Ü B U N G E N   zu Mathematik 2   SS 2022

Übungsblatt 3:

17) Für die Kurve $[-1,1] \to \mathbb{R}^2$:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \cosh(t) \end{bmatrix}, \ \dot{\vec{X}}(t) = \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{bmatrix}$$

gilt $\|\dot{\vec{X}}(t)\| = \sqrt{1^2 + \sinh(t)^2} = \cosh(t)$ und somit

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{bmatrix} / \cosh(t), \qquad \vec{N} = \begin{bmatrix} -\sinh(t) \\ 1 \end{bmatrix} / \cosh(t)$$

18) Die Länge des Kurvenstücks von $\vec{X}(a)$ nach $\vec{X}(b)$ ist

$$L = \int_a^b \|\dot{\vec{X}}(t)\| \, dt = \int_{-1}^1 \cosh(t) \, dt = [\sinh(t)]_{-1}^1 = 2\sinh(1) = e - \frac{1}{e}.$$

$$s = s(t) = \int_0^t \cosh(t) = [\sinh(t)]_0^t = \sinh(t) \implies t = \operatorname{arsinh}(s)$$

19) Für die Spirale $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \ \dot{\vec{X}}(t) = \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t)) \end{bmatrix})$$

gilt wieder $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + t^2} = \sqrt{1 + t^2}$. Die Länge ab $a = 0$ ist

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{X}}(\tau)\| \, d\tau = \int_0^t \sqrt{1 + \tau^2} \, d\tau$$

$$\tau = \sinh(z)\,, \ z \in [0, \operatorname{arsinh}(t)]\,, \ \sqrt{1 + \tau^2} = \cosh(z)\,, \ d\tau = \cosh(z)\, dz$$

$$= \int_0^{\operatorname{arsinh}(t)} \cosh(z)^2 \, dz = \int_0^{\operatorname{arsinh}(t)} \frac{\cosh(2z) + 1}{2} \, dz$$

$$= [\frac{\sinh(2z)}{4} + \frac{z}{2}]_0^{\operatorname{arsinh}(t)} = \frac{t\sqrt{1 + t^2}}{2} + \frac{\operatorname{arsinh}(t)}{2}$$

Wir benutzten dazu die Identität:

$$\cosh(t)^2 = (\frac{e^t + e^{-t}}{2})^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} + 1) = \frac{1}{2} \cdot (\cosh(2t) + 1)$$

sowie

$$\sinh(2z) = 2\sinh(z)\cosh(z) = 2\sinh(z)\sqrt{1 + \sinh(z)^2}$$

mit $z = \operatorname{arsinh}(t)$: $\sinh(2\operatorname{arsinh}(t)) = 2t\sqrt{1 + t^2}$

20) Für die Astroide gilt:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{bmatrix}, \ \dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 3\cos(t)^2(-\sin(t)) \\ 3\sin(t)^2\cos(t) \end{bmatrix} = 3\sin(t)\cos(t) \cdot \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$|\dot{\vec{X}}| = 3|\sin(t)\cos(t)|$$

Die Länge des ersten Viertels (dort ist sin und cos positiv) ist demnach

$$\int_0^{\pi/2} 3\sin(t)\cos(t)\, dt = \frac{3}{2}\sin(t)^2|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.$$

21) Die Krümmung der Kurve $y = x^3$ berechnen wir als Krümmung der parametrischen Kurve

$$t \mapsto \vec{X}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^3 \end{bmatrix}, \ \dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{bmatrix}, \ \ddot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6t \end{bmatrix}, \ \|\dot{\vec{X}}\| = \sqrt{1+9t^4}$$

Die Krümmung κ erhält man daher als

$$\kappa = \frac{\dot{\vec{X}} \times \ddot{\vec{X}}}{\|\dot{\vec{X}}\|^3} = \frac{6t}{\sqrt{1+9t^4}^3}$$

Das Vorzeichen ändert sich bei $\kappa = 0$, hier $t = 0$. Für $t = 1$ ergibt sich somit

$$\kappa(1) = \frac{6}{\sqrt{10}^3}, \ \dot{\vec{X}}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \vec{T}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} / \sqrt{10}, \ \vec{N}(1) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{10}$$

Der Krümmungkreis in $t = 1$ hat den Radius $1/|\kappa| = \sqrt{10}^3/6$ und den Mittelpunkt

$$\vec{M}(t) = \vec{X}(t) + 1/\kappa(t) \cdot \vec{N}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{10}^3}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{10}{6} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

22) Krümmung der Hyperbel mit Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} a\cosh(t) \\ b\sinh(t) \end{bmatrix}, \ t \in (-\infty, \infty):$$

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} a\sinh(t) \\ b\cosh(t) \end{bmatrix}, \ \ddot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} a\cosh(t) \\ b\sinh(t) \end{bmatrix}, \ \|\dot{\vec{X}}\| = \sqrt{a^2\sinh(t)^2 + b^2\cosh(t)^2}$$

Die Krümmung κ erhält man daher als

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\vec{X}} \times \ddot{\vec{X}}}{\|\dot{\vec{X}}\|^3} = \frac{-ab}{\sqrt{a^2\sinh(t)^2 + b^2\cosh(t)^2}^3}$$

De Krümmungskreis im Scheitelpunkt $t = 0$:

$$t = 0: \ \kappa = \frac{-ab}{b^3} = -\frac{a}{b^2}, \ \vec{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{M}(0) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{b^2}{a} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b^2/a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ü B U N G E N   zu Mathematik 2   SS 2022

23) Ein Massepunkt fährt entlang der Kurve $y = \alpha/2 \cdot x^2$ mit konstanter Geschwindigkeit $v(t) = \|\vec{v}(t)\| \equiv v_0$. Es gilt $\vec{a} = \ddot{\vec{X}} = \dot{v} \cdot \vec{T} + v^2 \kappa \cdot \vec{N}$. Wegen $\dot{v} = 0$ und

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha x \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}}, \ \kappa = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}^3}$$

erhält man

$$\vec{a} = \frac{v_0^2 \alpha}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}^3} \cdot \vec{N},$$

eine reine Zentrifugalbeschleunigung. Der maximale Betrag liegt dort, wo der Nenner minimal ist, d.h. bei $x = 0$ im Scheitelpunkt der Parabel und hat den Wert $v_0^2 \alpha$.

24) Seien $r(t), \phi(t)$ die Polarkoordinaten einer Bewegung $\vec{X}(t)$ im $\mathbb{R}^2$. dann sind die Vektoren

$$\vec{e}_r(t) = \begin{bmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{bmatrix}, \ \vec{e}_\phi(t) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{bmatrix}$$

ein ortoghonales Koordinatensystem, und es gilt

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t))\dot{\phi}(t) \\ \cos(\phi(t))\dot{\phi}(t) \end{bmatrix} = \dot{\phi}(t) \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} = \dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = \begin{bmatrix} -\cos(\phi(t))\dot{\phi}(t) \\ -\sin(\phi(t))\dot{\phi}(t) \end{bmatrix} = -\dot{\phi}(t) \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\phi(t)) \\ -\sin(\phi(t)) \end{bmatrix} = \dot{\phi} \cdot \vec{e}_r.$$

Man differenziert mit der Produktregel, die für alle Arten von Produkten gilt!

$$\begin{aligned}
\vec{X}(t) &= \begin{bmatrix} r(t)\cos(t) \\ r(t)\sin(t) \end{bmatrix} = r \cdot \vec{e}_r \\
\dot{\vec{X}}(t) &= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \cdot e_r + r \cdot (\dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi) = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + (r\dot{\phi}) \cdot \vec{e}_\phi \\
\ddot{\vec{X}}(t) &= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_r + (\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cdot \vec{e}_\phi + r\dot{\phi} \cdot \dot{\vec{e}}_\phi \\
&= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r}\dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi + (\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cdot \vec{e}_\phi - r\dot{\phi}^2 \cdot \vec{e}_r \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cdot \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cdot \vec{e}_\phi
\end{aligned}$$