Ü B U N G E N zu Mathematik 2 SS 2022

Übungsblatt 1:

1) a)

$$
\begin{aligned}
<\vec{b},\vec{x}>=0 &\iff b_i x_i = 0 \\
A\cdot\vec{x}=\vec{b} &\iff a_{ij}x_j = b_i \\
A+B\cdot C = D &\iff a_{ij} + a_{ik}c_{kj} = d_{ij} \\
A\cdot B\cdot C = D &\iff a_{ik}b_{kl}c_{lj} = d_{ij}
\end{aligned}
$$

b) Nur die Matrix-Gleichung:

$$c_{ij} + a_{ik}b_{kj} = d_{ki}e_{kj} \iff C + A\cdot B = D^T\cdot E$$

2) Ein Tensor ist eine lineare Abbildung der quadratischen Matrizen auf sich selbst: $F:[A_{ij}]\mapsto[B_{kl}]$ und F_{ijkl} ist der Eintragsanteil von A_{ij} in B_{kl}, somit gilt $B_{kl} = F_{ijkl}A_{ij}$.

a) Am einfachsten ermittelt man die Komponenten der Identität und der Transposition getrennt. Zuerst die Identität $I(A)=A$: A_{ij} wirkt sich genau auf jenes B_{kl} aus (dann mit Faktor 1), wenn $(i,j)=(k,l)$ gilt, d.h. $I_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$.
Die Transposition $T(A)=A^T$: A_{ij} wirkt sich genau auf jenes B_{kl} aus (dann mit Faktor 1), wenn $(i,j)=(l,k)$ gilt, d.h. $T_{ijkl}=\delta_{il}\delta_{jk}$.
Somit gilt $C_{ijkl}=(I_{ijkl}-T_{ijkl})/2=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})/2$:

b) Wir berechnen die 16 Koeffizienten einzeln:

$$
\begin{aligned}
C_{ijkk} &= (\delta_{ik}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jk})/2 = 0 \\
C_{ij12} &= (\delta_{i1}\delta_{j2}-\delta_{i2}\delta_{j1})/2 \implies C_{1212}=\frac{1}{2},\ C_{2112}=-\frac{1}{2} \\
C_{ij21} &= (\delta_{i2}\delta_{j1}-\delta_{i1}\delta_{j2})/2 \implies C_{2121}=\frac{1}{2},\ C_{1221}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

und alle restlichen Komponenten sind 0:

$$
\begin{aligned}
C(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}) &= \begin{bmatrix} 0 & C_{1212}B_{12}+C_{2112}B_{21} \\ C_{1221}B_{12}+C_{2121}B_{21} & 0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(-1)-\frac{1}{2}3 \\ -\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3) a) Eigenwerte und Eigenvektoren von $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$:

$$\chi = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \implies \lambda \in \{2,3\}$$

$$\lambda_1 = 2: \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{f}_1 = \vec{0} \implies \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3: \qquad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{f}_2 = \vec{0} \implies \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Mit der Transformationsmatrix $F = [\vec{f}_1 \;\; \vec{f}_2]$ und der Diagonalmatrix $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ gilt $\Lambda = F^{-1} \cdot A \cdot F \implies A = F \cdot \Lambda \cdot F^{-1}$, woraus folgt

$$\begin{aligned} A^2 &= F \cdot \Lambda \cdot F^{-1} \cdot F \cdot \Lambda \cdot F^{-1} = F \cdot \Lambda^2 \cdot F^{-1} \\ A^3 &= F \cdot \Lambda^2 \cdot F^{-1} \cdot F \cdot \Lambda \cdot F^{-1} = F \cdot \Lambda^3 \cdot F^{-1} \\ &\dots \\ A^n &= F \cdot \Lambda^n \cdot F^{-1} \end{aligned}$$

Die Potenzen der Diagonalmatrix Λ sind Diagonalmatrizen der Potenzen der Eigenwerte, also leicht zu berechnen:

$$A^5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 32 & -32 \\ -243 & 486 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -179 & 422 \\ -211 & 454 \end{bmatrix}$$

4) Alle 3 Matrizen $A - \lambda I$, $B - \lambda I$, $C - \lambda I$ sind obere Dreiecksmatrizen, also sind deren Determinanten das Produkt der Diagonalelemente:

$$\chi = (1-\lambda)^3 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

und die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist jedes mal 3. Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraums, d.h. die Dimension des Nullraums von $A - I$, also $3 - \text{Rang}(A - I)$.

$$(A-I) = 0 \implies \text{Rang}(A-I) = 0,\ \vec{f} \in \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \}$$

$$(B-I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{Rang}(B-I) = 1,\ \vec{f} \in \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

$$(C-I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{Rang}(C-I) = 2,\ \vec{f} \in \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

Also ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 1$ bei A 3, bei B 2 und bei C 1.

5) a) Eigenwerte und Eigenvektoren der symmetrischen Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\chi = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4^2 \implies 1 - \lambda = \pm 4 \implies \lambda \in \{-3, 5\}$$

$$\lambda_1 = -3: \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{f_1} = \vec{0} \implies \vec{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5: \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \vec{f_2} = \vec{0} \implies \vec{f_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Mit der Transformationsmatrix aus den normierten Eigenvektoren

$$F = [\frac{\vec{f_1}}{\|\vec{f_1}\|}\ \frac{\vec{f_2}}{\|\vec{f_2}\|}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

und der Diagonalmatrix aus den Eigenwerten $A' = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ gilt $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F = F^T \cdot A \cdot F.$, Die Eigenwerte von A' sind ebenfalls -3, 5 und die Eigenvektoren sind die Standardbasisvektoren.

6) a) Wir berechnen die Eigenwerte der symmetrischen Matrix A:

$$\chi = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)((5-\lambda)^2 - 3^2)$$

$\Longrightarrow \lambda \in \{2, 4, 8\}$. Da alle positiv sind, ist A positiv definit!

b) Wir berechnen die Teildeterminanten:

$$\det[5] = 5, \ \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 20, \ \det \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5- \end{bmatrix} = 64.$$

Da alle positiv sind, ist A positiv definit!

7) Wir schreiben die Quadrik in Matrix-Form

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 = 1 \iff [\,x \quad y\,] \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

und berechnen die Eigenwerte

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda = 5 \pm 1,\ \lambda \in \{6, 4\}$$

und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 6: \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{f_1} = \vec{0} \implies \vec{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{2},\ \vec{f_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{2}.$$

Die Matrix $F = [\vec{f_1}\ \vec{f_2}]$ aus den Eigenvektoren ist orthogonal ($F^T \cdot F = I$) und die Basistransformation transformiert A in

$$A' = F^{-1} \cdot A \cdot F = F^T \cdot A \cdot F = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sind x', y' die Koordinaten eines Vektors bez. der Basis F, so gilt bekanntlich

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = F^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

und damit:

$$1 = [\,x \quad y\,] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\,x' \quad y'\,] \cdot (F^T \cdot A \cdot F) \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 6x'^2 + 4y'^2$$

Die Eigenvektoren F sind damit die Hauptachsenrichtungen und die Hauptachsenlängen sind $\sqrt{1/6}$ und $\sqrt{1/4} = 1/2$, es ist somit eine Ellipse. Einen Maple-Plot erstellt man mittels

```
with(plots);
implicitplot(5*x^2+2*x*y+5*y^2=1, x= -2..2, y=-2..2);
```

8) Wir schreiben die Quadrik in Matrix-Form

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1 \iff [\,x \quad y\,] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

und berechnen die Eigenverte

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0 \implies \lambda = 2 \pm 3,\ \lambda \in \{5, -1\}$$

und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 5: \qquad \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{f_1} = \vec{0} \implies \vec{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{2},\ \vec{f_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{2}.$$

Die Matrix $F = [\vec{f_1}\ \vec{f_2}]$ aus den Eigenvektoren entspricht den Hauptachsenrichtungen. Es handelt sich diesmal um eine Hyperbel ($\lambda_2 = -1$), die Hauptachsenlängen sind $\sqrt{1/5}$ und 1 .