1. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(1) Berechnen Sie $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Quadratisch ergänzen führt zum Integrand $\sqrt{u^2+1}$. Nach der Substitution $u = \sinh v$ werden die Gleichungen $\cosh^2 v = \frac{1}{2}(1+\cosh 2v)$, $\sinh 2v = 2\sinh v \cosh v$, und $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ verwendet.

(2) Berechnen Sie $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{4-4\cos x - 3\sin x}{5+4\cos x+3\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Walter I, 11.6

(3) Bestimmen Sie die Volumina, die entstehen, wenn die Kurve $y=\sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, (a) um die $x-$ Achse, (b) um die $y-$ Achse rotiert.

Zusatzfrage: Welches Volumen ergibt die Drehung um $y = x$?

(4) Welche der folgenden Integrale konvergieren? Was ergeben diese?

(a) $\int\limits_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ (b) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ (c) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Machen Sie bei den zwei folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion. Bestimmen Sie die Punkte, wo f nicht C^2 ist, und in den übrigen Punkten $\operatorname{sgn} f', \operatorname{sgn} f''$ und daraus die Extrema, Wendepunkte, und Intervalle, wo f monoton steigend bzw. fallend, konvex bzw. konkav ist. Machen Sie eine Skizze!

(5) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \cdot |x+1|$

(6) $f : [-3,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2}$

(7) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergent, für welche absolut konvergent?

(8) Berechnen Sie

$$f(\alpha) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\alpha \sin x}{1+\alpha^2 - 2\alpha \sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie Walter I, 9.14, um die Unstetigkeit von f bei ± 1 zu verstehen.

(Z1) Für welche $\alpha, \beta \ge 0$ ist $\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp(-x^\beta \sin^2 x)\,\mathrm{d}x$ (absolut) konvergent?

Hinweis: Verwenden Sie

$$[1,\infty) \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} [m\pi+\epsilon_m, (m+1)\pi - \epsilon_m] \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} [(m+1)\pi - \epsilon_m, (m+1)\pi + \epsilon_m],$$

für geeignete $1 \ge \epsilon_m \searrow 0$.

2003 - 03 - 13

2. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(9) Berechnen Sie zu $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + \mathrm{i}$ jeweils Realteil, Imaginärteil, Betrag, und Argument, sowie $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, $\dfrac{z}{w}$. Skizze!

(10) Stellen Sie $z = \dfrac{4}{\mathrm{i} - \sqrt{3}}$ in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ dar und berechnen Sie damit z^9.

(11) Berechnen Sie auf 3 Kommastellen die Lösungen von
(a) $z^7 = -128$ (b) $z^4 + 2\mathrm{i}\, z^2 + 2 - \mathrm{i} = 0$

(12) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung und die Taylorreihe um 0 von
$f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z + \mathrm{i}z - \mathrm{i}}$.

(13) Entwickeln Sie $\sin^6 \varphi = \left(\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\right)^6$ und berechnen Sie damit $\int_0^\pi \sin^6 \varphi \, \mathrm{d}\varphi$.

<u>Zusatzfrage:</u> Was ist $\int_0^\pi \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$?

(14) Bestimmen Sie alle $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, für die

$$|z - 1| = |z - \omega| + |z - \overline{\omega}|, \qquad \text{wobei } \omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}.$$

<u>Zusatzfrage:</u> Was ergibt sich, wenn z nicht am Einheitskreis vorausgesetzt wird?

(15) Beweisen Sie mit den Eulerschen Formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kz = \frac{\cos \frac{z}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

(16) Bestimmen Sie mit den Eulerschen Formeln

$$\int_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \, \mathrm{d}x, \qquad a, b > 0, k \in \mathbb{N}_0.$$

(Z2) Beweisen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$.

2003 - 03 - 20

3. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(17) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = (\cot t) x \log x$ zum Anfangswert $x(\frac{\pi}{2}) = 2$.

(18) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -2x\mathrm{e}^{-y+x^2}$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$. Bestimmen Sie das maximale Intervall, in dem die Lösung $y(x)$ existiert! Was passiert am Rand dieses Intervalls?

(19) Auf einen Fallschirmspringer wirken Gravitation und Reibung. Wenn die Reibung proportional zu v^2 ist ($v =$ Geschwindigkeit nach unten), so gilt:

$$\begin{aligned} \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} &= m\dot{v} \\ &= \text{Kraft} = mg - av^2 \end{aligned}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung. Setzen Sie $b = \sqrt{\frac{mg}{a}}$! Was ist $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$? Wie sehen die Lösungen für $v(0) > b, = b, < b$ aus?

(20) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} - x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t + 1}$, $x(0) = 0$. (Warum weiß man von vornherein, dass die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert?)

(21) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu den Funktionen $y = \pm\sqrt{C + \cos^2 x}$, $C > -1$, $C + \cos^2 x \geq 0$. (Skizze!)

(22) Betrachten Sie für $\alpha > 0$ das Anfangswertproblem $y' = |y|^\alpha$, $y(0) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\forall x \geq 0 : y(x) \geq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass für $0 < \alpha < 1$ mehrere Lösungen existieren. (Wieviele finden Sie? Was ergibt sich z.B. für $\alpha = \frac{1}{2}$?)

(c) Zeigen Sie, dass für $\alpha \geq 1$ nur *eine* Lösung existiert, indem Sie eine Lösung $y : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ betrachten, $C = \max\limits_{t \in [0,b]} y(t)^{\alpha - 1}$ setzen und $y(x) = \int_0^x y'(t)\mathrm{d}t \leq C \int_0^x y(t)\mathrm{d}t$ verwenden.

(23) Die Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ schwingt frei und ohne Reibung unter einer Rückstellkraft mit Federkonstante $K = 8\,\mathrm{kg/sec}^2$. Stellen Sie die Auslenkung $x(t)$ zu den Anfangswerten $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$ in der Form $x(t) = r\cos(\omega t + \theta)$ dar. Skizze! (Setzen Sie nicht in die Formeln von Walter I ein, sondern starten Sie mit dem Ansatz $z(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.)

(24) In Übung (23) sei zusätzlich eine Dämpfung von $M = 4.8\,\mathrm{kg/sec}$ vorhanden, d.h. es gilt $2\ddot{x} + 4.8\dot{x} + 8x = 0$ mit denselben Anfangswerten. Stellen Sie $x(t)$ in der Form $r\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\nu t + \theta)$ dar. (Setzen Sie nicht in die Formeln von Walter I ein, sondern starten Sie mit dem Ansatz $z(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.) Wie groß müsste M sein, damit die Schwingung aperiodisch wird?

(Z3) Beweisen Sie den Satz über die Partialbruchzerlegung reeller rationaler Funktionen $\frac{Q}{P}$ mit einem Induktionsbeweis analog dem der Vorlesung im komplexen Fall.

2003 - 03 - 27

4. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(25) An der schwingenden Masse in Übung (24) greife die Kraft $12\cos\Omega t$ an. Bestimmen Sie die stationäre Lösung mit dem Ansatz $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$, $z(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz und die maximale Amplitude.

(26) Zeigen Sie, dass für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ und $a, b \geq 0$ gilt $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}-ab \geq 0$. (Fixieren Sie b und machen Sie eine Kurvendiskussion.)

(27) Zeigen Sie, dass l^p vollständig ist. Nehmen Sie dazu eine Cauchyfolge $x^k \in l^p$, schliessen Sie, dass $\forall i = 1, 2, \ldots$ gilt $x_i^k \to a_i$, und zeigen Sie dann, dass $a \in l^p$ und $x^k \to a$ in l^p.

(28) Zeigen Sie mit der Hölderschen Integralungleichung

$$\int_0^1 x^\lambda \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leq (\lambda p + 1)^{-1/p} \Big(\frac{\mathrm{e}^q - 1}{q}\Big)^{1/q}$$

für $\lambda \geq 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Kontrollieren Sie die Ungleichung im Fall $\lambda = 0, p = q = 2$.

(29) Es sei $C = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ für $a < b \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, das $(C, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig, d.h. ein Banachraum ist.

(b) Es sei $a = -1, b = 1$ und $f_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$, definiert durch $f_k(x) = 0$ bzw. kx bzw. 1 für $-1 \leq x \leq 0$ bzw. $0 \leq x \leq \frac{1}{k}$ bzw. $\frac{1}{k} \leq x \leq 1$. (Skizze!) Bestimmen Sie $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ sowie $\|f_k - f_j\|_\infty$ für $k, j \in \mathbb{N}$. Ist f_k eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$? Konvergiert f_k gleichmäßig?

(c) Ist f_k eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$? Ist $(C, \|\cdot\|_p)$ vollständig?

(30) Es sei $X = \mathbb{R}^2$ und $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, 0 < x, \sin\frac{1}{x} \leq y \leq 1\}$. Was sind $\mathring{A}, \partial A, \overline{A}$? Ist $\overline{A}$ kompakt? Ist A zusammenhängend? Ist $\mathring{A}$ ein Gebiet? Wieviele Zusammenhangskomponenten hat $\mathring{A}$?

(31) Welche der folgenden Aussagen sind wahr für $A, B \subset X$, X ein metrischer Raum? (Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.) (a) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$ (b) $\mathring{\overline{A}} = \mathring{A}$ (c) $\overline{\mathring{A}} = \overline{A}$ (d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (e) A zhgd. $\Longrightarrow \overline{A}$ zhgd.

(32) (X, d) sei ein metrischer Raum und $d(A, B) := \inf\{d(x, y);\, x \in A, y \in B\}$ für $A, B \subset X$.

(a) Zeigen Sie, dass das Infimum ein Minimum ist, wenn A, B kompakt sind, d.h. dass dann $\exists a \in A : \exists b \in B : d(a, b) = d(A, B)$.

(b) Suchen Sie zwei abgeschlossene Mengen A, B im $\mathbb{R}^2$, für die das Infimum kein Minimum ist. (Schaffen Sie es auch im $\mathbb{R}^1$?)

(Z4) Zeigen Sie, dass kompakte metrische Räume vollständig sind. Gilt das Umgekehrte?

2003 - 04 - 10

5. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(33) $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und f' sei beschränkt auf I. Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $L = \sup\limits_{t\in I} |f'(t)| = \|f'\|_\infty$. Zeigen Sie, dass $\|f'\|_\infty$ die kleinste Lipschitzkonstante ist. Was ist die kleinste Lipschitzkonstante von $\sin, \cos, \arctan$?

(34) Ist $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2+y^2 \le 1\} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$ stetig, gleichmäßig stetig, lipschitzstetig?

(35) Es sei $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ linear, d.h. $Ax = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, und auf $\mathbb{K}^n$ werde die $p-$ Norm genommen.

(a) Was sagt die Höldersche Ungleichung über $|Ax|$?

(b) Folgern Sie $\|A\| \le |a|_q$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(c) Setzen Sie $x_i = |a_i|^q / a_i$ für $a_i \ne 0$ und zeigen Sie, dass $\|A\| = |a|_q$.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie für $p < \infty$, dass $A : l^p \longrightarrow \mathbb{K}$ linear und stetig $\Longleftrightarrow$ $\exists a \in l^q : \forall x \in l^p : Ax = \sum_{i=1}^\infty a_ix_i$.

(36) Es sei $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear und jeweils $|\cdot| = |\cdot|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ genommen. Die Operatornorm wird dann mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet.

(a) Erklären Sie das folgende: $\|A\|_2^2 = \max\{|Ax|^2;\, |x| \le 1\} = \max\{x^TA^TAx;\, |x| \le 1\} = \max\{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2;\, |y| \le 1\} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \lambda_i$, wenn $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $A^T \cdot A$ sind und $y_1,\ldots,y_n$ Koordinaten bzgl. einer ONB aus Eigenvektoren.

(b) Bestimmen Sie $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|_2$.

(37) $M = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ (mit $|\cdot|_2$) wird durch die vier offenen Mengen $U_{ij} = B_1((i,j)) = \{(x,y) \in M : (x-i)^2 + (y-j)^2 < 1\}$, $i,j \in \{0,1\}$, überdeckt. (Skizze!) Was ist die größtmögliche Lebesguezahl dieser Überdeckung?

(38) Entwickeln Sie $f(z) = \sqrt{1 + c_1z_1 + \cdots + c_nz_n}$ mit $f(0) = 1$ in eine Potenzreihe $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}_0^n} a_pz^p$ für feste $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{C}$. Was ist $a_{(1,1,\ldots,1)}$? Geben Sie eine Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^n$ an, wo diese Reihe gleichmäßig absolut konvergiert.

(39) Es sei $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x^y$. Berechnen Sie $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$. Warum muss $f_{xy} = f_{yx}$ gelten?

(40) Es sei $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \ne (0,0)$ und $f(0,0) = 0$.

(a) Berechnen Sie $f_x, f_y, f_x(0,y), f_y(x,0), f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$.

(b) Berechnen Sie $f_{xy}(x,0)$ für $x \ne 0$, und zeigen Sie, dass f_{xy} in $(0,0)$ unstetig ist. Was hat das mit dem Satz von Schwarz zu tun?

(Z5) Für $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear seien $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$ analog zu Aufg. 36 definiert. Zeigen Sie $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$ und $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|$.

2003 - 05 - 08

6. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(41) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \sin x_2 \\ \arctan(x_1 x_3) \\ x_2^2 - 4x_1 x_3 \end{pmatrix}$ und $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $f'(x), f'(\xi), \mathrm{d}f(\xi, \mathrm{d}x)$. Vergleichen Sie $f(\xi + \mathrm{d}x)$ mit $f(\xi) + \mathrm{d}f(\xi, \mathrm{d}x)$ für $\mathrm{d}x = (0.1, 0.1, 0)^T$.

(42) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{Bmatrix} t^{-1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(4t)} & : t > 0 \\ 0 & : t \le 0 \end{Bmatrix}$ und $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Zeigen Sie $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_2\right) f = 0$ für $t \neq 0$ (a) direkt; (b) mittels Polarkoordinaten.
Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass f C^∞ ist in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und daher dort auch $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_2\right) f = 0$ gilt.

(43) Es seien $z(x, y) = x^3 + 3x^2 y + y^2$, $x(u, v) = u^2 v$, $y(u, v) = u + v^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ (a) durch Einsetzen, (b) mit der Kettenregel.

(44) Es sei $f(x, y) = y(3x^2 - y^2)$ ("Affensattel") und $P = \binom{\xi}{\eta} = \binom{2}{1}$.
(a) Bestimmen Sie in P die Richtungsableitungen von f in die drei Richtungen $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$, $v = \frac{1}{5}\binom{3}{4}$.
(b) In welcher Richtung wächst f von P aus maximal und wie groß ist diese maximale Richtungsableitung?
(c) Skizzieren Sie die Niveaulinien durch 0 und durch P und bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie durch P.

(45) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $y^2 - 2xy - y\cos z = -1$ in $(\xi, \eta, \zeta)^T = (1, 1, \frac{\pi}{2})^T$ (a) implizit; (b) explizit mit $z = f(x, y)$; (c) explizit mit $x = g(y, z)$. (d) Warum geht es mit $y = h(x, z)$ nicht?

(46) Rechnen Sie $\Delta_2 g$ in die Koordinaten $s = x + y^2$, $t = xy$ um und testen Sie das Ergebnis an $g(x, y) = x^2 y + xy^3 = st$.
Hinweis: Leiten Sie $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} + y\frac{\partial g}{\partial t}$ nochmals mit der Kettenregel nach x ab und analog für $\frac{\partial g}{\partial y}$.

(47) (a) Bestimmen Sie $T_2\big((x, y); (0, 0)\big)$ zu $f(x, y) = \sqrt[3]{x + \mathrm{e}^y}$.
(b) Kontrollieren Sie das Ergebnis mit den Maclaurinreihen von $\sqrt[3]{1 + x}$ und e^x.

(48) Es sei $g \in C^2((0, \infty))$ und $f(x) = g(r)$ mit $r = |x| = |x|_2$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
(a) Bestimmen Sie $\nabla f, H_f$ und $\Delta f = \operatorname{Spur} H_f$ durch Ableitungen von g.
(b) Zeigen Sie $|R_1(x;\xi)| \le C|x - \xi|^2$, wobei $R_1 = f(x) - f(\xi) - \nabla f(\xi) \cdot (x - \xi)$ das erste Restglied der Taylorreihe um ξ ist, $R > 0$ fest, $|\xi| > R$, $x \in \overline{B_R(\xi)}$, und $C := \max\limits_{||\xi| - s| \le R} \left(\frac{1}{2}|g''(s)| + \frac{|g'(s)|}{s}\right)$.

(Z6) In der Niveaufläche $F(x, y, z) = c$ (mit F C^1) werde (in der Nähe eines Punktes, wo keine partielle Ableitung verschwindet) x als Funktion von y, z; y als Funktion von x, z; und z als Funktion von x, y betrachtet. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$. Hinweis: $x\big(y(x, z), z\big) = x$ etc.

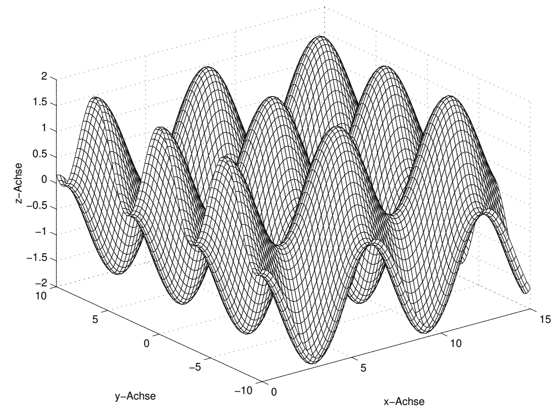
2003 - 05 - 15

7. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(49) (a) Überlegen Sie, dass im $\mathbb{R}^2$ das $m-$te Taylorpolynom die Form $T_m\big((x,y);(\xi,\eta)\big) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\big((h\cdot\nabla)^k f\big)(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + f_x(\xi,\eta)\cdot(x-\xi) + f_y(\xi,\eta)\cdot(y-\eta) +$
$+\frac{1}{2}\big[f_{xx}(\xi,\eta)\cdot(x-\xi)^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)\cdot(x-\xi)(y-\eta) + f_{yy}(\xi,\eta)\cdot(y-\eta)^2\big] + \ldots$
$+\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\dfrac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^{m-i}}(\xi,\eta)(x-\xi)^i(y-\eta)^{m-i}$ hat.
(b) Berechnen Sie T_3 für $f(x,y) = x^2y$ und unbestimmtes (ξ,η). Überlegen Sie, dass $R_3 = 0$ und kontrollieren Sie, dass $f = T_3$.

(50) (a) Zeigen Sie, dass $g(x,y) = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}_0^2\setminus\{(0,0)\}} \dfrac{x^{p_1}y^{p_2}}{p_1+p_2} \in P(1)$.
(b) Es sei $(x,y) \in \overset{\circ}{W}_1 \subset \mathbb{R}^2$. Ordnen Sie die Reihe um $\big(g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} x^j y^{k-j}\big)$ und zeigen Sie $g(x,y) = -\frac{x\log(1-x) - y\log(1-y)}{x-y}$ für $x \neq y$.

(51) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 + x^2$ am Kreis $x^2+y^2 \leq 1$.
<u>Hinweis:</u> Die Gleichung $f(x,y) = 4x\big((x+\frac{1}{8})^2 + y^2 - \frac{1}{64}\big)$ zeigt, wo f positiv bzw. negativ ist.

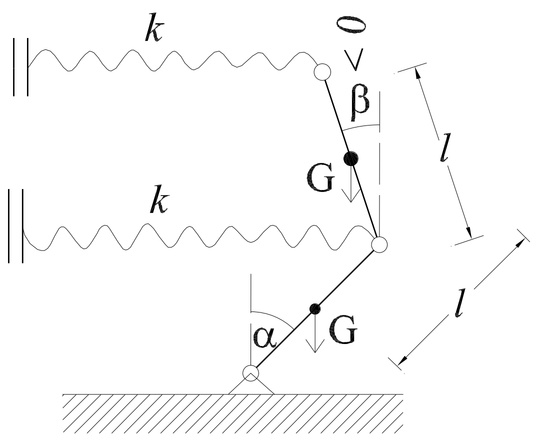


$z = \cos x + \cos y$

(52) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ (mit $D = \mathbb{R}^2$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!

(53) Bestimmmen Sie die Extrema und die Sattelpunkte von $f(x,y) = \cos x + \cos y$.

(54) Für die gezeichnete Stabkette ist die potentielle Energie durch
$$U(\alpha,\beta) = G\frac{l\cos\alpha}{2} + G\Big(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\Big) + \frac{k}{2}(l\sin\alpha)^2 + \frac{k}{2}(l\sin\alpha + l\sin\beta)^2$$ gegeben.
Die vertikale Gleichgewichtslage ist *stabil* (d.h. knickt nicht aus), wenn U für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum hat, d.h. wenn $H_U(0,0)$ positiv definit ist. Wie groß muß $c = kl/G$ sein, damit das der Fall ist?



(55) Untersuchen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium, für welche $a \in \mathbb{R}$ der Ursprung ein lokales Minimum bzw. Maximum von $f(x) = \frac{a}{2}|x|^2 + \cos(x_1+x_2+x_3)$, $x \in \mathbb{R}^3$, ist. (Für $\det A \neq 0$ ist A positiv definit, negativ definit, oder indefinit. $a = 0, 3$ müssten separat untersucht werden.)

(56) (a) Überlegen Sie, dass die Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, äquivalent zur Integralgleichung $y(x) = \int_0^x \big(t^2 + y(t)^2\big)\mathrm{d}t =: f(y)(x)$ ist.
(b) Es sei $X = C([0,\frac{1}{2}])$ mit $\|\cdot\|_\infty$, und $D = \overline{B_{1/2}(0)}$ (mit $0 = 0_X =$ $0-$Funktion). Zeigen Sie, dass $f : D \longrightarrow D$ und lipschitzstetig ist mit $L = \frac{1}{2}$ und daher genau einen Fixpunkt y besitzt. Berechnen Sie y_2 zu $y_0 = 0$ und schätzen Sie $\|y - y_2\|_\infty$ ab.

(Z7) Warum lässt sich die Vorgangsweise in Übung (56) im Fall der Differentialgleichung $y' = |y|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ (vgl. Üb. 22) nicht anwenden?

2003 - 06 - 05

8. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(57) Auf $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ wird das Newtonsche Näherungsverfahren mit Startwert x_0 angewendet. Was passiert jeweils, wenn (a) $x_0 = 0$; (b) $x_0 = 1$; (c) $x_0 > 1$; (d) $x_0 = \frac{2}{3}$?

Zusatzaufgabe: Was ist das maximale $r > 0$, sodass $x_k \to 0$ für alle x_0 mit $|x_0| < r$?

(58) Die Funktion $f(x,y) = \cos x + \cos y$ hat bei $\binom{x_0}{y_0} = \binom{\pi}{0}$ einen Sattelpunkt (vgl. Aufg. 53). Bei der Funktion $z(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(\frac{1}{2}xy) + \frac{x}{5}$ ist dieser Sattelpunkt etwas verschoben. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren $\binom{x_1}{y_1}$ zum Startwert $\binom{x_0}{y_0}$.

(59) (a) In der Nähe welcher Punkte ist $g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \cos x_2 \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$ nicht lokal invertierbar?

(b) Bestimmen Sie $g^{-1}(0.9, 0.1)$ in der Nähe von $x^0 = \binom{0}{0}$. Wenden Sie dazu das Newtonverfahren an auf $\tilde{g}(x) = g(x) - \binom{0.9}{0.1}$.

(60) (a) Zeigen Sie, dass in der Nähe von $x = \binom{1}{0}$, $y = \binom{0}{1}$ die Gleichungen $f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x_2 y_1) - \mathrm{e}^{x_1 - y_2} \\ \sin(x_1 y_1) + 3x_1 x_2 y_2 \end{pmatrix} = 0$ nach y auflösbar sind.

(b) Bestimmen Sie $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^T$ in $x = \binom{1}{0}$.

(61) Bestimmen Sie zu Übung 60 $\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}(1,0)$.

(62) Eine oben offene, rechteckige Schachtel soll ein vorgegebenes Volumen V besitzen und so beschaffen sein, dass ihre Oberfläche A minimal wird! Bestimmen Sie die Maße dieser Schachtel mit der Methode von Lagrange.

(63) Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $x + y = 1$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ mit dem größten bzw. kleinsten Abstand vom Ursprung, indem Sie eine Extremwertaufgabe mit zwei Nebenbedingungen lösen!

(64) A sei eine symmetrische Matrix. Wir untersuchen, wo $f(x) = x^T \cdot A \cdot x$ extremal wird unter der Nebenbedingung $g(x) = 1 - |x|^2 = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Methode von Lagrange liefert, dass x ein Eigenvektor von A ist.

(b) Überlegen Sie, dass Extrema aber nur vorliegen, wenn der zugehörige Eigenwert λ maximal bzw. minimal ist. (Das Lagrange'sche Kriterium ist notwendig, aber nicht hinreichend für Extrema unter Nebenbedingungen.)

(Z8) Untersuchen Sie in der Nähe welcher $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$g(x) = \Big(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^n x_i^n\Big)^T$$

lokal invertierbar ist, d.h. x sich C^∞ als Funktion der ersten n Potenzsummen ausdrücken lässt.

2003 - 06 - 12

9. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(65) (a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Astroide $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2; g(x,y) = (x^2+y^2-1)^3+27x^2y^2 = 0\}$ evtl. keine $C^\infty-$Untermfkt. von $\mathbb{R}^2$ ist, weil $\nabla g = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $M = \{H(t); t \in [0, 2\pi)\}$ mit $H(t) := \binom{\cos^3 t}{\sin^3 t}$, $t \in \mathbb{R}$. (Setzen Sie $a = \sqrt[3]{x^2}, b = \sqrt[3]{y^2}$.) Warum ist dies bei $t = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, keine lokale Parametrisierung im Sinn der Vorlesung?

Zusatzfrage: Wie zeigt man exakt, dass M bei den 4 Ausnahmepunkten keine C^1-Untermannigfaltigkeit ist?

(66) (a) Lösen Sie das AWP $\dot{x} = x - t$, $x(0) = 2$. (b) Überlegen Sie, dass dieses AWP äquivalent zur Integralgleichung $x(t) = 2 + \int_0^t (x(s) - s)\mathrm{d}s$ ist und überprüfen Sie diese für die Lösung.

(67) Es sei $X = C([0, \frac{1}{4}])$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, $x^0 \in X$ mit $x^0(t) = 2$ für $t \in [0, \frac{1}{4}]$, $D = \overline{B_1(x^0)}$, und $f : X \longrightarrow X : x(t) \longmapsto \big(t \mapsto 2 + \int_0^t (x(s) - s)\mathrm{d}s\big)$. Zeigen Sie, dass $f(D) \subset D$ und f lipschitzstetig ist mit $L = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie rekursiv $x^n = f(x^{n-1}) \in D$, $n \in \mathbb{N}$, und vergleichen Sie $\lim_{n\to\infty} x^n$ in X mit dem Ergebnis von Aufg. 66.

(68) Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \sqrt{|t(1-x^2)|}$.

(a) Was ist das größte $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, in dem man aus dem Satz von Picard–Lindelöf Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bekommt?

(b) Lösen Sie die Dgl. für $x(0) = 0$, $t \geq 0$ und zeigen Sie, dass ab $t = \sqrt[3]{9\pi^2/16} \approx 1.77$ mehrere Lösungen existieren!

(69) Wir betrachten das AWP $\dot{x}(t) = x^2/\sqrt{1-t}$, $x(0) = x_0$ in $G = \{\binom{t}{x} \in \mathbb{R}^2; t < 1\}$. Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ hat die Lösung einen blow-up in $t > 0$, für welche x_0 erreicht sie den Rand von G?

Zusatzfrage: Für welche x_0 hat $x(t)$ einen blow-up in $t < 0$?

(70) (a) Berechnen Sie e^{tA} für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit der Reihe $\mathrm{e}^{tA} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$.

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch Diagonalisierung von A über $\mathbb{C}$!

(71) Lösen Sie $\dot{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} v$, $v(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(72) Lösen Sie $\dot{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v$, $v(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Hinweis: f_2 erfüllt $Af_2 = 2f_2+f_1$.)

(Z9) Für welche $\alpha, \beta \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ hat $\dot{x} = (1 + |t|^\alpha + |x|^\beta)^\gamma$, $x(0) = x_0$, für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}$?

2003 - 06 - 26

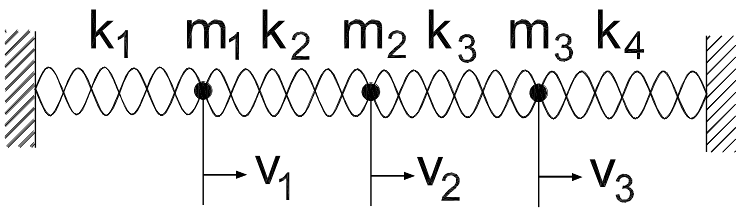
10. Übungsblatt zu Analysis 2, SoSe 2003

(73) Lösen Sie $\dot{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v + \frac{1}{2\cosh t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(74) Bestimmen Sie $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < a, b < 1$ aus $B = g(A)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $g(z) = (1+z)^\alpha$ für $|z| < 1$.

Zusatzfrage: Was ergibt sich z.B. für $b = -a$, $0 \le a < 1$?

(75) Welche Eigenfrequenzen hat das gezeichnete Federsystem, wenn die Massen m_j und die Federkonstanten k_j jeweils übereinstimmen? Setzen Sie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und bestimmen Sie $\mathcal{L}_{\text{hom}}$!



(76) (a) Lösen Sie Airy's Differentialgleichung $y'' - xy = 0$ mit einem Potenzreihenansatz um den gewöhnlichen Punkt $x_0 = 0$.

(b) Plotten Sie die Lösung des AWP $y(0) = 1, y'(0) = 0$ für $-10 \le x \le 2$. Warum oszilliert y für negative x und wächst für positive x?

(77) Lösen Sie $2x^3 y''' - x^2 y'' + xy' + 5y = 0$, $y(1) = 6$, $y'(1) = 3$, $y''(1) = 8$.

(78) Lösen Sie die Differentialgleichung $x^2 y'' - \frac{1}{2} x y' + \frac{1+x}{2} y = 0$ in $I = (0, \infty)$ durch Reihenentwicklung um den regulären singulären Punkt $x_0 = 0$. Was ist der Konvergenzradius dieser Reihen?

Bestimmen Sie $\mathcal{L}_{\text{inh}}$ für die folgenden Differentialgleichungen:

(79) $y''' - 2y' - 4y = -39\,\mathrm{e}^{2x} \sin x$ (80) $y''' - 2y' - 4y = 20\,\mathrm{e}^{-x} \sin x$

(Z10) Eine Stange zwischen den Punkten $(0/0)$ und $(l/0)$ rotiere um die $x-$Achse. Dabei erfüllt ihre Durchbiegung $y(x)$ die Differentialgleichung

$$y^{(4)} - a^4 y = 0, \qquad y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

wobei $a^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EJ}$, $\frac{\omega}{2\pi} =$ Drehzahl, ρ, F, E, J Materialkonstante.

Berechnen Sie das kleinste ω, für das die Lösung dieses *Randwertproblems* nicht eindeutig ist, d.h. die Stange ausknickt. Beachten Sie, dass der Satz von Picard-Lindelöf nur die eindeutige Lösung von *Anfangswertproblemen* garantiert.

Termine: Die 3. Klausur ist am Donnerstag, den 3. 7., 12h15-14h30, im HSB3; die 1. Prüfung ist am Freitag, den 4. 7., 9h-12h, im HSB1.

2003 - 04 - 03

1. Klausur zu 'Analysis 2', SoSe 2003

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Beachten Sie bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Die Kurve $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x^2+1)^\alpha}$, $0 \le x < \infty$, rotiert um die $x-$Achse. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das entstehende Volumen endlich und welchen Wert hat es dann?

(2) Entwickeln Sie $\sin^5\varphi$ mit den Eulerschen Formeln in eine Linearkombination von $\sin k\varphi$, $k = 1, \ldots, 5$, und berechnen Sie damit $\int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi \,\mathrm{d}\varphi$. Kontrollieren Sie das Integral mittels $\sin^5\varphi = \sin\varphi \cdot \sin^4\varphi = \sin\varphi \cdot (1-\cos^2\varphi)^2$.

(3) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = 2\,\dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2(1+2\cos x)}{\sin x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi^2}{4}\log 4$, $0 < x < \pi$.
<u>Hinweis:</u> $t = \tan\frac{x}{2}$, $|x| < \pi \Longrightarrow x = 2\arctan t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

(4) Die Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ schwingt mit der Dämpfung $M = 12\,\mathrm{kg/sec}$ unter der Rückstellkraft $K = 50\,\mathrm{kg/sec}^2$ ohne äußere Kraft. Stellen Sie die Lösung $x(t)$ zu $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = -1$ mit Phasenverschiebung dar.

(5) Es sei $C = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und $f_k \in C$ mit $f_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.
(a) Bestimmen Sie $\|f_j - f_k\|_\infty$ für $k = 2j$. Ist f_k eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$?
(b) Bestimmen Sie $\|f_j - f_k\|_1$ für $k \ge j$. Ist f_k eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_1$?

(6) Welche der folgenden Aussagen sind wahr für $A, B \subset X$, X ein metrischer Raum? (Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.)
(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(b) A, B kompakt $\Longrightarrow A \cup B$ kompakt

2003 - 05 - 22

2. Klausur zu 'Analysis 2', SoSe 2003

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Beachten Sie bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Es sei $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ linear, d.h. $Ax = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, und auf $\mathbb{K}^n$ werde die $p-$ Norm genommen, $1 < p < \infty$.

(a) Was sagt die Höldersche Ungleichung über $|Ax|$?

(b) Folgern Sie $\|A\| \le |a|_q$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(c) Setzen Sie $x_i = |a_i|^q / a_i$ für $a_i \neq 0$ und zeigen Sie, dass $\|A\| = |a|_q$.

(2) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$x^3 + y^4 - z^5 + x - 2y^2 - 3z = 6$$

im Punkt $(\xi, \eta, \zeta)^T = (1, -2, 1)^T$ (a) implizit; (b) explizit mit $y = g(x, z)$.
Hinweis zu (b): Setzen Sie ξ, η, ζ ein, um zu sehen, welche Vorzeichen Sie bei den Wurzeln nehmen müssen. Setzen Sie zur Abkürzung $w = \sqrt{1 - x^3 + z^5 - x + 3z + 6}$.

(3) Rechnen Sie f_{xy} in Polarkoordinaten um!

(4) (a) Bestimmen Sie $T_2\big((x, y); (1, 1)\big)$ zu $f(x, y) = \sqrt{x + \log y}$.

(b) Kontrollieren Sie das Ergebnis mittels der Maclaurinreihen von $\sqrt{1 + x}$ und $\log(1 + x)$.

(5) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x, y) = \log|y| + \frac{5}{4}\arctan x - y^2 x$ (mit $D = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 ; y \neq 0\}$) und teilen Sie sie in Maxima, Minima, und Sattelpunkte ein!

(6) Es sei $X = C([0, 1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$, und $D = \overline{B_1(0)}$ (mit $0 = 0_X = 0-$ Funktion) und $f : D \longrightarrow X : y \longmapsto \big(x \mapsto \int_0^x \cos\big(ty(t)\big)\, dt\big)$. Zeigen Sie, dass $f(D) \subset D$ und dass f lipschitzstetig ist mit $L = \frac{1}{2}\sin 1$ ist. (Verwenden Sie den Mittelwertsatz!)

2003 - 07 - 03

3. Klausur zu 'Analysis 2', SoSe 2003

Sie können alle 6 Aufgaben bearbeiten; die 4 besten werden Ihnen angerechnet. Beachten Sie bitte, dass nur vollständig gelöste Aufgaben zählen. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) (a) In der Nähe welcher Punkte ist $g(x) = \begin{pmatrix} x_1 + \arctan x_2 \\ x_2\, \mathrm{e}^{4x_1} \end{pmatrix}$ nicht lokal invertierbar?

(b) Berechnen Sie mit dem Newtonverfahren die Näherung x^1 von $g^{-1}(\frac{3}{4}, 1)$ in der Nähe von $x^0 = \binom{0}{1}$. (Hinweis: $\frac{\pi - 3}{4} \approx 0.035$)

(2) Zeigen Sie, dass in der Nähe von $x = 1, y = \binom{\pi/2}{0}$ die Gleichungen $\sin y_1 - \mathrm{e}^{xy_2} = 0$, $\log(x + y_2) - \cos y_1 = 0$ nach y auflösbar sind, und geben Sie eine Formel für $y'(x)$ an, wenn x bei 1 ist. Was ergibt sich speziell für $y'(1)$?

(3) Berechnen Sie $\sin(tA)$ für $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit der Potenzreihe des Sinus!

(4) Lösen Sie $\dot{v} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v, \quad v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(5) Lösen Sie $\dot{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} v + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \tan t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(6) Lösen Sie $x^2 y'' - \frac{3}{2} x y' + (x+1) y = 0$ in $I = (0, \infty)$ durch Reihenentwicklung um den regulären singulären Punkt $x_0 = 0$.

2003 - 10 - 17

Wiederholungsklausur I zu den Übungen 'Analysis 2', SoSe 2003

Alle 6 Aufgaben können Ihnen angerechnet werden. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Machen Sie für die Funktion $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \mathrm{e}^x \cdot |x-1|$ eine Kurvendiskussion. Bestimmen Sie dort, wo $f\, C^2$ ist, $\operatorname{sgn} f', \operatorname{sgn} f''$ und daraus die Extrema, Wendepunkte, und Intervalle, wo f monoton steigend bzw. fallend, konvex bzw. konkav ist. Machen Sie eine Skizze!

(2) Beweisen Sie mit den Eulerschen Formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kz = \frac{1}{2} + \frac{\sin\bigl((n+\frac{1}{2})z\bigr)}{2\sin\frac{z}{2}}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

(3) (a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' \cdot \cos(\sqrt{y}\,) = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2+3x+2}$.

(b) Ist die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ eindeutig?

(4) Bestimmen Sie die stationäre Lösung der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + 2\dot{x} + 8x = 3\cos 2t$ mit dem Ansatz $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$, $z(t) = c\,\mathrm{e}^{2it}$ und stellen Sie sie in der Form $x(t) = A \cdot \cos(2t + \theta)$ dar.

(5) Es sei $C = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und $f, f_k \in C$ mit $f(x) = 1$ und $f_k(x) = x^{1/k}$, $0 \le x \le 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $f_k \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_2$. (b) Zeigen Sie, dass $f_k \not\to f$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

(6) $M = [0, 1]$ wird durch die drei in M offenen Mengen $U_1 = [0, \frac{1}{2})$, $U_2 = (\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$, $U_3 = (\frac{1}{2}, 1]$ überdeckt. Was ist die größtmögliche Lebesguezahl δ dieser Überdeckung? Für welche $x \in M$ ist $B_r(x)$ mit $r > \delta$ in keinem U_i enthalten?

2003 - 10 - 24

Wiederholungsklausur II zu den Übungen 'Analysis 2', SoSe 2003

Alle 6 Aufgaben können Ihnen angerechnet werden. Die Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein. Bitte verwenden Sie keinen Bleistift!

(1) Rechnen Sie $\Delta_2 g$ in die Koordinaten $s = x\sin y, t = \sin x$ um. (Nach der Umrechnung dürfen nur Ableitungen von g nach s und t vorkommen.)

(2) Untersuchen Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $U(\alpha, \beta) = -\alpha^2 + c\sin^2\alpha + c(\sin\alpha + \sin\beta)^2$ in $(0/0)$ ein lokales Minimum hat. (Zur Untersuchung des Grenzfalles $c = 1$ nehmen Sie $\beta = -\alpha$!)

(3) Zeigen Sie, dass die 2 Gleichungen $f(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x_2 y_1) - x_1 + 1 \\ \tan(x_1 y_2) + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei $x = \binom{1}{2}$, $y = \binom{0}{0}$ nach y auflösbar sind und bestimmen Sie $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}(1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

(4) Lösen Sie $\dot{v} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v, \quad v(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5) Bestimmmen Sie die Eigenfrequenzen und $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ für die Koppelschwingungen zweier Massen $m_1 = m_2 = 1$ zwischen Federn mit $k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 6$.

(6) Bestimmmen Sie $\mathcal{L}_{\text{inh}}$ für $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$.

2003 - 07 - 04

1. Prüfung aus Analysis 2, SoSe 2003

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Du im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben kannst, indem Du einen diesbezüglichen Satz beweist, erhältst Du einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet ist). Dies ist bei allen Fragen außer (4) und (15) möglich.

Verwende für Deine Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Du brauchst die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Gib bei Deinen Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Was sagt der Satz über die komplexe Partialbruchzerlegung für $\frac{Q}{P}$, $\operatorname{gr} Q < \operatorname{gr} P$, $P(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\zeta_i)^{p_i}$?
(b) Was ist die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{z-5}{z(z-\mathrm{i})^2}$?

(2) (a) Was besagt die Höldersche Integralungleichung?
(b) Was ergibt sich für $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \mathrm{e}^{2x/3}\mathrm{d}x$, $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$?

(3) (a) Wann heißt der metrische Raum M kompakt, und was gilt, falls $M \subset \mathbb{K}^n$?
(b) Ist $M = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}] \subset \mathbb{R}$ kompakt?

(4) (a) Wann heißt $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar in $\xi \in \overset{\circ}{G}$?
(b) Ist $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ in $\xi = \binom{1}{0}$ differenzierbar? Wenn ja, was ist $\mathrm{d}f(\xi, h)$, $h = \binom{-1}{1}$?

(5) (a) Formuliere die Kettenregel für $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $\xi \in \overset{\circ}{U}$.
(b) Wie drückt man $\tilde{g}_{yy}$ durch Ableitungen von g nach s, t aus, wenn $\tilde{g}(x,y) = g\big(s(x,y), t(x,y)\big)$?

(6) (a) Wie lautet der Satz über die Lipschitzstetigkeit von C^1-Funktionen?
(b) Es sei $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Sind $f|_{[0,1]}$ bzw. $f|_{[1,2]}$ bzw. $f|_{[1,\infty)}$ lipschitzstetig? Warum bzw. warum nicht?

(7) (a) Gib die Taylorentwicklung der Ordnung m mit Lagrangerestglied für $f(x_1,\ldots,x_n) \in C^{m+1}(U)$ um $\xi \in U$ an.

(b) Berechne $T_2\big((x,y);(2,1)\big)$ für $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

(8) (a) Was besagt der Ausdruck "quadratische Konvergenz" beim Newtonverfahren?

(b) Was gibt das Newtonverfahren für x^1, wenn $g(x)=\begin{pmatrix} x_1+2\tan x_2 \\ \arctan(\mathrm{e}^{6x_1}+\sin 8x_2)\end{pmatrix}$ und $x^0=0$? (Hinweis: $\frac{\pi}{8}\approx 0.4$)

(9) (a) Wann heißt ξ stationärer Punkt von f und was sagt der Extremstellentest mit $H_f(\xi)$?

(b) Wieviele stationäre Punkte hat $f(x,y)=x^2y-y$? Wieviele Extrema?

(10) (a) Was sagt der Satz über implizite Funktionen?

(b) Lassen sich $f_1(x,y,z)=x+y+z+\sin(xyz)=0$, $f_2(x,y,z)=xy+z+\cos(x+y+z)=0$ bei $(1,-1,0)^T$ nach y,z auflösen?

(11) (a) Was sagt der Satz von Picard-Lindelöf für $\dot v=F(t,v)$ auf $Q=\{\binom{t}{v}\in\mathbb{R}^{1+n};\ |t-t_0|\le a,\ |v-v_0|\le b\}$, und was ist die wesentliche Voraussetzung an F?

(b) Was ist das größte $G\subset\mathbb{R}^2$ offen, in dem man ihn auf $\dot x(t)=3t\sqrt[3]{x}$ anwenden kann? Gibt es eine eindeutige Lösung zu $x(0)=0$?

(12) (a) Was ist für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ die Lösung von $\dot v=A\cdot v$, $v(0)=v_0$?

(b) Was ergibt sich speziell für $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, wenn $v_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$?

(13) (a) Was sagt der Satz von Fuchs über $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ für einen gewöhnlichen Punkt x_0?

(b) Wie ist c_{k+2} gegeben durch c_k für $y''-2xy'+\nu y=0$?

(14) (a) Wie hängen Derivationen und Vektorfelder zusammen?

(b) Rechne $x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1}+x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ in Polarkoordinaten um!

(15) (a) Was ist ein $C^\infty-$Atlas auf der Menge M?

(b) Ist $\{\varphi_1:(-\infty,1)\longrightarrow(-\infty,1): x\mapsto\sqrt[3]{x},\quad \varphi_2:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty): x\mapsto\sqrt{x}\}$ ein $C^\infty-$Atlas auf $\mathbb{R}$?

2003 - 09 - 30

2. Prüfung aus Analysis 2, SoSe 2003

Zum Bestehen der Prüfung müssen 8 der folgenden 15 Fragen korrekt, d.h. insbesondere genügend ausführlich, beantwortet werden. Die Antworten in Teil (a) müssen **nicht** begründet werden, die Antworten in Teil (b) sind zu begründen. Das Verständnis der Fragen ist Teil der Prüfung.

Wenn nur **eine** der Teilfragen (a) bzw. (b) korrekt beantwortet ist, so wird diese Frage negativ gewertet.

Wenn Du im Teil (a) einer Aufgabe eine ausführliche Begründung geben kannst, indem Du einen diesbezüglichen Satz beweist, erhältst Du einen Zusatzpunkt (unabhängig davon, ob Teil (b) richtig beantwortet ist). Dies ist bei allen Fragen außer (3), (13) und (15) möglich.

Verwende für Deine Antworten nicht dieses Formular, sondern das ausgeteilte Papier. Du brauchst die Fragen nicht in der gegebenen Reihenfolge zu beantworten. Gib bei Deinen Lösungen jeweils die Nummer der Aufgabe an!

(1) (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen?
(b) Bestimme die Orthogonaltrajektorien zu $A = \{y = Cx^3;\ C \in \mathbb{R}\}$!

(2) (a) Für welche $p \in [0, \infty]$ ist $C = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ mit $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum?
(b) Es sei $a = 0, b = 1$ und $f, f_k \in C$ mit $f(x) = 1, f_k(x) = \sqrt[k]{x},\quad 0 \le x \le 1$. Zeige, dass $f_k \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_2$! Konvergiert f_k bzgl $\|\cdot\|_\infty$, d.h. gleichmäßig?

(3) (a) Wie sind $\overset{\circ}{A}$ und ∂A definiert für $A \subset X$, X ein metrischer Raum?
(b) Was ergibt sich für $X = [0, 4]$ mit $d(x, y) = |x - y|$ und $A = [0, 1) \cup [2, 3)$?

(4) (a) Was sagt der Satz von H. Schwarz über die gemischten partiellen Ableitungen? Was sind die Voraussetzungen?
(b) Überprüfe $f_{xy} = f_{yx}$ an $f(x, y) = x^y,\quad x > 0,\quad y \in \mathbb{R}$!

(5) (a) Unter welcher Bedingung lässt sich die Niveaufläche $f(x) = c$ bei $\xi \in \mathbb{R}^n$ durch $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ darstellen?
(b) Was ist die Tangentialebene an $x_3 = h(x_1, x_2)$ wenn $x_1 \sin x_2 - x_2 \log x_3 + x_3 e^{x_1} = 1$ und $\xi = (0, \pi, 1)^T$?

(6) (a) Unter welcher Bedingung an $\alpha_k = \max\{|a_p|;\ |p| = k\}$ konvergiert $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}_0^n} a_p x^p$ absolut gleichmäßig in $W_s = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \le s\}$ für alle $s < r$?
(b) Entwickle $(1 + x_1 + x_2)^{-1}$ in eine Taylorreihe um 0 und zeige, dass $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}_0^2} |a_p x^p|$ für $x_1 = 1,\ x_2 = -1$ divergiert!

(7) (a) Was besagt das Hurwitz-Kriterium über die positive Definitheit von $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$?
(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2byz$ nach dem Hurwitz-Kriterium in 0 ein lokales Minimum im strengen Sinn?

(8) (a) Was besagt der Banachsche Fixpunktsatz?
(b) Wie kann man ihn zur Lösung von $\cos x = x$ verwenden? (Was sind D, L?)

(9) (a) Was sagt der Satz über die Umkehrfunktion?

(b) Für welche $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + a x_2^2 \\ x_1^3 + x_2^4/a \end{pmatrix}$ auf einer Umgebung U von $x^0 = \binom{1}{1}$ umkehrbar mit einer C^1 Umkehrfunktion $h = (g|_U)^{-1}$, und was ist dann $h'(g(x^0))$?

(10) (a) Wie findet man nach Lagrange ein Extremum ξ von $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den Nebenbedingungen $g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, m$? Was muss dabei der Rang von $g'(\xi)$ erfüllen?

(b) Was ergibt sich für $f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$ und $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$?

(11) (a) Was sagt der Satz von Picard-Lindelöf für $\dot{v} = F(t, v)$ auf $Q = \{\binom{t}{v} \in \mathbb{R}^{1+n};\ |t - t_0| \le a,\ |v - v_0| \le b\}$, und was ist die wesentliche Voraussetzung an F?

(b) Was ist das größte $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, in dem man ihn auf $\dot{x}(t) = 3t\sqrt[3]{x}$ anwenden kann? Gibt es eine eindeutige Lösung zu $x(0) = 0$?

(12) (a) Was ist ein Fundamentalsystem des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{v} = A(t)v$ und wie erhält man daraus eine partikuläre Lösung von $\dot{v} = A(t)v + b(t)$?

(b) Es sei $A(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 1 & t^{-1} \end{pmatrix}$. Zeige, dass $\binom{0}{t}, \binom{t}{t^2}$ ein Fundamentalsystem von $\dot{v} = A(t)v$ auf $(0, \infty)$ ist und löse $\dot{v} = A(t)v + \binom{0}{1}$.

(13) (a) Wann heißt x_0 regulärer singulärer Punkt von $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$?

(b) Was ergibt die Indizialgleichung für λ im Ansatz $y = x^\lambda \sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ zu $x^2 y'' - \frac{3}{2} x y' + (x + 1)y = 0$?

(14) (a) Was müssen die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ erfüllen, damit 0 ein asymptotisch stabiler Punkt von $\dot{v} = A \cdot v$ ist für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

(b) Ist der kritische Punkt $v_0 = \binom{1}{1}$ von $\dot{v} = \begin{pmatrix} v_1 \log v_2 \\ v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix} = F(v)$ stabil? Wie nennt man diesen Typ?

(15) (a) Wie transformiert sich das Vektorfeld $F^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ in die Koordinaten $y^1, \ldots, y^n$?

(b) Rechne $x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$ in Polarkoordinaten um!