Übungsblatt 7:

49) Flächeninhalt der Wendelfläche $\vec{X}(u,v) = [u\cos(v), u\sin(v), v]^T,\ 1 < u < 2,\ 0 < v < 2\pi$:

$$\vec{X}_u = \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{X}_v = \begin{bmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = \begin{bmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{bmatrix}, \|\vec{N}\| = \sqrt{1+u^2},$$

somit ist die Fläche

$$\iint_G 1\,d(x,y) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} 1\cdot(\|\vec{N}\|\,dv\,du) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+u^2}\,dv\,du = 2\pi\cdot\int_1^2 \sqrt{1+u^2}\,du.$$

Mit der Substitution $u = \sinh(t)$, $\sqrt{1+u^2} = \cosh(t)$, $du = \cosh(t)\,dt$ wird das Integral zu

$$\int_{\operatorname{arsinh}(1)}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh(t)^2\,dt = \int_{\operatorname{arsinh}(1)}^{\operatorname{arsinh}(2)} \frac{\cosh(2t)+1}{2}\,dt = [\frac{\sinh(2t)}{4} + \frac{t}{2}]_{\operatorname{arsinh}(1)}^{\operatorname{arsinh}(2)}.$$

Wegen $\sinh(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t) = 2\sinh(t)\sqrt{1+\sinh(t)^2}$ gilt offenbar

$$\sinh(2\operatorname{arsinh}(x)) = 2x\sqrt{1+x^2},$$

somit gilt:

$$[\frac{\sinh(2t)}{4} + \frac{t}{2}]_{\operatorname{arsinh}(1)}^{\operatorname{arsinh}(2)} = \frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{5} - 2\cdot 1\cdot\sqrt{2}}{4} + \frac{\operatorname{arsinh}(2) - \operatorname{arsinh}(1)}{2}.$$

Den Areasinus kann man auch noch vereinfachen, indem man $y = \sinh(x)$ nach x auflöst:

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - 1/t}{2} \quad \text{mit} \quad t = e^x.$$

$$2ty = t^2 - 1 \implies t^2 - 2ty - 1 = 0 \implies t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Da t als Exponentialfunktionswert positiv sein muss, kommt nur die Lösung mit $+$ in Frage:

$$y + \sqrt{y^2+1} = t = e^x \implies x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

$$\operatorname{arsinh}(1) = \ln(1+\sqrt{2}),\ \operatorname{arsinh}(2) = \ln(2+\sqrt{5}).$$

Das Integral wird damit zu

$$2\pi\cdot(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5}) - \ln(1+\sqrt{2})}{2})$$

50) Die Oberfläche O einer Kugel mit Radius R:

$$\vec{X}(u,v) = [R\sin(u)\cos(v), R\sin(u)\sin(v), R\cos(u)]^T,\ u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi]:$$

$$\vec{X}_u = \begin{bmatrix} R\cos(u)\cos(v) \\ R\cos(u)\sin(v) \\ -R\sin(u) \end{bmatrix}, \vec{X}_v = \begin{bmatrix} -R\sin(u)\sin(v) \\ R\sin(u)\cos(v) \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = \begin{bmatrix} R^2\sin(u)^2\cos(v) \\ R^2\sin(u)^2\sin(v) \\ R^2\sin(u)\cos(u) \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{N}\| = R^2\sin(u)\sqrt{\sin(u)^2\cos(v)^2 + \sin(u)^2\sin(v)^2 + \cos(u)^2} = R^2\sin(u).$$

Somit ist die Oberfläche

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2\sin(u)\,dv\,du = 2\pi R^2 \cdot [-\cos(u)]_0^\pi = 4\pi R^2$$

.

51) Die Strecke in der xz-Ebene von $\vec{0}$ nach (R,h) ergibt bei Rotation einen Drehkegel. Die Strecke kann mit $u \mapsto u \cdot [R,h]^T,\ u \in [0,1]$ parametrisiert werden. Der Drehkegel wird somit durch

$$\vec{X}(u,v) = \begin{bmatrix} uR\cos(v) \\ uR\sin(v) \\ uh \end{bmatrix},\ u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi]$$

parametrisiert:

$$\vec{X}_u = \begin{bmatrix} R\cos(v) \\ R\sin(v) \\ h \end{bmatrix},\ \vec{X}_v = \begin{bmatrix} -uR\sin(v) \\ uR\cos(v) \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = \begin{bmatrix} -uRh\cos(v) \\ -uRh\sin(v) \\ uR^2 \end{bmatrix} = uR \begin{bmatrix} -h\cos(v) \\ h\sin(v) \\ R \end{bmatrix},$$

also gilt $\|\vec{N}\| = uR\sqrt{h^2+R^2}$. Die Fläche ist somit

$$\iint_G 1\,dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} uR\sqrt{h^2+R^2}\,dv\,du = 2\pi R\sqrt{h^2+R^2} \cdot [u^2/2]_0^1 = R\sqrt{h^2+R^2}\pi.$$

52) Der Schwerpunkt der Mantelfläche hat die z-Koordinate

$$z_S = \frac{1}{\omega(S)} \iint_S z\, dS = \frac{1}{\pi R\sqrt{h^2+R^2}} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} uh \cdot uR\sqrt{h^2+R^2}\, dv\, du$$
$$= \frac{1}{\pi R\sqrt{h^2+R^2}} \cdot 2\pi R\sqrt{h^2+R^2}[u^3/3]_0^1 = \frac{2}{3}h \quad .$$

Den Kegel K parametrisiert man mit $\vec{X}(r,\phi,z) = [r\cos(\phi), r\sin(\phi), z]^T$, $0 < z < h$, $0 < r < zR/h$, $0 < \phi < 2\pi$. Somit ist dessen Volumen

$$\iiint_K 1\, d(x,y,z) = \int_0^h \int_0^{zR/h} \int_0^{2\pi} r\, d\phi\, dr\, dz = 2\pi \int_0^h [\frac{r^2}{2}]_{r=0}^{zR/h}\, dz = \pi\frac{R^2}{h^2} \cdot [z^3/3]_0^h$$
$$= h \cdot R^2\pi/3$$

(das ist Grundfläche mal Höhe Drittel!). Der Schwerpunkt des Kegelkörpers hat die z-Koordinate

$$z_K = \frac{1}{\omega(K)} \iiint_K z\, d(x,y,z) = \frac{3}{\pi R^2 h} \cdot \int_0^h \int_0^{zR/h} \int_0^{2\pi} zr\, d\phi\, dr\, dz$$
$$= \frac{3}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi \int_0^h z[\frac{r^2}{2}]_{r=0}^{zR/h}\, dz = \frac{3}{\pi R^2 h} \cdot \pi\frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^3\, dz = \frac{3}{h^3} \cdot [z^4/4]_0^h = \frac{3}{4}h \quad .$$

Man sieht, dass der Schwerpunkt des Kegels nicht Schwerpunkt des Kegelmantels ist.

53) Der Fluß von $\vec{F}$ durch die Wendelfläche B : $\vec{X} = [u\cos(v),\ u\sin(v), v]^T$, $1 < u < 2,\ 0 < v < 2\pi$ ist:

$$\iint_B < \vec{F}, \vec{\nu} > \ dS = \int_1^2 \int_0^{2\pi} < \vec{F}, \vec{X}_u \times \vec{X}_v > \ du\, dv$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{bmatrix} > du\, dv$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{bmatrix} > du\, dv = \int_1^2 \int_0^{2\pi} uv\, du\, dv$$
$$= \int_1^2 u\, du \int_0^{2\pi} v\, dv = [u^2/2]_1^2 \cdot [v^2/2]_0^{2\pi} = \frac{4-1}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 3\pi^2$$

54) Der Fluß von $\vec{F} = [x,\ y,\ z]^T$ durch $B:\ \vec{X} = [u+v,\ u-v,\ 2uv]^T$, $-1 \leq u \leq 1,\ -1 \leq v \leq 1$ ist:

$$\iint_B < \vec{F}, \vec{\nu} > \, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} < \vec{F}, \vec{X}_u \times \vec{X}_v > du\, dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} < \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ 2uv \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{bmatrix} > du\, dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} < \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ 2uv \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2u+2v \\ -2u+2v \\ -2 \end{bmatrix} > du\, dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (2(u+v)^2 - 2(u-v)^2 - 4uv)\, du\, dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4uv\, du\, dv$$

$$= 4\int_{-1}^{1} u\, du \int_{-1}^{1} v\, dv \qquad = 4 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Sei S die Drehparaboloidfläche mit Randkurve ∂S :

$$S : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{X} = \begin{bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ 1-u^2 \end{bmatrix}, \qquad \partial S : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

und $\vec{G}$ sei das Vektorfeld $\vec{G}(x,y,z) = [-y,\ x,\ 0]^T$

55) a)

$$\iint_S < \mathrm{rot}\vec{G}, \vec{\nu} > dS$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ -2u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} > dv\,du$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2u^2\cos(v) \\ 2u^2\sin(v) \\ u \end{bmatrix} > dv\,du = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2u\,dv\,du = 2\pi[u^2]_0^1 = 2\pi$$

b)

$$\int_{\partial S} < \vec{G}, d\vec{x} >= \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt >= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

56) a) $$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,d(x,y,z) = \iiint_V 3\,d(x,y,z) = 3\cdot \text{Volumen}(V) = 3\cdot\frac{4}{3}2^3\pi = 32\pi\,.$$

Zur expliziten Berechnung des Integrals kann man Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten oder kartesische Koordinaten verwenden.

Zylinderkoordinaten (= ebene Polarkoordinaten (r,ϕ) und z-Koordinate:

$$V = \{[r\cos(\phi),\ r\sin(\phi),\ z]^T \mid r\in[0,2],\ \phi\in[0,2\pi],\ |z|\le\sqrt{4-r^2}\}:$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,d(x,y,z) = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 3\,dz\,(r\,d\phi\,dr)$$
$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} 6r\sqrt{4-r^2}\,d\phi\,dr$$

Substitution $u=4-r^2,\ du=-2r\,dr,\ u\in[4,0]$

$$= 6\cdot 2\pi\cdot\int_4^0 \sqrt{u}\,(-du/2) = 12\pi\cdot[-\sqrt{u}^3/3]_4^0 = 12\pi\cdot 8/3 = 32\pi$$

Alternativ Kugelkoordinaten:

$$V = \{[r\sin(u)\cos(v),\ r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)]^T \mid r\in[0,2],\ u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi]:$$

Das Volumselement ist $r^2\sin(u)\,dr\,du\,dv$:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,d(x,y,z) = \int_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 3r^2\sin(u)\,dv\,du\,dr$$
$$= \int_0^2 3r^2\,dr\cdot\int_0^{\pi}\sin(u)\,du\cdot\int_0^{2\pi}dv = [r^3]_0^2\cdot[-\cos(u)]_0^{\pi}\cdot 2\pi$$
$$= 32\pi$$

Alternativ kartesische Koordinaten, ich berechne das Integral nur über den positiven Teil ($x, y, z > 0$)und nehme das mal 8:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, d(x,y,z) = 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3\, dz\, dy\, dx$$

$$= 24 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy\, dx$$

Substitution $y = \sqrt{4-x^2} \cdot \sin(u)$, $dy = \sqrt{4-x^2} \cdot \cos(u)\, du$, $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$= 24 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-x^2-(4-x^2)\sin(u)^2}\sqrt{4-x^2}\cos(u) du\, dx$$

$$= 24 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(4-x^2)(1-\sin(u)^2}\sqrt{4-x^2}\cos(u) du\, dx$$

$$= 24 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-x^2}\sqrt{1-\sin(u)^2}\sqrt{4-x^2}\cos(u) du\, dx$$

$$= 24 \cdot \int_0^2 \int_0^{\pi/2} (4-x^2)\cos(u)^2 du\, dx = 24 \int_0^2 (4-x^2)\, dx \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(u)^2\, du$$

$$= 24 \cdot [4x - x^3/3]_0^2 \cdot [\sin(2u)/4 + u/2]_0^{\pi/2} = 24 \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = 32\pi$$

b) $$\iint_{\partial V} < \vec{F}, \vec{\nu} > dS = \iint_{\partial V} < \vec{F}, \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} > \cdot (\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|\, du\, dv)$$

$$= \iint_{\partial V} < \vec{F}, \vec{X}_u \times \vec{X}_v > \, du\, dv$$

$$X_u \times X_v = \begin{bmatrix} 2\cos(u)\cos(v) \\ 2\cos(u)\sin(v) \\ -2\sin(u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2\sin(u)\sin(v) \\ 2\sin(u)\cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sin(u)^2\cos(v) \\ 4\sin(u)^2\sin(v) \\ 4\sin(u)\cos(u) \end{bmatrix}$$

$$< \vec{F}, \vec{X}_u \times \vec{X}_v > = < \begin{bmatrix} 2\sin(u)\cos(v) \\ 2\sin(u)\sin(v) \\ 2\cos(u) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\sin(u)^2\cos(v) \\ 4\sin(u)^2\sin(v) \\ 4\sin(u)\cos(u) \end{bmatrix} >$$

$$= 8\sin(u)^3\cos(v)^2 + 8\sin(u)^3\sin(v)^2 + 8\sin(u)\cos(u)^2$$

$$= 8\sin(u)^3 + 8\sin(u)\cos(u)^2 = 8\sin(u)$$

$$\iint_{\partial V} < \vec{F}, \vec{\nu} > dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 8\sin(u)\, dv\, du = 8 \cdot 2\pi \cdot [-\cos(u)]_0^{\pi} = 32\pi$$