2006 - 10 - 09

1. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(1) Es seien $R > 0$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$, $z \in \Delta$, und $f(w) = \mathrm{Re}\, w$.
Berechne $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{\partial\Delta} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w$.

(2) Für Δ, z, f wie in Übung 1 berechne $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\iint_{\Delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{1}{w - z}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}$ und kontrolliere die Cauchysche Integralformel in Satz 1, AG 3.

(3) Zeige, dass sich für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$ in Satz 1, AG 3,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \iint_{\Delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{1}{w - z}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w} = 0$$

ergibt.

(4) Berechne $f_1(z) := \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\iint_{\Delta} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}$ und kontrolliere $\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = f$ für Δ, z, f wie in Übung 1.

(5) Warum gilt in Satz 2, AG 5, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\iint_{\Delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{1}{w - z}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}$ für $z \in \Delta$, während in Satz 1, AG 3, noch ein Kurvenintegral auftritt?

(6) Zeige, dass der Fortsetzungssatz von Hartogs (Satz 3, AG 8) auch für $\Delta := \{z \in \mathbb{C}^2;\ |z|_2 < r\} \supset \Delta' := \{z \in \mathbb{C}^2;\ |z|_2 < r'\}$ gilt.

Zusatzfrage: Lässt sich auch jedes holomorphe $f : \{z \in \Delta;\ |z|_1 > r\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph nach Δ fortsetzen?

(7) Zerlege $f(z) = z_1 z_2^2 + z_1 + z_2$ entsprechend dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz (Satz 4, AG 9).

(8) Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ paarweise verschieden, $p(w) := \prod_{i=1}^{n} (w - \alpha_i)$, $f(z) = z_2^2 - p(z_1)$, und $N = \{z \in \mathbb{C}^2;\ f(z) = 0\}$. Betrachte N als zweiblättrige Überlagerung der z_1-Ebene (wie in AG 11). Zeige:

(a) $n = 2 \Longrightarrow N \underset{\text{top.}}{\simeq}$ Kugel $\setminus$ 2 Punkte; (b) $n = 4 \Longrightarrow N \underset{\text{top.}}{\simeq}$ Torus $\setminus$ 2 Punkte.

(Z1) Es seien $0 < a < b < c$, $0 < \alpha < \beta$, $U = \{z \in \mathbb{C}^2;\ |z_1| \in (a, b), |z_2| < \beta\} \cup \{z \in \mathbb{C}^2;\ |z_1| < c, |z_2| \in (\alpha, \beta)\}$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, dass sich f holomorph in $\{z \in \mathbb{C}^2;\ |z_1| < c, |z_2| < \beta\}$ fortsetzen lässt.

2006 - 10 - 16

2. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(9) Zeige, dass die Resultante γ von $u = a_0 \prod_{i=1}^m (t - x_i)$ und $v = b_0 \prod_{k=1}^n (t - y_k)$ für $a_0, b_0, x_i, y_k \in R$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, R Integritätsbereich, durch
$$\gamma = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (x_i - y_k)$$
gegeben ist.

(10) (a) Berechne die Resultante von $a_0 t^2 + a_1 t + a_2$ und $b_0 t^2 + b_1 t + b_2$.

(b) Für welche z_1 schneiden sich die beiden Kegelschnitte $a_0 z_2^2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2) z_2 + \alpha_3 z_1^2 + \alpha_4 z_1 + \alpha_5 = 0$ und $b_0 z_2^2 + (\beta_1 z_1 + \beta_2) z_2 + \beta_3 z_1^2 + \beta_4 z_1 + \beta_5 = 0$?

(11) Es sei $f = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z]$. Zeige, dass die Resultate von f und f' gleich $(-1)^{n(n-1)/2}$ mal der Diskriminante von f ist.

(12) (a) Es sei $f \in \mathcal{O}_n$, $f(0) = 0$. Zeige, dass $\nabla f(0) \neq 0$ ($\Longrightarrow N = f^{-1}(0)$ ist bei 0 eine komplexe Untermannigfaltigkeit) äquivalent ist zu $f = u \cdot g$, $u \in \mathcal{O}_n^*$, g WP vom Grad 1 in geeigneten Koordinaten. (Speziell ist dann f prim in $\mathcal{O}_n$.)
(b) Was ist die Primfaktorzerlegung von $z_2^3 - z_1^3 z_2$ in $\mathcal{O}_{2,z_0}$ für $z_0 \in \mathbb{C}^2$? Unterscheide drei Fälle!

(13) Zeige, dass das Weierstraßpolynom $g = z_2^3 - 3 z_1 z_2 + z_1^3 \in \mathcal{O}_2$ nicht prim ist!
Hinweis: Das cartesische Blatt $N = \{z \in \mathbb{C}^2;\ g(z) = 0\}$ lässt sich durch $z_1 = \frac{3w}{1+w^3}$, $z_2 = \frac{3w^2}{1+w^3}$ parametrisieren.
Zusatzfragen: Was gilt in $\mathcal{O}_{2,z_0}$ für $z_0 \neq 0$? Wie sieht N topologisch aus?

(14) Dividiere e^{z_2} durch das WP $z_2^2 - z_1$ entsprechend dem Weierstraßschen Divisionssatz (Satz 9, AG 18). Zeige, dass $v(z) = z_2 \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1}} + \mathrm{ch}(\sqrt{z_1})$.

(15) Es sei $W = \{z \in \mathbb{C}^3;\ f_1(z) = z_3^2 + z_1 z_3 + z_2 = 0,\ f_2(z) = z_3^2 + z_2 z_3 + z_1 = 0\}$.
(a) Bestimme mit Resultanten $\pi(W)$ und $\tilde{\pi}(W)$ für $\pi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2 : z \longmapsto (z_1, z_2)$ und $\tilde{\pi} : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2 : z \longmapsto (z_1, z_3)$, und überprüfe das Ergebnis mit $f_1 - f_2$.
(b) Zeige, dass W reduzibel ist und $W \underset{\text{top.}}{\simeq} (\mathbb{C} \dot\cup \mathbb{C}^*)/\sim$, wobei $\sim$ 1 identifiziert.

(16) Es sei $g(z) \in \mathcal{O}_2 \setminus \mathcal{O}_2^*$. Zeige, dass $g^{-1}(0)$ bei 0 homöomorph ist zur disjunkten Vereinigung von m Einheitskreisen $\{t \in \mathbb{C};\ |t| < 1\}$ mit Identifikation des Nullpunktes.
Hinweise: (a) OEdA ist g ein WP; nach AG 17 ist $g = \prod_{j=1}^m g_j^{r_j}$, g_j paarweise verschiedene irreduzible WP; $g_j^{-1}(0) \cap g_k^{-1}(0) = \{0\}$ bei 0 für $j \neq k$ (s. AG 13);
(b) wenn $g(z) = \prod_{i=1}^d (z_2 - b_i(z_1))$ oEdA irreduzibel ist, so sind $b_i(z_1)$ paarweise verschieden für $0 \neq z_1$ bei 0;
(c) wenn z bei $0 \neq \alpha$ startet und z_1 um 0 läuft, hängt z_2 mit $g(z_1, z_2) = 0$ holomorph von z_1 ab und nimmt nach d Umläufen in α_1 alle $b_i(\alpha_1)$ an;
(d) $f : \{t \in \mathbb{C};\ |t| < \epsilon\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 : t \longmapsto z$ mit $g(z) = 0, z_1 = t^d, f(\alpha_1) = (\alpha_1^d, \alpha_2)$ ist holomorph und injektiv für kleines $\epsilon > 0$. (Die Potenzreihe von $z_2 = f_2(t)$ in $t = z_1^{1/d}$ heißt "Puiseuxreihe".)

(Z2) Zeige, dass für ein Weierstraßpolynom $g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ das folgende äquivalent ist:

(i) $\gamma =$ (Diskriminante von g) $= 0$ in $\mathcal{O}_{n-1}$;

(ii) g hat einen mehrfachen Primfaktor in $\mathcal{O}_n$.

2006 - 10 - 23

3. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(17) Zeichne die reellen Teile von $V = \{[Z] \in \mathbb{P}^2;\ Z_1^2 Z_0 = Z_2^3\}$ in den drei Karten φ_i, $i = 0, 1, 2$. Stelle dabei die Punkte im Unendlichen jeweils durch Geraden durch 0 dar! Zusatzfragen: Was ist V_s? Wie sieht V topologisch aus?

(18) Betrachte die projektive Vervollständigung $\hat{N}$ des cartesischen Blattes N.

(a) Welche unendlich fernen Punkte liegen in $\hat{N}$, d.h. was ist $\hat{N} \setminus N$?

(b) Betrachte $\hat{N}$ in der Karte φ_1, d.h. setze $Z_1 = 1$, $Z_2 = w_1$, $Z_0 = w_2$, und zeichne den reellen Teil!

(c) Bestimme die Tangente an $\hat{N}$ im Wendepunkt $[0, 1, -1]$ in der Karte φ_1 und überprüfe, dass sich in der Karte φ_0 die Asymptote ergibt!

(19) (a) Es sei $V = f^{-1}(0)$ bei 0 für $f \in \mathcal{O}_n \backslash \mathcal{O}_n^*$. Der Keim f habe keine mehrfachen Primfaktoren in $\mathcal{O}_n$. Zeige: $0 \in V^* \iff \nabla f(0) \neq 0$. Wie findet man in diesem Fall eine Karte auf V^* bei 0? (Vgl. AG 32)

(b) N sei wie in Übung 8. Zeige, dass N eine komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^2$ ist, d.h. $N = N^*$. Wo lässt sich z_1, wo z_2 als Karte verwenden?

(20) $\hat{N}$ sei wie in Übung 18 das projektiv vervollständigte cartesische Blatt und $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{N} : w \longmapsto [1 + w^3, 3w, 3w^2]$. Die Riemannsche Fläche $\tilde{N} := \hat{N} \,\dot{\cup}\, \{\infty_w\}$ mit der von $\tilde{f} : \bar{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \tilde{N} : w \longmapsto \begin{Bmatrix} f(w) : w \neq \infty \\ \infty_w \ \ : w = \infty \end{Bmatrix}$ übertragenen Mannigfaltigkeitsstruktur heißt "Desingularisierung" von N. Gib einen komplexen Atlas auf $\tilde{N}$ an!

(21) (a) Zeige, dass sich $\dfrac{\mathrm{i}\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}}{2\pi(1 + |z|^2)^2}$ zu $\omega \in A^{1,1}(\bar{\mathbb{C}})$ fortsetzen lässt!
(b) Warum gibt ω die Standardorientierung (s. AG 28) auf $\bar{\mathbb{C}}$? (c) Berechne $\int_{\bar{\mathbb{C}}} \omega$.

(22) N sei wie in Übung 8 und $V = \hat{N}$ die projektive Vervollständigung.

(a) Was ist $V \setminus N$? (Unterscheide $n = 1$, $n = 2$ und $n \geq 3$.) (b) Was ist V^*?

(c) Zeige, dass sich $\frac{\mathrm{d}z_1}{z_2}$ zu $\varphi \in Z_{\bar{\partial}}^{1,0}(N)$ fortsetzen lässt!

(d) Warum gibt $\mathrm{i}\varphi \wedge \bar{\varphi}$ die Standardorientierung auf N?

(23) (a) M sei eine $n-$dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Warum ist $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = 0$, wenn $p > n$ oder $q > n$? (b) Bestimme $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathbb{C})$ für $p, q \in \{0, 1\}$!

(24) $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ sei eine $\mathbb{R}-$Basis von $\mathbb{C}^n$, $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} + \cdots + \lambda_{2n}\mathbb{Z}$, und $M = \mathbb{C}^n/\Lambda$. Weiters sei $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}\min\{|z|;\ z \in \Lambda \setminus \{0\}\}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\Delta_z = \{w \in \mathbb{C};\ |z - w| < \epsilon\}$, $U_z = \mathrm{kan}(\Delta_z)$, $\mathrm{kan} : \mathbb{C}^n \longrightarrow M : w \longmapsto [w]$.
(a) Warum ist $\psi_z = \mathrm{kan}|_{\Delta_z} : \Delta_z \longrightarrow U_z$ bijektiv?

(b) Warum ist $\{\psi_z^{-1};\ z \in \mathbb{C}\}$ ein komplexer Atlas auf M?

(c) Bestimme $H_{\bar{\partial}}^{p,0}(M)$, $0 \leq p \leq n$.

(Z3) N sei wie in Übung 8 für $n \geq 4$. Desingularisiere $\hat{N}$ beim singulären Punkt $[0, 0, 1]$ (vgl. die Übungen 16 und 20)! Gib eine bzw. zwei Karte(n) auf $\tilde{N}$ an beim bzw. bei den unendlich fernen Punkt(en), wenn n ungerade bzw. gerade ist. (Schreibe $f(z) = 0$ für großes z_1, z_2 als Gleichung in $v_1 = \frac{1}{z_1}, v_2 = \frac{1}{z_2}$ an.)

2006 - 10 - 30

4. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(25) Beweise im Detail die zweite Aussage im Lemma in AG 44, d.h. dass eine positive $(1,1)-$Form ω eine hermitesche Metrik h liefert.

(26) ω sei die zur Fubini–Study Metrik auf $\mathbb{P}^n$ assoziierte $(1,1)-$Form und $\varphi_0([Z]) = (\frac{Z_1}{Z_0}, \dots, \frac{Z_n}{Z_0}) = (z_1, \dots, z_n)$.

(a) Zeige, dass $\omega^{\wedge n} = \big(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\big)^n \cdot n! \cdot \dfrac{\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\bar{z}_n}{(1+|z|^2)^{n+1}}$.

(b) Zeige, dass $\int_{\mathbb{P}^n} \omega^{\wedge n} = 1$.

(27) Berechne $\operatorname{vol}(S)$ für $S = \{[Z];\, Z_0 Z_2 = Z_1^2\}$ bzgl. der Fubini–Study Metrik auf $\mathbb{P}^2$.

(28) Zeige $\mathrm{d}\omega = 0$ für die Fubini–Study Metrik (die also eine kählersche Metrik ist).

<u>Hinweis:</u> Es genügt, dies im Punkt $[1, 0, \dots, 0]$ zu zeigen. (Warum?)

(29) (a) Schreibe $g = \operatorname{Re} \mathrm{d}s^2$ für die Fubini–Study Metrik auf $\mathbb{P}^n$ in den Koordinaten $z_j = \frac{Z_j}{Z_0}$, $j = 1, \dots, n$, an!

(b) Bestimme das Volumsmaß $\mathrm{d}\sigma = \hat{\Omega}_{i^* g}$ für $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ und berechne $\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\sigma$.

(c) Zeige $i^*(\omega) = 0$ und folgere, dass $0 = \frac{1}{(n/2)!} \big| \int_{\mathbb{R}^n} \omega^{\wedge n/2} \big| < \operatorname{vol}(\mathbb{R}^n)$ für n gerade.

(30) ${}_{\mathbb{R}}V$ sei ein euklidischer Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} V = 2d$ und $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sei bilinear und alternierend. Zeige:

$$\exists\, \text{ONB } e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_d \text{ in } V^* : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R} : b = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j e_j \wedge f_j.$$

<u>Hinweise:</u> Eine reelle schiefsymmetrische $m \times m$ Matrix B hat nur rein imaginäre Eigenwerte und daher ist $\det B = 0$ für ungerades m. Für $v \in V \setminus \{0\}$ bestimme ein ONSystem $e_1, f_1 \in V^*$ mit $e_1(v) \neq 0$ und $(b - \alpha_1 e_1 \wedge f_1)(v, -) \equiv 0$.

(31) (Fortsetzung) ${}_{\mathbb{C}}H$ sei ein Hilbertraum mit innerem Produkt $h = g + \mathrm{i}\omega$ und $i : W \hookrightarrow H$ ein **reeller**, $2d-$dimensionaler Unterraum. Zeige, dass $\big|\frac{1}{d!}\, i^*(\omega)^{\wedge d}\big| \leq \mathrm{d}\sigma = \hat{\Omega}_{i^* g}$ mit Gleichheit nur, wenn $W \leq {}_{\mathbb{C}}H$, d.h. wenn W ein komplexer Unterraum ist. (Man nennt das die "Wirtingersche Ungleichung".)

(32) Folgere aus Übung 31, dass für eine $2d-$dimensionale **reelle** orientierte Untermannigfaltigkeit S von M (komplexe Mannigfaltigkeit mit hermitescher Metrik) $\operatorname{vol}(S) \geq \frac{1}{d!} \big| \int_S \omega^{\wedge d} \big|$, und dass für $\operatorname{vol}(S) < \infty$ Gleichheit nur für komplexe Untermannigfaltigkeiten gilt.

(Z4) Nach dem klassischen Poincaréschen Lemma und wegen Übung 28 muss ω exakt sein auf $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$. Bestimme $\eta \in A^1(\mathbb{C}^n)$ mit $\mathrm{d}\eta = \omega|_{\mathbb{C}^n}$ und kontrolliere $\operatorname{vol}(S)$ in Übung 27 mit dem Satz von Stokes.

2006 - 11 - 06

5. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(33) Zeige direkt, dass das Mittag–Leffler Problem auf $S = \mathbb{P}^1 = \bar{\mathbb{C}}$ für beliebige $\sigma \in \mathcal{PP}(S)$ lösbar ist!

(34) Bestimme $H^1(\underline{U}, \mathcal{O})$ für $S = \mathbb{P}^1 = \bar{\mathbb{C}}$ und $\underline{U} = \{\mathbb{C}, \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\}$. (Übrigens gilt $H^1(\underline{U}, \mathcal{O}) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O})$ aufgrund des Satzes von Leray.)

(35) Für $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ offen sei $\mathcal{B}(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph und beschränkt}\}$, $r_{V,U}(f) = f|_U$ für $U \subset V$.

(a) Warum ist $\mathcal{B}$ eine Prägarbe von $\mathbb{C}-$ Algebren auf $X = \mathbb{C}$?

(b) Zeige, dass $\forall U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ offen mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset : \forall f_i \in \mathcal{B}(U_i)$ mit $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2} : \exists_1 f \in \mathcal{B}(U_1 \cup U_2) : \forall i = 1, 2 : f|_{U_i} = f_i$.

(c) Warum ist $\mathcal{B}$ dennoch keine Garbe?

(36) (a) Wie muss man Keime bei $x \in X$ für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ definieren, damit sich z.B. für $\mathcal{O}$ das übliche ergibt?

(b) Der "Halm" $\mathcal{F}_x$ sei die Menge der Keime bei x und $\tilde{\mathcal{F}} := \dot{\bigcup\limits_{x \in X}} \mathcal{F}_x$ mit $\{V_\sigma := \{[\sigma]_x \in \mathcal{F}_x;\ x \in U\};\ \sigma \in \mathcal{F}(U), \emptyset \neq U \subset X \text{ offen}\}$ als Basis der Topologie. Zeige, dass $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow X : [\sigma]_x \longmapsto x$ stetig und ein lokaler Homöomorphismus ist, bzw. genauer, dass $\pi|_{V_\sigma} : V_\sigma \xrightarrow[\text{top.}]{\sim} U$ für $\sigma \in \mathcal{F}(U)$.

(c) Was ist $\tilde{\mathbb{Z}}$ bzw. $\tilde{\mathbb{R}}$ zur Garbe $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ auf X?

(37) (Fortsetzung) (a) Warum ist $\tilde{\mathcal{F}}(U) := \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}}) := \{f : U \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}} \text{ stetig mit } \pi \circ f = \mathrm{id}_U\}$ mit der üblichen Einschränkungsabbildung eine Garbe?

(b) Zeige, dass $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(U) : \sigma \longmapsto (x \longmapsto [\sigma]_x)$ ein Garbenisomorphismus ist, wenn $\mathcal{F}$ eine Garbe ist!

(c) Welche Garbe $\tilde{\mathcal{B}}$ ergibt sich zu $\mathcal{B}$ in Übung 35?

(38) (Fortsetzung) Zeige, dass für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ gilt, dass $\tilde{\mathcal{F}}(U) \simeq A(U)/\sim$, wobei

$$A(U) := \{(\sigma_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i);\ U = \bigcup_{i \in I} U_i,\ \forall x \in U_i \cap U_j : \\ \exists x \in V \subset U_i \cap U_j \text{ offen} : \sigma_i|_V = \sigma_j|_V\}$$

und $(\sigma_i)_{i \in I} \sim (\sigma'_k)_{k \in K} \iff (\sigma_i, \sigma'_k)_{i \in I, k \in K} \in A(U)$. (Vgl. AG 59 bzgl. $\mathcal{F}(U) = \mathcal{C}(U)$.)

(39) Es sei $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 : x \longmapsto [x]$. Bestimme $\check{H}^1(S^1, \mathbb{Z}) = \lim\limits_{\underline{U}} H^1(\underline{U}, \mathbb{Z})$ durch Betrachtung von $\underline{U}^{(n)} = \{\pi((\frac{i}{n}, \frac{i+2}{n}));\ i = 0, \ldots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(40) Es sei $M = \mathbb{C}$, $\beta = \exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* : f \longmapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f}$, und $\mathcal{C}(U) = \mathcal{O}^*(U)/\mathrm{Bi}(\beta_U)$ für $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) Was ist $\mathcal{C}(U)$, wenn U einfach zusammenhängend ist?

(b) Was ist $\mathcal{C}_z$, $z \in \mathbb{C}$, und was ist $\tilde{\mathcal{C}}$? (c) Bestimme $\mathcal{C}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ direkt!

(Z5) $\mathcal{C}$ sei wie in Übung 40. Bestimme $\mathcal{C}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ aus der langen exakten Folge zu $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$. (Vgl. AG 66.)

2006 - 11 - 20

6. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(41) $\cdots \longrightarrow V_n \xrightarrow{\partial_n} V_{n-1} \longrightarrow \ldots$ sei ein Kettenkomplex von Vektorräumen über einem Körper K (d.h. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$). Betrachte den dualen Komplex $\cdots \longleftarrow V_n^* \xleftarrow{\delta_{n-1}:=\partial_n^T} V_{n-1}^* \longleftarrow \ldots$ und zeige, dass

$$H^n := \operatorname{Ker} \delta_n / \operatorname{Bi} \delta_{n-1} \simeq H_n^* := (\operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Bi} \partial_{n+1})^* : [f] \longmapsto ([v] \mapsto f(v)).$$

(42) Es sei $\omega = \dfrac{\mathrm{i}\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}}{2\pi(1+|z|^2)^2} \in A^{1,1}(\mathbb{P}^1)$ die $(1,1)-$Form zur Fubini–Study Metrik.

(a) Zeige, dass in $\mathbb{C}$ gilt $\omega = \mathrm{d}\tau_1$, $\tau_1 = \dfrac{\mathrm{i}}{2\pi} \dfrac{z\mathrm{d}\bar{z}}{1+|z|^2} \in A^1(\mathbb{C})$, und in $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ gilt $\omega = \mathrm{d}\tau_2$, $\tau_2 = -\dfrac{\mathrm{i}}{2\pi} \dfrac{z\mathrm{d}\bar{z}}{|z|^2(1+|z|^2)} \in A^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$.

(b) Bestimme $[\mu] = \delta^*([\omega]) \in H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{Z}^1)$, wenn δ^* der Verbindungshomomorphismus zur exakten Garbensequenz $0 \to \mathcal{Z}^1 \hookrightarrow A^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{Z}^2 \to 0$ auf $\mathbb{P}^1$ ist, d.h. $\delta^* : H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{Z}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{Z}^1)$.

(43) (Fortsetzung) Bestimme $\delta^*([\mu]) \in \check{H}^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$, wenn δ^* der Verbindungshomomorphismus zur exakten Garbensequenz $0 \to \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{Z}^1 \to 0$ auf $\mathbb{P}^1$ ist. (Verfeinere $\underline{U} = \{\mathbb{C}, \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}\}$ zu $V_1 = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, $V_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $V_3 = \mathbb{P}^1 \setminus [0,1]$.)

(44) $\bar{\mathbb{C}}$ werde als Tetraeder mit den Ecken $D_0 = \{0, 1, \infty, -\mathrm{i}\}$ (mit der Anordnung $0 < 1 < \infty < -\mathrm{i}$) trianguliert. Bestimme

$$\delta_1 : C^1(K, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\nu_1 < \nu_2} \mathbb{Z} \cdot \langle \nu_1, \nu_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}^6 \longrightarrow C^2(K, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\nu_1 < \nu_2 < \nu_3} \mathbb{Z} \cdot \langle \nu_1, \nu_2, \nu_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}^4$$

und folgere $H^2(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} : (a_{\nu_1\nu_2\nu_3}) \longmapsto a_{0,1,\infty} - a_{0,1,-\mathrm{i}} + a_{0,\infty,-\mathrm{i}} - a_{1,\infty,-\mathrm{i}}$.

(45) (Fortsetzung) (a) Zeichne die zugehörige Überdeckung $\underline{W} = \{\mathrm{St}(\nu)\}_{\nu \in D_0}$ (AG 69).

(b) Schreibe den Isomorphismus $\check{C}^2(\underline{W}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} C^2(K, \mathbb{Z})$ aus!

(46) $\underline{V}$ sei wie in Übung 43 und $\lambda \in Z^2(\underline{V}, \mathbb{R})$ gegeben durch $\lambda_{123} = Y(\operatorname{Im} z)$. Was entspricht $[\lambda] \in \check{H}^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{R})$ in $H_2^{\mathrm{ps}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{R})^*$ unter dem Isomorphismus in AG 73? Was ist speziell $[\lambda]([\sigma])$, wenn σ die Triangulierung entsprechend Übung 44 ist, d.h. $\sigma = g_{\langle 0,1,\infty \rangle} - g_{\langle 0,1,-\mathrm{i} \rangle} + g_{\langle 0,\infty,-\mathrm{i} \rangle} - g_{\langle 1,\infty,-\mathrm{i} \rangle}$? Was ist der Zusammenhang mit dem Satz von de Rham?

(47) Zeige, dass das Cousin–Problem auf $M := \{z \in \mathbb{C}^2;\ |z|_\infty > 1\}$ nicht lösbar ist, d.h. gib eine analytische Hyperfläche V in M an, die sich nicht als $f^{-1}(0)$, $f \in \mathcal{O}(M)$, schreiben lässt.

(48) $\omega \in Z_{\bar{\partial}}^{1,1}(\mathbb{P}^1)$ sei wie in Übung 42. (a) Bestimme $\delta^*([\omega]) \in H^1(\mathbb{P}^1, \Omega^1)$ bzgl. der exakten Garbensequenz $0 \to \Omega^1 \hookrightarrow A^{1,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{1,1} \to 0$ auf $\mathbb{P}^1$, vgl. AG 76.

(b) Was entspricht $\delta^*([\omega])$ unter dem Isomorphismus $H^1(\mathbb{P}^1, \Omega^1) \simeq \mathbb{C}$ in AG 80?

(Z6) Zeige wie in AG 79, 80, dass $H^2(\mathbb{P}^2, \Omega^p) \simeq \mathbb{C}$ für $p = 2$ und ansonsten verschwindet durch Betrachtung der azyklischen Überdeckung $\underline{U} = \{\{[Z] \in \mathbb{P}^2;\ Z_i \neq 0\};\ i = 0, 1, 2\}$.

2006 - 11 - 27

7. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(49) (a) Zeige, dass $\underline{U} = \{\mathbb{C}, \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}\}$ eine azyklische Überdeckung zur Garbe $\mathcal{O}^*$ ist durch Betrachtung der langen exakten Folge zur exponentiellen Garbensequenz auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Bestimme $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*)$ mittels des Satzes von Leray sowie Übung 40.

(50) (Fortsetzung) Bestimme den Verbindungshomomorphismus $\delta^* = c_1 : H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) \longrightarrow \check{H}^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$ zur exponentiellen Garbensequenz auf $\mathbb{P}^1$. (c_1 ordnet einem "Geradenbündel" $[L] \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*)$ seine "Chernklasse" zu.)

Hinweis: Verfeinere $\underline{U}$ wie in Übung 43.

(51) Es sei $V = \{[Z] \in \mathbb{P}^2; P(Z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha Z^\alpha = 0\}$ mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ nicht alle 0 und P quadratfrei, und $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2 : [Z] \mapsto [Z, 0]$. Unter welcher Bedingung schneiden sich $\mathbb{P}^1$ und V überall transversal und was ist dann $\#(\mathbb{P}^1 \cdot V)$? Was ist $\#([\mathbb{P}^1] \cdot [V])$ bzw. $\mathrm{vol}(V) = \int_V \omega$?

(52) V_i seien analytische Kurven in $\mathbb{P}^2$ vom Grad m_i wie in Übung 51.

(a) Was ist $[\varphi_i] := F^{-1}([V_i]) \in H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^2)$?

(b) Folgere aus $\#([V_1] \cdot [V_2]) = \int_{\mathbb{P}^2} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ (vgl. AG 95) den Satz von Bezout!

(53) (a) Unter welcher Bedingung gilt der Satz von Künneth auch für den Ring $R = \mathbb{Z}$?

(b) Überlege, dass diese Bedingung für $X = \mathbb{S}^1 = \partial\Delta_2$ erfüllt ist! Konstruiere $\mathbb{Z}-$Basen wie in AG 93 in $Z_1(X, \mathbb{Z}) \leq C_1(X, \mathbb{Z})$ und in $B_0(X, \mathbb{Z}) \leq Z_0(X, \mathbb{Z}) \leq C_0(X, \mathbb{Z})$.

(54) (a) Verallgemeinere den Satz von Künneth für ein direktes Produkt von endlich vielen Faktoren. (b) Bestimme damit $H_m((\mathbb{S}^1)^n, \mathbb{Z})$, $0 \leq m \leq n$.

(55) (Fortsetzung) $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ sei durch $g_1 : \Delta_1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x_1}$ orientiert und $g_0 : \Delta_0 \longrightarrow \mathbb{S}^1 : 1 \longmapsto 1$. (a) Warum ist $g_1 \in Z_1^{\mathrm{ps}}(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z})$?

(b) Warum ist $\{[g_\epsilon] = [g_{\epsilon_1} \times \cdots \times g_{\epsilon_n}]; \epsilon \in \{0,1\}^n, |\epsilon|_1 = m\}$ eine Basis von $H_m((\mathbb{S}^1)^n, \mathbb{Z})$ für $0 \leq m \leq n$? Bestimme $\#([g_\epsilon] \cdot [g_\delta])$, wenn $|\epsilon|_1 + |\delta|_1 = n$.

(c) Bestimme $[\omega_\epsilon] := F^{-1}([g_\epsilon]) \in H^{n-m}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{S}^1)$ und kontrolliere $\int_{(\mathbb{S}^1)^n} \omega_\epsilon \wedge \omega_\delta = \#([g_\epsilon] \cdot [g_\delta])$!

(56) Es seien $V = \{z \in \mathbb{C}^2; z_1^2 = z_2^3\}$, $W = \{z \in \mathbb{C}^2; z_2^2 = z_1^3\}$, und $\hat{V}, \hat{W}$ die projektiven Vervollständigungen von V bzw. W.

(a) Bestimme $\hat{V} \cap \hat{W}$! Wo schneiden sich V, W transversal?

(b) Bestimme $m_0(V \cdot W)$ und kontrolliere $\#([\hat{V}] \cdot [\hat{W}]) = \sum_{p \in \hat{V} \cap \hat{W}} m_p(\hat{V} \cdot \hat{W})$ (vgl. § 3, Satz 5, AG 105) mittels des Satzes von Bezout (s. Übung 52).

(Z7) Für eine komplexe Mannigfaltigkeit M sei die multiplikative Gruppengarbe $\mathcal{M}^*$ durch $\mathcal{M}^*(U) = \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$ gegeben und $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* = \mathrm{Coker}(\mathcal{O}^* \hookrightarrow \mathcal{M}^*)$. Zeige $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}^1)}$ und bestimme $\delta^* : \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*(\mathbb{P}^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*)$ zu $0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0$ auf $\mathbb{P}^1$. (δ^* ordnet einem "Divisor" D sein "Geradenbündel" $[D]$ zu.)

2006 - 12 - ??

8. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(57) (a) Zeige, dass eine $\mathcal{C}^\infty-$Mannigfaltigkeit M genau dann orientierbar ist, wenn das Determinantenbündel des reellen Tangentialbündels $T_\mathbb{R}M$ trivial ist.

(b) Sind die reellen VB $T_\mathbb{R}\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ bzw. $\Lambda^2 T_\mathbb{R}\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ trivial?

(58) M sei eine $\mathcal{C}^\infty-$Mannigfaltigkeit bzw. eine komplexe Mannigfaltigkeit.

(a) Zeige, dass die Menge der Isomorphieklassen von KVBn bzw. HVBn vom Rang 1 (d.h. Geradenbündel) auf M mit $\otimes$ eine abelsche Gruppe bildet, die isomorph zu $H^1(M, A^*)$ bzw. $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ ist (wobei $A^*(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^*\ \mathcal{C}^\infty\}$).

(b) Zeige, dass $\mathcal{O}^* \hookrightarrow A^*$ einen Isomorphismus $H^1(\mathbb{P}^1, A^*) \simeq H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) \simeq \mathbb{Z}$ (vgl. Üb. 49) induziert. Was bedeutet das für die KVB bzw. HVB vom Rang 1 auf $\mathbb{P}^1$?

(59) Das "universelle Bündel" J auf $\mathbb{P}^n$ ist das durch $J = \{(p, W);\, W \in p \in \mathbb{P}^n\}$ gegebene Subgeradenbündel des trivialen Bündels $E = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$.

(a) Zeige, dass J die Bündelkarten $\varphi_\alpha(p, W) = (p, W_\alpha)$, $p \in U_\alpha := \{[Z] \in \mathbb{P}^n;\, Z_\alpha \neq 0\}$, $\alpha = 0, \ldots, n$, hat, und bestimme die Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$.

(b) Bestimme die Übergangsfunktionen des Determinantenbündels des Cotangentialbündels (d.h. des "kanonischen Geradenbündels") auf $\mathbb{P}^n$ zu geeigneten Bündelkarten auf $\pi^{-1}(U_\alpha)$ und zeige damit, dass $\Lambda^n T^{*\prime}\mathbb{P}^n \simeq J^{\otimes(n+1)}$.

(60) Es sei $M = \mathbb{P}^1$, J wie in Übung 59, und $J^{\otimes(-k)} := J^{*\otimes k}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(a) Warum sind die Isomorphieklassen von KVBn bzw. HVBn vom Rang 1 auf $\mathbb{P}^1$ durch $\{J^{\otimes k};\, k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben? Warum ist $T'\mathbb{P}^1 \simeq J^{\otimes(-2)}$ und $T''\mathbb{P}^1 \underset{\text{KVB}}{\simeq} J^{\otimes 2}$?

(b) Bestimme $\mathcal{O}(J^{\otimes k})(\mathbb{P}^1)$, $k \in \mathbb{Z}$, d.h. die globalen holomorphen Schnitte zu $J^{\otimes k}$!

(61) Das triviale Bündel $E = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ werde mit der Standardmetrik $h = \sum_{\alpha=0}^n \mathrm{d}W_\alpha \otimes \mathrm{d}\overline{W}_\alpha$ versehen, $h|_J$ sei die induzierte Metrik auf dem universellen Bündel, und D_E, D_J die metrischen Zusammenhänge.

(a) Was ist $\theta_J = \theta_{11} \in A^{1,0}(U_\alpha)$, U_α wie in Üb. 59, bzgl. des holomorphen Frames e_1 mit $e_1([Z]) = ([Z], Z/Z_\alpha)$? (b) Überprüfe $D_J = \mathrm{pr}_J \circ D_E|_{A^0(J)}$.

(62) (Fortsetzung) (a) Überlege, dass für ein hermitesches *Geraden*bündel $F \to M$ aus $\Theta' = g\Theta g^{-1}$ auf $U \cap U'$ folgt, dass $\Theta \in A^{1,1}(M)$. (Θ heißt "Krümmungsform".)

(b) Zeige, dass $\Theta = 2\pi \mathrm{i}\, \omega$ für J wie oben, wenn ω die $(1,1)-$Form zur Fubini–Study Metrik ist.

(c) Folgere, dass Θ negativ definit ist, wie es nach AG 134 sein muss.

(63) Es sei $M = \mathbb{P}^n$ und $E = T'\mathbb{P}^n$ mit der Fubini–Study Metrik und dem metrischen Zusammenhang D, $U_0 = \{[Z] \in \mathbb{P}^n;\, Z_0 \neq 0\}$, $z_i = \frac{Z_i}{Z_0}$.

(a) Berechne θ im holomorphen Frame $e_i([Z]) = ([Z], \frac{\partial}{\partial z_i})$, $i = 1, \ldots, n$, auf U_0.

(b) Überlege, dass $\Theta = \bar\partial\theta$, bestimme $\Theta \in A^{1,1}(U_0)^{n\times n}$, und zeige, dass $\Theta > 0$.

(c) Kontrolliere Θ für $n = 1$ mit der Formel $\Theta = -2\partial\bar\partial \log h$, wenn $\mathrm{d}s^2 = h^2 \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar z$ (s. AG 129).

(64) Es seien E, J wie in Übung 59 und $n = 1$. Zeige, dass für das Quotientenbündel gilt $E/J \simeq J^*$. Zeige weiters $T\mathbb{S}^2 \simeq J^{\otimes 2} \oplus J^{\otimes(-2)} \simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{C}^2$ als KVB.

2007 - 01 - 15

9. Übungsblatt zu Algebraische Geometrie, WS 2006/07

(65) $E = T'\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ sei das hermitesche VB zur Fubini–Study Metrik.

(a) Zeige, dass $v_1 = \frac{\sqrt{\pi}(1+|z|^2)}{|z|}(z_1\partial_1 + z_2\partial_2)$, $v_2 = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{1+|z|^2}}{|z|}(\bar{z}_2\partial_1 - \bar{z}_1\partial_2)$ mit $z_j = \frac{Z_j}{Z_0}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$ ein unitäres Frame auf $U = \{[Z] \in \mathbb{P}^2;\ Z_0 \neq 0, [Z] \neq [0,0,1]\}$ ist. (b) Bestimme das duale Coframe φ_1, φ_2!

(66) (Fortsetzung) (a) Stelle $\mathrm{d}\bar{z}_j$ durch $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ dar, und bestimme so $*\mathrm{d}\bar{z}_j \in A^{2,1}(U)$.

(b) Berechne $\Delta_{\bar\partial} f$ für $f \in A^0(U)$!

(c) Überprüfe, dass $\Delta_{\bar\partial} f \equiv -2\sum_{j=1}^2 f_{,\bar{j},j} = -2\sum_{j=1}^2 v_j(\bar{v}_j f)$ entsprechend der Weizenböckschen Identität.

(67) M sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit hermitescher Metrik $\mathrm{d}s^2 = \sum_{j,k} h_{jk}\,\mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}\bar{z}_k$ in der Karte $z = (z_1, \dots, z_n)$, Ω die Volumsform, $\dim M = n$.

(a) Zeige, dass $\Omega = \mathrm{d}\mu = *1 = C_n \det(h)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$, wobei $\mathrm{d}z = \mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n$.

(b) Zeige, dass $*\mathrm{d}\bar{z}_j = 2C_n \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-1} h_{kj}^{\mathrm{ad}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\bar{z}_k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_n$.

(c) Zeige $\Delta_{\bar\partial} f = -\dfrac{2}{\det h} \sum_{j,k} \dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(h_{jk}^{\mathrm{ad}} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\Big)$ für $f \in A^0(M)$.

(d) Bestimme mit (c) $\Delta_{\bar\partial} f$ in der Karte φ_0 (s. AG 24) auf $\mathbb{P}^n$ und kontrolliere das Ergebnis von Übung 66.

(68) $M, z, \mathrm{d}s^2, \Omega, n$ seien wie in Übung 67.

(a) Zeige direkt $\Delta_{\bar\partial}(f \det(h)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}) = -2\sum_{j,k} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big(h_{kj}^{\mathrm{ad}} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z_j}\Big)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$, $f \in A^0(M)$.

(b) Zeige $*\,\Delta_{\bar\partial} = \Delta_{\bar\partial}\,*$ und $\Delta_{\bar\partial}(f\Omega) = \overline{\Delta_{\bar\partial}\bar{f}} \cdot \Omega = \Delta_{\partial} f \cdot \Omega$. Folgere dann aus Übung 67 (c) die Formel in (a).

(c) Folgere $H^q(M, \Omega^p) \simeq H^{n-q}(M, \Omega^{n-p})$ aus den Sätzen von Hodge und Dolbeault!

(d) Zeige $\Delta_{\bar\partial}(f\Omega) = \Delta_{\bar\partial} f \cdot \Omega$ auf $M = \mathbb{P}^n$!

(69) $M, z, \mathrm{d}s^2, \Omega, n$ seien wie in Übung 67; M sei zusammenhängend.

(a) Zeige, dass $* : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{n-p,n-q}(M)$ die Norm erhält!

(b) Berechne $\|\Omega\|$ und folgere mit Cauchy–Schwarz, dass

$$\forall \varphi \in A^{n,n}(M) : \Big|\int_M \varphi\Big| \leq \sqrt{\mathrm{vol}(M)} \cdot \|\varphi\|$$

mit Gleichheit nur für $\varphi \in \mathbb{C} \cdot \Omega$.

(c) Zeige, dass (b) ein Spezialfall von Satz 1, AG 138, und dem Satz von Hodge ist. Verwende $A^{n,n} = Z_{\bar\partial}^{n,n} = \mathbb{C}\Omega \oplus \bar\partial A^{n,n-1}$.

(70) $M, \mathrm{d}s^2, n$ seien wie in Übung 67, ω sei die assoziierte $(1,1)-$Form zu $\mathrm{d}s^2$.

(a) Zeige, dass $*\omega^{\wedge k} = \dfrac{k!}{(n-k)!}\,\omega^{\wedge(n-k)}$ für $k = 0, \dots, n$.

(b) Folgere $\Delta_{\bar\partial}\omega^{\wedge k} = 0$ falls ω geschlossen ist (d.h. $\mathrm{d}s^2$ eine Kählermetrik ist).

(c) Bestimme $\mathcal{H}^{p,q}(\mathbb{P}^n)$ bzgl. der Fubini–Study Metrik unter Zugrundelegung von $H_{\bar\partial}^{p,q}(\mathbb{P}^n)$ entsprechend AG 80.