2004 - 07 - 01

Klausur zu 'Analysis 4', SoSe 2004

Bearbeite bitte die folgenden 4 Aufgaben!

(1) Für $a \in \mathbb{R}^3$ fest sei $X_a : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x \longmapsto a \times x$.

(a) Warum kann man $X_a \in \mathcal{T}^1(\mathbb{S}^2)$ auffassen?

(b) Was ist X_a in der Karte $\varphi_{3,+} : \{x \in \mathbb{S}^2;\ x^3 > 0\} \to \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1\} : x \mapsto \binom{x^1}{x^2}$?

(c) Was ist X_a in Kugelkoordinaten ϑ, φ auf $\mathbb{S}^2$?

(d) Was ist $X_a(f)$, wenn $f(x) = x^1 \cdot x^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$ und $X_a \in \mathrm{Der}(\mathbb{S}^2)$ aufgefasst wird?

(e) Was ist $[X_{e_1}, X_{e_2}]$ für $e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T$?

Zusatzfrage: Was ist allgemein $[X_a, X_b]$?

(2) Es sei $f(y) = \int\limits_0^\infty \sin(y\sqrt{x}) \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \quad y \in \mathbb{R}$.

(a) Warum ist f wohldefiniert?

(b) Warum ist f stetig?

(c) Warum ist f stetig differenzierbar?

(d) Kann man mit dem Satz von Lebesgue zeigen, dass f zweimal differenzierbar ist?

(e) Welches einfache Integral liefert der Satz von Fubini für $\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y$?

Zusatzaufgabe: Berechne $\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y$!

(3) Es sei $i : M = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x^3 = x^1 x^2\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und g die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimme i^*g in den Koordinaten x^1, x^2.

(b) Bestimme $\hat{\Omega}_{i^*g}$.

(c) Rechne $\hat{\Omega}_{i^*g}$ in Polarkoordinaten um!

(d) Berechne $\int_U \hat{\Omega}_{i^*g}$ für $U = \{x \in M;\ (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$.

(e) Berechne $\int_{(U,[\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2])} i^*L$, wenn L die Lerayform auf $\mathbb{R}^3$ ist.

Zusatzaufgabe: Kontrolliere e) mit dem Satz von Stokes!

(4) g sei die Standardmetrik im $\mathbb{R}^2$.

(a) Drücke g in Polarkoordinaten aus!

(b) Was ist $g^{-1} \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^2)$ in Polarkoordinaten?

(c) Bestimme $\operatorname{grad} f \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^2)$ für $f = f(r, \varphi)$!

(d) Bestimme $\operatorname{div} X$ für $X = X^r \partial_r + X^\varphi \partial_\varphi$ mit der allgemeinen Formel $\operatorname{div}(v^l \partial_l) = \dfrac{1}{\sqrt{|\det g|}} \cdot \dfrac{\partial(\sqrt{|\det g|}\, v^k)}{\partial x^k}$.

(e) Berechne damit $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ in Polarkoordinaten.

Zusatzfrage: Was ist $\operatorname{rot} X = \tilde{g}^{-1} * \mathrm{d}\tilde{g}\, X$ in Zylinderkoordinaten für $X \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^3)$?

2004 - 07 - 06

1. Prüfung aus Analysis 4, SoSe 2004

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Du im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung gibst, indem Du einen diesbezüglichen Satz beweist, so erhältst Du einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet wurde). Dies ist bei allen Fragen außer (4) und (8) möglich.
Im folgenden seien M, N $\mathcal{C}^k-$Mannigfaltigkeiten, $k \geq 1$.

Verwende für Deine Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Die Fragen brauchen nicht in der gegebenen Reihenfolge beantwortet werden. Gib bei Deinen Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Unter welcher Bedingung an $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^k$ ist $f^{-1}(0)$ eine ($(n-p)-$dimensionale) Untermannigfaltigkeit?

(b) Warum ist $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$?

(2) (a) Was sind Derivationen in $x_0 \in M$, d.h. $D \in \mathrm{Der}_{x_0}(M)$, und wie hängen sie mit Tangentialvektoren $v \in T_{x_0}(M)$ zusammen?

(b) Welche Vektoren in $\mathbb{R}^3$ entsprechen $\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \in T_{x_0}(\mathbb{S}^2) \leq T_{x_0}(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$, wenn (ϑ, φ) die Karte der Kugelkoordinaten auf $M = \mathbb{S}^2$ ist?

(3) (a) Wann nennt man M parallelisierbar?

(b) Ist der Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ parallelisierbar?

(4) (a) Wie ist $f^* : \mathcal{T}_q N \longrightarrow \mathcal{T}_q M$ für $f : M \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^k$ definiert?

(b) Berechne $f^*(\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^2)$ in Kugelkoordinaten auf $\mathbb{S}^2$, wenn $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto (\mathrm{e}^{x^3}, x^1 x^2)^T$.

(5) (a) Was sagt der Satz von der monotonen Konvergenz von B. Levi?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(-1)^n}{n+1}$ und was ergibt sich dann? (Beachte: Ab $n > \alpha$ ist das Vorzeichen der Reihenglieder konstant!)

(6) (a) Was sagt der Satz von Fubini–Tonelli?

(b) Für welche $\alpha, \beta > 0$ ist $\dfrac{x_1 |x_2|^\beta}{(x_1^2 + |x_2|)^\alpha} \in \mathcal{L}^1([-1,1]^2)$ bezüglich des Lebesguemaßes? (In (0,0) werde die Funktion irgendwie definiert.)

(7) (a) Wie hängen die Radonmaße mit $\mathcal{C}^{k-1}-$Dichte auf M mit $\hat{\Omega}_n(M)$ zusammen, $n = \dim(M)$?

(b) Rechne die Lerayform $L \in \Omega_n(\mathbb{S}^n)$ um in die Karte $\varphi_{n+1,+} : \{x \in \mathbb{S}^n;\ x^{n+1} > 0\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < 1\} : x \longmapsto (x^1, \ldots, x^n)^T$, und berechne so $\iint_{\{x\in\mathbb{S}^2;\ x^3>0\}} |L|$.

(8) (a) Wann heißt M orientierbar?

(b) Bestimme $\Omega \in \Omega_{3,l}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}))$ mit $\Omega(I) = \mathrm{d}a_1^1 \wedge \mathrm{d}a_1^2 \wedge \mathrm{d}a_2^1 \in \Lambda^3(T_I^* \,\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}))$. Wie erhält man daraus eine Orientierung von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$?

(9) (a) Was sagt der Satz von Stokes für orientiertes M?

(b) Bestimme damit $\int_{(\partial U, [\mathrm{d}x^1\wedge \mathrm{d}x^2\wedge \mathrm{d}x^3]|^a_{\partial U})} (x^2)^2\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3$, wenn $a, b, c \in (0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}^3$, $U = \{x \in \mathbb{R}^3;\ a^{-2}(x^1 - s^1)^2 + b^{-2}(x^2 - s^2)^2 + c^{-2}(x^3 - s^3)^2 < 1\}$?

(10) (a) Wie ist das kanonische Volumsmaß $\hat{\Omega}_g$ auf dem Pseudoriemannschen Raum (M, g) in Koordinaten gegeben?

(b) g sei die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$ und $i : M := \{x \in \mathbb{R}^3;\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Bestimme i^*g und $\hat{\Omega}_{i^*g}$ in den Koordinaten $x = (\operatorname{ch}\vartheta \cos\varphi, \operatorname{ch}\vartheta \sin\varphi, \operatorname{sh}\vartheta)^T$.

(11) (a) Wie lauten die Eulerschen Differentialgleichungen?

(b) Für welche Funktionen $x(t)$ ist $\int_a^b \mathrm{e}^{\alpha x(t) + \beta \dot{x}(t)}\, \mathrm{d}t$ stationär? $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(12) (a) Wie ist die Exponentialabbildung bzgl. einer Riemannschen Metrik definiert?

(b) Was ist $\exp_{x_0}$ für $x_0 = (0, \ldots, 0, 1)^T \in M = \mathbb{S}^n$ mit der Standardmetrik?

2004 - 10 - 07

2. Prüfung aus Analysis 4, SoSe 2004

Zum Bestehen der Prüfung müssen 6 der folgenden 12 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Du im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung gibst, indem Du einen diesbezüglichen Satz beweist, so erhältst Du einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet wurde). Dies ist bei allen Fragen außer (2) und (4) möglich. Im folgenden sei M eine $\mathcal{C}^k-$Mannigfaltigkeit.

Verwende für Deine Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Die Fragen brauchen nicht in der gegebenen Reihenfolge beantwortet werden. Gib bei Deinen Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Wie ist eine $\mathcal{C}^k-$Mannigfaltigkeit definiert?

(b) Wie ist die Standardstruktur am projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ gegeben?

(2) (a) Wie ist ein $\mathcal{C}^k-$Vektorraumbündel definiert?

(b) Wie erhält man einen VR-Bündelisomorphismus $T\mathrm{O}_n \simeq \mathrm{O}_n \times \mathrm{o}_n$?

(3) (a) Wie ist die Lieklammer definiert?

(b) Was ist $[X,Y]$ für $X = \begin{pmatrix} \sin(x^2) \\ x^1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x^1 \\ \cos(x^2) \end{pmatrix} \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^2)$?

(4) (a) Wie transformiert sich ein Tensorfeld $t \in \mathcal{T}^m_q(M)$ bei Kartenwechsel?

(b) Rechne $\dfrac{\partial}{\partial x^2} \otimes \mathrm{d}x^1 \in \mathcal{T}^1_1(\mathbb{R}^2)$ in Polarkoordinaten um! Kontrolliere, dass die Verjüngung 0 ergibt!

(5) (a) Was sagt der Satz von Lebesgue?

(b) Bestimme $\lim_{\epsilon\searrow 0} \int_0^1 f(x) \sin\left(\frac{\epsilon}{x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}$, wenn $f \in \mathcal{C}([0,1])$ und $f(x) = f(0) + O(x^\alpha)$, $x \searrow 0$, $\alpha > 0$ fest! (Beachte: $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$)

(6) (a) Wie ist $L^1(X)$ definiert und welche Eigenschaft hat dieser normierte Raum?

(b) Gib eine Folge an, die in $L^1([0,1])$ (mit Lebesguemaß), aber nicht punktweise f.ü. konvergiert!

(7) (a) Was besagt es, dass die Radonmaße $\mathcal{K}'(M)$ eine Garbe sind?

(b) Berechne $\int_{(\mathbb{S}^2,[L])} \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ mittels der Karten $\varphi_{3,\pm}$!

(Beachte: $L = \text{Lerayform} = \dfrac{\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2}{x^3}$ für $x^3 \neq 0$)

(8) (a) Wie ist die äußere Ableitung $\mathrm{d} : \Omega_q(M) \longrightarrow \Omega_{q+1}(M)$ definiert?

(b) Was ist $\mathrm{d}L$ für die Lerayform $L \in \Omega_{n-1}(\mathbb{R}^n)$?

(9) (a) Was sagt der Satz von Stokes für orientiertes M?

(b) Berechne damit das Integral in (7) (b)! Integriere nach x^3 im äußersten Integral!

(10) (a) Wie wird der Gauß'sche Satz für $X \in \mathcal{T}^1(M)$ im Riemannschen Raum (M, g) formuliert?

(b) Wende ihn auf das Integral in (7) (b) an! (Beachte: $\hat{\Omega}_{i^*g} = |L|$ auf $\mathbb{S}^n$)

(11) (a) Wie lauten die Differentialgleichungen der Geodäten?

(b) Bestimme $\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}$ bzgl. der Polarkoordinaten (r, φ) auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{x}{0};\, x \leq 0\}$.

(12) (a) Wie ist die Exponentialabbildung bzgl. einer Riemannschen Metrik definiert?

(b) Was ist $\exp_{x_0}$ für $x_0 = (0, \ldots, 0, 1)^T \in M = \mathbb{S}^n$ mit der Standardmetrik?