Übungsblatt 11:

73) Für die Durchbiegung eines Balkens gelten die Formeln $EIw''(x) = -M(x)$ und $M''(x) = -F(x)$. Für die Dreieckslast $F(x) = -\frac{q}{\ell}x$ gilt bei einem gelenkig gelagerten Träger $M(0) = M(\ell) = 0$, somit

$$M(x) = \frac{q}{6\ell}x^3 + c_1x + c_2 \implies 0 = c_2,\ 0 = \frac{q}{6\ell}\ell^3 + c_1\ell \implies c_1 = -\frac{q}{6}\ell.$$

Das Moment $M(x) = \frac{q}{6\ell}x^3 - \frac{q\ell}{6}x$ erzeugt die Durchbiegung

$$EIw(x) = -\frac{q}{120\ell}x^5 + \frac{q\ell}{36}x^3 + c_1x + c_2,\ 0 = w(0) = c_2,\ 0 = w(\ell) = -\frac{q}{120}\ell^4 + \frac{q}{36}\ell^4 + c_1\ell$$

Man erhält

$$c_1\ell = (\frac{1}{120} - \frac{1}{36})q\ell^4 = -\frac{7}{360}q\ell^4 \implies c_1 = -\frac{7}{360}q\ell^3.$$

Die Durchbiegung ist daher

$$EIw(x) = -\frac{q}{120\ell}x^5 + \frac{q\ell}{36}x^3 - \frac{7q\ell^3}{360}x$$

74) Für eine Gleichlast $F(x) = -q$ gilt bei einem beidseitig eingespannten Träger

$$EIw''''(x) = F = -q,\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0,\ w(\ell) = 0,\ w'(\ell) = 0$$

Man erhält

$$EIw(x) = -\frac{q}{24}x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

Die Nebenbedingungen sind

$$c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ -\frac{q}{24}\ell^4 + c_3\ell^3 + c_2\ell^2 = 0,\ -\frac{q}{6}\ell^3 + 3c_3\ell^2 + 2c_2\ell = 0$$

Das Gleichungssystem für c_3 un d c_2 lautet

$$\begin{aligned} c_3\ell + c_2 &= \frac{q}{24}\ell^2 \\ 3c_3\ell + 2c_2 &= \frac{q}{6}\ell^2 \end{aligned} \implies c_3 = \frac{q\ell}{12},\ c_2 = -\frac{q\ell^2}{24}$$

Die Durchbiegung ist daher

$$EIw(x) = -\frac{q}{24}x^4 + \frac{q\ell}{12}x^3 - \frac{q\ell^2}{24}x^2 = -\frac{qx^2}{24}(x^2 - 2x\ell + \ell^2) = -\frac{qx^2(x-\ell)^2}{24}$$

75) $w''''(x) + 4w(x) = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^4 + 4$ mit den Nullstellen $\pm 1 \pm i$. Denn $\lambda^4 = -4 \implies \lambda^2 = \pm 2i$. Für die erste Gleichung $\lambda^2 = 2i$ kann man den Ansatz $\lambda = u + iv$ machen und erhält:

$$\lambda^2 = (u+iv)^2 = (u^2 - v^2) + 2uvi = 2i \implies u^2 - v^2 = 0,\ 2uv = 2$$

Aus der 2. Gleichung folgt $v = \frac{1}{u}$ und das in die erste eingesetzt liefert $u^2 - \frac{1}{u^2} = 0$ oder $u^4 = 1$. Mithin ist $u = \pm 1$ und die 2 Lösungen sind $1 + i$ und $-1 - i$. Die 2. Gleichung liefert die anderen beiden Nullstellen! Mithin:

$$x_h(t) = e^{-t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) + e^t(d_1 \cos(t) + d_2 \sin(t)).$$

Eine partikuläre Lösung finden wir mit dem Ansatz $x_p(t) = c \implies c = \frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{1}{4} + e^{-t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) + e^t(d_1 \cos(t) + d_2 \sin(t))$$

mit der Ableitung

$$e^{-t}(-c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t) - c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)) + e^t(d_1 \cos(t) + d_2 \sin(t) - d_1 \sin(t) + d_2 \cos(t)).$$

Das Einsetzen der Randbedingungen liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{4} + c_1 + d_1 \\
0 &= \frac{1}{4} + e^{-\pi}(-c_1) + e^{\pi}(-d_1) \\
0 &= -c_1 + c_2 + d_1 + d_2 \\
0 &= e^{-\pi}(c_1 - c_2) + e^{\pi}(-d_1 - d_2)
\end{aligned}$$

Das muss man jetzt 'nur' noch lösen! Immerhin kann man aus den ersten beiden Gleichungen c_1 und d_1 ausrechnen. Die 3. und 4. Gleichung kann man umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
c_1 - c_2 &= d_1 + d_2 \\
c_1 - c_2 &= e^{2\pi}(d_1 + d_2),
\end{aligned}$$

woraus sofort $c_1 - c_2 = 0$ und $d_1 + d_2 = 0$, d.h. $c_2 = c_1$ und $d_2 = -d_1$ folgt.

76) Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 10-\lambda & -6 \\ -6 & 10-\lambda \end{bmatrix} = (10-\lambda)^2 - 6^2$$

mit den Nullstellen $(10-\lambda)^2 - 6^2 = 0 \implies (10-\lambda) = \pm 6 \implies \lambda \in \{4, 16\}$.

$$\lambda = 4 \implies \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \cdot v = \vec{0} \implies v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda = 16 \implies \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \cdot v = \vec{0} \implies v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = u(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies (\ddot{u}(t) + 4u(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0} \implies \ddot{u}(t) - 4u(t) = 0$$

$$\vec{x}(t) = v(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies (\ddot{v}(t) + 16v(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{0} \implies \ddot{v}(t) + 16v(t) = 0$$

Daraus gewinnt man die allgmeine Lösung

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (d_1 \cos(4t) + d_2 \sin(4t)) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Die Anfangsbedingungen lauten nun

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies c_1 + d_1 = 1,\ c_1 - d_1 = 1 \implies c_1 = d_1 = 1$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4d_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies 2c_2 + 4d_2 = 0,\ 2c_2 - 4d_2 = 0 \implies c_2 = d_2 = 0$$

mit den Lösungen $x(t) = y(t) = \cos(2t)$.

77) Die Koppelschwingungen ergeben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned}$$

Hier

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -8x_1 + 3(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -3(x_2 - x_1) \end{aligned} \implies \ddot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Die Eigenwerte sind

$$\det\left(\begin{bmatrix} -11-\lambda & 3 \\ 3 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-11-\lambda)(-3-\lambda) - 9 = \lambda^2 + 14\lambda + 24$$

$\lambda = -7 \pm \sqrt{49-24} = -7 \pm 5 \implies \lambda \in \{-12, -2\}$. Dazu berechnet man noch die Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -12: \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_1 = \vec{0} &\implies \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -2: \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_2 = \vec{0} &\implies \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{v}_1^{\perp} \end{aligned}$$

Mit den Eigenwerten und Eigenvektoren macht man nun den Ansatz

$$\vec{x} = u_i(t) \cdot \vec{v}_i \ (i = 1, 2) \implies \ddot{u}_i = \lambda_i u_i \implies u_i = d_1 \cos(\sqrt{-\lambda_i} t) + d_2 \sin(\sqrt{-\lambda_i} t).$$

Daraus bekommt man die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = (a_1 \cos(\sqrt{12}t) + a_2 \sin(\sqrt{12}t)) \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + (b_1 \cos(\sqrt{2}t) + b_2 \sin(\sqrt{2}t)) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

78) Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1$$

mit den Nullstellen $(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies (1-\lambda) = \pm 1 \implies \lambda \in \{0, 2\}$.

$$\lambda = 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot v = \vec{0} \implies v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda = 2 \implies \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot v = \vec{0} \implies v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Wir machen wieder den Ansatz $\vec{x}(t) = u_i(t) \cdot \vec{v}_i$ und erhalten die 2 Gleichungen $\ddot{u}_i + \lambda_i u_i = 0$ mit den Lösungen $u_1 = c_1 + c_2 t$ und $u_2 = d_1 \cos(\sqrt{2}t) + d_2 \sin(\sqrt{2}t)$. Die allgemeine Lösung ist demnach

$$\vec{x}(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (d_1 \cos(\sqrt{2}t) + d_2 \sin(\sqrt{2}t)) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

79) Die gesuchte orthogonale Matrix F (also $I = F \cdot F^T$!)mit $F^T \cdot A \cdot F = \Lambda$ ist $F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Multipliziert man $\vec{f} = \ddot{\vec{x}} + A \cdot \vec{x}$ von links mit F^T, so erhält man

$$\begin{aligned} F^T \cdot \vec{f} &= F^T \cdot \ddot{\vec{x}} + F^T A \cdot \vec{x} = F^T \cdot \ddot{\vec{x}} + (F^T A) \cdot (F F^T) \cdot \vec{x} \\ &= F^T \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} + (F^T A F) \cdot (F^T \cdot \vec{x}) = \frac{d^2}{dt^2} (F^T \cdot \vec{x}) + \Lambda \cdot (F^T \cdot \vec{x}) \\ &= \ddot{\vec{y}} + \Lambda \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

mit $\vec{y} = F^T \vec{x}$. Das System bezüglich $\vec{y}$ ist entkoppelt und lautet:

$$\ddot{\vec{y}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{y} = F^T \cdot \vec{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da wir in der vorigen Übung bereits die homogene Lösung berechnet haben, bräuchten wir eigentlich nur die partikuläre Lösung auszurechnen.

$$\ddot{y}_1 = \sqrt{2} \sin(t) \implies y_1(t) = c_1 + c_2 t - \sqrt{2} \sin(t)$$

$$\ddot{y}_2 + 2y_2 = 0 \implies y_2(t) = d_1 \cos(\sqrt{2}t) + d_2 \sin(\sqrt{2}t)$$

Die allgemeine Lösung für $\vec{y}$ ist demnach

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \sin(t) + c_1 + c_2 t \\ d_1 \cos(\sqrt{2}t) + d_2 \sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix},$$

woraus man mit $\vec{x} = F \cdot \vec{y}$ die Lösung für $\vec{x}$ erhält!

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \sin(t) + c_1 + c_2 t \\ d_1 \cos(\sqrt{2}t) + d_2 \sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \sin(t) + c_1 + c_2 t + d_1 \cos(\sqrt{2}t) + d_2 \sin(\sqrt{2}t)) \\ -\sqrt{2} \sin(t) + c_1 + c_2 t - d_1 \cos(\sqrt{2}t) - d_2 \sin(\sqrt{2}t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(t) + c_1' + c_2' t + d_1' \cos(\sqrt{2}t) + d_2' \sin(\sqrt{2}t)) \\ -\sin(t) + c_1' + c_2' t - d_1' \cos(\sqrt{2}t) - d_2' \sin(\sqrt{2}t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

80)

$$\ddot{\vec{x}} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vec{x}} + \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

lässt sich entkoppeln (im Allgemeinen lässt sich so ein System nicht entkoppeln!), weil beide Matrizen dieselben Eigenvektoren und damit dieselbe diagonalisierende Matrix F haben:

$$\frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind offenbar $\frac{6}{5}$ und 0. Für $y = F^T \cdot \vec{x}$ ergibt sich wie vorhin folgendes entkoppeltes System:

$$\ddot{\vec{y}} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\vec{y}} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die 1. Gleichung $\ddot{y}_1 + \frac{6}{5}\dot{y}_1 + 4y_1 = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \frac{6}{5}\lambda + 4$ mit den Nullstellen $-\frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{91}}{5} i$ und damit die Lösung

$$y_1 = e^{-\frac{3}{5}t}[c_1 \cos(\sqrt{91}t) + c_2 \sin(\sqrt{91}t)].$$

Die 2. Gleichung $\ddot{y}_2 + 16y_2 = 0$ hat die Lösung $y_2 = (d_1 \cos(4t) + d_2 \sin(4t))$. Daraus erhält man wieder die Lösungen für $\vec{x}$: $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$.