Ü B U N G E N   zu Mathematik 2   SS 2022

Übungsblatt 12:

Eine auf $[-P, P]$ periodische Funktion $f(x)$ kann man in eine Fourierreihe entwickeln:

$$f(x) \approx A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\frac{\pi}{P}x) + B_k \sin(k\frac{\pi}{P}x)$$

entwickeln. Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$A_0 = \frac{1}{2P} \int_{-P}^{P} f(x)\, dx,$$
$$A_k = \frac{1}{P} \int_{-P}^{P} f(x) \cos(k\frac{\pi}{P}x)\, dx, \; B_k = \frac{1}{P} \int_{-P}^{P} f(x) \sin(k\frac{\pi}{P}x)\, dx, \quad \text{bei } k >= 1$$

89) Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion $f(x) = x,\ [-\pi, \pi]$ in eine Fourierreihe. Hier gilt $P = \pi$ und die Funktion $f(x)$ ist ungerade, sodass alle $A_k = 0$ sind. Das Integral über $[-\pi, \pi]$ kann man auch als doppeltes Integral über $[0, \pi]$ mittels partieller Integration berechnen:

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} x \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}[-x\frac{\cos(kx)}{k}|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(kx)}{k}\, dx] \\ &= \frac{2}{\pi}[-\pi\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}|_0^{\pi}] = -2\frac{\cos(k\pi)}{k} = -2\frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2}{1}\sin(t) - \frac{2}{2}\sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) - \frac{2}{4}\sin(4t) + \ldots$$

$f(x)$ ist eine Sägezahnfunktion und unstetig. Daher gibt es an den Periodengrenzen nahezu konstante Überschwinger der Fourierreihen (Gibb'sches Phänomen).

90) Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion $f(x) = |x|,\ [-\pi, \pi]$ in eine Fourierreihe. Hier gilt $P = \pi$ und die Funktion $f(x)$ ist gerade, sodass alle $B_k = 0$ sind. Das Integral über $[-\pi, \pi]$ kann man auch als doppeltes Integral über $[0, \pi]$ mittels partieller Integration berechnen:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^\pi x\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^\pi x \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}[x \frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k}\, dx]$$

$$= \frac{2}{\pi}[\frac{\cos(kx)}{k^2}\Big|_0^\pi] = \frac{2}{\pi k^2} \cdot [(-1)^k - 1] = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi k^2} \text{ für ungerades } k. \\ 0 \text{ für gerades } k. \end{cases}$$

91) Wir stellen die Lösung durch eine allgemeine Fourierreihe dar und entwickeln auch die rechte Seite in eine Fourierreihe (sie ist es eigentlich schon!). Die linke Seite:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \implies$$

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k k^2 \cos(kt) - B_k k^2 \sin(kt)) + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1-k^2) \cos(kt) + B_k(1-k^2) \sin(kt))$$

Die Fourierreihe auf der rechten Seite hat genau 2 Terme. Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$A_0 = 0,\ A_2(1-2^2) = 1,\ A_4(1-4^2) = 1,\ A_k(1-k^2) = B_k(1-k^2) = 0 \text{ sonst} \implies$$

$$A_2 = -\frac{1}{3},\ A_4 = -\frac{1}{15},\ A_1 \cdot 0 = 0,\ B_1 \cdot 0 = 0,\ A_k = B_k = 0 \text{ sonst.}$$

Wir haben damit alle Koeffizienten außer A_1 und B_1 berechnet und die Lösung ist

$$x(t) = A_1 \cos(t) + B_1 \sin(t) - \frac{1}{3} \cos(2t) - \frac{1}{15} \cos(4t)$$

Alternativ kann man mit der Fourierreihe auch nur eine spezielle Lösung berechnen und die allegemeine homogenen Lösung dazuaddieren.

92) Wir stellen Die Lösung durch eine allgemeine Fourierreihe (keine Fouriersinusreihe wie in der Angabe) dar und entwickeln auch die rechte Seite in eine Fourier(sinus)reihe (sie ist es eigentlich schon!). Die linke Seite:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \implies$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k k^2 \cos(kt) - B_k k^2 \sin(kt)) + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1-k^2)\cos(kt) + B_k(1-k^2)\sin(kt)) \end{aligned}$$

Die Fourierreihe auf der rechten Seite hat genau 2 Terme. Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} &A_0 = 0,\ A_1 \cdot 0 = 0,\ A_k(1-k^2) = 0 \implies A_k = 0 \text{ für } k > 1 \\ &B_1 \cdot 0 = 0,\ B_3(1-3^2) = 1,\ B_5(1-5^2) = 1,\ B_k(1-k^2) = 0 \text{ sonst} \implies \\ &B_3 = -\frac{1}{8},\ B_5 = -\frac{1}{24},\ B_1 \cdot 0 = 0, B_k = 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Wir haben damit alle Koeffizienten außer A_1 , B_1 berechnet und die Lösung ist

$$x(t) = A_1 \cos(t) + B_1 \sin(t) - \frac{1}{8}\sin(3t) - \frac{1}{24}\sin(5t)$$

93) Die rechte Seite haben wir bereits in Aufgabe 98 in eine Fourierreihe entwickelt. Wir rechnen analog zu 99):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2x &= [\sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 A_k \cos(kt) - k^2 B_k \sin(kt))] + 2[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))] \\ &= 2A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(2-k^2)A_k \cos(kt) + (2-k^2)B_k \sin(kt)] \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1,\ k \text{ ungerade}}^{\infty} -\frac{4}{\pi k^2}\cos(kx)\end{aligned}$$

woraus $B_k = 0$, $A_0 = \frac{\pi}{4}$, $A_k = 0$ für gerade k und $A_k = \frac{4}{\pi k^2(k^2-2)}$ für ungerade k folgt:

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\cos(t) + \frac{4}{63\pi}\cos(3t) + \frac{4}{575\pi}\cos(5t) + \ldots$$

94) Wir rechnen analog zu 99):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = {} & [\sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 A_k \cos(kt) - k^2 B_k \sin(kt))] \\ & + 4[\sum_{k=1}^{\infty}(-kA_k \sin(kt) + kB_k \cos(kt))] \\ & + 5[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))] \\ = {} & 5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[((-k^2+5)A_k + 4kB_k)\cos(kt) + ((-k^2+5)B_k - 4kA_k)\sin(kt)] \\ = {} & \cos(2t).\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert alle Koeffizienten, da für $k >= 1$ das Gleichungssystem

$$(-k^2+5)A_k + 4kB_k = ?, \; -4kA_k + (-k^2+5)B_k = ?$$

eindeutig nach A_k, B_k auflösbar ist (die Determinante ist $(-k^2+5)^2 + 16k^2 > 0$). Alle Koeffizienten sind demnach 0 außer A_2 und B_2 :

$$A_2 + 8B_2 = 1, \; -8A_2 + B_2 = 0 \implies A_2 = \frac{1}{65}, \; B_2 = \frac{8}{65}$$

Die Lösung ist somit

$$x = \frac{1}{65}\cos(2t) + \frac{8}{65}\sin(2t) = \frac{1}{\sqrt{65}}\cos(2t - \arctan(8))$$

95) Zuerst brauchen wir die Fourierreihe der rechten Seite, die leider weder gerade noch ungerade ist.

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi dx = \frac{1}{2}$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}[\frac{\sin(kx)}{k}]_0^\pi = 0$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(kx)}{k}]_0^\pi = \frac{1-(-1)^k}{\pi k} = \begin{cases} \frac{2}{\pi k} \text{ für ungerade } k \\ 0 \text{ für gerade } k \end{cases}$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Identität $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(x)+\frac{1}{2}$ auszunutzen und die Signumsfunktion in eine Fouriersinusreihe zu entwickeln:

$$B_k = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^\pi \sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}[-\frac{\cos(kx)}{k}]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k},$$

woraus man natürlich zu denselben Fourierkoeffizienten von $f(x)$ kommt. Wir rechnen jetzt analog zu vorher:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{1}{4}x = &[\sum_{k=1}^\infty(-k^2 A_k\cos(kt) - k^2 B_k\sin(kt))] \\ &+ \frac{1}{4}[A_0 + \sum_{k=1}^\infty(A_k\cos(kt) + B_k\sin(kt))] \\ = &\frac{1}{4}A_0 + \sum_{k=1}^\infty[(-k^2+\frac{1}{4})A_k\cos(kt) + (-k^2+\frac{1}{4})B_k\sin(kt)] \\ = &f(t).\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert alle Koeffizienten $A_0 = 2$, $A_k = 0$ für $k >= 1$, $B_k = 0$ für k gerade, $B_k = \frac{2}{\pi k(1/4-k^2)}$ für k ungerade.

$$x = 2 + \sum_{k=1,\ k \text{ ungerade}}^\infty \frac{2}{\pi k(1/4-k^2)}\sin(kt) = 2 - \frac{8}{3\pi}\sin(t) - \frac{8}{105\pi}\sin(3t) + \ldots$$

96) Für die Torsionsfunktion

$$u(x,y) = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)G\vartheta$$

gilt

$$\Delta u = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2})G\vartheta = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}(\frac{2b^2+2a^2}{a^2b^2})G\vartheta = -2G\vartheta$$