Übungsblatt 11:

81) Die Koppelschwingungen ergeben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) \\ m_3\ddot{x}_3 &= -k_3(x_3 - x_2) - k_4x_3 \end{aligned}$$

Hier

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2x_1 + (x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \\ \ddot{x}_3 &= -(x_3 - x_2) - 2x_3 \end{aligned} \implies \ddot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Die Eigenwerte sind

$$\det(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}) = (-3-\lambda)^2(-2-\lambda) - 2(-3-\lambda)$$

$\lambda = -3$ oder $(-3-\lambda)(-2-\lambda) - 2 = 0 \implies \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$, insgesamt $\lambda \in \{-4, -3, -1\}$. Dazu berechnet man noch die Eigenvektoren

$$\lambda_1 = -4: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_1 = \vec{0} \implies \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_2 = \vec{0} \implies \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1: \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_3 = \vec{0} \implies \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Mit den Eigenwerten und Eigenvektoren macht man nun den Ansatz

$$\vec{x} = u_i(t) \cdot \vec{v}_i \ (i = 1, 2, 3) \implies \ddot{u}_i = \lambda_i u_i \implies u_i = d_1 \cos(\sqrt{-\lambda_i}t) + d_2 \sin(\sqrt{-\lambda_i}t).$$

Daraus bekommt man die allgemeine Lösung $\vec{x} =$

$$(a_1 \cos(2t) + a_2 \sin(2t)) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b_1 \cos(\sqrt{3}t) + b_2 \sin(\sqrt{3}t)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

82) Wir berechnen e^{tA} mit der Potenzreihe $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n$. Im ersten Fall ist tA eine Diagonalmatrix und es werden daher nur die Diagonalelemente potenziert:

$$(tA)^2 = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2t)^2 & 0 \\ 0 & (-t)^2 \end{bmatrix}$$

usw. Man erhält daher

$$(tA)^n = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (2t)^n & 0 \\ 0 & (-t)^n \end{bmatrix}.$$

Setzt man das in die Reihe ein:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n/(n!) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} (2t)^n & 0 \\ 0 & (-t)^n \end{bmatrix} /(n!) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{n} (2t)^n/n! & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{n} (-t)^n/n! \end{bmatrix} \qquad . \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Im zweiten Fall ist $A^2 = A^3 = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, was daher auch für tA gilt:

$$e^{tA} = I + (tA) + \frac{1}{2}(tA)^2 + \frac{1}{6}(tA)^3 + \cdots = I + (tA) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

83) a) Wir lösen das inhomogene System mit der Formel

$$\vec{x}(t) = e^{tA} \cdot \vec{x}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \cdot \vec{h}(\tau)\, d\tau :$$

Im 1. Fall:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ te^{-t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Im 2. Fall:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-\tau & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{-\tau} \end{bmatrix} \Big|_0^t = \begin{bmatrix} 1 \\ t+1-e^{-t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

84) Das Anfangswertproblem $\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t),\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0$ hat die Lösung $\vec{x}(t) = e^{tA} \cdot \vec{x}_0$.
Man sieht:

$$(tA)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix}$$

$$(tA)^3 = \begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

$$(tA)^4 = \begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{bmatrix}$$

$$\ldots$$

In beiden Diagonalelementen stehen dieselben Potenzreihen

$$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \pm \cdots = \cos(t).$$

In der Nebendiagonale steht unten

$$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots = \sin(t)$$

und oben die negative Variante. Man erhält somit

$$A = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Alternativ diagonalisiert man die Matrix tA :

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -t \\ t & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + t^2 \implies \lambda = \pm it$$

$$\lambda_1 = it : \begin{bmatrix} -it & -t \\ t & -it \end{bmatrix} \cdot v_1 = \vec{0} \implies \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -it : \begin{bmatrix} it & -t \\ t & it \end{bmatrix} \cdot v_2 = \vec{0} \implies \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Die Transfomationsmatrix ist

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \qquad F^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Aus $F^{-1} \cdot A \cdot F = \Lambda$ folgt $A = F \cdot \Lambda \cdot F^{-1}$ und $e^A = F \cdot e^\Lambda \cdot F^{-1}$:

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ -ie^{it} & ie^{-it} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} ie^{it} + ie^{-it} & -e^{it} + e^{-it} \\ e^{it} - e^{-it} & ie^{it} + ie^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix}$$

85) Wir diagonalisieren die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 \implies \lambda \in \{0, 2\}$$

$$\lambda_1 = 0: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot v_1 = \vec{0} \implies \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot v_2 = \vec{0} \implies \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}_1^{\perp}$$

Die nicht-orthogonale Transformationsmatrix F (da nicht normiert) ist daher

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{2t} & -1 + e^{2t} \\ -1 + e^{2t} & 1 + e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Die allgemeine Lösung ist $e^{tA} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

86) Mit der Lösungsformel:

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+e^{2t} & -1+e^{2t} \\ -1+e^{2t} & 1+e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+e^{2(t-\tau)} & -1+e^{2(t-\tau)} \\ -1+e^{2(t-\tau)} & 1+e^{2(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2\tau} \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+e^{2t} \\ 1+e^{2t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{2\tau}+e^{2t} \\ -e^{2\tau}+e^{2t} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+e^{2t} \\ 1+e^{2t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2\tau}/2+\tau e^{2t} \\ -e^{2\tau}/2+\tau e^{2t} \end{bmatrix} \Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+e^{2t} \\ 1+e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (e^{2t}-1)/4+te^{2t}/2 \\ (-e^{2t}+1)/4+te^{2t}/2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{t}{2}e^{2t} \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{t}{2}e^{2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

87) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ erhält man

$$\begin{aligned}
(tA)^2 &= \begin{bmatrix} t & 2t \\ 0 & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t & 2t \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & 4t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \\
(tA)^3 &= \begin{bmatrix} t^2 & 4t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t & 2t \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 6t^3 \\ 0 & t^3 \end{bmatrix} \\
(tA)^4 &= \begin{bmatrix} t^3 & 6t^3 \\ 0 & t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t & 2t \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^4 & 8t^4 \\ 0 & t^4 \end{bmatrix}, \\
&\dots \\
(tA)^n &= \begin{bmatrix} t^n & 2nt^n \\ 0 & t^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

woraus man

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nt^n}{n!} \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

folgert. Die unbekannte Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nt^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nt^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^n}{(n-1)!} = 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 2te^t.$$

Die Lösung ist daher

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

88) Wir berechnen die Potenzen von tA

$$(tA)^2 = \begin{bmatrix} 0 & t & 2t \\ 0 & 0 & 3t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & t & 2t \\ 0 & 0 & 3t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(tA)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & t & 2t \\ 0 & 0 & 3t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\ldots$$

woraus man

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t + 3/2t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bekommt. Mit der Lösungsformel erhält man

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t + 3/2t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{0} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau & 2(t-\tau) + 3/2(t-\tau)^2 \\ 0 & 1 & 3(t-\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ -1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} t\tau - \tau^2 - 2t + 2\tau - 3/2(t-\tau)^2 \\ \tau - 3(t-\tau) \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3/2 - t^3/3 - 2t^2 + t^2 - t^3/2 \\ t^2/2 - 3/2t^2 \\ -t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -t^3/3 - t^2 \\ -t^2 \\ -t \end{bmatrix}$$