen Sie $\arccos(-\frac{1}{2})$ !

(3) (a) Was besagt der Einschließungssatz für Folgen?

(b) Berechnen Sie damit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$ !

(4) (a) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \notin D$. Was heißt, daß $f$ in $x_0$ stetig fortsetzbar ist?

(b) Ist $\dfrac{\tan x}{x}$ in 0 stetig fortsetzbar?

(5) (a) Was erfüllt eine Funktion $\rho(h)$, die vom Typ $o(h)$ ist?

(b) Ist $\rho(h) = \sqrt{1+h} - 1 - \frac{h}{2}$ vom Typ $o(h)$?

(6) (a) Schreiben Sie die Kettenregel allgemein an!

(b) Berechnen Sie $\left(\tan(\mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}})\right)'$.

(7) (a) Was besagt der Mittelwertsatz?

(b) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x}$. Wo liegt der Mittelwert $x_0$, dessen Existenz der Mittelwertsatz garantiert?

(8) (a) $f$ sei differenzierbar in $x_0$, $P = (x_0, f(x_0))$. Was ist die Gleichung der Normale in $P$?

(b) Was ergibt sich speziell für $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$? $\big(\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$, $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.605\big)$

(9) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung?

(b) Geben Sie dazu einen anschaulichen Bild-"Beweis" wie in der Vorlesung!

(10) (a) Definieren und zeichnen Sie $\operatorname{sh} x$ !

(b) Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$. (Sie brauchen arsh nicht durch den Logarithmus auszudrücken!)

(11) (a) Schreiben Sie die Trapezregel allgemein an! (Falls Sie $T_k = \frac{1}{2}(L_k + R_k)$ schreiben, sollten Sie auch $L_k$ und $R_k$ definieren!)

(b) Wenden Sie sie auf $\int\limits_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ an!

(12) (a) Wie groß ist das entstehende Volumen, wenn der Graph von $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ um die $x-$ Achse rotiert?

(b) Was ergibt sich speziell für $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ ?

(13) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = C/x : C \in \mathbb{R}\}$ !

(14) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was ergibt sich für $\varphi \in \mathbb{R}$ nach der Euler'schen Formel?

(b) Drücken Sie $\cos^3\varphi$ durch $\cos\varphi$ und $\cos 3\varphi$ aus.

(15) (a) Welchen Ansatz verwendet man bei homogenen, linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten?

(b) Lösen Sie $y'' + 2y' + y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

1997 - 03 - 11

## 2. Prüfung aus Mathematik A, WS 1996/97

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen (3), (4), (6), (7), (9), (11), (14) möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie ist das Intervall $]a, b]$ definiert?

(b) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 \geq 0\}$.

(2) (a) Skizzieren Sie die Graphen von $f, \dfrac{1}{f}$ und $f^{-1}$ für $f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x$.

(b) Was ist $\arctan 1$ ? (Begründung!)

(3) (a) Was ist $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ ?

(b) Berechnen Sie ohne die Regel von l'Hôpital $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 2x}$ !

(4) (a) Was ist $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ für $x \in \mathbb{R}$ ?

(b) Skizzieren Sie die Funktionen $\ln x$ und ${}^{10}\log x$ !

(5) (a) Was ist die Definition von $f'(x_0)$?

(b) Berechnen Sie damit die Ableitung von $\sin x$. (Verwenden Sie die Gleichung $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}$. )

(6) (a) Schreiben Sie die Quotientenregel allgemein an!

(b) Berechnen Sie $\left(\dfrac{\arccos \sqrt{x}}{\tan(2 + \mathrm{e}^x)}\right)'$.

(7) (a) Schreiben Sie die Regel von l'Hôpital mit ihren wesentlichen Voraussetzungen an!

(b) Berechnen Sie damit $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}$.

(8) (a) $f$ sei differenzierbar, $P = (x_0, f(x_0))$, $n_{x_0}$ sei die Normale in $P$, $n_t$ die Normale in $\bigl(t, f(t)\bigr)$. Wie ist $M$, der Krümmungsmittelpunkt zu $P$ definiert?

(b) Berechnen Sie $M$ für $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$ mit der Formel $M = P + \dfrac{1 + {y_0'}^2}{y_0''} \begin{pmatrix} -y_0' \\ 1 \end{pmatrix}$.

(9) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung? (Definieren Sie auch $F$! )

(b) Geben Sie dazu einen anschaulichen Bild-“Beweis” wie in der Vorlesung!

(10) (a) Schreiben Sie die Formel zum partiellen Integrieren allgemein an!

(b) Berechnen Sie $\int_0^1 \arctan x \, \mathrm{d}x$. ( $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$, $\ln 2 \approx 0.69$)

(11) (a) Welche Formel liefert die Bogenlänge des Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

(b) Was ergibt sich für $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{ch} x$ ? ( $\operatorname{sh} 1 \approx 1.18$)

(12) (a) Wie ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$ definiert (falls es konvergent ist)?

(b) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$ !

(13) (a) $\begin{pmatrix} H(x) \\ V(x) \end{pmatrix}$ sei die Schnittkraft in der Kettenlinie $y = f(x)$. Was gilt für $H(x)$ und was für $\dfrac{V(x)}{H(x)}$ ?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $z' = \dfrac{\sigma}{H} \sqrt{1 + z^2}$ !

(14) (a) Was ist $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ bzw. $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ ?

(b) Folgern Sie aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ und (a) die Summensätze für Sinus und Cosinus!

(15) (a) Schreiben Sie die Schwingungsgleichung allgemein an!

(b) Was ist $x_{\mathrm{hom}}(t)$ zu $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ ?

1997 - 04 - 11

## 3. Prüfung aus Mathematik A, WS 1996/97

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (2), (4) (ohne l'Hôpital), (6), (7), (8), (10), (11), (12) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Skizzieren Sie die Funktionen $\tan x$ und $\arctan x$.

(b) Folgern Sie $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ aus dem Summensatz für den Sinus (d.h. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ).

(2) (a) Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{d}$ für $d > 0$ ?

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 5^n}$ !

(3) (a) Wann heißt die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig (schlechthin)?

(b) Ist $f(x) = \frac{1}{x}$ (mit $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ ) stetig (schlechthin)? (Wenn ja, warum, wenn nein, warum nicht?)

(4) (a) Was ist $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$ ?

(b) Bestimmen Sie mit (a) und der Definition der Ableitung $f'(x_0)$ für $f(x) = \mathrm{e}^x$ !

(5) (a) Was ist die Gleichung der Tangente an $f$ im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ?

(b) Was ergibt sich für $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 1$ ?

(6) (a) Welche Art von Extremum (Max. oder Min.) hat $f$ in $x_0$, wenn $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ und $f$ in $x_0$ stetig ist?

(b) Bestimmen Sie die Extrema und ihre Art für $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|(1-x)$ !

(7) (a) Welche Art von Extremum hat $f$ in $x_0$, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ?

(b) Was ergibt sich daraus für $f(x) = \tan(x^2)$ und $x_0 = 0$ ?

(8) (a) Wie läßt sich $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch eine Stammfunktion $\Phi$ von $f$ ausdrücken?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{4x+2x^2-(1+x^4)\arctan x^2}{(2+x)^2(1+x^4)}\,\mathrm{d}x$, indem Sie überprüfen, daß $\dfrac{\arctan x^2}{2+x}$ eine Stammfunktion ist. ( $\frac{\pi}{6} \approx 0.52$ )

(9) (a) Welche Substitution verwendet man zur Berechnung von $\int \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ ?

(b) Berechnen Sie $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}$ !

(10) (a) Schreiben Sie die Simpsonregel allgemein an!

(b) Wenden Sie sie auf $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ an! ( $\frac{47}{30} = 1.5\dot{6}$, $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ )

(11) (a) Wie groß ist das entstehende Volumen, wenn der Graph von $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ um die $x-$Achse rotiert?

(b) Was ergibt sich speziell für $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$ ? ( $\frac{\pi^2}{4} \approx 2.47$ )

(12) (a) Für welche $\alpha$ ist $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergent?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^3}$ mit einem Grenzwert!

(13) (a) $\begin{pmatrix} H(x) \\ V(x) \end{pmatrix}$ sei die Schnittkraft in der Kettenlinie $y = f(x)$. Was gilt für $H(x)$ und was für $\dfrac{V(x)}{H(x)}$ ?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $z' = \dfrac{\sigma}{H}\sqrt{1+z^2}$ !

(14) (a) Was besagt der Hauptsatz der Algebra von Gauß?

(b) Lösen Sie $z^2 - 4(1-\mathrm{i})z + 1 - 8\mathrm{i} = 0$ !

(15) (a) Wie nennt man $A$ bzw. $\alpha$ in der periodischen Funktion $x(t) = A\sin(\vartheta t - \alpha)$ ?

(b) Drücken Sie $A, \alpha$ durch $a, b$ aus, wenn $a\sin(\vartheta t) + b\cos(\vartheta t) = A\sin(\vartheta t - \alpha)$ und $b < 0$ ! (Summensatz für den Sinus: (1) (b))

1997 - 06 - 06

## 4. Prüfung aus Mathematik A, WS 1996/97

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (3), (5), (6), (8), (11), (14) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wann nennt man eine Funktion $f$ gerade?

(b) Skizzieren Sie $f(x) = \cot x$ für $|x| < \pi$ ! Ist diese Funktion gerade?

(2) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert?

(b) Zeigen Sie mit der Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+2} = 1$ !

(3) (a) Was sagt der Satz von Bolzano?

(b) Zeigen Sie, daß $f(x) = x^3 - 3x + 1$ in $]0,1[$ eine Nullstelle hat.

(4) (a) Wann nennt man eine Funktion $f$ in $x_0$ differenzierbar?

(b) Ist $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ differenzierbar?

(5) (a) Schreiben Sie die Produktregel allgemein an!

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x^2) \cdot \cos^2 x$ !

(6) (a) Was ist die Formel des Newton'schen Näherungsverfahrens?

(b) Berechnen Sie damit $x_1$ für $f(x) = x^3 - 3x + 1$ und $x_0 = 0$.

(7) (a) Geben Sie $\kappa(x) = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ für $y = \mathrm{e}^x$ an!

(b) Für welches $x$ ist $\kappa(x)$ in (a) maximal? ( $-\frac{1}{2}\ln 2 \approx -0.35$ )

(8) (a) Wie läßt sich $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch eine Stammfunktion $\Phi$ von $f$ ausdrücken?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{-1}^{1} \frac{4x+2x^2-(1+x^4)\arctan x^2}{(2+x)^2(1+x^4)}\,\mathrm{d}x$, indem Sie überprüfen, daß $\frac{\arctan x^2}{2+x}$ eine Stammfunktion ist. ( $\frac{\pi}{6} \approx 0.52$ )

(9) (a) Berechnen Sie $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ !

(b) Berechnen Sie $\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ !

(10) (a) Definieren und zeichnen Sie $\operatorname{ch} x$ !

(b) Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$. (Sie brauchen arch nicht durch den Logarithmus auszudrücken!)

(11) (a) Welche Formel liefert die Bogenlänge des Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ?

(b) Was ergibt sich für $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$ ? ( $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1.22$ )

(12) (a) Ist $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ konvergent?

(b) Berechnen Sie $\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x$ ! ( $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57$ )

(13) (a) Was ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ zum Anfangswert $y(3) = -4$.

(14) (a) Geben Sie eine Formel für $\arg(a + \mathrm{i}b)$ an, wenn $a < 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie $\arg(-1 + \mathrm{i})$ !

(15) (a) Welchen Ansatz verwendet man bei homogenen, linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten?

(b) Lösen Sie $y'' + 2y' - 3y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1997 - 10 - 10

## 5. Prüfung aus Mathematik A, WS 1996/97

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (4), (6), (7), (10), (12) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Schreiben Sie die Dreiecksungleichung an!

(b) Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < x+3\}$.

(2) (a) Skizzieren Sie die Funktion $\arcsin x$ !

(b) Was ist $\arcsin(-1)$ ?

(3) (a) Wie ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ mit $\epsilon$ und $\delta$ definiert?

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ mit den Grenzwertsätzen!

(4) (a) Was besagt der Zwischenwertsatz?

(b) Bestimmen Sie mit Intervallschachtelung ein Intervall der Breite $\frac{1}{4}$, in dem eine Nullstelle von $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ liegt!

(5) (a) Wie ist $\mathrm{e}$ definiert?

(b) Was ist $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{4}{n^2}\right)^n$ ?

(6) (a) Machen Sie ein Bild, aus dem $(f^{-1})'(t_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ für $t_0 = f(x_0)$ hervorgeht.

(b) Berechnen Sie $\ln'(t_0)$ mit den Gleichungen in (a).

(7) (a) Welche Art von Extremum (Max. oder Min.) hat $f$ in $x_0$, wenn $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$ und $f$ in $x_0$ stetig ist?

(b) Bestimmen Sie die Extrema und ihre Art für $f : [-2,3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ ! Skizze! Vergessen Sie die Randpunkte nicht!

(8) (a) Durch welche Konstruktion wird der Krümmungsmittelpunkt definiert? Skizze!

(b) Berechnen Sie den Krümmungsradius $\rho = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ im Punkt $P = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$ der Kurve $y = \arccos x$. ( $\frac{7\sqrt{7}}{4} \approx 4.63$ )

(9) (a) Wie ist die obere Darbouxsumme $OD(Z)$ definiert?

(b) Was ist $OD(Z)$ für $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$ und $Z = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ ?

(10) (a) Schreiben Sie die Formel zur Substitution in Integralen an!

(b) Berechnen Sie $\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \dfrac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x$.

(11) (a) Schreiben Sie die Linksregel allgemein an!

(b) Wenden Sie sie auf $\int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$ mit Schrittweite $h = \frac{\pi}{2}$ an.

(12) (a) Welche Gleichung gilt zwischen $\mathrm{ch}\, u$ und $\mathrm{sh}\, u$ ?

(b) Berechnen Sie die Länge des Parabelbogens $y = x^2$ über $[0, 1]$. ( $\mathrm{ch}^2 u = \frac{1}{2}\big(1 + \mathrm{ch}(2u)\big)$, $\mathrm{sh}(2u) = 2\,\mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, u = 2\,\mathrm{sh}\, u\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 u}$, $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsh}\, 2 \approx 1.48$ )

(13) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = Cx^2 : C \in \mathbb{R}\}$ !

(14) (a) Wie läßt sich $\sin\varphi$ durch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ darstellen?

(b) Drücken Sie mittels der Formel in (a) $\sin^3\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\sin(3\varphi)$ aus!

(15) (a) Welchen Ansatz verwendet man bei homogenen, linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten?

(b) Lösen Sie $y'' + 2y' - 3y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2001 - 01 - 08

**Prüfung aus Mathematik A, WS 2000/01**

PROBEEXEMPLAR

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 2, 3, 4, 7, 11, 13, 14 möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an! Beantworten Sie bitte die Fragen zu Linearer Algebra (1–7) und die zu Analysis (8–15) auf verschiedenen Blättern.

(In diesem Probeexemplar wurden die Fragen zum Stoff bis Weihnachten gestellt. In den Prüfungen wird natürlich auch der Stoff des Jänners abgefragt.)

(1) (a) Was ist ein $k-$dimensionaler affiner Raum (AR)?

(b) Ein wieviel dim. AR ist durch $\vec{x} = \binom{2}{1} + \lambda_1 \binom{-1}{-2} + \lambda_2 \binom{5}{10}$ gegeben?

(2) (a) Welcher Zusammenhang besteht bei linearen Gleichungssystemen zwischen $L_{\text{inh}}$, $L_{\text{hom}}$ und einer partikulären Lösung $\vec{p}$ (falls diese existiert)?

(b) Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{inh}}$, $\vec{x}_{\text{hom}}$ sowie 2 partikuläre Lösungen zum Gleichungssystem $3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \quad x_1 - x_2 + x_5 = 5.$

(3) (a) $Z$ sei der Zeilenraum und $L$ der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems in $n$ Unbekannten. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen $n$, $\dim L$, $\dim Z$, und der Anzahl der Pivotzeilen im Gauß'schen Algorithmus?

(b) Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem ergaben sich die Pivotzeilen $\boxed{1\ 2\ 3}$ und $\boxed{0\ 3\ 4}$. Was sind $\dim L$, $\dim Z$? Ist $(3,0,2) \in Z$?

(4) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Unter welchen Bedingungen hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y}$ genau eine Lösung $\vec{x}$?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ist $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y}$ eindeutig lösbar? Wenn ja, was ist die Lösung $\vec{x}$?

(5) (a) Was sind die Grundeigenschaften von $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ für $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$?

(b) Was ist $\det(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b})$, wenn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 5$?

(6) (a) Was ist die anschauliche Bedeutung von $\det f$ für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear?

(b) Es sei $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Welche Fläche hat $f(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 5, \quad 2 \leq x_2 \leq 7\})$?

(7) (a) Was ist die Matrix der senkrechten Projektion $\mathrm{pr}_H$ auf $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

(b) Was ergibt sich für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

(8) (a) Wie erhält man den Graph von $y = 3f(x+2)$ aus dem von $y = f(x)$ ?

(b) Drücken Sie $\cos 3x$ durch $\cos x$ aus.

(9) (a) Wie lautet die Definition von injektiv?

(b) Beweisen Sie die Injektivität von $g(x) = x^3$ .

(10) (a) Geben Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{a+ib}{c+id}$ an.

(b) Berechnen Sie die 4-ten Wurzeln von $-4$ .

(11) (a) Was besagt die Konvergenz durch Einschließung?

(b) Berechnen Sie damit $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \cos 2n}{n}$ .

(12) (a) Wie ist $f'(x_0)$ definiert?

(b) Berechnen Sie damit $(\sqrt{x})'(3)$ .

(13) (a) Wie lautet die Kettenregel?

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = (\sin x)^x$ bei $x = \frac{\pi}{2}$ .

(14) (a) Wie lauten die de l'Hospital'schen Regeln?

(b) Sind die Voraussetzungen im Fall $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \cos x}{x}$ erfüllt? Welchen Wert hat dieser Limes?

(15) (a) Wie bestimmt man Kandidaten für lokale Extrema und Wendepunkte einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ?

(b) Ist $x = 0$ ein Wendepunkt von $f(x) = x^4$ ?

# LÖSUNGEN

(1) (a) Eine Menge von Vektoren der Form $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1\vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{r}_k$, die nicht mit weniger als $k$ Richtungsvektoren dargestellt werden kann.

(b) $\vec{x} = \binom{2}{1} + (\lambda_1 - 5\lambda_2)\binom{-1}{-2}$; das ist ein $1-$dim. AR, d.h. eine Gerade.

(2) (a) $L_{\text{inh}} = \{\}$ oder $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$

(b)
$$\begin{array}{l|l}
\text{I:} & 3 \;\; -3 \;\; 1 \;\; 1 \;\;\; 0 \mid 12 \\
\text{II:} & \boxed{1 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 0 \;\;\; 1 \mid 5} \\
\text{I-3II:} & \boxed{0 \;\;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -3 \mid -3}
\end{array}$$

$k = 5-2 = 3$, $x_3 + x_4 - 3x_5 = -3$, $x_4 = \lambda_1$, $x_5 = \lambda_2$, $x_3 = -3 - \lambda_1 + 3\lambda_2$,

$$x_1 - x_2 + x_5 = 5, \quad x_2 = \lambda_3, \quad x_1 = 5 + \lambda_3 - \lambda_2 \Longrightarrow \vec{x}_{\text{inh}} = \begin{pmatrix} 5+\lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -3-\lambda_1+3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$\vec{p}+\vec{x}_{\text{hom}} = \vec{p}+\lambda_1\vec{r}_1+\lambda_2\vec{r}_2+\lambda_3\vec{r}_3 \text{ wobei } \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ eine andere partikuläre Lösung ist z.B. } \vec{p} + \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) $\dim Z =$ Anzahl der Pivotzeilen; $\dim L = n - \dim Z = n -$ [ Anzahl der Pivotzeilen]

(b) $\dim Z =$ Anzahl der Pivotzeilen $= 2 \Longrightarrow \dim L = 3-2 = 1$; $Z = \{\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,3,4) : \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^2\}$; $(3,0,2) \in Z \Longleftrightarrow (3,0,2) = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,3,4) \Longleftrightarrow 3 = \lambda_1$, $0 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$, $2 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2$. Die ersten zwei Gleichungen geben $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$; in der dritten Gleichung eingesetzt folgt ein Widerspruch: $2 = 3 \times 3 + 4 \times (-2)$. Also ist $(3,0,2) \notin Z$.

(4) (a) Hier müsste eine der Bedingungen von §4, Satz 4 angegeben werden, z.B. " $A$ ist invertierbar" oder " $A$ hat Rang $n$ " etc. Auch " $\det A \neq 0$ " (§5, Satz 7) wäre richtig.

(b) $\det A = 4-6 = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ ja; $\vec{x} = A^{-1}\vec{y} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\vec{y} = \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 \\ \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{pmatrix}$

(5) (a) det ist linear in $\vec{v}_1$, d.h. $\det(\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) + \lambda\det(\vec{v}_1', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$; det ist alternierend, d.h. det(2 Vektoren $\vec{v}_i$ vertauscht) $= -\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$; det ist normiert, d.h. $\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$ für die Standardbasis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

(b) $\det(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b}) = \det(\vec{a},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b}) - \underbrace{\det(\vec{b},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b})}_{0} + 2\det(\vec{c},\vec{c}-3\vec{a},\vec{b}) =$
$\det(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) - 3\underbrace{\det(\vec{a},\vec{a},\vec{b})}_{0} + 2\underbrace{\det(\vec{c},\vec{c},\vec{b})}_{0} - 6\det(\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + 6\det(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) =$
$-7\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -35$

(6) (a) $\det f = \pm\mathbb{R}^n$ −Volumsveränderungsfaktor, wobei $\pm$ je nachdem $f$ die Orientierung erhält oder umkehrt.

(b) Flächenveränderungsfaktor $= |\det f| = |4-6| = 2 \Longrightarrow f(\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : 1\le x_1\le 5,\quad 2\le x_2\le 7\})$ ist ein Parallelogramm mit Fläche $2\cdot(5-1)\cdot(7-2) = 40$ Flächeneinheiten.

(7) (a) $\mathrm{pr}_H$ hat die Matrix $A = I - \dfrac{1}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}\cdot\vec{a}^T$.

(b) $A = I - \dfrac{1}{1+4+9}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(1,2,3) = I - \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}13&-2&-3\\-2&10&-6\\-3&-6&5\end{pmatrix}$

(8) (a) Durch Verschiebung um 2 Einheiten nach links und Streckung um den Faktor 3 in $y$ – Richtung.

(b) Aufgrund der Summensätze für Sinus $\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y$ und Cosinus $\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$ gilt

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x+x) &= \cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x\\ &= \cos^3 x - \sin^2 x\cdot\cos x - 2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x\\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x\cdot\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . (Man könnte das Beispiel auch mit den Formeln von Moivre lösen; siehe Übungen.)

(9) (a) Eine Funktion $f : X\to Y$ heißt injektiv $:\Leftrightarrow$

für alle $x_1,\ x_2\in X$ gilt: $\big(f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2\big)$.

(b) Aus $g(a) = g(b)$ , d.h. $a^3 = b^3$ folgt: $0 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ .
1.Fall: $a-b=0$ , d.h. $a=b$ ;
2.Fall: $0 = a^2+ab+b^2 = (a+b/2)^2 + 3b^2/4$. Das ist nur möglich für $a=b=0$ .
Insgesamt also $a=b$ .

(10) (a) $\mathrm{Re}\,z = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$ , $\quad \mathrm{Im}\,z = \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

(b) In Polarkoordinaten gilt $-4 = 4\,\mathrm{e}^{\pi i}$ .
Somit ist $\sqrt[4]{-4} = \{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi i/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\pi i/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-3\pi i/4},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi i/4}\} = \{\pm 1\pm i\}$ , da $\mathrm{e}^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ , $\mathrm{e}^{3\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ , etc. (Skizze!)

(11) (a) Seien $(a_n)$ , $(b_n)$ und $(c_n)$ Folgen mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ;
(ii) Es gibt einen Index $N$, sodass für alle $n \geq N$ : $a_n \leq b_n \leq c_n$ .
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$ .

(b) Wegen $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ gilt: $0 \leq \dfrac{1+\cos 2n}{n} \leq \dfrac{2}{n}$ . Man setzt $a_n := 0$ und $c_n := 2/n$ . Dann ergibt sich wegen $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ der gesuchte Grenzwert $\beta = 0$ .

(12) (a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(b) $$(\sqrt{x})'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$
$$= (\sqrt{x} \text{ ist stetig}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(13) (a) Es sei $h(x) = f(g(x))$ . Falls $f$ und $g$ differenzierbar sind, so ist auch $h$ differenzierbar und es gilt $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

(b) Für $0 < x < \pi$ gilt die Identität $(\sin x)^x = \mathrm{e}^{x \ln(\sin x)}$ . Somit erhält man durch zweimaliger Anwendung der Kettenregel (und der Produktregel)
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} = \mathrm{e}^{x\ln(\sin x)} \cdot \Big(\ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}\Big) = \big(\ln(\sin x) + x\cot x\big)\cdot(\sin x)^x.$$
Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ ergibt sich $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

(14) (a) Seien $f,\, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte für alle $x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$ . Gelte weiters (i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to b^-$ (oder $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to b^-$ ); (ii) $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. Dann gilt $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b) Man hat $f(x) = x + \cos x$ , $g(x) = x$ und wählt $b = \infty$ . Beide Funktionen sind differenzierbar, $g'(x) = 1$ und $f(x) \to \infty$ , $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ . Allerdings existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\sin x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} (1-\sin x)$ nicht. Somit ist Voraussetzung (ii) nicht erfüllt und die Regel ist nicht anwendbar. Nach dem Einschließungssatz gilt jedoch $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 1$ .

(15) (a) Die Kandidaten für lokale Extrema sind (i) die Randpunkte des Definitionsintervalls, also $a$ und $b$ ; (ii) alle Punkte, in denen $f$ nicht differenzierbar ist; (iii) die stationären Punkte (d.h. die Punkte $x$ mit Ableitung $f'(x) = 0$ ). Kandidaten für Wendepunkte sind (i) alle Punkte, in den $f$ nicht zweimal differenzierbar ist; (ii) alle Punkte $x$ mit $f''(x) = 0$.

(b) Nein. Der Graph der Funktion ist überall konvex, er liegt stets oberhalb der Tangente (Skizze!).

## BEISPIELE VON UNZUREICHENDEN ANTWORTEN

(1) (a) $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{r}_k$ A

(1) (b) 1 B

(3) (b) 1, 2, nein C

(4) (a) Wenn $L_{\text{inh}}$ für jedes $\vec{y}$ aus genau einem Element besteht. D

(8) (a) Durch Verschiebung und Streckung. E

(9) (a) Eine Funktion ist injektiv, wenn ihr Graph jede Parallele zur $x$ -Achse höchstens einmal schneidet. F

(10) (b) $\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{-1} = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{i} = 1 + i.$ G

(12) (a) $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente. H

(15) (a) Kandidat für Extremum, falls $f'(x) = 0$ ;
Kandidat für Wendepunkt, falls $f''(x) = 0$ . I

KOMMENTAR: A, B, C, E sind zu wenig ausführlich. D ist zwar wahr, aber in einer sehr trivialen, d.h. offensichtlichen Weise, die man in der Logik "Tautologie" nennt. F ist nur für reelle Funktionen zutreffend. G ist unvollständig, es waren alle 4-ten Wurzeln gefragt. H ist nicht die in der Vorlesung gegebene Definition von $f'(x_0)$ , sondern eine Folgerung daraus. Zudem müsste man hier genauer sagen: $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graph von $f$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ . I ist unvollständig.

---

## BEISPIELE VON ZUSATZPUNKTEN

(2) (a) Beweis von $L_{\text{inh}} = \{\vec{p} + \vec{v} : \vec{v} \in L_{\text{hom}}\}$ wenn $\vec{p}$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$ ist (in Matrixnotation):

($\alpha$) $\vec{v} \in L_{\text{hom}} \Longrightarrow A\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow A(\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{p} + A\vec{v} = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y} \Longrightarrow \vec{p} + \vec{v} \in L_{\text{inh}}.$

($\beta$) $\vec{x} \in L_{\text{inh}} \Longrightarrow A\vec{x} = \vec{y};\quad \vec{v} = \vec{x} - \vec{p} \Longrightarrow A\vec{v} = A(\vec{x} - \vec{p}) = A\vec{x} - A\vec{p} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0} \Longrightarrow$ $\vec{v} \in L_{\text{hom}}$ und $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$

(13) (a) Beweis der Kettenregel:
Man verwendet: $$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

($\alpha$) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0),$ da $g$ differenzierbar.

($\beta$) Sei $y = g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = f'(g(x_0)),$ da $g$ stetig und $f$ differenzierbar.

Somit ist $h$ differenzierbar, und es gilt $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ nach den Rechenregeln für Grenzwerte.

## 1. Prüfung aus Mathematik A, WS 2000/01 2001 – 02 – 02

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 2, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 14, 15 möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an! Beantworten Sie bitte die Fragen zu Linearer Algebra (1–7) und die zu Analysis (8–15) auf verschiedenen Blättern.

(1) (a) Wie ist der Begriff "Koordinaten bzgl. einer Basis" definiert?

(b) Was sind die Koordinaten von $\binom{-5}{7}$ bzgl. der Basis $\vec{f}_1 = \binom{1}{1}$, $\vec{f}_2 = \binom{2}{-1}$ im $\mathbb{R}^2$?

(2) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $L$ der Lösungsraum von $A\vec{x} = \vec{0}$. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen $n$, $\dim L$, $\operatorname{rg} A$, und der Anzahl der Pivotzeilen im Gauß'schen Algorithmus?

(b) Was sind $\operatorname{rg} A$ bzw. $\dim L$, wenn $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$?

(3) (a) Es seien $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, $g(\vec{x}) = B\vec{x}$, $f\big(g(\vec{x})\big) = C\vec{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Wie sind $c_{ij}$ durch $A, B$ bestimmt?

(b) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A^T \cdot B = D$ in Tensorschreibweise an!

(4) (a) Was besagt die Cramer'sche Regel?

(b) Bestimmen Sie damit $x_2$, wenn $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$, $-2x_1 - x_3 = 2$, $2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 3$.

(5) (a) Wie ist $\vec{v} \times \vec{w}$ durch die Determinante und $\langle\ ,\ \rangle$ definiert?

(b) Welche Fläche hat das von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm?

(6) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $P(-\lambda) = \det(A+\lambda I) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$. Wie erhält man $c_0, c_1, c_2$ aus $A$?

(b) Bestimmen Sie so das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ von $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$!

(7) (a) Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix $A$?

(b) Überprüfen Sie die Aussagen in (a) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$!

(8) (a) Wie lautet die Definition von $|x|$ ?

(b) Welche $x \in \mathbb{R}$ genügen der Ungleichung $|x-1| < x+3$ ?

(9) (a) Wie lautet die geometrische Summenformel?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ .

(10) (a) Skizzieren Sie die Funktionen $y = \arcsin x$ und $y = \ln x$ .

(b) Schreiben Sie die Zahlen $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}$ und $3\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}$ in der Form $a + \mathrm{i}\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ .

(11) (a) Was besagt der Zwischenwertsatz?

(b) Ist er auf $\operatorname{sign} 2x$ am Intervall $[-1, 1]$ anwendbar? Warum bzw. warum nicht?

(12) (a) Wie lautet die Produktregel?

(b) Berechnen Sie damit die zweite Ableitung von $\sin x \cdot \cos x$ .

(13) (a) Was bedeutet *quadratische Konvergenz* beim Newtonverfahren?

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newtonverfahrens zur Lösung von $x^2 = 3$ durch. Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 1$ .

(14) (a) Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{6-2x}{x^4}\,\mathrm{d}x$ .

(15) (a) Wie lautet der Satz von Taylor?

(b) Berechnen Sie die ersten 3 Terme des Taylorpolynoms von $g(x) = \sqrt{2x+1}$ mit Entwicklungspunkt $0$ .

**2. Prüfung aus Mathematik A, WS 2000/01** 2001 – 03 – 30

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt. (Dies ist bei den Fragen 1–7, 9, 11–15 möglich.)

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) $V$ sei ein VR, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sei eine Basis von $V$ und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m \in V$. Was sagt der Basissatz jeweils über $m$, wenn $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ l.u. bzw. ein Erz.system bzw. eine Basis sind?

(b) Es seien $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ l.u.? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ ein Erz.system von $\mathbb{R}^3$? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(2) (a) Bei der Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, mit Gauß ergaben sich $j$ Pivotzeilen und die Lösungsmenge $L = \{\lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{r}_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$. Wie hängen $j$ und $k$ zusammen?

(b) Was sind $j, k, L$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$?

(3) (a) Wann heißt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar? Wie lässt sich das mit der Determinante feststellen?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar?

(4) (a) Was gilt für $\det A$ $(\alpha)$ bei Zeilenvertauschungen, $(\beta)$ bei Gauß-Schritten?

(b) Es sei $A$ wie in (3b). Bestimmen Sie $\det A$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

(5) (a) Was ist die Hessesche Normalform von $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b$?

(b) Was ist der Abstand von $Q = (1/1/1/1)$ von der Hyperebene $-3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 6$?

(6) (a) Die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ habe bzgl. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ Matrix $A$, bzgl. $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ Matrix $B$, und $T$ sei die Transformationsmatrix von der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zur Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Wie hängen $A$ und $B$ zusammen?

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$, $\vec{f}_1 = \binom{1}{2}$, $\vec{f}_2 = \binom{3}{4}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Was sind $T$ und $B$?

(7) (a) Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix $A$?

(b) Überprüfen Sie die Aussagen in (a) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$!

(8) (a) Es sei $f : D \to Y$ und $B \subseteq Y$. Definieren Sie das Urbild von $B$.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5$. Geben Sie $f^{-1}(\{-4\})$ und $f^{-1}([-1, 4))$ an.

(9) (a) Wie lautet die Umrechnungsformel von kartesischen in Polarkoordinaten?

(b) Rechnen Sie die Punkte $(3, 4)$, $(-2, -2)$ und $(-4, 3)$ in Polarkoordinaten um.

(10) (a) Wie ist der Grenzwert von Funktionen definiert?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - x - 2x^2}{3x^2 - 4}$.

(11) (a) Wie lautet das Bisektionsverfahren? Unter welchen Voraussetzungen liefert es eine Nullstelle?

(b) Machen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens für die Funktion $f(x) = x^4 - x - 3$ auf dem Intervall $[0, 2]$.

(12) (a) Wie lautet die Quotientenregel?

(b) Berechnen Sie damit die Ableitung von $\dfrac{x}{\log x}$.

(13) (a) Wie lautet die Formel für partielle Integration?

(b) Berechnen Sie $\int_0^b x\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$. Was ergibt sich für $b \to \infty$?

(14) (a) Wie lautet die Formel für das Volumen eines Drehkörpers?

(b) Berechnen Sie das durch Rotation des Parabelstücks $y = (2 - x)^2$, $0 \le x \le 1$ um die $x$-Achse entstehende Volumen.

(15) (a) Wie lautet der Satz von Taylor?

(b) Geben Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion mit Entwicklungspunkt $0$ an.

2002 - 02 - 05

## 1. Prüfung aus Mathematik A, WS 2001/02

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist theoretisch bei allen Fragen außer (7), (8), (12) möglich und dürfte am ehesten gelingen bei den Fragen (3: Herleitung von $C$ als Matrix von $f \circ g$) (6: §7, Satz 9), (9: Beweis mittels Grenzwert), (13: Pythagoras und Riemannsummen), (14: Begründung der üblichen Lösungsmethode) gelingen.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) $V$ sei ein VR, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sei eine Basis von $V$ und $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m \in V$. Was sagt der Basissatz jeweils über $m$, wenn $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ l.u. bzw. ein Erz.system bzw. eine Basis sind?

(b) Es seien $\vec{f}_1 = \binom{1}{2}$, $\vec{f}_2 = \binom{3}{4}$, $\vec{f}_3 = \binom{5}{6}$. Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ l.u.? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ein Erz.system von $\mathbb{R}^2$? Sind $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

(2) (a) Wie ist der Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert und welcher Zusammenhang besteht mit $\dim L$, wenn $L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$?

(b) Was ergibt sich für $\operatorname{rg} A$ sowie für $\dim L$, wenn $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$? Was ergibt sich für $L$?

(3) (a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $C = A \cdot B$. Schreiben Sie $c_{ij}$ in Summenschreibweise sowie in Tensorschreibweise an!

(b) Es sei $A = (1, 2) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $B = \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Bestimmen Sie $A \cdot B$ sowie $B \cdot A$ !

(4) (a) Wie lässt sich $(A^{-1})_{ji}$ durch $\det A$ und eine Streichungsdeterminante ausdrücken?

(b) Was ist $(A^{-1})_{23}$ für $A$ aus Frage (2) (b)?

(5) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $P(-\lambda) = \det(A + \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$. Wie erhält man $c_0$, $c_{n-1}$, und allgemein $c_k$ aus $A$?

(b) Bestimmen Sie so das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ von $A$ aus Frage (2) (b).

(6) (a) Es sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche Matrix hat die lineare Abbildung $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ bezüglich einer Basis $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ aus Eigenvektoren von $A$?

(b) Bringen Sie die Quadrik $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ in Hauptachsenform und bestimmen Sie ihren Typ (Ellipse, Hyperbel,...)!

(7) (a) Skizzieren sie die Graphen von $\ln$ und $\arccos$!

(b) Bestimmen Sie $\arccos(-\frac{1}{2})$ am Einheitskreis!

(8) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert?

(b) Zeigen Sie mit der Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+2} = 1$!

(9) (a) Machen Sie ein Bild, aus dem $(f^{-1})'(t_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ für $t_0 = f(x_0)$ hervorgeht.

(b) Berechnen Sie $\arccos'(t_0)$ mit den Gleichungen in (a).

(10) (a) Welche Art von Extremum (Max. oder Min.) hat $f$ in $x_0$, wenn $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ und $f$ in $x_0$ stetig ist?

(b) Bestimmen Sie entsprechend (a) die Extrema und ihre Art für
$f : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ ! Skizze! Vergessen Sie die Randpunkte nicht!

(11) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung? (Definieren Sie auch $F$!)

(b) Es sei $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$. Bestimmen Sie $F$, skizzieren Sie $f$ und $F$ und veranschaulichen Sie in der Skizze die Aussage des Hauptsatzes.

(12) (a) Welche Substitution verwendet man zur Berechnung von $\int \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ ?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 7}$ !

(13) (a) Welche Formel liefert die Bogenlänge des Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

(b) Was ergibt sich für $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{ch} x$ ? ( $\operatorname{sh} 1 \approx 1.18$)

(14) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = Cx^3 : C \in \mathbb{R}\}$ !

(15) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was ergibt sich für $\varphi \in \mathbb{R}$ nach der Euler'schen Formel?

(b) Drücken Sie $\cos^3 \varphi$ durch $\cos \varphi$ und $\cos 3\varphi$ aus.

2002 - 03 - 22

## 2. Prüfung aus Mathematik A, WS 2001/02

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (3), (5), (12), (14) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie wurde der Begriff “Basis” in der Vorlesung definiert? Wie hängt er mit den Begriffen “linear unabhängig” und “Erzeugendensystem” zusammen?

(b) Sind $\vec{w}_1 = 1 - x + x^2$, $\vec{w}_2 = 3 + x - x^2$, $\vec{w}_3 = 1 - 4x + 4x^2$ linear unabhängig im Raum $P_2$ der Polynome vom Grad $\leq 2$? Sind sie eine Basis in $P_2$?

(2) (a) Bei der Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, mit Gauß ergaben sich $j$ Pivotzeilen. Was gilt dann für $\operatorname{rg} A$ und für $\dim L_{\text{hom}}$?

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$, $\dim L_{\text{hom}}$ sowie $L_{\text{inh}}$, wenn $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = (1, 2, 3)^T$.

(3) (a) Was sind die Grundeigenschaften von $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ für $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$?

(b) Was ist $\det(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b})$, wenn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 5$?

(4) (a) Was ist der Abstand des Punktes $Q$ mit Ortsvektor $\vec{y} = \overrightarrow{UQ}$ von der Hyperebene $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b$?

(b) Was ist der Abstand von $Q = (1/1/1)$ von der Ebene $\epsilon : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$?

(5) (a) $f : V \longrightarrow V$ sei linear. Was bedeutet nach der Definition, dass $\vec{0} \neq \vec{a} \in V$ ein Eigenvektor von $f$ zum Eigenwert $\lambda$ ist?

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) (a) $T$ sei die Transformationsmatrix von der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zur Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ und $\vec{a} = \vec{e}_i x_i = \vec{f}_j y_j$. Wie hängen die Koordinaten $\vec{x}, \vec{y}$ zusammen?

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$, $\vec{f}_1 = \frac{1}{5}\binom{3}{4}$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{5}\binom{-4}{3}$, $\vec{a} = \binom{-2}{1}$. Was sind $T, \vec{x}$ und $\vec{y}$?

(7) (a) Es sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche Matrix hat die lineare Abbildung $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ bezüglich einer Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ aus Eigenvektoren von $A$?

(b) Bringen Sie die Quadrik $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$ in Hauptachsenform, bestimmen Sie ihren Typ sowie die Richtungen der Achsen.

(8) (a) Was besagen die Grenzwertsätze für Folgen?

(b) Bestimmen Sie damit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n}{2n^3-3n^2+1}$!

(9) (a) Was ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$?

(b) Zeigen Sie $\sin' = \cos$ mit der Definition der Ableitung. (Hinweis: $\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}$)

(10) (a) Welche Konstruktion definiert den Krümmungsmittelpunkt $M$? Skizze!

(b) Berechnen Sie $M$ für $f = \tan$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ mit der Formel $M = P + \dfrac{1+{y_0'}^2}{y_0''}\begin{pmatrix} -y_0' \\ 1 \end{pmatrix}$. (Hinweis: $\frac{\pi}{4} - 2.5 \approx -1.7$)

(11) (a) Wann nennt man $\Phi$ Stammfunktion von $f$? Wie lässt sich dann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch $\Phi$ ausdrücken?

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von $\arctan(x^{3/2})$ und berechnen Sie mittels (a) das bestimmte Integral $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: $\frac{\pi}{6} \approx 0.52$)

(12) (a) Wie ist das Differential $\mathrm{d}f$ definiert?

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{d}f$ für $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathrm{d}x = 0.1$ und $x = 4$. Was ist näherungsweise $\sqrt{4.1}$?

(13) (a) Wie groß ist das entstehende Volumen, wenn der Graph von $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ um die $x-$Achse rotiert?

(b) Was ergibt sich speziell für $f : [0, 10\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$ ? $(5\pi^2 \approx 49.3)$

(14) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung erster Ordnung?

(b) Lösen Sie $y' = x\,\mathrm{e}^{-y-x^2}$ zum Anfangswert $y(0) = 0$.

(15) (a) Was besagt die Eulersche Formel?

(b) Schreiben Sie $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ sowie $\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$. $(\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87)$

2002 - 06 - 11

## 3. Prüfung aus Mathematik A, WS 2001/02

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei allen Fragen außer (7), (8), (11), (13) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welche Eigenschaft hat die Lösungsmenge $L_{\text{hom}}$ eines *homogenen* linearen Gleichungssystems im Gegensatz zu $L_{\text{inh}}$?

(b) Bestimmen Sie zum Gleichungssystem $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \quad 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$ die Mengen $L_{\text{inh}}$, $L_{\text{hom}}$ sowie $\dim L_{\text{hom}}$! Ist $L_{\text{inh}}$ ein VR?

(2) (a) Wie sind die Matrixelemente $c_{ij}$ von $C = A \cdot B$ durch $a_{ij}, b_{ij}$ gegeben?

(b) Schreiben Sie $B \cdot (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{z} = \vec{u}$ sowie $A \cdot B \cdot C = D$ in Tensorschreibweise!

(3) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Unter welcher Bedingung an $\det A$ hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ für jedes $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$? Durch welche Formel ist sie gegeben?

(b) Hat $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = y_1, \quad 2x_2 - x_3 - 2x_4 = y_2, \quad 3x_3 + 5x_4 = y_3, \quad 2x_4 = y_4$ für jedes $\vec{y} \in \mathbb{R}^4$ genau eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$? Was ist hier $\operatorname{rg} A$?

(4) (a) Auf welche Vektoren steht $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht und was ist seine Länge?

(b) Was ist die Fläche des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms?

(5) (a) Durch welche Determinantengleichung bestimmt man die Eigenwerte $\lambda$ von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und wie erhält man die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}$?

(b) Was sind die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$? Warum hat $A$ keine reellen Eigenwerte?

(6) (a) Was sind die maximale bzw. minimale Normalspannung für die Spannungsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(b) Was ergibt sich speziell für $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

(7) (a) Skizzieren Sie die Graphen von $f, \dfrac{1}{f}$ und $f^{-1}$ für $f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x$.

(b) Was ist $\arctan 1$ ? (Begründung!)

(8) (a) Wie ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ definiert?

(b) Zeigen Sie mit der Definition $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$. (Nehmen Sie $0 < \epsilon < 4$ an und bestimmen Sie $\delta$!)

(9) (a) Was besagt die Kettenregel?

(b) Berechnen Sie $\left( \sqrt[3]{\dfrac{\arccos(x^3)}{\cos^3 x}} \right)'$!

(10) (a) Was sind die wesentlichen Voraussetzungen für die Regel von l'Hôpital? (In der Vorlesung $(\alpha)$ und $(\beta)$. )

(b) Sind sie im Fall $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ erfüllt? Was ergibt dieser Limes?

(11) (a) Wie ist die untere Darbouxsumme definiert?

(b) Was ist $UD(Z)$ für $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$ und $Z = \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$?

(12) (a) Wie berechnet man $\int h\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x$ mit Substitution?

(b) Bestimmen Sie $\int\limits_0^{\pi^2} \dfrac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$.

(13) (a) Wie sind $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \operatorname{th} x$ definiert?

(b) Zeigen Sie damit $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ und $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$!

(14) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?

(b) Lösen Sie $y' = x\mathrm{e}^{-y-x^2}$ zum Anfangswert $y(0) = 0$.

(15) (a) Was ist $\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ bzw. $\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ ?

(b) Folgern Sie aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ und (a) die Summensätze für Sinus und Cosinus!

2006 - 02 - 02

# 1. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2005/06

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (6), (7), (9) – (15) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Wann ist dieses Gleichungssystem lösbar, wann ist die Lösung eindeutig? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $n$, Rang $A$ und der Dimension $k$ des Lösungsraumes?

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit dem Gaußschen Algorithmus und überprüfen Sie die Aussagen von (a).

(2) (a) Geben Sie die drei Grundeigenschaften der Determinante einer $3 \times 3$ –Matrix $A$ an und diskutieren Sie die Volumsveränderung einer linearen Abbildung.

(b) $B$ entstehe aus $A$ von Frage (1) (b) durch Ersetzen von $a_{33} = -1$ mit $b_{33} = -2$. Berechnen Sie $\det B$ mit dem Gaußschen Algorithmus. Welches Volumen stellt $\det B$ dar?

(3) (a) Wie lauten die Grundeigenschaften des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^n$? Definieren Sie die Begriffe Länge und Winkel mit dem Skalarprodukt.

(b) Berechnen Sie für $\vec{a} = (2,1,2)^T$ und $\vec{b} = (3,-4,0)^T$ den Cosinus des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(4) (a) Definieren Sie das äußere Produkt $\vec{v} \times \vec{w}$ zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit det und $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (1/0/0)^T$, $B = (0/1/0)^T$, $C = (0/0/1)^T$ mit Hilfe des äußeren Produkts.

(5) (a) Begründen Sie das Verfahren zur Berechnung der Inversen einer $n \times n$ –Matrix $A$, bei dem man den Gaußschen Algorithmus auf das Gleichungssystem $(A^T|I)$ anwendet.

(b) Berechnen Sie damit $A^{-1}$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) (a) Definieren Sie die Begriffe Eigenwert, Eigenvektor, charakteristisches Polynom, algebraische und geometrische Vielfachheit.

(b) Berechnen Sie diese Ausdrücke für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(7) (a) Wie transformieren sich die Koordinaten eines Vektors bzw. die Matrix einer linearen Abbildung bei Basiswechsel?

(b) $\vec{x} = (1,1)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ seien bezüglich der Standardbasis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ definiert. Berechnen Sie $\vec{y}$ und $B$ bezüglich $\vec{f}_1 = (1,2)^T$, $\vec{f}_2 = (-2,1)^T$.

(8) (a) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei umkehrbar. Welche Formeln gelten für die Zusammensetzungen von $f$ und $f^{-1}$? Wie ist dabei die "Bildmenge" $B$ definiert?

(b) Was folgt speziell für $f(x) = \mathrm{e}^x$ bzw. für $f(x) = \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$? Warum ist $\arccos(\cos(-\pi)) \neq -\pi$?

(9) (a) Was ist $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$?

(b) Zeigen Sie $\cos' = -\sin$ mit der Definition der Ableitung!
Hinweis: $\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}$

(10) (a) Was besagt die Kettenregel?

(b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln x} + \arccos(x^{-2})}}$!

(11) (a) Wie sind Extrema definiert? Welche Kandidaten für Extrema hat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x) = |x| \cdot (1-x), \quad -2 \le x \le 2$!

(12) (a) Welche Konstruktion definiert den Krümmungsmittelpunkt $M$? Skizze!

(b) Bestimmen Sie für $x_0 = 1$ die Normale $n_{x_0}$ an $f(x) = \ln x$ sowie den Krümmungsradius $\varrho$! $(\sqrt{2} \approx 1.4)$

(13) (a) Wie sind die Begriffe "Stammfunktion" und "unbestimmtes Integral" definiert? Wie lässt sich das unbestimmte Integral durch eine einzige Stammfunktion $\Phi_1$ ausdrücken?

(b) Differenzieren Sie $\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{e}^{\arctan(x^2)}$ und berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{e}^{\arctan(x^2)}\,\mathrm{d}x$.

(14) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich für $f(x) = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$?
(Hinweis: $\mathrm{ch}^2\, u = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}\, 2u), \quad \mathrm{sh}\, 2u = 2\, \mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, u, \quad \pi(\sqrt{2} + \mathrm{arsh}\, 1) \approx 7.2$)

(15) (a) Für welche $\alpha$ ist $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergent? Skizze!

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ als Grenzwert!

2006 - 06 - 02

## 3. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2005/06

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (1), (3), (6), (7), (8), (9), (12), (13), (14), (15) möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $m$ Gleichungen in $n$ Unbekannten. Wann hat dieses Gleichungssystem keine Lösung, wann ist die Lösung eindeutig? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $n$, $\operatorname{rg} A$ und der Dimension $k$ des Lösungsraumes?
(b) Lösen Sie das Gleichungssystem für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit dem Gaußschen Algorithmus und überprüfen Sie die Aussagen von (a).

(2) (a) Unter welchen Bedingungen bilden drei Vektoren $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

(b) Bilden die Vektoren $\vec{f_1} = (1,2,3)^T$, $\vec{f_2} = (4,5,6)^T$, $\vec{f_3} = (7,8,9)^T$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

(3) (a) Wie ist die Abbildungsmatrix $A$ einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert?

(b) Berechnen Sie $A$ für $f(1,1,0) = (1,1,0)^T$, $f(1,-1,1) = (-1,1,1)^T$, $f(1,0,2) = (0,1,2)^T$.

(4) (a) Wie lauten die Grundeigenschaften von $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ für $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$?

(b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, den die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufspannen!

(5) (a) Wie lauten die Grundeigenschaften des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^n$? Definieren Sie die Begriffe Länge und Winkel mit dem Skalarprodukt.

(b) Berechnen Sie die Arbeit, die die Kraft $\vec{f} = (2,1,2)^T$ entlang des Weges $\vec{s} = (3,-4,0)^T$ leistet!

(6) (a) Erklären Sie die Cramersche Regel zur Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

(b) Berechnen Sie damit $y$, wenn $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(7) (a) Definieren Sie die Begriffe Eigenwert, Eigenvektor, charakteristisches Polynom, algebraische und geometrische Vielfachheit.

(b) Berechnen Sie diese Ausdrücke für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(8) (a) Welche Form hat die Quadrik $g(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ nach Hauptachsentransformation?

(b) Transformieren Sie die Quadrik $2xy = 1$ im $\mathbb{R}^2$ auf Hauptachsen! Geben Sie auch die Transformationsmatrix an!

(9) (a) Welche unbestimmte Typen gibt es bei Grenzwerten?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}\,\big)$.

(10) (a) Skizzieren Sie die Graphen von $f$, $\frac{1}{f}$, und $f^{-1}$ für $f(x) = \mathrm{e}^x$.

(b) Berechnen Sie $\ln(\sqrt{\mathrm{e}}\,) + \ln\frac{1}{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^{\ln 2} + \sqrt[3]{0.4^3} + \arccos(-1) + \arctan\big(\tan(100\pi)\big)$ auf 2 Dezimalen! $(\pi \approx 3.14)$

(11) (a) Was ist die Definition von $f'(x_0)$?

(b) Bestimmen Sie damit $(x^2)'$.

(12) (a) Was ist die Formel der Newtonschen Näherungsmethode?

(b) Bestimmen Sie damit den Schnittpunkt von $y = \dfrac{\pi \ln \sqrt[4]{x}}{\arctan x}$ mit $y = x^{-1.5}$. Berechnen Sie $x_1$ auf eine Dezimale zu $x_0 = 1$!

(13) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung? (Definieren Sie auch $F$!)

(b) Es sei $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$. Bestimmen Sie $F$, skizzieren Sie $f$ und $F$ und veranschaulichen Sie in der Skizze die Aussage des Hauptsatzes.

(14) (a) Schreiben Sie die Formel zum partiellen Integrieren allgemein an!

(b) Berechnen Sie $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x^2} \cdot \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$! $(\ln 2 + \frac{\pi}{2} \approx 2.26)$

(15) (a) Was ist die Formel für die Bogenlänge?

(b) Was ergibt sich für $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{ch} x$? $(\mathrm{e} \approx 2.72,\ \ \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.36)$

2007 - 02 - 01

# 1. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2006/07

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (2), (4), (5), (7), (10), (11) möglich.

Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) auf **VERSCHIEDENE** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel "Analysis" bzw. "Lineare Algebra"!

(1) (a) Wann heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar? Welche Formeln gelten dann für die Zusammensetzungen von $f$ und $f^{-1}$?

(b) Was ergibt sich für $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$? Zeichnen Sie $f, f^{-1}$ und $\frac{1}{f}$!

(2) (a) Was ist $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$?

(b) Zeigen Sie $\tan'(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2 x_0}$ mit der Definition der Ableitung (und ohne Quotientenregel)!

(3) (a) Was ist die Gleichung der Tangente an $y = f(x)$ in $(x_0/f(x_0))$?

(b) Welche zwei Tangenten an $y = x^2$ gehen durch den Punkt $(1/-3)$? Skizze!

(4) (a) Welche "Kandidaten" für Extrema hat $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x) = x \cdot |1 - x|$, $-2 \leq x \leq 2$, sowie die links- und die rechtsseitige Ableitung für $x = 1$. Skizze!

(5) (a) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen bestimmtem Integral, unbestimmtem Integral und Stammfunktion (10.3, Satz 3)?

(b) Bestimmen Sie $\int_0^1 \arctan x \, \mathrm{d}x$!

(6) (a) Wie sind $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ definiert und welche Gleichung erfüllen sie?

(b) Berechnen Sie $\int \sqrt{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x$. (Hinweis: $\operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t$, $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$)

(7) (a) Wann ist ein lineares Gleichungssytem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eindeutig* lösbar? Wann besitzt es *keine* Lösung?

(b) Lösen Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(8) (a) Welche zwei Eigenschaften charakterisieren eine lineare Abbildung $f$? Wie wird die Matrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bezüglich der Standardbasen bestimmt?

(b) Bestimmen Sie die Matrix jener linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die Vektoren um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung dreht!

(9) (a) Es sei $A$ eine $n \times n$-Matrix Wie ändert sich die Determinante $\det A$, falls zwei Spalten von $A$ vertauscht werden? Für welches $a \in \mathbb{R}$ stimmt die Gleichung $\det(2A) = a \det A$?

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A$ aus Aufgabe 7!

(10) (a) Welche drei Eigenschaften charakterisieren das Standardskalarprodukt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ im $\mathbb{R}^n$? Wie wird es berechnet?

(b) Gegeben seien die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ und $\|\vec{v}\|$.

(11) (a) Wie sind die Eigenwerte und Eigenvektoren einer $n \times n$-Matrix $A$ definiert?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(12) (a) Wie ist der Begriff "Koordinaten bezüglich einer Basis" definiert? Wie wird die Transformationsmatrix $T$ von einer beliebigen Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ nach einer Basis $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ des $\mathbb{R}^n$ bestimmt?

(b) Gegeben sei der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und die Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T$ von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ nach $\vec{f}_1, \vec{f}_2$. Geben Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sowie bezüglich der Basis $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ an.

2007 - 03 - 16

## 2. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2006/07

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (3), (4), (9), (10), (12) möglich.

Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) auf **VERSCHIEDENE** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel "Analysis" bzw. "Lineare Algebra"!

(1) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert?
(b) Untersuchen Sie entsprechend (a) mit $\epsilon = \frac{1}{2}$, ob $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+6}{3n+6} = 1$ wahr ist!

(2) (a) Wie ergibt sich der Anstieg der Tangente als Grenzwert von Sekantensteigungen? Skizze!
(b) Berechnen Sie $f'(x_0)$ als Grenzwert wenn $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Was ist also $(\sqrt[3]{x}\,)'$?
Hinweis: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

(3) (a) Schreiben Sie die Kettenregel allgemein an!
(b) Berechnen Sie ohne Rechenfehler $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ für $f(x) = \arccos\bigl(a^2 + 2b\sin(x^{-2.7})\bigr)$!

(4) (a) Was ist die Formel der Newtonschen Näherungsmethode?
(b) Bestimmen Sie damit den Schnittpunkt von $y = \ln(\mathrm{e}^{\ln x})$ mit $y = 2-x$ auf zwei Dezimalstellen, indem Sie $x_2$ zu $x_0 = 1$ berechnen. Hinweis: $\ln 3 \approx 1.1$, $\ln 2 \approx 0.7$

(5) (a) Wie sind die Darbouxsummen definiert?
(b) Bestimmen Sie $UD(Z), OD(Z), \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cos x$ und $Z = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$.

(6) (a) Welche zwei Vorgangsweisen verwendet man zur Berechnung von $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+ax+b}$?
(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}$.

(7) (a) Auf drei verschiedene lineare Gleichungssyteme wird der Gauß'sche Algorithmus angewendet mit Resultaten (i), (ii), (iii).

$$\text{(i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 19 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(ii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \text{(iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Was kann mit Hilfe dieser Resultate (i), (ii) und (iii) über die Lösbarkeit (lösbar, eindeutig lösbar, gar nicht lösbar) der ursprünglichen linearen Gleichungssysteme ausgesagt werden? Bei Lösbarkeit: Was ist die jeweilige Dimension des Lösungsraumes?

(b) Lösen Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(8) (a) Erklären Sie den Begriff *linear unabhängig.*

(b) In den folgenden Beispielen sind Vektoren gegeben:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In welchen Beispielen sind die Vektoren *linear unabhängig*? In welchen Beispielen bilden die Vektoren eine *Basis* des $\mathbb{R}^2$?

(9) (a) Was ist $A^{-1}$ für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det A \neq 0$?

(b) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^{-1}$ und machen Sie die Probe.

(10) (a) Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Auf welche Vektoren steht $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht? Was ist $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ geometrisch?

(b) Berechnen Sie $\vec{v} \times \vec{w}$ für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(11) (a) Welche besonderen Eigenschaften besitzen die Eigenvektoren symmetrischer Matrizen?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie dazu Ihre obige Aussgae über Eigenvektoren symmetrischer Matrizen.

(12) (a) Erklären Sie den Begriff *orthogonale Matrix.* Wie kann die Inverse einer orthogonalen Matrix leicht berechnet werden?

(b) Überprüfen Sie die Orthogonalität der folgenden Matrix:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2007 - 05 - 25

## 3. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2006/07

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Sie Teil (b) richtig beantworten). Dies ist bei den Fragen (3), (5), (6), (7), (11), (12) möglich.

Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) auf **VERSCHIEDENE** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel “Analysis” bzw. “Lineare Algebra”!

(1) (a) Skizzieren Sie die Funktionen $\arccos x$ und $\arctan x$.

(b) Bestimmen Sie $\arccos(\cos(99\pi))$ sowie $\{x \in \mathbb{R} : \tan x = 1\}$!

(2) (a) Wie ist $f'(x_0)$ als Grenzwert definiert?

(b) Berechnen Sie mit (a) $f'$ für $f(x) = \cos x$. Verwenden Sie dazu die Formel $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$. Bestimmen Sie dann die Tangente für $x_0 = \frac{\pi}{2}$!

(3) (a) Was besagt der Mittelwertsatz?

(b) Es sei $f : [1, \mathrm{e}] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln x$. Wo liegt der Mittelwert $x_0$, dessen Existenz der Mittelwertsatz garantiert?

(4) (a) Was besagt die Regel von l’Hôpital?

(b) Bestimmen Sie damit $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arcsin(x^2 - 1) + \mathrm{e}^{\ln(\sin(\pi x))}}{\tan(3\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - 1)}$.

(5) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung? (Definieren Sie auch $F$!)

(b) Hat die Funktion $y = g(x) = x - \int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, Extrema? Skizzieren Sie $g'$ und machen Sie eine Kurvendiskussion!

(6) (a) Schreiben Sie die Formel zur Substitution in Integralen allgemein an!

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \mathrm{sh}(\cos x) \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$ auf 2 Dezimalen! Verwenden Sie $\sqrt{\mathrm{e}} \approx \frac{5}{3}$ und $\frac{1}{15} \approx 0.065$.

(7) (a) Wann ist ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eindeutig* lösbar? Wann besitzt es *keine* Lösung?

(b) Lösen Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Wie ist der Begriff "Kordinaten bezüglich einer Basis" definiert? Was muss für drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gelten, damit diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden?

(b) Es seien drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob die zwei Vektoren $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ sind. Falls ja: Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$ bezüglisch der Basis $\vec{f_1}, \vec{f_2}$.

(9) (a) Wie wird die Matrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bezüglich der Standardbasis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bestimmt?

(b) Bestimmen Sie die Matrix jener linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die Vektoren um $45°$ im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung dreht!

(10) (a) Es seien $A$ und $B$ $n \times n$ Matrizen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind im Allgemeinen falsch?

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B), \quad \det(3A) = 3\det(A).$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A$ aus Aufgabe (7).

(11) (a) Wie sind die Eigenwerte und Eigenvektoren einer $n \times n$ Matrix $A$ definiert?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(12) (a) Welche Eigenschaften besitzt eine *orthogonale Matrix*? Es sei $A$ eine orthogonale Matrix. Was ist dann $A^T A$?

(b) Überprüfen sie die Orthogonalität der folgenden Matrix:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2008 - 02 - 01

## 1. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2007/08

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen (3), (4), (6), (9), (11) möglich.

Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) auf **VERSCHIEDENE** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel "Analysis" bzw. "Lineare Algebra"!

(1) (a) Wann heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend?
Für welche $x$ gilt dann $f^{-1}(f(x)) = x$ und für welche $x$ gilt $f(f^{-1}(x)) = x$?

(b) Skizzieren Sie ln und arccos!
Berechnen Sie $\ln\sqrt{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^{\ln 2} + \arccos(\cos(5\pi)) + \cos(\arccos 0)$!

(2) (a) Was sind jeweils $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ bzw. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ bzw. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$?

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ mit der Definition durch Zurückführung auf $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$!

(3) (a) Was besagt die Kettenregel?

(b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $f(x) = \ln(\sqrt[3]{a + \arccos(bx^2)}\,)$, $a, b$ konstant.

(4) (a) Welche Konstruktion definiert den Krümmungsmittelpunkt $M$? Skizze!

(b) Bestimmen Sie die Normale $n_{x_0}$ und die Krümmung $\kappa$ für $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$!

(5) (a) Was ist das Differential $\mathrm{d}f$? Skizze!

(b) Ergänzen Sie den Satz "Man substituiert etwas, wovon ..." und berechnen Sie dann $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{\ln^2 x + 3\ln x + 2} \cdot \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. (Hinweis: $\ln\frac{4}{3} \approx 0.29$)

(6) (a) Was ist die Formel für die Bogenlänge?

(b) Was ergibt sich für $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{ch} x$? ($\mathrm{e} \approx 2.72$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.36$)

(7) (a) Wann ist ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eindeutig* lösbar? Wann besitzt es *keine* Lösung?

(b) Lösen Sie $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Wie wird die *Abbildungsmatrix* einer linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bestimmt?

(b) Bestimmen Sie die Matrix jener linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die Vektoren an der Geraden $x_1 + x_2 = 0$ spiegelt.

(9) (a) Es seien $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ und $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ beliebige Basen des $\mathbb{R}^n$. Wie wird die *Transformationsmatrix* $\mathbf{T}$ von $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ nach $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ bestimmt?

(b) Es seien drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass die zwei Vektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ sind. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

(10) (a) Es sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$ Matrix. Wie ändert sich die Determinante von $\mathbf{A}$, falls zwei Spalten von $\mathbf{A}$ vertauscht werden? Wie ändert sich die Determinante von $\mathbf{A}$, falls $\mathbf{A}$ mit $2$ multipliziert wird?

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(11) (a) Wie sind *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* definiert?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(12) (a) Erklären Sie die Begriffe *Orthonormalbasis* und *orthogonale Matrix.*

(b) Überprüfen Sie, dass die folgende Matrix eine orthogonale Matrix ist:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2008 - 03 - 14

## 2. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2007/08

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen 2 – 6, 8, 11 möglich.

Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) auf **VERSCHIEDENE** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel “Analysis” bzw. “Lineare Algebra”!

(1) (a) Skizzieren Sie die zwei Funktionen $\tan x$, $|x| \le \pi$, sowie $\arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie geometrisch $\arctan 1$ sowie $\arcsin \frac{1}{2}$!

(2) (a) Was sagen die GWS über $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$? Was gilt, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}\,\right)$!

(3) (a) Was besagt die Quotientenregel?

(b) Vereinfachen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x \cdot \cos(x^2))}{\mathrm{e}^{\ln(\sin x)}}$ und berechnen Sie $f'(x)$!

(4) (a) Was ist die Formel der Newtonschen Näherungsmethode?

(b) Bestimmen Sie damit den Schnittpunkt von $y = 2 - x$ mit $y = \tan x$ bei $\frac{\pi}{4}$. (Skizze!) Berechnen Sie $x_1$ auf zwei Dezimalen zu $x_0 = \frac{\pi}{4}$! (Hinweis: $\frac{\pi}{6} \approx 0.52$)

(5) (a) Wann nennt man $\Phi$ Stammfunktion von $f$? Wie lässt sich dann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch $\Phi$ ausdrücken?

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $\arcsin(x^{3/2})$ und dann $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt[3]{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,\mathrm{d}x.$
Hinweis: $\frac{\pi}{9} \approx 0.35$

(6) (a) Was ist die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich, wenn der Graph von $y = x\,\mathrm{e}^x$, $x \in [0,1]$, um die $x-$Achse rotiert?

(7) (a) Auf drei verschiedene lineare Gleichungssysteme wird der Gauß'sche Algorithmus angewendet mit Resultaten (i), (ii), (iii).

$$\text{(i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 19 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right), \text{(ii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{(iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Was kann mit Hilfe dieser Resultate (i), (ii) und (iii) über die Lösbarkeit (lösbar, eindeutig lösbar, gar nicht lösbar) der ursprüngliche linearen Gleichungssysteme ausgesagt werden. Bei Lösbarkeit: Was ist die jeweilige Dimension des Lösungsraumes?

(b) Lösen Sie $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(8) (a) Was ist $\mathbf{A}^{-1}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det \mathbf{A} \neq 0$?

(b) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$ und machen Sie die Probe.

(9) (a) Erklären Sie den Begriff *Basis*.

(b) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (i) linear unabhängig, (ii) eine Basis des $\mathbb{R}^3$, (iii) ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ sind.

(10) (a) Wie wird die *Abbildungsmatrix* einer linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bestimmt?

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix jener linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die Vektoren um $45°$ im Gegenuhrzeigersinn dreht.

(11) (a) Es seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ <u>beliebige</u> Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Was ist richtig, was ist falsch?
(i) $\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\|$, (ii) $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$, (iii) $\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda^2\|\mathbf{v}\|$.
Was ist richtig, was ist falsch?
(iv) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$, (v) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$, (vi) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$.

(b) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und $\|\mathbf{v}\|$.

(12) (a) Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ $n \times n-$Matrizen und $\mathbf{A}$ invertierbar.
Was ist richtig, was ist falsch?
(i) $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$, (ii) $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$, (iii) $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda \det \mathbf{A}$, (iv) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ durch Entwickeln nach der ersten Spalte.

2008 - 06 - 13

## 3. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2007/08

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen 3 – 6, 8, 11 möglich.

Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) auf **VERSCHIEDENE** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel "Analysis" bzw. "Lineare Algebra"!

(1) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert?

(b) Bestimmen Sie $N$ für $a_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$ und $\epsilon = \frac{1}{5}$. Machen Sie eine Probe!

(2) (a) Durch welchen Grenzwert ist die Ableitung definiert?

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ als Grenzwert!

(3) (a) Welche "Kandidaten" für Extrema hat $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x| \cdot \mathrm{e}^x$!

(4) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung? (Definieren Sie auch $F$!)

(b) Es sei $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin x$. Bestimmen Sie $F$, skizzieren Sie $f$ und $F$ und veranschaulichen Sie in einer Skizze die Aussage des Hauptsatzes.

(5) (a) Schreiben Sie die Formel für die partielle Integration allgemein an!

(b) Berechnen Sie $\int_0^{1/2} \arccos x \,\mathrm{d}x$! Bestimmen Sie auch $\arccos \frac{1}{2}$!

(6) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich, wenn der Graph von $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0, 1]$, um die $x-$Achse rotiert? ($\pi \approx 3$, $\mathrm{e}^2 \approx 8$, $\mathrm{e}^{-2} \approx 0$)

(7) (a) Wann ist ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eindeutig* lösbar? Wann besitzt es *keine* Lösung?

(b) Lösen Sie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Wie ist die Inverse einer $n \times n-$Matrix $\mathbf{A}$ definiert? Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beliebige invertierbare $n \times n-$Matrizen. Was ist richtig, was ist falsch?
(i) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$, (ii) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$, (iii) $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$.

(b) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$ und lösen Sie damit das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

(9) (a) Wie wird die *Abbildungsmatrix* einer linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bestimmt?

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix jener linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ um den Faktor $a$ streckt.

(10) (a) Welche drei Eigenschaften muss $\langle\ ,\ \rangle$ besitzen, damit es ein Skalarprodukt ist?

(b) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, $\|\mathbf{v}\|$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ für

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(11) (a) Wie sind *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* definiert?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(12) (a) Erklären Sie die Begriffe *Orthonormalbasis* und *orthogonale Matrix.*

(b) Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die drei Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v} = (1\ \ -1\ \ 2)^T$ bezüglich dieser Basis.

2012 - 02 - 10

# 1. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2011/12

Zum Bestehen der Prüfung müssen 3 der 6 Fragen aus Analysis sowie 3 der 6 Fragen aus Linearer Algebra korrekt beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen 3, 4, 6 möglich.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen. Verwenden Sie bitte für Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) **verschiedene** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel "Analysis" bzw. "Lineare Algebra"!

(1) (a) Wann heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend? Welche Formeln gelten dann für die Zusammensetzungen von $f$ und $f^{-1}$?
(b) Zeichnen Sie $f, f^{-1}$ sowie $\frac{1}{f}$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x$! Vereinfachen Sie für $x > 0$ die Funktion $g(x) = \sqrt{\ln(\sqrt[4]{\mathrm{e}^x}\,)} + \sqrt{\mathrm{e}^{x^2}} + \ln\Big(\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x}}\Big) + \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{x}{n})^n$.

(2) (a) Wie ergibt sich $f'(x_0)$ als Grenzwert von Sekantensteigungen? Skizze!
(b) Berechnen Sie $f'(x_0)$ als Grenzwert für $f(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie dann die Tangente für $x_0 = \frac{1}{4}$! Skizze!

(3) (a) Was ist die Formel des Newtonschen Näherungsverfahrens?
(b) Bestimmen Sie damit den Schnittpunkt von $y = \arccos(\ln x)$ und $y = \arctan x$. Berechnen Sie $x_1$ auf eine Dezimale zu $x_0 = 1$! $(\pi \approx 3)$

(4) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung? (Definieren Sie auch $F$!)
(b) Bestimmen Sie die Extrema von $g : [0, \pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto 2\sqrt{x}\sin x - \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
(Berechnen Sie nicht $g$ sondern $g'$ und untersuchen Sie, wo $g' > 0$ bzw. $< 0$!)

(5) (a) Welche zwei Vorgangsweisen verwendet man zur Berechnung von $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + ax + b}$?
(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 4}$! $(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6)$

(6) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?
(b) Was ergibt sich, wenn der Graph von $y = \mathrm{e}^x$, $x \in [0, 1]$, um die $x-$Achse rotiert? $\big(\operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u$, $\operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$, $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\pi\big[\ln(\mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}^2 + 1}) + \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}\big] \approx 22.9\big)$

(7) (a) Wann ist ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eindeutig* lösbar? Wann besitzt es *keine* Lösung?

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Es seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Was ist richtig, was ist falsch?

(i) $\| -\mathbf{v}\| = -\|\mathbf{v}\|$, (ii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2$.

(b) Berechnen Sie $\|\mathbf{v}\|, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ für $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(9) (a) (a) Erklären Sie den Begriff *Orthonormalbasis.*

(b) Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten $\mathbf{x}_{\mathcal{F}}$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ mit $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(10) (a) Es seien $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ und $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ beliebige Basen eines Vektorraums $V$. Wie ist die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$ allgemein definiert? Achtung: $V$ muss nicht notwendigerweise $\mathbb{R}^n$ sein!

(b) Es sei $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{F}$ aus Aufgabe (9b) eine weitere Basis. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

(11) (a) Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Ergänzen Sie die folgenden 2 Ausdrücke unter Verwendung der Linearität von $g$:

(i) $g(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \ldots\ldots\ldots$ (ii) $g(\lambda\mathbf{v}) = \ldots\ldots\ldots$

(b) Es sei $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ die Orthonormalbasis aus Aufgabe (9b) und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jene Abbildung, die Vektoren an der von $\mathbf{f}_1$ aufgespannten Geraden speigelt. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(g)$.

(12) (a) Wie sind *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* einer linearen Abbildung $g$ definiert?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2012 - 03 - 09

## 2. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2011/12

Zum Bestehen der Prüfung müssen 3 der 6 Fragen aus Analysis sowie 3 der 6 Fragen aus Linearer Algebra korrekt beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen 2 – 5, 10, 11 möglich.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen. Verwenden Sie bitte für Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) **verschiedene** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel "Analysis" bzw. "Lineare Algebra"!

(1) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert?

(b) Zeigen Sie mit der Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+2} = 1$! Was ist speziell $N$ für $\epsilon = 0.1$?

(2) (a) Schreiben Sie die Kettenregel allgemein an!

(b) Vereinfachen Sie $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}}}{\arctan x}\right)$ und bestimmen Sie $f'(x)$. Kontrollieren Sie Ihre Rechnung ganz genau!

(3) (a) Welche "Kandidaten" für Extrema hat $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x) = x \cdot |x-1|, \quad -2 \le x \le 2$, sowie $f'(1+), f'(1-)$. Skizze!

(4) (a) Was sind die Formeln für die Normale $n_{x_0}$ und die Krümmung $\kappa$?

(b) Berechnen Sie $n_{x_0}$ und $\kappa$ für $f(x) = x^2 + \operatorname{sh} x$ und $x_0 = 0$. Bestimmen Sie daraus den Krümmungsmittelpunkt $M$. Skizze!

(5) (a) Schreiben Sie die Formel zum partiellen Integrieren allgemein an!

(b) Berechnen Sie damit $\int_0^1 \arccos x \,\mathrm{d}x$. Skizze! (Wenn Sie wollen, können Sie das Ergebnis mittels Spiegelung und $\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x$ überprüfen.)

(6) (a) Wie ist $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ definiert?

(b) Bestimmen Sie $\int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+8}$! (Verwenden Sie $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$; $\quad \ln 2 \approx 0.7$)

(7) (a) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Welche Aussagen sind richtig, welche sind falsch?
(i) Falls $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ eindeutig lösbar.
(ii) Ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $n$ Gleichungen und $n$ Unbekannten ist immer lösbar.
(iii) Ein homogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ist immer lösbar.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Erklären Sie den Begriff *orthogonale Matrix.*

(b) Ist die Matrix $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *orthogonal*? (Begründung)
Bestimmen Sie die Inverse von $\mathbf{A}$.

(9) (a) Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen mit $\det \mathbf{A} = 4$ und $\det \mathbf{B} = 3$.
Was ist dann $\det(\mathbf{AB})$ und $\det(\mathbf{A}^{-1})$?

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ durch Entwickeln nach der ersten Spalte.

(10) (a) Es sei $g : V \to W$ eine lineare Abbildung, $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ eine beliebige Basis von $V$ und $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ eine beliebige Basis von $W$. Wie ist die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g)$ bezüglich der Basen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ definiert?

(b) Es seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen mit Abbildungsmatrizen

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(g^{-1})$ und $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(g \circ h)$.

(11) (a) Wie werden die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* einer Matrix $\mathbf{A}$ berechnet?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(12) (a) Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.
Wann ist eine quadratische Form $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ positiv definit?

(b) Ist die quadratische Form $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ für $\mathbf{A}$ aus Aufgabe (11b) positiv definit? (Begründung)

2012 - 06 - 29

**4. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2011/12**

Zum Bestehen der Prüfung müssen 3 der 6 Fragen aus Analysis sowie 3 der 6 Fragen aus Linearer Algebra korrekt beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei den Fragen 1, 3, 6 möglich.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen. Verwenden Sie bitte für Ihre Lösungen zu Analysis (Fragen 1 – 6) bzw. Lineare Algebra (Fragen 7 – 12) **verschiedene** Blätter und legen Sie die zwei Teile beim Abgeben auf die entsprechenden Stapel "Analysis" bzw. "Lineare Algebra"!

(1) (a) Wann heißt $f$ monoton fallend? Wann heißt es umkehrbar? Welches folgt aus welchem?

(b) Es sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$. Skizzieren Sie die drei Graphen von $f, f^{-1}$ sowie $\frac{1}{f}$. Berechnen Sie $\arccos(\cos(3\pi)) + \cos(\arccos(0.3)) + \cos(\frac{2\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{4})$!

(2) (a) Bringen Sie die Gleichung der Tangente an $y = f(x)$ in $x_0$ in die Form $y = kx + d$!

(b) Für welche Tangente an $y = \sqrt[3]{x}$ gilt $d = 1$? Skizzieren Sie den Graph von $f$ und diese Tangente! $(\frac{1}{8} = 0.125)$

(3) (a) Schreiben Sie die Quotientenregel allgemein an!

(b) Berechnen Sie ohne Rechenfehler die Ableitung für $y = \dfrac{\ln(\arccos x)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$!

(4) (a) Wie sind die Darbouxsummen definiert?

(b) Bestimmen Sie $UD(Z)$, $OD(Z)$ sowie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f(x) = \cos x$, $[a, b] = [0, \pi]$ und $Z = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. Skizze!

(5) (a) Welche Substitutionen macht man in Integralen mit $\sqrt{P(x)}$, wenn $P(x)$ ein quadratisches Polynom ist?

(b) Berechnen Sie $\int \sqrt{4x - x^2 - 3}\,\mathrm{d}x$!

(6) (a) Wie erhält man die Krümmung $\kappa$ aus der Bogenlänge $s$ und dem Winkel $\varphi$ der Tangente zur $x-$Achse?

(b) Berechnen Sie $\varphi(s)$ für $f : [0, \infty[ \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{ch} x$! Bestimmen Sie daraus $\kappa$ und überprüfen Sie es mit der Formel $\kappa = |y''|(1 + y'^2)^{-3/2}$!

(7) (a) Wann ist ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eindeutig* lösbar? Wann besitzt es *keine* Lösung?

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Es seien $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^m$. Was ist richtig, was ist falsch?
(i) Falls $n = m$, dann sind die Vektoren $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ **immer** eine Basis des $\mathbb{R}^m$.
(ii) Falls $n > m$, dann sind die Vektoren $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ **niemals** eine Basis des $\mathbb{R}^m$.

(b) Sind die Vektoren $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(9) (a) Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\det \mathbf{A} = 3$. Weiters sei $\mathbf{B}$ jene Matrix, die wir erhalten, wenn wir die ersten beiden Spalten von $\mathbf{A}$ vertauschen. Was ist dann die Determinante von $\mathbf{B}$?

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ durch Entwickeln nach der 3. Spalte.

(10) (a) Erklären Sie den Begriff *orthogonale* Matrix.

(b) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ der folgenden **orthogonalen** Matrix:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(11) (a) Es sei $g : V \to V$ eine beliebige **lineare** Abbildung, $\lambda$ ein Eigenwert von $g$ und $\mathbf{v}$ ein zum Eigenwert $\lambda$ gehöriger Eigenvektor. Was ist richtig, was ist falsch?
(i) $g(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, (ii) $g(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, (iii) $g(\lambda\mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{v})$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(12) (a) Erklären Sie die Begriffe
- *symmetrische* Matrix,
- *positiv definite* Matrix.

(b) Ist die Matrix $\mathbf{A}$ aus Aufgabe (11) positiv definit?

2013 - 02 - 08

# 1. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2012/13

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 6, 7, 11 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie wird der Begriff "Basis" mit Linearkombinationen definiert?

(b) Zeigen Sie so, dass $\vec{f}_1 = \binom{1}{1}, \vec{f}_2 = \binom{3}{1}$ eine Basis im $\mathbb{R}^2$ sind! Was sind die Koordinaten von $\vec{v}$ bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2$?

(2) (a) Wann nennt man $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear? Wie erhält man aus $f$ die zugehörige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$?

(b) Was ist die Matrix der Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $x_2 = -x_1$? Skizze!

(3) (a) Welche Formel für $\det A$ ergibt sich bei Entwicklung nach der $i-$ten Zeile?

(b) Berechnen Sie $\det A$ in Frage (5) (b) durch Entwicklung nach der 2. Zeile!

(4) (a) Geben Sie eine Formel für $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$ im $\mathbb{R}^n$ an!

(b) Berechnen Sie $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$ für $\vec{v} = \binom{1}{2}, \vec{w} = \binom{-3}{-1}$ exakt in Grad!

(5) (a) Welche Determinantengleichung gilt für die Eigenwerte $\lambda$ von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche Gleichung gilt für einen Eigenvektor $\vec{x}$ zu $\lambda$?

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ hat den doppelten Eigenwert 1. Bestimmen Sie

($\alpha$) aus $\operatorname{sp} A$ den dritten Eigenwert, ($\beta$) die Eigenvektoren von $A$!

(6) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert?

(b) Zeigen Sie entsprechend (a) mit $\epsilon = \frac{1}{3}$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+7}{n+5} = \dfrac{3}{2}$ falsch ist!

(7) (a) Wie ist $f'(x_0)$ als Grenzwert definiert?

(b) Berechnen Sie $f'$ für $f(x) = \mathrm{e}^x$ mit der Definition und bestimmen Sie die Tangente für $x_0 = 1$! Skizze!

(8) (a) Was ist die Formel des Newtonschen Näherungsverfahrens?

(b) Bestimmen Sie damit den Schnittpunkt von $y = \arccos x$ und $y = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\right)$. Berechnen Sie $x_1$ auf zwei Dezimalen zu $x_0 = 0$. $(\pi \approx 3)$

(9) (a) Was sind die Formeln für die Normale $n_{x_0}$ bzw. für die Krümmung $\kappa$?

(b) Es sei $y = x^2$ und $x_0 = 1$. Bestimmen Sie $\kappa, n_{x_0}$ sowie den Krümmungsmittelpunkt $M$, indem Sie von $P = (1/1)$ aus die Länge $\varrho$ auf $n_{x_0}$ gehen! Skizze!

(10) (a) Wie lassen sich $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bzw. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ durch eine Stammfunktion $\Phi$ ausdrücken?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(5+\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4\sin x + 3}$! $(\ln 3 \approx 1.1)$

(11) (a) Wie sind $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ definiert und welche Gleichung erfüllen sie?

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $L$ von $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$!
(Hinweis: $\operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t$, $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$)

(12) (a) Was ergibt $\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x})$ bzw. $\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x})$ für $a, b \in \mathbb{R}$?

(b) Berechnen Sie $\int_0^\infty \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\,\mathrm{d}x$ für $a < 0$ mittels (a)!

2013 - 03 - 01

## 2. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2012/13

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 7 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$. Wie hängen $n$, $\dim L$, $\operatorname{rg} A$ und die Anzahl der Pivotzeilen im Gauß'schen Algorithmus zusammen?

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A, \dim L$ und $L$ für $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$!

(2) (a) Wie erhält man die Matrix $C$ von $f \circ g$ wenn $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $g(\vec{x}) = B\vec{x}$?

(b) Schreiben Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ sowie $AB = C$ in Summen- und in Tensorschreibweise an (für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{m\times p}$).

(3) (a) Was ist die anschauliche Bedeutung von $\det f$ für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear?

(b) Welche Fläche hat $f(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 7\})$ wenn $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$?

(4) (a) Wie erhält man die Koordinaten von $\vec{v}$ bzgl. einer ONB $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$?

(b) Warum ist $\vec{f}_1 = \frac{1}{5}\binom{3}{4}, \vec{f}_2 = \frac{1}{5}\binom{-4}{3}$ eine ONB im $\mathbb{R}^2$? Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{v} = \binom{2}{2}$ und machen Sie eine Probe!

(5) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda + c_0$. Wie erhält man $c_0, c_1, c_2$ aus $A$?

(b) Bestimmen Sie so $P(\lambda)$ zu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und die Eigenwerte! (Sie sollten $\det A = 0$ erhalten; $\sqrt{15} \approx 3.9$)

(6) (a) Wann heißt $f$ monoton steigend? Wann heißt $f$ umkehrbar (= injektiv)?

(b) Skizzieren Sie die 3 Graphen von $f, f^{-1}$ und $\frac{1}{f}$ für $f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R} : x \mapsto \tan x$! Berechnen Sie $\arctan(\tan\pi) + \arctan(\tan 0.3) + 3\arctan(\frac{\pi}{4}) + \tan\frac{\pi}{3}$!

(7) (a) Was ist die Gleichung der Tangente an $y = f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$?

(b) Für welches $x_0$ geht die Tangente an $y = \ln x$ durch den Ursprung? Skizze!

(8) (a) Was besagt die Kettenregel?

(b) Berechnen Sie ohne Rechenfehler $f'$ für $f(x) = \arctan\bigl(\ln(a^2 + 7b^2\sqrt[3]{x})\bigr)$!

(9) (a) Welche “Kandidaten” für Extrema hat $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $g : [\frac{1}{2}, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \mathrm{e}^x \ln x - \int\limits_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. (Berechnen Sie nicht $g$ sondern $g'$ (mit dem Hauptsatz der Integralrechnung) und untersuchen Sie, wo $g' > 0$ bzw. $< 0$ ist.)

(10) (a) Für welche $\alpha$ ist $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergent? Skizze! (b) Berechnen Sie $\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2 + x^2}$ !

(11) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich für $f(x) = \cos x,\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$? (Hinweis: $\mathrm{ch}^2\, u = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}\, 2u),\quad \mathrm{sh}\, 2u = 2\,\mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, u,\quad \pi(\sqrt{2} + \mathrm{arsh}\, 1) \approx 7.2$)

(12) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was ergibt sich für $\varphi \in \mathbb{R}$ nach der Eulerschen Formel?

(b) Zeigen Sie mit (a) die Summensätze für sin und cos!

2013 - 04 - 08

## 3. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2012/13

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 6 und 11 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welcher Zusammenhang besteht bei linearen Gleichungssystemen zwischen $L_{\text{inh}}$, $L_{\text{hom}}$ und einer partikulären Lösung $\vec{p}$ (falls diese existiert)?

(b) Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{inh}}$ und $\vec{x}_{\text{hom}}$ für das lineare Gleichungssystem $3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \quad x_1 - x_2 + x_5 = 5.$

(2) (a) Was sagt der Basissatz, wenn $\dim V = n$ und $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n}$ l.u. im VR $V$ sind?

(b) Es seien $\vec{f_1} = \binom{1}{2}, \vec{f_2} = \binom{2}{4}, \vec{f_3} = \binom{2}{3} \in \mathbb{R}^2 = V$. Sind $(\alpha)$ $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ l.u.? $(\beta)$ $\vec{f_1}, \vec{f_3}$ l.u.? $(\gamma)$ $\vec{f_1}, \vec{f_3}$ eine Basis? $(\delta)$ $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ eine Basis?

(3) (a) Was gilt für $\det A$ $(\alpha)$ bei Zeilenvertauschungen, $(\beta)$ bei Gauß-Schritten?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\det A$ mit dem Gaußschen Algorithmus! (Wenn Sie wollen, können Sie mit Sarrus eine Probe machen.)

(4) (a) Wie ist $\vec{v} \times \vec{w}$ durch die Determinante und $\langle\ ,\ \rangle$ definiert?

(b) Welche Fläche hat das von $(1,2,3)^T$ und $(-1,2,4)^T$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm?

(5) (a) Welche (im Skriptum eingerahmte) Gleichung gilt für einen Eigenvektor $\vec{x}$ einer Matrix $A$ zum Eigenwert $\lambda$?

(b) Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma$ so, dass $\vec{x} = (1,1,1)^T$ ein Eigenvektor von $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ -2 & 3 & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $-1$ ist!

(6) (a) Geben Sie zumindest 3 unbestimmte Typen bei Grenzwerten an!

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\,\big)$!

(7) (a) Was besagt die Quotientenregel?

(b) Berechnen Sie ohne Rechenfehler $f'$ für $f(x)=\dfrac{\tan(a^2+\sin\sqrt{x})}{\ln^2 x}$! ($a$ ist eine Konstante.)

(8) (a) Was ist die Formel für die Krümmung $\kappa$?

(b) Bestimmen Sie $\kappa$ und den Krümmungsmittelpunkt $M$ zum Punkt $P=(0/0)$ auf der Parabel $y=x^2$! Skizze!

(9) (a) Schreiben Sie die Formel zum partiellen Integrieren allgemein an!

(b) Berechnen Sie $\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x$!

(10) (a) Was ist die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich, wenn der Graph von $y=\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{x^2/2}$, $0\le x\le 1$, um die $x-$Achse rotiert?

(11) (a) Wie ist $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ definiert? (b) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$!

(12) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was ergibt sich für $\varphi\in\mathbb{R}$ nach der Eulerschen Formel?

(b) Zeigen Sie mit (a) die Summensätze für $\sin$ und $\cos$!

2014 - 02 - 06

## 1. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2013/14

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 6 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie wird der Begriff "Basis" mit Linearkombinationen definiert?

(b) ($\alpha$) Warum sind $\vec{f_1} = \binom{1}{2}, \vec{f_2} = \binom{2}{1}$ eine Basis im $\mathbb{R}^2$? ($\beta$) Was sind die Koordinaten von $\vec{v} = \binom{4}{-1}$ bzgl. $\vec{f_1}, \vec{f_2}$? ($\gamma$) Machen Sie eine Probe!

(2) (a) Wie erhält man die Spalten der Matrix $A$ zur lin. Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

(b) Berechnen Sie $A$ für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linear mit $f(1,1) = (1,2,3)^T, f(-2,1) = (0,1,-1)^T$!

(3) (a) Wie lässt sich $(A^{-1})_{ji}$ durch $\det A$ und eine Streichungsdeterminante ausdrücken?

(b) Bestimmen Sie damit $(A^{-1})_{23}$ für $A$ in Aufgabe 4.

(4) (a) Wie sind EWe und EVen für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert? Was ist a.V. bzw g.V.?

(b) Bestimmen Sie EWe, EVen, a.V. und g.V. für $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!

(5) (a) Welche Matrix $B$ hat eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzgl. einer Basis aus EVen?

(b) Was ist $B$, wenn $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Spiegelung ist?

(6) (a) Wie ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ für eine Folge $a_n$ definiert?

(b) Ab welchem $N$ ist der Abstand von $a_n = \dfrac{n-3}{2n+4}$ und $\frac{1}{2}$ kleiner als $\epsilon = 0.1$?

(7) (a) Was sind jeweils $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$?

(b) Zeigen Sie $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ mit der Definition von $f'(x_0)$!

(8) (a) Was besagt die Kettenregel für $(f(g(x))'$?

(b) Differenzieren Sie $z(t) = \cos^2(a^2 + t\,\mathrm{e}^{bt})$ ohne Fehler! ($a, b$ sind Konstante.)

(9) (a) Welche Art von Extrema hat $f$ in $x_0$, wenn $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ (und $f$ stetig ist)?

(b) Hat $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{|x-1|} + x \arctan x$ (mit $D = \mathbb{R}$) in $x_0 = 1$ ein Extremum? Wenn ja, Minimum oder Maximum? (Berechnen Sie $f'(1-)$ sowie $f'(1+)$!)

(10) (a) Was sind die Formeln für die Normale $n_{x_0}$ sowie für die Krümmung $\kappa$?

(b) Für welches $x_0$ geht $n_{x_0}$ zu $y = \sqrt{x}$ durch $(\frac{1}{2}/2)$? Was ist $\kappa$ für dieses $x_0$?

(11) (a) Was ist die Formel für die Kurvenlänge des Graphen von $y = f(x)$, $a \le x \le b$?

(b) Was ergibt sich für $f(x) = \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le b$?

(12) (a) Für welche $\alpha$ ist $\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergent? (b) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{(2x+1)(x+2)}$!

2014 - 02 - 28

## 2. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2013/14

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 3, 6, 7 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$. Wie ist der Zeilenraum $Z$ von $A$ definiert und wie hängt $\operatorname{rg} A = \dim Z$ mit $\dim L$ zusammen?

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

($\alpha$) Was sind hier $m, n, \operatorname{rg} A, \dim L$? ($\beta$) Ist $(1,1,1) \in Z$? Ist $(1,1,1)^T \in L$?

(2) (a) Wie erhält man die Matrix $C$ von $f \circ g$ wenn $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $g(\vec{x}) = B\vec{x}$?

(b) Schreiben Sie $A\vec{x} = BC\vec{y}$ in Summen- und in Tensorschreibweise an (für $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$).

(3) (a) Wie ist $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ definiert für $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$?

(b) Berechnen Sie $\det A$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und erklären Sie das Vorzeichen mittels (a) und einer Skizze.

(4) (a) Wann heißt $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ ONB in $\mathbb{R}^n$? Wie erhält man die Koordinaten von $\vec{v}$ bzgl. dieser Basis?

(b) Bestimmen Sie so die Koordinaten von $\vec{v} = \binom{2}{2}$ bzgl. $\vec{f}_1 = \frac{1}{5}\binom{3}{4}, \vec{f}_2 = \frac{1}{5}\binom{-4}{3}$ und machen Sie die Probe!

(5) (a) Was gilt für die EWe und EVen von symmetrischen Matrizen?

(b) Es sei $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

($\alpha$) Überprüfen Sie, dass $(2,2,1)^T$ und $(1,-2,2)^T$ EVen sind! ($\beta$) Bestimmen Sie eine ONB $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ aus EVen! ($\gamma$) Was ist die Matrix $B$ von $f$ bzgl. $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$?

(6) (a) Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv? Was ist die Bildmenge $B$?

(b) Es sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$. Warum ist $f$ injektiv? Was ist $B$? Berechnen Sie $\arccos(\cos \frac{4\pi}{3}) - \ln \sqrt[3]{\mathrm{e}^{\pi}}$ und skizzieren Sie $f, f^{-1}, \frac{1}{f}$!

(7) (a) Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig? Wann lässt sich $f$ stetig fortsetzen in $x_0 \notin D$?

(b) Kann man $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \ln x$ stetig in $x_0 = 0$ fortsetzen? Skizze! Hinweis: $x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1}}$, l'Hôpital verwenden!

(8) (a) Was ist $(f^{-1})'(t_0)$ für $t_0 = f(x_0)$?

(b) Bestimmen Sie damit die Ableitung von arccos!

(9) (a) Wann nennt man $\Phi$ Stammfunktion von $f$? Wie lässt sich damit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ausdrücken?

(b) ($\alpha$) Bestimmen Sie durch Integrieren eine Stammfunktion $\Phi$ von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$!
($\beta$) Überprüfen Sie, dass $\Phi' = f$! Hinweis: $\operatorname{arsh} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$

(10) (a) Wie berechnet man $\int h(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ mit Substitution?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2(6 \arctan x)}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$!

(11) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Bestimmen Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius $R$!

(12) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was besagt die Eulersche Formel?

(b) Stellen Sie damit $\sin^4 x$ durch $\cos(4x)$ und $\cos(2x)$ dar!

2014 - 04 - 07

# 3. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2013/14

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 6, 7, 10 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welcher Zusammenhang besteht bei linearen Gleichungssystemen zwischen $L_{\text{inh}}$, $L_{\text{hom}}$ und einer partikulären Lösung $\vec{p}$ (falls diese existiert)?

(b) Bestimmen Sie $\vec{x}_{\text{inh}}$, $\vec{x}_{\text{hom}}$ sowie 2 partikuläre Lösungen zum Gleichungssystem $3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \quad x_1 - x_2 + x_5 = 5$.

(2) (a) Was passiert mit $\det A$ $(\alpha)$ bei Zeilenvertauschungen, $(\beta)$ bei Gauß-Schritten?

(b) Bestimmen Sie $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ mit dem Gauß'schen Algorithmus!

(3) (a) Auf welche Vektoren steht $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht und was ist seine Länge?

(b) Was ist die Fläche des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms?

(4) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda + c_0$. Wie erhält man $c_0, c_1, c_2$ aus $A$?

(b) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -5$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ sowie $\det A$ und $\operatorname{sp} A$!

(5) (a) $T$ sei die Transformationsmatrix von der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zur Basis $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ und $\vec{a} = \vec{e}_i x_i = \vec{f}_j y_j$. Wie hängen die Koordinaten $\vec{x}, \vec{y}$ zusammen?

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$, $\vec{f}_1 = \binom{1}{2}$, $\vec{f}_2 = \binom{3}{4}$, $\vec{a} = \binom{5}{6}$. Was sind $\vec{x}$ bzw. $T$? Bestimmen Sie $\vec{y}$ mit der Formel in (a) und machen Sie die Probe!

(6) (a) Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv? Was ist die Bildmenge $B$?

(b) Es sei $f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R} : x \mapsto \tan x$. Warum ist $f$ injektiv? Was ist $B$? Berechnen Sie $\arctan(\tan \frac{3\pi}{4}) + \mathrm{e}^{\ln(\pi/3)}$ und skizzieren Sie $f, f^{-1}, \frac{1}{f}$!

(7) (a) Durch welchen Grenzwert ist $f'(x_0)$ definiert?

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ als Grenzwert (und nicht mit der Quotientenregel)!

(8) (a) Welche "Kandidaten" für Extrema hat $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

(b) Es sei $f : [1, 4] \to \mathbb{R} : x \mapsto |x - 3| + 2 \ln x$. Untersuchen Sie, wo $f$ nicht differenzierbar ist, wo $f' = 0$, $f' > 0$, bzw. $f' < 0$ und bestimmen Sie dann die Extrema von $f$!

(9) (a) Was ist die Formel des Newtonschen Näherungsverfahrens?

(b) Bestimmen Sie damit den Schnittpunkt von $y = \arccos(\ln x)$ und $y = \arctan \sqrt{x}$. Berechnen Sie $x_1$ auf eine Dezimale zu $x_0 = 1$! $(\pi \approx 3)$

(10) (a) Welche zwei Methoden verwendet man zur Berechnung von $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + ax + b}$?

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$!

(11) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich, wenn der Graph von $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, um die $x-$Achse rotiert?
Hinweise: $\mathrm{ch}^2\, v = \frac{1}{2}\big(1 + \mathrm{ch}(2v)\big)$, $\mathrm{sh}(2v) = 2\, \mathrm{sh}\, v\, \mathrm{ch}\, v$, $\pi[\sqrt{2} + \mathrm{arsh}\, 1] \approx 7.2$

(12) (a) Wie ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ definiert und was besagt die Eulersche Formel?

(b) Stellen Sie damit $\sin^4 x$ durch $\cos(4x)$ und $\cos(2x)$ dar!

2018 - 02 - 08

## 1. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2017/18

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 1 und 8 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wann heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar (injektiv)? Was ist die Bildmenge $B$?

(b) Es seien $D_1 = [0, \infty[$, $D_2 = ]-\infty, 0]$, $D_3 = \mathbb{R}$ und $f_i(x) = x^2$ für $x \in D_i$, $i = 1, 2, 3$. ($\alpha$) Was ist $B$? ($\beta$) Welche $f_i$ sind umkehrbar? ($\gamma$) Bestimmen und skizzieren Sie dafür $f_i^{-1}$!

(2) (a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $L_{\text{inh}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b}\}$, $L_{\text{hom}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$, $j = \operatorname{rg} A$, $k = \dim L_{\text{hom}}$. Wie hängen $j$ und $k$ zusammen?

(b) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $m, n, L_{\text{inh}}, L_{\text{hom}}, j, k$!

(3) (a) Wann nennt man $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear? Wie erhält man aus $f$ die Spalten der zugehörigen Matrix $A$?

(b) $A_\varphi$ sei die Matrix der Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi$ im Gegenuhrzeigersinn. Folgern Sie aus $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}$ den Summensatz des Cosinus!

(4) (a) Welche Formel für $\det A$ ergibt sich bei Entwicklung nach der $i-$ten Zeile?

(b) Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 4 & x & 5 & 0 \\ -1 & 1 & y & z \end{pmatrix}$!

(5) (a) Was ist die Matrix $A$ der Spiegelung $s_H$ an $H : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0$?

(b) Was ist $A$, wenn $H : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$? Welche Eigenwerte hat $A$?

(6) (a) Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren von symmetrischen Matrizen?

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ hat den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

($\alpha$) Bestimmen Sie aus $\operatorname{sp} A$ den dritten Eigenwert $\lambda_3$!

($\beta$) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu $\lambda_3$ und machen Sie eine Probe!

($\gamma$) Welche Gleichung folgt aus (a) für die Ebene der Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2$?

(7) (a) Es sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $g(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Wie schreibt sich $g$ in den Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ bzgl. einer ONB $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ aus Eigenvektoren von $A$?

(b) Bringen Sie die Quadrik $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ in Hauptachsenform, bestimmen Sie ihren Typ und die Richtungen der Hauptachsen! Skizze!

(8) (a) Durch welchen Grenzwert ist $f'(x_0)$ definiert?

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ als Grenzwert!

(9) (a) Was ist die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion? (Was ist $(f^{-1})'(t_0)$, was ist $t_0$?)

(b) Bestimmen Sie damit die Ableitung von $y = \sqrt[3]{x}$!

(10) (a) Was sind die Formeln für die Normale $n_{x_0}$ bzw. für die Krümmung $\kappa$?

(b) Es sei $y = \ln x$ und $x_0 = 1$. Bestimmen Sie $\kappa, n_{x_0}$ sowie den Krümmungsmittelpunkt $M$, indem Sie von $P = (1/0)$ aus die Länge $\varrho$ auf $n_{x_0}$ gehen! Skizze!

(11) (a) Wie lassen sich $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bzw. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ durch eine Stammfunktion $\Phi$ ausdrücken?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 7}$!

(12) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich für $f(x) = \operatorname{ch} x, \quad 0 \le x \le 1$?
(Hinweis: $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \pi[1 + \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2})] \approx 8.8$)

2018 - 03 - 16

# 2. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2017/18

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 6 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was sagen die Summensätze über $\sin(\alpha+\beta)$ bzw. über $\cos(\alpha+\beta)$?

(b) Leiten Sie daraus $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ her!
(Hinweis: Setzen Sie $\alpha = \frac{a+b}{2}$ und $\beta = \frac{a-b}{2}$!)

(2) (a) $V$ sei ein VR, $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ eine Basis (d.h. $\dim V = n$) und $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m \in V$. Was gilt nach dem Basissatz, $(\alpha)$ wenn $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m$ EZS? $(\beta)$ wenn $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m$ l.u.? $(\gamma)$ wenn $m=n$ und $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m$ l.u.?

(b) Es seien $\vec{f}_1 = \binom{1}{2}$, $\vec{f}_2 = \binom{2}{4}$, $\vec{f}_3 = \binom{2}{3} \in \mathbb{R}^2 = V$. Sind $(\alpha)$ $\vec{f}_1,\vec{f}_2$ l.u.? $(\beta)$ $\vec{f}_1,\vec{f}_3$ l.u.? $(\gamma)$ $\vec{f}_1,\vec{f}_3$ eine Basis? $(\delta)$ $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3$ eine Basis?

(3) (a) Wie erhält man die Matrix $C$ von $f\circ g$ wenn $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $g(\vec{x}) = B\vec{x}$?

(b) Schreiben Sie $AB = C$ in Summen- und in Tensorschreibweise an!

(4) (a) Was gilt für det $(\alpha)$ bei Zeilenvertauschungen, $(\beta)$ bei Gauß-Schritten?

(b) Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

(5) (a) Geben Sie eine Formel für $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$ im $\mathbb{R}^n$ an!

(b) Berechnen Sie $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$ für $\vec{v} = \binom{1}{2}, \vec{w} = \binom{-3}{-1}$ exakt in Grad!

(6) (a) Welche (im Skriptum dreifach eingerahmte) Gleichung gilt für einen Eigenvektor $\vec{x}$ einer Matrix $A$ zum Eigenwert $\lambda$?

(b) Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma$ so, dass $\vec{x} = (1, 1, 1)^T$ ein Eigenvektor von
$S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ -2 & 3 & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $-1$ ist!

(7) (a) Es sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $g(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$. Wie schreibt sich $g$ in den Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ bzgl. einer ONB $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$ aus Eigenvektoren von $A$?

(b) Bringen Sie die Quadrik $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ in Hauptachsenform, bestimmen Sie ihren Typ und die Richtungen der Hauptachsen! Skizze!

(8) (a) Was ergeben $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t}$ bzw. $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\sin t}{t}$?

(b) Zeigen Sie $(\sin x)' = \cos x$ mit der Definition der Ableitung!
(Verwenden Sie Aufgabe (1) (b)!)

(9) (a) Was sagt die Kettenregel für $f(g(x))'$?

(b) Differenzieren Sie $z(t) = \arccos(a^2 + \cos^3 t)$ ohne Fehler! ($a$ ist konstant.)

(10) (a) Wie sind Extrema definiert? Welche Kandidaten für Extrema hat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x) = |x| \cdot (1 - x), \quad -2 \leq x \leq 2$!

(11) (a) Wie berechnet man das Integral $\int h(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ mit Substitution?

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi/6} \dfrac{\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 2}\,\mathrm{d}x$!
(Hinweis: $\ln 1.2 \approx 0.18$)

(12) (a) Was ist die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers?

(b) Welches Volumen ergibt sich, wenn der Graph von $y = \sin x,\ x \in [0, \pi]$, um die $x-$ Achse rotiert?

2018 - 04 - 20

# 3. Prüfung aus Mathematik 1, WS 2017/18

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Sie im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben, indem Sie einen diesbezüglichen Satz beweisen, so erhalten Sie einen Zusatzpunkt (falls Sie auch Teil (b) richtig beantwortet haben). Dies ist bei allen Fragen außer 2, 3 möglich.

Verwenden Sie für Ihre Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Sie brauchen die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Geben Sie bei Ihren Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Bei der Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, mit Gauß ergaben sich $j$ Pivotzeilen. Was gilt dann für $\operatorname{rg} A$ und für $\dim L_{\text{hom}}$?

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$, $\dim L_{\text{hom}}$ sowie $L_{\text{inh}}$, wenn $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = (1, 2, 1)^T$.

(2) (a) Wie lauten die Grundeigenschaften von $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ für $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$?

(b) Berechnen Sie $\det(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}, \vec{c}, \vec{b} - 3\vec{a})$, wenn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 2$.

(3) (a) Wie lauten die Grundeigenschaften des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^n$?

(b) Berechnen Sie für die Kraft $\vec{F} = (1, 2, 1)^T$ und den Weg $\vec{s} = (1, -1, -2)^T$ die geleistete Arbeit $W$ sowie den Winkel $\alpha$ zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$!

(4) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $P(-\lambda) = \det(A + \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$. Wie erhält man $c_0$, $c_{n-1}$, und allgemein $c_k$ aus $A$?

(b) Bestimmen Sie so das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ und die Eigenwerte für die Matrix $A$ aus Frage (1) (b).

(5) (a) $T$ sei die Transformationsmatrix von der Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ zur Basis $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ und $\vec{a} = \vec{e}_i x_i = \vec{f}_j y_j$. Wie hängen die Koordinaten $\vec{x}, \vec{y}$ zusammen?

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$, $\vec{f}_1 = \binom{1}{2}$, $\vec{f}_2 = \binom{3}{4}$, $\vec{a} = \binom{5}{6}$.
($\alpha$) Bestimmen Sie $T, \vec{x}$ und $\vec{y}$! ($\beta$) Machen Sie eine Probe für $y_1, y_2$!

(6) (a) Welche unbestimmten Typen gibt es bei Grenzwerten?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 + 3x})$ !

(7) (a) Was besagt die Quotientenregel?

(b) Vereinfachen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\arcsin x})}{\sqrt{a^2 + x^4}}$ und berechnen Sie $f'(x)$ ohne Fehler! ($a$ ist eine Konstante.)

(8) (a) Was ist die Formel der Newtonschen Näherungsmethode?

(b) Approximieren Sie damit den Schnittpunkt von $y = \dfrac{\pi \ln \sqrt[4]{x}}{\arctan x}$ mit $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Berechnen Sie $x_1$ auf zwei Dezimalen zu $x_0 = 1$!

(9) (a) Was ist die Gleichung der Normalen $n_{x_0}$ an $y = f(x)$ durch $(x_0, f(x_0))$?

(b) Es sei $y = \ln x$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S = (x_S, y_S)$ der Normalen $n_1$ und $n_{x_0}$ und berechnen Sie dann den Grenzwert $M = (\xi, \eta)$ von $S$ für $x_0 \to 1$. Skizze!

(10) (a) Was besagt der Hauptsatz der Integralrechnung? (Definieren Sie auch $F$!)

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $g(x) = 3|x| - \int\limits_{-1}^{x} \sqrt{t^3 + 1}\,\mathrm{d}t$ mit der Definitionsmenge $D = [-1, 3]$!

(11) (a) Was ist die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers?

(b) Was ergibt sich, wenn der Graph von $y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, um die $x-$Achse rotiert?
Hinweise: $\mathrm{ch}^2\, v = \frac{1}{2}\big(1 + \mathrm{ch}(2v)\big)$, $\mathrm{sh}(2v) = 2\,\mathrm{sh}\, v\, \mathrm{ch}\, v$, $\pi[\sqrt{2} + \mathrm{arsh}\, 1] \approx 7.2$

(12) (a) Für welche $\alpha$ ist $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergent? (b) Berechnen Sie $\int\limits_3^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 5}$ !