Ü B U N G E N zu Mathematik 2 SS 2022

Übungsblatt 2:

9) Berechne die Extrema von $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y$ am Einheitskreisrand K. f ist stetig, K ist abgeschlossen und beschränkt, also existieren beide Extrema. K hat keinen Rand, sodass jeder Punkt im Inneren liegt. Jedes Extremum ist also auch ein lokales Extremum und lässt sich mittels Ableitungen berechnen.

a) Mittels Substitution $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$ ist $g(t) = f(x,y) = 1+\cos(t)+\sin(t)$:

$$0 = g'(t) = -\sin(t) + \cos(t) \implies \sin(t) = \cos(t) \implies \tan(t) = 1$$

$\implies t \in \{\pi/4, 5\pi/4\}$

b) Mittels Lagrange: $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ ergibt das Gleichungssystem $\nabla L = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
0 = L_x &= 2x + 1 + 2\lambda x = 2x(1+\lambda) + 1 \implies x = -\frac{1}{1+\lambda} \\
0 = L_y &= 2y + 1 + 2\lambda y = 2y(1+\lambda) + 1 \implies y = -\frac{1}{1+\lambda} = x \\
0 = L_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 \implies 1 = x^2 + x^2 = 2x^2 \implies x = \pm 1/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

c) Geometrisch: Auf K gilt $f(x,y) = 1 + x + y$ und wir nehmen diese einfachere Funktion her. Ihr Extremum sei M: $M = 1 + x + y \implies x + y = M - 1$, also liegt der Punkt (x, y) auf einer Geraden parallel zu $x + y = 0$. M ist extrem, wenn $M - 1$ extrem ist. Wir suchen also den extremen y-Abschnitt aller Geraden $x + y = k$, die den Kreis treffen. Dieser liegt dann vor, wenn die Gerade Tangenten an den Kreis sind. Die Berührungspunkte der 2 Tangenten sind dann die Lösungen (x, y).

10) Es gilt für die elliptische Kurve:

$$y^2 - (x+p)x^2 = t^2(t^2-p)^2 - ((t^2-p)+p)(t^2-p)^2 = t^2(t^2-p)^2 - t^2(t^2-p)^2 = 0$$

11) Mit der Funktion $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$, $\dot{\vec{f}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$

$$\vec{x}(t) = \vec{f}(t),\ \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{f}}(t)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{f}(1-2t^2),\ \dot{\vec{y}}(t) = -4t\dot{\vec{f}}(1-2t^2),$$

$$\vec{z}(t) = \vec{f}(\cos(t)),\ \dot{\vec{z}}(t) = -\sin(t)\dot{\vec{f}}(t)$$

d.h. ihr Graph ist genau der Graph von $\vec{f}(t)$, allerdings ist die Geschwindigkeit unterschiedlich und $\vec{y}$ durchläuft den Graph in umgekehrter Richtung und $\vec{z}$ durchläuft ihn 2 mal. Also sind alle 3 Kurven geometrisch nicht äquivalent.

12) Nur Plots

13) Nur Plots

14) Nulldurchgänge der Zykloide $x = t - 2\sin(t),\ y = 1 - 2\cos(t)$:

$$0 = 1 - 2\cos(t) \implies \cos(t) = \frac{1}{2} \implies t \in \{\pm\pi/3 + 2k\pi\}$$

Horizontale Tangenten $\dot{y} = 0,\ \dot{x} \neq 0$:

$$0 = 2\sin(t) \implies t = k\pi$$

Vertikale Tangenten $\dot{x} = 0,\ \dot{y} \neq 0$:

$$0 = 1 - 2\cos(t) \implies \cos(t) = \frac{1}{2},$$

d.h. in allen Nulldurchgängen.

15) Nur Plots

16) Nulldurchgänge der Kardioide $x = 2\cos(t) + \cos(2t),\ y = 2\sin(t) + \sin(2t)$:

$$0 = 2\sin(t) + \sin(2t) = 2\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 2\sin(t)(1 + \cos(t))$$

$\implies \sin(t) = 0$ oder $\cos(t) = -1 \implies t \in \{0, \pi\}$.
Horizontale Tangenten $\dot{y} = 0,\ \dot{x} \neq 0$:

$$0 = \dot{y} = 2\cos(t) + 2\cos(2t) = 2\cos(t) + 2(2\cos(t)^2 - 1)$$

$\implies 0 = u + 2u^2 - 1$ mit $u = \cos(t)$. Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind $u_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$, was $\cos(t) = -1 \implies t = \pi$ oder $\cos(t) = \frac{1}{2} \implies t = \pm\pi/3$ ergibt. Für $t = \pi$ gilt auch $\dot{x}(\pi) = 0$, weshalb dort keine horizontale (oder vertikale) Tangente ist.
Vertikale Tangenten $\dot{x} = 0,\ \dot{y} \neq 0$:

$$0 = \dot{x} = -2\sin(t) - 2\sin(2t) = -2(\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t))$$

$\implies \sin(t) = 0 \implies t \in \{0, \pi\}$ oder $\cos(t) = -1/2 \implies t = \pm 2/3\pi$. $t = \pi$ entfällt wieder.