Übungsblatt 5:

33) $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1 = 2y - 2y = 0$

a) $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ist Weg von $\vec{x}(0) = \vec{0}$ nach $\vec{x}(1) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Es gilt $d\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt$. Somit:

$$\Phi(x,y) = \int_\Gamma < \vec{F}, d\,\vec{x} >= \int_0^1 < \begin{bmatrix} (tx)^2+(ty)^2 \\ 2(tx)(ty) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt >$$
$$= \int_0^1 (x^3 + xy^2 + 2xy^2) \cdot t^2\,dt = (x^3 + 3xy^2) \cdot [t^3/3]_0^1 = \frac{x^3}{3} + xy^2$$

b) Ansatz: $\vec{F} = \nabla\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi \end{bmatrix}$:

(1) $\quad x^2 + y^2 = \frac{\partial}{\partial x}\Phi \qquad (\int dx) \qquad \Longrightarrow \Phi = \frac{x^3}{3} + xy^2 + C_1(y).$

(2) $\quad 2xy = \frac{\partial}{\partial y}\Phi \ = 2xy + \frac{\partial}{\partial y}C_1 \qquad (-2xy, \int dy) \qquad \Longrightarrow C_1(y) = C_2.$

c) $\int_{(1,0)}^{(2,2)} < \vec{F}, d\,\vec{x} >= \Phi(2,2) - \Phi(1,0) = (\frac{8}{3} + 8) - (\frac{1}{3} + 0) = 10\frac{1}{3}\,.$

34) $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2y^3 - 2xy \end{bmatrix}$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial\, x} F_2 - \dfrac{\partial}{\partial\, y} F_1 = -2y - (-2y) = 0$

a) $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ist Weg von $\vec{x}(0) = \vec{0}$ nach $\vec{x}(1) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Es gilt $d\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt$. Somit:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \int_\Gamma < \vec{F}, d\,\vec{x} >= \int_0^1 < \begin{bmatrix} (tx)^2 - (ty)^2 \\ 2(ty)^3 - 2(tx)(ty) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt > \\
&= \int_0^1 (t^2 x^3 - t^2 xy^2 + 2t^3 y^4 - 2t^2 xy^2)\, dt = \frac{x^3 - 3xy^2}{3} + \frac{y^4}{2} \\
&= \frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{y^4}{2}
\end{aligned}$$

b) Ansatz: $\vec{F} = \nabla\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\, x}\Phi \\ \dfrac{\partial}{\partial\, y}\Phi \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad x^2 - y^2 = \frac{\partial}{\partial\, x}\Phi \qquad (\int dx) \qquad \Longrightarrow \Phi = x^3/3 - xy^2 + C_1(y). \\
&(2) \qquad 2y^3 - 2xy = \frac{\partial}{\partial\, y}\Phi \ = -2xy + \frac{\partial}{\partial\, y} C_1 \qquad (+2xy, \int dy) \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow C_1(y) = \frac{y^4}{4} + C_2.
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,2)} < \vec{F}, d\,\vec{x} >= \Phi(2,2) - \Phi(1,0) = (\frac{8}{3} - 8 + 8) - (\frac{1}{3} - 0 + 0) = \frac{7}{3}\,.$

35) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+2y+4z \\ 2x-3y-z \\ 4x-y+2z \end{bmatrix}$, $\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} -1+1 \\ -4+4 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \vec{0}$

a) $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \vec{x}(t) = t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ist Weg von $\vec{x}(0) = \vec{0}$ nach $\vec{x}(1) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Es gilt $d\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dt$. Somit:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,z) &= \int_\Gamma < \vec{F}, d\,\vec{x} >= \int_0^1 < \begin{bmatrix} tx+2ty+4tz \\ 2tx-3ty-tz \\ 4tx-ty+2tz \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dt > \\
&= \int_0^1 (x^2+2xy+4xz+2xy-3y^2-yz+4xz-yz+2z^2) \cdot t\,dt \\
&= \int_0^1 (x^2-3y^2+2z^2+4xy+8xz-2yz) \cdot t\,dt \\
&= \frac{x^2-3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz
\end{aligned}$$

b) Ansatz: $\vec{F} = \nabla\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\,x}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial\,y}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial\,z}\Phi \end{bmatrix}$:

(1) $\quad x+2y+4z = \frac{\partial}{\partial\,x}\Phi \qquad (\int dx) \qquad \Longrightarrow \Phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + C_1(y,z).$

(2) $\quad 2x-3y-z = \frac{\partial}{\partial\,y}\Phi = 2x + \frac{\partial}{\partial\,y}C_1 \qquad (-2x,\ \int dy)$

$\Longrightarrow C_1(x,y) = -\frac{3y^2}{2} - yz + C_2(z).$

(3) $\quad 4x-y+2z = \frac{\partial}{\partial\,z}\Phi = 4x + \frac{\partial}{\partial\,z}C_1 = 4x - y + \frac{\partial}{\partial\,z}C_2 \qquad (-4x+y,\ \int dz)$

$\Longrightarrow C_2(z) = z^2 + C_3$

36) $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} y+1 \\ xy \end{bmatrix}$, $\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x} F_2 - \dfrac{\partial}{\partial y} F_1 = y - 1 \neq 0$

$\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -1+2t \\ 0 \end{bmatrix}$ ist gerader Weg von $(-1,0)$ nach $(1,0)$:

$$\int_\Gamma < \vec{F}, d\,\vec{x} >= \int_0^1 < \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} dt >= 2$$

$\Gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi - t)) \\ \sin(\pi - t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$ ist (oberer) Halbkreis von $(-1,0)$ nach $(1,0)$:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma < \vec{F}, d\,\vec{x} > &= \int_0^\pi < \begin{bmatrix} \sin(t)+1 \\ -\cos(t))\sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt > \\
&= \int_0^\pi (\sin(t)^2 + \sin(t) - \sin(t)\cos(t)^2\, dt \\
&= \int_0^\pi (\frac{1-\cos(2t)}{2} + \sin(t) - \sin(t)\cos(t)^2\, dt \\
&= [\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} - \cos(t) + \frac{\cos(t)^3}{3}]_0^\pi \\
&= (\frac{\pi}{2} - 0 + 1 - \frac{1}{3}) - (0 - 0 - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Was passiert, wenn man das Potential trotzdem berechnen will?
Mit Wegintegral:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \int_\Gamma < \vec{F}, d\,\vec{x} >= \int_0^1 < \begin{bmatrix} (ty)+1 \\ (tx)(ty) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt > \\
&= \int_0^1 (txy + x + t^2xy^2)\, dt = \frac{xy}{2} + x + \frac{xy^2}{3}
\end{aligned}$$

und man sieht, dass $\nabla\Phi \neq \vec{F}$ ist.
mit Ansatz:

Ansatz: $\vec{F} = \nabla\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\Phi \end{bmatrix}$:

(1) $\quad y + 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi \; (\int dx) \qquad \Longrightarrow \Phi = xy + x + C_1(y).$

(2) $\quad xy = \dfrac{\partial}{\partial y}\Phi = x + \dfrac{\partial}{\partial y} C_1 \; (\int dy) \qquad \Longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial y} C_1 = xy - x,$

und C_1 hängt verbotenerweise von x ab.

37) Sei $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreis, $\vec{v}(x,y) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{bmatrix}$ ein Vektorfeld.

Es gilt:

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1 + 1 = 2,$$

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + y) - \frac{\partial}{\partial y}(x - 2y) = 2 + 2 = 4 :$$

Somit

$$\int_B \mathrm{rot}\vec{v}\; d(x,y) = 2 \cdot (\text{Fläche von } B) = 4\pi$$

$$\int_B \mathrm{div}\vec{v}\; d(x,y) = \int_B 2\, d(x,y) = 2 \cdot (\text{Fläche von } B) = 2\pi.$$

Berechnung der Kreisfläche B in Polarkoordinaten:

$$B = \{(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \mid r \in [0,1],\ \phi \in [0, 2\pi]\} :$$

$$A = \int_B 1\, dF = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1\, (r\, dr\, d\phi) = \int_0^1 r\, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = [r^2/2]_0^1 \cdot 2\pi = \pi$$

Berechnung der Kreisfläche in kartesischen Koordinaten:

$$B = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\} :$$

$$A = \int_B 1\, dF = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dy\, dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Substitution: $x = \sin(u)$, $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $dx = \cos u\, du$, $\sqrt{1 - x^2} = \cos(u)$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2\, du = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2u) + 1}{2}\, du = [\frac{\sin(2u)}{2} + u]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi$$

38) $\Gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$ ist eine Parametrisierung des Einheitskreises.
Es gilt:

$$d\vec{x} = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt \qquad d\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} dt,$$

wobei $d\vec{n}$ die äußere Normale ist (d.h. der Tangentenvektor gedreht um 90 Grad im Uhrzeigersinn!).

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} < \vec{v}, d\vec{x} > &= \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) \\ 2\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t)\cos(t) + 2\sin(t)^2 + 2\cos(t)^2 + \sin(t)\cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} < \vec{v}, d\vec{n} > &= \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) \\ 2\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(t)^2 - 2\sin(t)\cos(t) + \sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

39) $E = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ sei die Ellipse, deren Rand mittels $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{bmatrix}$ parametrisierbar ist. Das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ erfüllt offenbar $\text{rot}\vec{v} = 1$ und ist die einfachste solche Funktion! Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \int_E 1\, d(x,y) = \int_E (\text{rot}\vec{v})\, d(x,y) = \int_{\partial E} < \vec{v}, d\vec{x} > \\ &= \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} 0 \\ a\cos(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{bmatrix} dt > \int_0^{2\pi} ab\cos(t)^2\, dt = ab \cdot [\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2}]_0^{2\pi} = ab\pi. \end{aligned}$$

40) Direkte Berechnung des Flächeninhaltes durch Integration:

a) mit kartesischen Koordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y^2 = b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

$$E = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a,\ -b\sqrt{1 - x^2/a^2} \leq y \leq b\sqrt{1 - x^2/a^2}\}$$

$$\int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} 1\, dy\, dx = 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - (x/a)^2}\, dx$$

Mit der Substitution $x = a\sin(t),\ dx = a\cos(t)\, dt,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ erhält man daraus

$$2b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - (\frac{a\sin(t)}{a})^2} \cdot a\cos(t)\, dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^2\, dt = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = ab\pi$$

b) Mit elliptischen Koordinaten: $x = ar\cos(\phi),\ y = br\sin(\phi),\ d(x, y) = abr\, dr\, d\phi:$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 \cdot abr\, dr\, d\phi = ab \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^1 r\, dr = ab \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = ab\pi$$